Analiza na mnogoterostih

Pavle Saksida
Oddelek za matematiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Junij 2007

1 Tangentni prostor in odvod preslikave

Naj bo

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

neka zvezna preslikava. Spomnimo se definicije odvoda preslikave F. Linearna preslikava

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

je odvod preslikave F v točki $m \in \mathbb{R}^n$, če imamo

$$F(m+h) = F(m) + A \cdot h + \mathcal{O}(m,h)$$

in velja

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\mathcal{O}(m,h)\|_m}{\|h\|_n} = 0,$$

pri čemer imamo v števcu normo na $\mathbb{R}^n$, v imenovalcu pa normo na $\mathbb{R}^m$. Odvod preslikave F v izbrani točki m je torej tista linearna preslikava, ki preslikavo F v okolici točke m najbolje aproksimira. Preslikava je torej v neki točki odvedljiva, če se jo tam da dobro aproksimirati z linearno preslikavo.

Zdaj bi radi konstruirali smiseln pojem odvoda preslikave med dvema gladkima mnogoterostma. Prvi problem, na katerega naletimo je ta, da med mnogoterostma (oziroma med okolicama para točk v dveh mnogoterostih) v splošnem nimamo linearnih preslikav. Zato bomo najprej morali poiskati tak vektorski prostor, ki v okolici izbrane točke mnogoterosti to mnogoterost v nekem natančno določenem smislu aproksimira. Ta prostor se bo imenoval tangentni prostor.

1.1 Tangentni prostor

Naj bo najprej $V \subset \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica in $p \in V$.

Definicija 1 *Tangentni prostor T_pV mnogoterosti V v točki $p \in V$ je množica tangent vseh krivulj, ki gredo skozi p.*

$$T_pV = \{\dot\gamma(\circ); \quad \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow V \text{ in } \gamma(\circ) = p\}.$$

To definicijo bomo prilagodili tako, da bo delovala za poljubno abstraktno gladko mnogoterost. Če je naša gladka mnogoterost vložena v $\mathbb{R}^N$, tedaj je zgornja definicija v bistvu že tista prava. Naj bo M gladka mnogoterost in $\{\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)\ ;\ \alpha \in A\}$

gladek atlas na M . Spomnimo se, da lokalna karta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ podmnožico $U_\alpha \in M$ opremi z lokalnimi koordinatami.

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Naj bo $\mathbb{R}^n$ opremljen na primer z običajnimi kartezičnimi koordinatami. Za vsako točko $p \in U_\alpha$ imamo koordinate p glede na φ_α:

$$\Big(x_1^\alpha(p), x_2^\alpha(p), \ldots, x_n^\alpha(p)\Big) = \varphi_\alpha(p).$$

Koordinate so torej funkcije na M. Zapišemo lahko

$$x_i^\alpha = x_i \circ \varphi_\alpha,$$

kjer je

$$x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

kartezična koordinata na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2 *Naj bo $p \in M$ točka v gladki mnogoterosti. Tangentni vektor na M v p je ekvivalenčni razred $[\gamma(t)]$ krivulje $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$. Ekvivalenčna relacija v množici krivulj $\{\gamma(t) \ ; \ \gamma(0) = p\}$ je podana s prepisom:*

$$\gamma(t) \cong \beta(t) \iff \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\alpha(\beta(t)).$$

Tangentni prostor T_pM je množica ekvivalenčnih razredov $[\gamma(t)]$.

Najprej dokažemo, da je definicija relacije $\cong$ dobra. Pokazati moramo torej, da je neodvisna od izbire lokalne karte φ_α.

Naj bo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Tedaj:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\beta(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(\gamma(t)) \\
&= D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})(\frac{d}{dt}|_{t_0}\varphi_\alpha(\gamma(t))).
\end{aligned}$$

Torej:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\alpha(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\alpha(\gamma_2(t)) \iff \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\beta(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\beta(\gamma_2(t)),$$

saj je $D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ linearni izomorfizem.

Opazimo še tole: Če je glede na $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ predstavnik razreda $[\gamma]$ vektor $t_\alpha = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t))$, je predstavnik glede na (U_β, φ_β) vektor t_β, za katerega velja

$$t_\beta = \Big(D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})\Big)(t_\alpha). \tag{1}$$

Trditev 1 *Množica TpM je vektorski prostor.*

Dokaz: Označimo

$$\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma)= \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t)).$$

Seštevanje definiramo takole:

$$[\gamma_1(t)] + [\gamma_2(t)] = [\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + t(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)].$$

Množenje s skalarjem je podano z

$$\alpha \cdot [\gamma(t)] = [\gamma(\alpha \cdot t)].$$

Dokažimo neodvisnost seštevanja od izbire karte. Za predstavnika $[\gamma_1(t)] + [\gamma_2(t)]$ glede na φ_α velja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \varphi_\alpha\Big(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + t(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)))\Big) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Big(\varphi_\alpha(p) + t(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)\Big) \\ &= \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)\ .\end{aligned}$$

Za predstavnika vektorja $[\gamma_1(t)] + [\gamma_2(t)]$ glede na φ_β imamo

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \varphi_\beta\Big(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + t(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)))\Big) \\ = &\frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\Big(\varphi_\alpha(p) + t(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2))\Big) \\ = &\Big(D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\Big)(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)) \\ = &D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_1)) + D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma_2)) \\ = &\overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma_1) + \overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma_2),\end{aligned}$$

kot smo videli v zgoraj.

□

Trditev 2 *Naj bo M gladka mnogoterost dimenzije n in $p \in M$. Tedaj velja*

$$\dim(T_pM) = n.$$

Dokaz: Izberemo tak $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, da velja $p \in U_\alpha$. Preslikava

$$D_p\varphi_\alpha : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

podana z

$$[\gamma] \quad \longmapsto \quad \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma),$$

je bijektivna linearna preslikava.

Bijektivnost je očitna, saj po konstrukciji relacije $\cong$ vsakemu razredu $[\gamma]$ pripada natanko en vektor $\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma)$. Linearnost pa je seveda tudi očitna.

$\square$

Opomba 1 *Ponovimo še enkrat tole pomembno dejstvo. Zveza med reprezentacijama T_pM v $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ in (U_β, φ_β) je podana s kompozitom preslikav*

$$\begin{array}{rccc} D_p\varphi_\alpha : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [\gamma] & \longmapsto & \overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma) \end{array}$$

in

$$\begin{array}{rccc} D_p\varphi_\beta : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [\gamma] & \longrightarrow & \overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma) \end{array}.$$

Za predstavnika torej velja transformacijsko pravilo

$$\overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma) = D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma)).$$

Opremimo sedaj tangentni prostor T_pM z bazo, ki bo čimbolj naravna. Izbira karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ nam poda naravno izbiro take baze prostora T_pM s pomočjo identifikacije $D\varphi_\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} &= [\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + t \cdot e_i)] \\ &= [\varphi_\alpha^{-1}((p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots p_n^\alpha) + (0, \ldots, 0, \overset{i}{t}, 0, \ldots, 0))]. \end{aligned}$$

Torej

$$(D\varphi_\alpha)(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}) = e_i.$$

Naj bo $\gamma(t)$ poljubna krivulja skozi p v M. Tedaj imamo

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\varphi_\alpha(\gamma(t)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\gamma_1^\alpha(t), \gamma_2^\alpha(t), \ldots, \gamma_n^\alpha(t)) \\
&= (\dot\gamma_1^\alpha(0), \dot\gamma_2^\alpha(0), \ldots \dot\gamma_n^\alpha(0)) \\
&= \sum_{i=1}^n \dot\gamma_i^\alpha(0)) \cdot e_i.
\end{aligned}$$

Od tod

$$[\gamma] = \sum_{i=1}^n \gamma_i^\alpha(0)\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Povedano še malo drugače: Če označimo $X_i = \dot\gamma_i^\alpha$, dobimo

$$D_p\varphi_\alpha([\gamma]) = D_p\varphi_\alpha(\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}) = \sum_{i=1}^n D_p\varphi_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})\cdot X_i = \sum_{i=1}^n X_i \cdot e_i.$$

Spomnimo se: Za vsak tangentni vektor $[\gamma]$ nam transformacijsko pravilo (1) da

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma)) = \overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma)\ .$$

Ker imamo

$$\overset{\bullet}{\varphi_\alpha}(\gamma) = D_p\varphi_\alpha([\gamma]) = (\dot\gamma_1^\alpha, \dot\gamma_2^\alpha, \ldots, \dot\gamma_n^\alpha)$$

in

$$\overset{\bullet}{\varphi_\beta}(\gamma) = D_p\varphi_\beta([\gamma]) = (\dot\gamma_1^\beta, \dot\gamma_2^\beta, \ldots, \dot\gamma_n^\beta),$$

je linearna preslikava $D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}))$ v bazah $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ in $\{\frac{\partial}{\partial x^\beta}\}$ podana z matriko, za katero velja

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})\begin{pmatrix}\gamma_1^\alpha\\ \vdots \\ \gamma_1^\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1^\beta\\ \vdots \\ \gamma_1^\beta\end{pmatrix}.$$

Zapišimo sedaj zgornje brez sklicevanja na krivulje. Elemente T_pM opisujemo takole: Najprej izberemo karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, kjer je U_α okolica točke p. Glede na to karto imamo na T_pM naravno bazo $\{\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$. Elementi v T_pM so torej linearne kombinacije

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Skalarji v_i^α so torej koordinate V glede na karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. V neki drugi karti $/U_\beta, \varphi_\beta)$ imamo

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i^\beta \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}.$$

Skalarji v_i^β so koordinate V glede na karto (U_β, φ_β). Med koordinatami $\{v_i^\alpha\}$ in $\{v_i^\beta\}$ velja zveza:

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} v_1^\alpha \\ v_2^\alpha \\ \vdots \\ v_n^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^\beta \\ v_2^\beta \\ \vdots \\ v_n^\beta \end{pmatrix}.$$

1.2 Tangentni vektorji kot diferencialni operatorji

Smerni odvod funkcije

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

v točki $p \in M$ vzdolž krivulje $\gamma(t)\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, za katero velja $\gamma(0) = p$, je podan s predpisom

$$\frac{d}{dt}|_{t_0} f(\gamma(t)).$$

Če je $[\gamma_1]_p = [\gamma_2]_p$, velja

$$(\frac{d}{dt}|_{t_0} f(\gamma_1(t)) = (\frac{d}{dt}|_{t_0} f(\gamma_2(t)).$$

Res: Spomnimo se

$$[\gamma_1] = [\gamma_2] \iff \varphi_\alpha \dot{(} \gamma_1) = (\varphi_\alpha \dot{(} \gamma_2) \ .$$

Po drugi strani pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} \ f(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha \circ (\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha(\gamma(t)) \\ &= D_{\varphi_\alpha(p)}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha \dot{(} \gamma)). \end{aligned}$$

Pri izbrani karti $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ je torej smerni odvod $\frac{d}{dt}|_{t_0} f(\gamma(t))$ odvisen le od tangentnega vektorja $\overset{\bullet}{\varphi_\alpha(\gamma)} \in T_pM$ in seveda od funkcije f.

Seveda je vse skupaj neodvisno od izbire karte. To lahko vidimo na dva načina: iz zgornjega računa, pa tudi takole

$$\begin{aligned} D_{\varphi_\alpha(p)}(f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha(\gamma)}) &= D_{\varphi_\alpha(p)}(f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\alpha(\gamma)}) \\ &= D_{\varphi_\beta(p)}(f \circ \varphi_\beta^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\beta(\gamma)}). \end{aligned}$$

Naj bo $X \in T_pM$ tangentni vektor.

Definicija 3 *Naj bo*

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

neka odvedljiva funkcija in $X \in T_pM$ tangentni vektor. Smerni odvod funkcije f v smeri X je podan s predpisom

$$(Xf)(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ f(\gamma(t)),$$

pri čemer je $\gamma\colon(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ katerakoli krivulja, za katero velja $\gamma(0) = p$ in $[\gamma] = X$.

Iz zgoraj povedanega je očitno, da je naša definicija dobra, torej neodvisna od izbire konkretne krivulje γ z zahtevanima lastnostma. Za smerni odvod velja Leibnitzevo pravilo v obliki

$$(X(f \cdot g))(p) = (Xf)(p) \cdot g(p) + (Xg)(p) \cdot f(p). \tag{2}$$

Seveda pa je smerni odvod tudi linearen

$$(X(af + bg))(p) = a\ (Xf)(p) + b\ (Xg)(p). \tag{3}$$

Izrek 1 *Vsakemu tangentnemu vektorju $X \in T_pM$ torej pripada natanko določen diferencialni operator prvega reda, definiran na prostoru zarodkov gladkih funkcij $\mathcal{C}_p^r(M)$ v točki $p \in M$.*

Velja pa tudi obratno. Naj bo

$$A : \mathcal{C}_p(M)^r \longrightarrow \mathcal{C}_p(M)^{r-1}$$

linearni operator, za katerega velja:

$$A(f \cdot g) = A(f) \cdot g(p) + A(g) \cdot f(p).$$

Tedaj obstaja natanko določen tangentni vektor $X \in T_pM$, tako da velja:

$$A(f) = (Xf)(p).$$

Skica dokaza: V eno smer smo izrek zgoraj že dokazali. Tangentnemu vektorju znamo prirediti smerni odvod, ki je diferencialni operator prvega reda. Skicirajmo še dokaz obratne smeri.

Najprej ugotovimo, da je dovolj, če trditev dokažemo za primer $V \overset{odp}{\subset} \mathbb{R}^n$. Nato lahko rezultat s pomočjo karte prenesemo na mnogoterost. Naša trditev je namreč lokalna, celo infinitezimalna.

Naj bo sedaj

$$A : \mathcal{C}_p^r \longrightarrow \mathcal{C}_p^{r-1}.$$

Brez škode za splošnost lahko vzamemo $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Za A velja:

$$A(f \cdot g) = A(f) \cdot g(0) + f(0)A(g)$$

in

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g).$$

Od tod najprej sledi, da za konstantno funkcijo c velja

$$A(c) = 0.$$

Res:

$$A(c \cdot f) = A_(c)f(0) + cA(f).$$

Po Leibnitzevem pravilu, po linearnosti pa še

$$A(c \cdot f) = cA(f).$$

Torej

$$A(cf)f(p) = 0 \qquad za\ vsak\ \ f,$$

in zato

$$A(c) = 0.$$

Prav tako velja:

$$A(x_i^2) = 2x_i|_{x=0} \cdot A(x_i) = 0 \qquad za\ vsak\ i,$$

pa tudi

$$A(x_i x_j) = 0.$$

Naj bo f poljubno gladka. Razvijmo jo v Taylorjevo formulo:

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + \dots \ .$$

Iz zgornjega dobimo

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} A(x_i).$$

Označimo

$$A(x_i) = X_i.$$

Torej:

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(0 + tX_i).$$

□

1.3 Odvod preslikave

Povedali smo že, da je odvod preslikave

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

v točki $p \in \mathbb{R}^n$ linearna aproksimacija

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

podana s predpisom

$$f(p + h) = f(p) + A(h) + \mathcal{O}(p, h),$$

pri čemer velja

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\mathcal{O}(p, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Označimo

$$A = D_p f.$$

Prenesimo to idejo na mnogoterosti. Naj bo

$$f : M \longrightarrow N$$

gladka preslikava med gladkima mnogoterostma M in N. Odvod $D_p f$ bo linearna preslikava

$$D_p f : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

med tangentnima prostoroma v ustreznih točkah. Naravno definicijo lahko napišemo takole. Naj bo $[\gamma] \in T_p M$ tangentni vektor, podan kot ekvivalenčni razred poti. Izberimo predstavnico $\gamma(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$. Seveda velja $\gamma(0) = p$.

Definicija 4 *Odvod preslikave $f\colon M \to N$ je podan s predpisom*

$$(D_p f)([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

Izrazimo našo linearno preslikavo v lokalnih kartah. Naj bo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta na M, za katero velja $p \in U_\alpha$, in (V_α, ψ_α) karta na N, tako da je $f(p) \in V_\alpha$. Tangentni vektor $[\gamma] \in T_p M$ lahko predstavimo takole:

$$[\gamma] = [\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + t\ \dot{\varphi_\alpha}(\gamma)],$$

kjer je

$$\dot{\varphi_\alpha}(\gamma) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\alpha(\gamma(t)).$$

Po definiciji imamo tedaj:

$$(D_p f)[\gamma] = [(f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p) + t\ \dot{\varphi_\alpha}(\gamma))].$$

Oglejmo si sedaj sliko tega elementa tangentnega prostora $\mathcal{T}_{f_{(p)}}N$ v $\mathbb{R}^m$ glede na karto ψ_α.

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\dot{D_p} f[\gamma]) &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p) + t\ \dot{\varphi_\alpha}(\gamma)) \\ &= D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})(\dot{\varphi_\alpha}(\gamma)). \end{aligned} \tag{4}$$

Zgoraj je $D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})$ običajni odvod preslikave

$$\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

med realnima prostoroma.

Zgornji račun lahko izpišemo nekoliko drugače. Spomnimo se preslikav:

$$\begin{aligned} D\varphi_\alpha :\ T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [\gamma] &\longrightarrow \dot{\varphi_\alpha}(\gamma) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} D\psi_\alpha :\ T_{f(p)} N &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [\beta] &\longrightarrow \Psi_\alpha(\beta). \end{aligned}$$

Izraz (4) nam pove :

$$D\psi_\alpha \circ D_p f \circ D\varphi_\alpha^{-1} = D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha). \tag{5}$$

Preslikava $D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha)$ je torej predstavitev odvoda $D_p f$ v lokalnih kartah $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ in (V_α, Ψ_α). Iz (5) vidimo tudi, da je $D_p f \colon T_p M \to T_{f_{(p)}} N$ linearna preslikava.

Poglejmo, kaj nam da primerjava predstavitev preslikave $D_p f$ v različnih kartah. Spomnimo se:

$$\overset{\bullet}{\varphi_\beta(\gamma)} = D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})((\overset{\bullet}{\varphi_\alpha(\gamma)})).$$

Po eni strani imamo:

$$D_{\varphi_\beta(p)}(\psi_\beta\ f\ \varphi_\beta^{-1})(\overset{\bullet}{\varphi_\beta(\gamma)}) = \psi_\beta(\overset{\bullet}{f(\gamma)}), \tag{6}$$

po drugi pa

$$\begin{aligned} & D_{\varphi_\beta(f(p))}\Big(\underbrace{\psi_\beta\ \psi_\alpha^{-1}}\ \underbrace{\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha}\ \underbrace{\varphi_\alpha\ \varphi_\beta^{-1}}\Big)\ (\overset{\bullet}{\varphi_\beta(\gamma)}) \\ = \ & \Big(D_{\psi_\alpha(f_{(p)})}((\psi_\beta\ \psi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})\Big)\ (\overset{\bullet}{\varphi_\beta(\gamma)})\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Iz (6) in iz (7) dobimo:

$$\begin{aligned} & D_{\varphi_\beta(p)}(\psi_\beta\ f\ \varphi_\beta^{-1}) \\ = \ & D_{\psi_\alpha(f_{(p)})}(\psi_\beta\ \psi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha^{-1}) \circ D_{\varphi_\beta(p)}(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}). \end{aligned}$$

Ker to velja pri vsaki točki, lahko zapišemo nekoliko manj natančno

$$\begin{aligned} & D(\psi_\beta\ f\ \varphi_\beta^{-1}) \\ = \ & D(\psi_\beta\ \psi_\alpha^{-1}) \circ D(\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (D(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

Definicija 5 *Preslikava*

$$\begin{aligned} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \quad \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad & \longrightarrow \quad \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \mathbb{R}^n \quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

se imenuje prehodna preslikava med lokalnima kartama $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *in* (U_β, φ_β).

Preslikava

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

se imenuje tangentna preslikava, ali pa tudi kar prehodna preslikava.

Zapišimo odvod preslikave z matriko glede na naravno izbrani bazi kodomene in domene. Lokalna predstavitev preslikave f glede na naši karti je

$$(\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha^{-1})(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)=\begin{pmatrix} f_1^\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)\\ f_2^\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)\\ \vdots\\ f_m^\alpha(x_1^\alpha,\ldots,x_n^\alpha)\end{pmatrix}.$$

Odvod te preslikave v točki $\varphi_\alpha(p)$ je podan z Jacobijevo $m\times n$ matriko

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\alpha\ f\ \varphi_\alpha^{-1})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial f_1^\alpha}{\partial x_n^\alpha}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m^\alpha}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial f_m^\alpha}{\partial x_n^\alpha}\end{pmatrix}.$$

Odvod tangentne prehodne preslikave je prav tako podan z Jacobijevo matriko, ki pa je vedno obrnljiva. Tangentne prehodne preslikave na mnogoterosti M so seveda dimenzije $n\times n$:

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\varphi_\beta\ \varphi_\alpha^{-1})=\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial x_1^\beta}{\partial x_n^\alpha}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial x_n^\beta}{\partial x_n^\alpha}\end{pmatrix}.$$

Pri tem smo označili

$$\varphi_\alpha(m)=(x_1^\alpha(m),...,x_n^\alpha(m))$$

in

$$\varphi_\beta(m)=(x_1^\beta(m),...,x_n^\beta(m)).$$

S pomočjo odvoda lahko dobro karakteriziramo nekatere pomembne lastnosti preslikav.

Definicija 6 *Preslikava $f\colon M\to N$, ki je odvedljiva v vsaki točki $p\in M$, je submerzija, če je za vsak $p\in M$ odvod*

$$D_pf:T_pM\longrightarrow T_{f(p)}N$$

surjektivna preslikava. Torej mora veljati $\mathrm{rang}D_pf=\mathrm{dim}N$.

V nekem smislu je submerzivnosti dualna tale lastnost.

Definicija 7 *Preslikava $f\colon M \to N$ je imerzija, če je pri vsakem $p \in M$ odvod*

$$D_pF : T_pM \longrightarrow T_{t(p)}N$$

injektivna preslikava - ima torej trivialno jedro.

Spomnimo se definicije podmnogoterosti.

Definicija 8 *Podprostor $N \subset M$ je gladka podmnogoterost dimenzije k, če za vsako točko $p \in N$ obstaja taka karta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ mnogoterosti M, da velja*

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap N) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n.$$

Med imerzijami so verjetno najpomembneše vložitve.

Definicija 9 *Če je $f : N \longrightarrow M$ gladka in je $f(N) \subset M$ podmnogoterost, ter je f inverzija, je f vložitev.*

Na prvi pogled med pojmoma imerzije in vložitve ni velike razlike, vendar v resnici ni tako. Poglejmo si nekaj primerov imerzij, ki niso vložitve:

Primeri inverzij, ki niso vložitve.

1. Osmica

   Naj bo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ preslikava, katere slika ima obliko osmice.

2. "Pentlja z dotikom" je *injektivna* imerzija, ki ni vložitev:

3. Gosta krivulja na torusu:

   Naj bo preslikava

   $$f : \mathbb{R} \longrightarrow T^2 = \{(e^{i\varphi}, e^{i\psi})\ ;\ \varphi, \psi \in [0, 2\pi]\}$$

   iz realne osi v torus podana s predpisom

   $$f(t) = (e^{ikt}, e^{ilt})\ ;\ \frac{k}{l} \notin \mathbb{Q}.$$

   Ta preslikava sicer je injektivna, toda točke $p \in f(\mathbb{R})$ nimajo podmnogoterostnih kart. V še tako majhni okolici U katerekoli točke $f(t_0)$ je presek $f(\mathbb{R}) \cap U$ gosta podmnožica v U.

Izrek 2 *Vsaka imerzija je lokalna vložitev. Naj bo $f\colon M \to N$ imerzija in $p \in M$ poljubna točka. Tedaj obstaja okolica $U \subset M$ točke p, tako da je*

$$F/U : U \longrightarrow N$$

vložitev.

Dokaz: Naj bo $\dim(M) = m$ in $\dim(N) = n$, pri čemer je $m < n$. Za imerzijo velja $\mathrm{rang}(D_p f) = m$. Naj bo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta okoli p in (V_β, ψ_β) karta okoli $f(p)$. Linearna preslikava

$$D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\beta \ f \ \varphi_\alpha^{-1}) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ima torej tudi rang enak m. Naj bo $Im = Im(D_{\varphi_\alpha(p)}(\psi_\beta \ f \ \varphi_\alpha^{-1})) \subset \mathbb{R}^n$ slika te preslikave. To je podprostor dimenzije m v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $g \in SO(n)$ rotacija, za katero velja:

$$g(Im) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n.$$

Naj bo sedaj $(\widetilde{U_\beta}, \widetilde{\psi_\beta})$ nova karta podana z:

$$\widetilde{\psi_\beta} = g \circ \psi_\beta$$

in

$$\widetilde{V_\beta} = g \circ (V_\beta).$$

Zapišimo preslikavo $\widetilde{\psi_\beta} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ v koordinatah. Označimo

$$F \colon = \widetilde{\psi_\beta} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

Tedaj imamo

$$F(x_1^\alpha, x_2^\alpha, ..., x_m^\alpha) = \begin{pmatrix} F_1^\beta(x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) \\ \vdots \\ F_m^\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha) \end{pmatrix}.$$

Odvod te preslikave je podan z matriko

$$D_{\varphi_\alpha(p)}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial F_1^\beta}{\partial x_m^\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \cdots & \frac{\partial F_n^\beta}{\partial x_m^\alpha} \end{pmatrix}.$$

Opazujmo tole podmatriko zgornje matrike:

$$RDF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \dots & \frac{\partial F_1^\beta}{\partial x_m^\alpha} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m^\beta}{\partial x_1^\alpha} & \dots & \frac{\partial F_m^\beta}{\partial x_m^\beta} \end{pmatrix}.$$

Zaradi imerzivnosti f je to neizrojena matrika dimenzije $m \times m$. Natančneje povedano, zgornja preslikava je linearni izomorfizem prostora $\mathbb{R}^m$ na $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$.

Po izreku o inverzni preslikavi obstajata okolici $p \in \widehat{U_\alpha}$ in $f(p) \in \widehat{V_\beta}$, tako da je preslikava:

$$RF(x_1^\alpha, ..., x_m^\alpha) = \begin{pmatrix} F_1^\beta(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha) \\ F_2^\beta(x_2^\alpha, \dots, x_m^\alpha) \\ \vdots \\ F_m^\beta(x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha) \end{pmatrix}$$

difeomorfizem. Popravimo sedaj karto $\widehat{U_\beta}, \widetilde{\psi_\beta}$ še malo. Naj bo

$$\varrho(y_1^\beta, ..., y_m^\beta, y_{m+1}^\beta, ..., y_n^\beta) = (y_1^\beta, ..., y_m^\beta, y_{m+1}^\beta, ..., y_n^\beta) - (0, ..., 0, F_{m+1}^\beta(z), ..., F_n^\beta(t)).$$

Zgoraj smo označili

$$z = F^{-1}((y_1^\beta, ..., y_n^\beta, ..., y_m^\beta).$$

V lokalni reprezentaciji

$$\widetilde{F} = \varrho \circ F : \widehat{U}_\alpha \longrightarrow \varrho(\widehat{V}_\beta)$$

imamo sedaj res:

$$Im(\varrho \circ F) = \varrho(\widehat{U}_\beta) \overset{odp}{\subset} \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n.$$

$\square$

2 Tangentni sveženj in kotangentni sveženj

V prejšnjih poglavjih smo povedali, kaj je tangentni vektor $X \in T_pM$ v neki točki mnogoterosti in kaj je odvod preslikave v eni točki. Vendar je v matematiki in v njenih uporabah zares pomemben objekt, ki vsaki točki na mnogoterosti na gladek način priredi tangentni vektor. Ta objekt se imenuje vektorsko polje. Vsaka navadna diferencialna enačba je v resnici podana z vektorskim poljem. Rešitve navadne diferencialne enačbe so krivulje, ki so v vsaki svoji točki tangentne na to vektorsko polje. Nekoliko natančneje: V $\mathbb{R}^n$ je vektorsko polje podano kar s preslikavo:

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

saj lahko vse tangentne prostore $T_m\mathbb{R}^n$ na kanoničen način identificiramo z isto kopijo prostora $\mathbb{R}^n$. Integralska krivulja takega polja je vsaka krivulja $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)); \quad t \in [a,b].$$

V matematiki in v mnogih njenih uporabah moramo pogosto reševati navadne diferencialne enačbe na mnogoterostih. Iskanje rešitev take diferencialne enačbe lahko v geometrijskem jeziku opišemo kot iskanje krivulj, ki so tangentne določenim vektorskim poljem na mnogoterostih. Intuitivno je sicer jasno, kaj je to vektorsko polje na mnogoterosti. Za resno in konkretno delo pa bomo morali ta pojem smiselno in natačno definirati.

Za vektorsko polje F bo seveda veljalo

$$F(m) \in T_mM, \quad m \in M.$$

Torej je vektorsko polje F preslikava

$$F : M \longrightarrow \coprod_{m\in M} T_mM,$$

za katero velja $F(m) \in T_mM$. Objekt

$$TM = \coprod_{m\in M} T_mM$$

pa bomo imenovali tangentni sveženj. Seveda pa ga bomo morali opisati bolj pazljivo. Intuitivno je jasno, da so lahko vektorska polja gladka ali pa ne. Seveda bo polje gladko natanko tedaj, ko bo zgornja preslikava F gladka. Torej moramo množico TM opremiti z gladko strukturo.

2.1 Vektorski svežnji

Tangentni sveženj $TM = \coprod_{m \in M} T_m M$ je družina tangentnih prostorov, ki je parametrizirana z mnogoterostjo M. Vsak tangentni prostor je vektorski prostor, izomorfen nekemu "modelnemu" vektorskemu prostoru. To konstrukcijo lahko nekoliko posplošimo in opazujemo družine poljubnih (ne nujno tangentnih) prostorov, parametriziranih z dano mnogoterostjo M. Taki objekti se imenujejo vektorski svežnji. Od slej naprej bomo nekaj časa parametrsko mnogoterost označevali z B namesto z M. Ta oznaka se je uveljavila, kar parametrsko mnogoterost velikokrat imenujemo baza ali bazna mnogoterost.

Definicija 10 *Vektorski sveženj E nad gladko mnogoterostjo B je gladka mnogoterost skupaj z gladko preslikavo*

$$\pi : E \longrightarrow B.$$

Poleg tega mora veljati še:

a) Za vsak $b \in B$ je $\pi^{-1}(b) = V$ n-dimenzionalni realen ali kompleksen vektorski prostor.

b) Za vsak $b \in B$ obstaja okolica $b \in U \subset B$, tako da velja

$$\pi^{-1}(U) \overset{diff}{\approx} U \times V.$$

Obstaja tak difeomorfizem

$$\tau_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V,$$

da je za vsako točko $m \in U$ zožitev

$$\tau_U : \pi^{-1}(b) \longrightarrow \{b\} \times V$$

linearni izomorfizem.

Mnogoterost E se imenuje totalni prostor svežnja, preslikava π je sveženjska projekcija in mnogoterost B je, kot že rečeno, bazna mnogoterost ali baza svežnja. Vektorski prostor $\pi^{-1}(b)$ se imenuje vlakno svežnja nad točko b. Dimenzija vlakna je rang svežnja E,

$$\dim(\pi^{-1}(b)) = \mathrm{rang}(E).$$

Točka *b)* zgornje definicije se imenuje lokalna trivialnost svežnja E, preslikava

$$\tau_U : \pi^{-1}(U) = E/U \longrightarrow U \times V$$

pa je lokalna trivializacija ali tudi lokalna umeritev. Vsaka lokalna trivializacija je oblike

$$\tau_U(m) = (\pi(m), v(m))$$

in preslikava

$$\begin{array}{rccc} \tau_U: & \pi^{-1}(b) & \longrightarrow & \{b\} \times V \\ & m & \longmapsto & v(m) \end{array}$$

je linearni izomorfizem.

Definicija 11 *Sveženj E je trivializabilen, če obstaja globalna trivializacija*

$$\tau : E \longrightarrow B \times V.$$

Vsak sveženj $\pi\colon E \longrightarrow B$ seveda ni trivialen. Najbolj znani, pa tudi najočitnejši primer netrivialnega vektorskega svežnja je neskončen Möbiusov trak.

Primer 1 *Naj bo totalni prostor svežnja E ranga 1 podan s predpisom*

$$E = ([0, 2\pi] \times \mathbb{R})/(0, x) \sim (2\pi, -x).$$

Preslikava

$$\pi : E \longrightarrow S^1$$

naj bo podana s predpisom

$$\pi([u, v]) = u.$$

Z $[u, v]$ smo označili element v kvocientnem prostoru, ki je določen s elementom $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

Očitno je $\pi\colon E \to S^1$ vektorski sveženj ranga 1, mnogoterost E pa ni homeomorfna valju $S^1 \times \mathbb{R}$. Sveženj $E \to S^1$ se iz očitnega razloga imenuje neskončni Möbiusov trak.

Lokalne trivializacije so osnovni pripomoček za delo s svežnji. Igrajo podobno vlogo kot karte pri mnogoterostih. Lokalno trivializacijo svežnja $E \to B$ z vlaknom, izomorfnim $V = \mathbb{F}^n$, lahko eksplicitneje zapišemo takole:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_U: & E/U & \longrightarrow & U \times \mathbb{F}^n \\ & m & \longrightarrow & \Big(\pi(m)), (v_1(m), v_2(m), \ldots, v_n(m))\Big). \end{array}$$

Funkcije v_i so kartezične koordinate na vlaknu. Opazimo, da preslikave τ_U niso karte mnogoterosti E v običajnem smislu. Modelne množice so oblike $U \times \mathbb{F}^n$ in ne $\mathbb{F}^{n+m}$, $m = \dim(B)$, kot je običajno pri delu z mnogoterostmi. Včasih delamo z dejanskimi kartami, ki so prirejene τ_U. Naj bo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ tak atlas na B, da je za vsak $\alpha \in A$ skrčitev svežnja E_{U_α} trivialna. Tedaj je preslikava

$$(\varphi_\alpha \times id) \circ \tau_{U_\alpha} : E_{U_\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad m = \dim(B), \quad n = \dim(\pi^{-1}(b))$$

karta za mnogoterost E v običajnem smislu. Zapisana v koordinatah ima taka karta obliko

$$\Big((\varphi_\alpha \times id) \circ \tau_{U_\alpha}\Big)(m) = (x_1^\alpha(\pi(m)), x_2^\alpha(\pi(m)), \ldots, x_m^\alpha(\pi(m)), v_1^\alpha(m), \ldots, v_n^\alpha(m)).$$

Če je torej $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ trivializacijski atlas za B, je

$$\{\Big(E_{U_\alpha}, (\varphi_\alpha \times id) \circ \tau_{U_\alpha}\Big); \alpha \in A\}$$

atlas za mnogoterost E.

Večkrat delamo z trivializacijami τ_α, kot z dejanskimi kartami. Označevali bomo

$$\tau_\alpha \colon E_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n.$$

Lokalna trivializacija nam da lokalne koorddinate na vlaknu.

$$\tau_\alpha(m) = (\pi(m), v_1^\alpha(m), v_2\alpha(m), \ldots, v_n^{\cdot}\alpha(m)).$$

Naj bo sedaj U_β še ena karta, ki vsebuje m. Tedaj imamo:

$$\tau_\beta(m) = (\pi(m)), v_1\beta(m), v_2\beta(m), \ldots, v_n\beta(m)).$$

Definicija 12 *Prehodna preslikava med trivializacijama τ_α in τ_β je preslikava*

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^n \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{F}^n.$$

Seveda imamo:

$$(\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1})\Big(\pi(m), v_1^\alpha(m),\ (v_2^\alpha(m), \ldots, v_n^\alpha(m))\Big) = \Big(\pi(m),\ (v_1^\beta(m), v_2^\beta(m) ..., v_n^\beta(m))\Big).$$

Preslikava

$$\begin{pmatrix} v_1^\alpha(m) \\ \vdots \\ v_1^\alpha(m) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1^\beta(m) \\ \vdots \\ v_n^\beta(m) \end{pmatrix}$$

je linearni izomorfizem prostora $\mathbb{F}^n$ vase. Seveda je v splošnem pri vsakem $\pi(m)$ ta linearni izmorfizem drugačen. Zapišemo lahko:

$$(\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1})(b, v) = \Big(b,\ g_{\alpha\beta}(b)(v)\Big).$$

Pri tem je

$$\begin{array}{rccc} g_{\alpha\beta}: & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^\mathrm{n}) \approx \mathrm{GL(n;}\mathbb{F}) \\ & b & \longmapsto & g_{\alpha\beta}(b) \end{array}$$

gladka preslikava iz $U_\alpha \cap U_\beta$ v mnogoterost $GL(n;\mathbb{F})$.

Opomba 2 *Preslikava* $b \longrightarrow g_{\alpha\beta}(b)$ *je res gladka. Vemo, da je*

$$(\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1})(b, v) = \Big(b, g_{\alpha\beta}(b)(v)\Big)$$

gladka, zato je tudi kompozitum

$$(b, v) \longmapsto (g_{\alpha\beta}(b), v) \longmapsto g_{\alpha\beta}(b)(v)$$

gladek. Če $b \mapsto g_{\alpha\beta}(b)$ *ne bi bila gladka preslikava, tedaj tudi* $(b, v) \mapsto g_{\alpha\beta}(b)(v)$ *ne bi bila.*

Definicija 13 *Z izrazom prehodna preslikava svežnja* $E \to B$ *označujemo bodisi preslikavo*

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^n \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{F}^n,$$

ali pa kar preslikavo

$$\begin{array}{rccc} g_{\alpha\beta}: & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & GL(n;\mathbb{F}) \\ & b & \longrightarrow & g_{\alpha\beta}(b). \end{array}$$

Označimo: $\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1} = \tau_{\alpha\beta}$. Takoj opazimo, da za vsako trojico (α, β, γ), za katero je presek $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ neprazen, velja:

$$\tau_{\beta\gamma} \circ \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\gamma},$$

oziroma

$$\tau_{\beta\gamma} \circ \tau_{\alpha\beta} \circ \tau_{\alpha\gamma}^{-1} = id.$$

Seveda velja $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}^{-1}$. Torej lahko zapišemo

$$\tau_{\gamma\alpha} \circ \tau_{\beta\gamma} \circ \tau_{\alpha\beta} = id : (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{F}^n \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{F}^n.$$

Za vsako trojico indeksov imamo:

$$(\tau_{\beta\gamma} \circ \tau_{\alpha\beta})(b, v) = \tau_{\beta\gamma}\Big(b, g_{\alpha\beta}(v)\Big) = \Big(b, (g_{\beta\gamma}g_{\alpha\beta})(v)\Big).$$

Za matrične prehodne preslikave torej velja:

$$g_{\gamma\alpha}(b) \cdot g_{\beta\gamma}(b) \cdot g_{\alpha\beta}(b) = e : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n,$$

kjer smo z g označili enoto v $GL(n; \mathbb{F})$. Velja seveda tudi

$$g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}.$$

Opisane lastnosti prehodnih preslikav so fundamentalnega pomena.

Definicija 14 *Naj bo B gladka mnogoterost in $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ gladek atlas na B. Kocikel z vrednostmi v $GL(n; \mathbb{F})$ (ali tudi $GL(n; \mathbb{F})$- kocikel) na B je predpis, ki vsakemu paru $(\alpha, \beta) \in A \times A$, za katerega velja $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, priredi gladko preslikavo*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{F}).$$

Imamo torej predpis

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \Big(g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{F})\Big). \tag{8}$$

Za predpis (8) mora veljati:

a) $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}$ za vsak $b \in U_\alpha \cap U_\beta$.

b) Za vsako trojico (α, β, γ), za katero velja $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, je identično izpolnjena enakost
$$g_{\gamma\alpha}(b) \cdot g_{\beta\gamma}(b) \cdot g_{\alpha\beta}(b) = e \in GL(n; \mathbb{F}).$$

Kocikel prehodnih preslikav natanko opiše vektorski sveženj. Naj bo $\pi \colon E \to B$ poljuben vektorski sveženj z vlaknom $\mathbb{F}^n$. Tedaj vsak trivializacijski atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ na B priredi svežnju $\pi \colon E \longrightarrow B$ kocikel z vrednostmi v $GL(n; \mathbb{F})$ na način, ki smo ga opisali zgoraj.

Velja pa tudi obratno. Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas na B in naj bo

$$\{g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{F})\}$$

kocikel. Temu kociklu lahko na enoličen način priredimo vektorski sveženj $\pi\colon E \to B$ z vlaknom $\mathbb{F}^n$. Sestavimo disjunktno unijo

$$\coprod_{a \in A} (U_\alpha \times \mathbb{F}^n)$$

in vanjo vpeljimo relacijo $\sim$ takole: Za elementa

$$(b_1, v_1) \in (U_\alpha \times \mathbb{F}^n), \quad \text{in} \quad (b_2, v_2) \in (U_\beta \times \mathbb{F}^n)$$

velja

$$(b_1, v_1) \sim (b_2, v_2) \iff b_1 = b_2 \quad \text{in} \quad \Big(g_{\alpha\beta}(b_1)\Big)(v_1) = v_2.$$

Definirajmo totalni prostor E našega svežnja kot kvocientni prostor

$$E = \Big(\coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{F}^n)\Big)/\sim .$$

Sveženjska projekcija pa naj bo podana s predpisom in

$$\begin{array}{cccc} \pi: & E & \longrightarrow & B \\ & & & \\ & [(b,v)] & \longmapsto & b. \end{array}$$

Naloga 1 *Dokažite, da je E gladka mnogoterost, da je $\pi\colon E \to B$ gladka preslikava in da je $\pi\colon E \to B$ sveženj z vlaknom $\mathbb{F}^n$.*

Primer 2 *Naj bo atlas na krožnici*

$$S^1 = \{e^{i\varphi} \ ; \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

podan z dvema odprtima množicama

$$U_1 = \{e^{i\varphi} \ ; \varphi \in [-\varepsilon, \pi + \varepsilon]\}, \qquad U^2 = \{e^{i\varphi} \ ; \varphi \in [\pi - \varepsilon, \varepsilon]\},$$

pri čemer je ε neko majhno število. Tedaj imamo

$$U_1 \cap U_2 == \{e^{i\varphi} \ ; \varphi \in [-\varepsilon, \varepsilon] \cup (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)\}.$$

Prehodno preslikavo

$$g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^* = GL(1; \mathbb{R})$$

podajmo s predpisom

$$g_{12}(e^{i\varphi}) = \left\{ \begin{array}{rl} 1 & ; \ \varphi \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ -1 & ; \ \varphi \in (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon) \end{array} \right. .$$

Bralec naj se prepriča,da je sveženj, podan z zgornjimi podatki, neskončen Möbiusov trak.

Primer 3 *Konstruirali bomo družino sveženjev z vlaknom* $\mathbb{C}$ *nad dvodimenzionalno sfero* S^2.

Atlas bo spet sestavljen iz dveh množic, $\mathcal{U} = \{(U_1, U_2)\}$

$$U_1 = \{(x, y, z)\ ;\ z > -\varepsilon\}, \quad U_2 = \{(x, y, z)\ ;\ z < +\varepsilon\}.$$

Imamo

$$U_1 \cap U_2 = \{(x, y, z)\ ; -\varepsilon < z < \varepsilon\} = \text{ kolobar}.$$

Prehodne preslikave svežnjev z vlaknom $\mathbb{C}$ *imajo vrednosti v* $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. *Določiti moramo torej preslikavo*

$$g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{C}^* \tag{9}$$

Ker sta prostora $U_1 \cap U_2$ *in* $\mathbb{C}^*$ *oba homotopsko ekvivalentna krožnici, so preslikave (9) topološko karakterizirane s stopnjo. Stopnja take preslikave pove, kolikokrat se ena "krožnica" navije na drugo. Naj bo z lokalna kompleksna koordinata na* $U_q \cap U_2$. *Model preslikave stopnje k je podan s predpisom*

$$g_{12}(z) = z^k.$$

V nadaljevanju bomo videli, da so difeomorfostni tipi $\mathbb{C}$*-svežnjev nad* S^2 *definirani natanko z* $\deg(\mathrm{g}_{12})$.

Primer 4 *Na projektivnih prostorih imamo na naraven način podane tako imenovane tavtološke svežnje.*

Naj bo torej $B = \mathbb{RP}^n$ *ali* $B = \mathbb{CP}^n$. *Totalni prostor tavtološkega svežnja je podan s predpisom*

$$E = \{(b, v) \in \mathbb{F}P^n \times \mathbb{F}^n\ ;\ v \in b\},$$

sveženjska projekcija pa je seveda kar

$$\pi(b, v) = b.$$

Vlakno tega svežnja je $\mathbb{F}^n$.

Konstrukcijo tavtološkega svežnja lahko posplošimo na Grassmannove mnogoterosti. Naj bo $B = Gr_{k,n}(\mathbb{F}) = Gr_k(\mathbb{F}^n)$. *Totalni prostor tavtološkega svežnja je množica parov*

$$E = \{(b, v) \in Gr_k(\mathbb{F})^n \times (\mathbb{F})^n;\ v \in b\},$$

projekcija pa je spet

$$\pi(b, v) = b.$$

Vlakno tega svežnja je $(\mathbb{F})^k$.

Sedaj bomo definirali pojem, ki je posplošitev vektorskega polja in je definiran za poljuben vektorski sveženj.

Definicija 15 *Naj bo $\pi\colon E \to B$ gladek sveženj. Gladek prerez svežnja E je gladka preslikava*

$$s : B \longrightarrow E,$$

za katero velja

$$\pi \circ s = id$$

oziroma,

$$s(x) \in \pi^{-1}(x)$$

za vsak $x \in B$.

Lokalni prerez svežnja E nad $U \subset B$ je prerez svežnja E_U.

Imejmo sedaj $n = \mathrm{rk}(E)$ linearno neodvisnih prerezov $s_i\colon U \to E_U$, $i = 1, \dots n$, svežnja E_U. To pomeni, da so za vsak $x \in U$ vektorji

$$s_1(x), s_1(x), ..., s_n(x) \in \pi^{-1}(x) \approx V = \mathbb{F}^n$$

linearno neodvisni. Taki prerezi določajo lokalno trivializacijo:

$$\sigma : E_U \longrightarrow U \times \mathbb{F}^n$$

s predpisom

$$\sigma(m) = \Big(\pi(m), a_1(m), a_2(m), \dots, a_n(m))\Big),$$

kjer je

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \cdot s_i(\pi(m)).$$

Tudi obratno je res. Imejmo neko trivializacijo

$$\tau : E/U \longrightarrow U \times \mathbb{F}^n,$$

podano z :

$$\tau(m) = \Big(\pi(m), (v_1(m), v_2(m), \dots, v_n(m))\Big).$$

Definirajmo prereze

$$s_i : U \longrightarrow E_U$$

s predpisom

$$s_i(x) = \tau^{-1}\Big(x, (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)\Big).$$

Tako definirani prerezi s_i so res linearno neodvisni, ker je $\tau_{/\pi^{-1}(x)}$ linearni iozomorfizem pri vsakem $x \in U$.

Trditev 3 *Če ima sveženj* $\pi\colon E \to B \times \mathbb{F}^n$ $n = rk(E)$ *globalnih linearnih neodvisnih prerezov* $\{s_1, \ldots, s_n\}$, *je ta sveženj trivializabilen.*

Dokaz: Trivializacija
$$\tau : E \longrightarrow B \times \mathbb{F}^n$$
je podana s predpisom
$$m \longmapsto \Big(\pi(m), (a_1(m), a_2(m), \ldots, a_n(m))\Big),$$
kjer je
$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \cdot s_i(\pi(m)).$$
□

Lokalno trivializacijo E_U, podano z lokalnimi prerezi $\{s_1, ..., s_n\}$, imenujemo lokalna umeritev (local gauge). Prerezi $\{s_1, \ldots, s_n\}$ podajajo v vsakem vlaknu $\pi^{-1}(x)$ bazo $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset \pi^{-1}(x)$. Vsak prerez $\alpha : U \longrightarrow E/U$ lahko tedaj zapišemo v obliki:
$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) s_i(x),$$
ali na kratko:
$$\alpha(x) = (a_i(x), \ldots, a_n(x)).$$

Oglejmo si, v kakšni zvezi so različne lokalne izrazitve povezav. Neki poljuben prerez $s\sigma\colon U \to E_U$ izrazimo v umeritvi α z
$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) s_i^{\alpha}(x),$$
v umeritvi β pa z
$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) s_i^{\beta}(x).$$
Definicija
$$s_i^{\alpha}(x) = \tau_{\alpha}^{-1}\Big(\pi(x), (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)\Big)$$
nam pove, da se razvoj prereza s_i^{α} po bazi s_i^{β} glasi
$$s_i^{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} (g_{\alpha\beta})_{ji} \cdot s_j^{\beta}.$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^{n} a_i s_i^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} (g_{\alpha\beta})_{ji} s_j^\beta \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (g_{\alpha\beta})_{ji} a_i \Big) s_j^\beta \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j s_j^\beta .\end{aligned}$$

Med izrazitvemi prerezov v različnih umeritvah imamo torej zvezo

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})_{11} & \dots & (g_{\alpha\beta})_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_{\alpha\beta})_{n1} & \dots & (g_{\alpha\beta})_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

2.2 Tangentni sveženj

Naj bo M gladka mnogoterost. Napovedali smo že, da bo tangentni sveženj kot množica tangentnih prostorov mnogoterosti M parametrizirana z samo mnogoterostjo M:

$$TM = \coprod_{m \in M} T_m M.$$

Tangentni sveženj je torej poseben primer vektorskega svežnja. Množico TM bomo opremiti s strukturo gladke mnogoterosti na način, ki smo ga že opisali zgoraj. Poiskati moramo torej gladki atlas za TM.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas na M, v katerem za vse odprte množice velja

$$U_\alpha \overset{diffeo}{\approx} \mathbb{R}^n.$$

Privzemimo še, da so tudi vsi preseki $U_\alpha \cap U_\beta$ kontraktibilni. Nosilci lokalnih kart svežnja TM bodo

$$TM_U = \coprod_{m \in U_\alpha} T_m M = \coprod_{m \in U_\alpha} T_m U_\alpha = TU_\alpha.$$

Naj bo $v_m \in T_m \subset TU_\alpha$ poljuben. Preslikava lokalne karte

$$\tau_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

je podana s predpisom

$$\tau_\alpha(v_m) = \Big(\varphi_\alpha(m), (D_m\varphi_\alpha)(v_m)\Big).$$

Pri tem je

$$D_m\varphi_\alpha : T_mM \longrightarrow T_{\varphi_\alpha(m)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

odvod gladke preslikave

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

oziroma preslikava, ki smo jo definirali v prejšnjem razdelku in jo označevali kar z $D\varphi_\alpha$.

Definirajmo torej atlas $\mathcal{TU}$ za TM takole:

$$\mathcal{TU} = \{(TU_\alpha, \tau_\alpha)\ ;\alpha \in A\}.$$

Spomnimo se, da je $TU_\alpha = TM_{U_\alpha}$.

Prepričati se moramo še, da so prehodne preslikave gladke: Naj torej za množici U_α in U_β velja $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Tedaj imamo

$$\begin{array}{rccc} \tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1} : & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \\ & (\varphi_\alpha(m), v) & \longmapsto & (\varphi_\beta(m), w), \end{array}$$

kjer je

$$w = (D_m\varphi_\beta)(D_{\varphi_\alpha(m)}\varphi_\alpha)^{-1}(v) = D_{\varphi_\alpha(m)}(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})(v).$$

Krajše lahko to zapišemo takole:

$$\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1} = \Big(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}, D(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})\Big),$$

oziroma natančneje

$$(\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1})(x, v) = \Big((\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})(x), D_x(\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1})(v)\Big).$$

Ta preslikava je gladka, saj je $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ gladka.

Prostor TM smo torej opremili z gladko strukturo. Projekcija je na naraven način:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \longrightarrow & M \\ & v_m & \longrightarrow & m. \end{array}$$

Tangentni sveženj je torej vektorski sveženj, katerega vlakno nad točko $m \in M$ je tangentni prostor $T_m M$.

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko vsak vektorski sveženj podamo s kociklom prehodnih preslikav. Naredimo to na primeru tangentnega svežnja. Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas za M. Tedaj je kocikel, ki definira TM, podan s predpisom:

$$\begin{array}{ccccc} A \times A & \longrightarrow \Big(& U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & GL(n; \mathbb{F})\Big) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto \Big(& x & \longmapsto & D_x(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1})\Big). \end{array}$$

Opomba 3 *Naj bo M gladka mnogoterost in $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas. Preslikave*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

so difeomorfizmi.

Po definiciji je $\varphi_\alpha : M \longrightarrow N = \mathbb{R}^n$ gladka natanko tedaj, ko je gladek kompozitum $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = id$. Identična preslikava pa seveda je gladka.

Zato je seveda tudi preslikava

$$(\varphi_\alpha, D\varphi_\alpha) : TM_{U_\alpha} = TU_\alpha \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{F}^n,$$

podana s predpisom

$$(\varphi_\alpha, D\varphi_\alpha)(m) = \Big(\varphi_\alpha(\pi(m)), (D_{\varphi_\alpha(m)}\varphi_\alpha)(m)\Big)$$

gladka. (To poudarjamo zato, ker pri definicijah ne začnemo s predpostavko, da je φ_α gladka. Najprej govorimo le o prehodnih preslikavah.)

2.2.1 Naravna lokalna umeritev tangentnega svežnja

Poiščimo za vsako karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ na M sistem $n = \mathrm{rang}(TM) = \dim(M)$ linearno neodvisnih prerezov svežnja $TM_{U_\alpha} = TU_\alpha$ na čimbolj naraven način.

Naj bo $m \in U_\alpha \subset M$ poljubna točka, $v_m \in T_m M = \pi^{-1}(m)$ tangentni vektor in $\varphi_\alpha(m) = x$ slika točke m. V koordinatah imamo

$$\varphi_\alpha(m) = x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha).$$

Spomnimo se lokalne trivializacije

$$\tau_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n,$$

podane s predpisom

$$\tau_\alpha(v_m) = \Big(\varphi_\alpha(m), (D_m\varphi_\alpha)(v_m)\Big).$$

Definirajmo, kakor prej:

$$\begin{aligned} s_i^\alpha(m) &= \tau_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(m), e_i) \\ &= \tau_\alpha^{-1}\Big(x, (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)\Big), \end{aligned}$$

kjer je $\varphi_\alpha(m) = x$. Torej:

$$s_i^\alpha(m) = (D_{(m)}\varphi_\alpha)^{-1}(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Po definiciji odvoda: $(m = \varphi_\alpha^{-1}(x))$

$$\begin{aligned} s_i^\alpha(m) &= \frac{d}{dt}|_{t_0}\ \varphi_\alpha^{-1}(x + te_i) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t_0}\ \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \ldots, x_{i-1}^\alpha, x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha, \ldots, x_n^\alpha). \end{aligned}$$

Označimo

$$s_i^\alpha(m) = \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(m).$$

Oglejmo si razlog za to oznako. Spomnimo se, da so tangentni vektorji diferencialni operatorji. Vzemimo si poljubno funkcijo

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

in poglejmo, kako nanjo deluje tangentni vektor $s_i(m)$. Izračunajmo torej

$$s_i^\alpha(m)(f).$$

Pot skozi m, katere tangenta v m je enaka $s_i^\alpha(m)$, je

$$\gamma(t) = \varphi_\alpha^{-1}(x + te_i) = \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \ldots, x_{i-1}^\alpha, x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha, \ldots, x_n^\alpha).$$

Torej:

$$\begin{aligned} s_i^\alpha(m)(f) &= \frac{d}{dt}|_{t_0}\ f(\gamma(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t_0}\ f(\varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \ldots, x_i^\alpha, x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \\ &= \frac{\partial(f\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i^\alpha}(x_1^\alpha, \ldots, x_i^\alpha, \ldots, x_n^\alpha). \end{aligned}$$

Za vsako izbiro karte φ_α so koordinate točke m drugačne, $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \neq (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$. Toda kartezični koordinatni sistem na $V_\alpha \cap V_\beta$ je isti ne glede na to, ali smo v V_α ali v $V_\beta \subset \mathbb{R}^n$. Torej lahko pišemo:

$$s_i^\alpha(m)(f) = \frac{\partial(f\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha).$$

Opomba 4 *Vektorja* $(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha})(m)$ *in* $(\frac{\partial}{\partial x_i^\beta})(m)$ *sta seveda v splošnem različna.*

Naravna baza (umeritev) lokaliziranega svežnja TM_{U_α} je torej sistem prerezov:

$$(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}).$$

Definicija 16 *Gladko vektorsko polje na* M *je gladek prerez tangentnega svežnja* TM

$$\begin{aligned} X: \quad M &\longrightarrow TM \\ m &\longmapsto X(m) \in T_mM \subset TM. \end{aligned}$$

Množica vektorskih polj na M *je vektorski prostor, ki ga bomo označevali s simbolom* $\Gamma(M)$*.*

Lokalno lahko vsako vektorsko polje zapišemo v obliki:

$$X(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(m).$$

Velikokrat pišemo krajše:

$$X(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha},$$

kjer so $a_i\colon U_\alpha \to \mathbb{R}$ gladke funkcije. Opazimo, da nam vsako vektorsko polje

$$X: M \longrightarrow TM$$

podaja smerno odvajanje v vsaki točki $m \in M$. Naj bo

$$X(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$$

lokalna izrazitev X na U_α. Tedaj imamo operator

$$X : \mathcal{E}^r(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{r-1}(M),$$

ki je lokalno podan s predpisom:

$$X(f)_(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_\alpha(m)).$$

Funkcija $X(f)$ je res gladka funkcija, saj je $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ gladka po definiciji gladkosti f.

Primerjajmo sedaj lokalne izrazitve vektorskih polj med seboj. Primerjajmo torej izrazitvi

$$X(m) = \sum a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} = \sum b_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}.$$

Spomnimo se, da v splošnem velja:

$$g_{\alpha\beta}(m) \begin{pmatrix} a_1(m) \\ \vdots \\ a_n(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(m) \\ \vdots \\ b_n(m) \end{pmatrix}.$$

Torej, v našem primeru:

$$D_{\varphi_\alpha(m)}(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \begin{pmatrix} a_1(m) \\ \vdots \\ a_n(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(m) \\ \vdots \\ b_n(m) \end{pmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$D_m(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} \Big(D_m(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}) \Big)_{ji} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j^\beta}.$$

2.3 Integralske krivulje in tokovi vektorskih polj

Naj bo M gladka mnogoterost in $X \in \Gamma(TM)$ vektorsko polje. Naslednji izrek je posledica osnovnega eksistenčnega izreka za navadne diferencialne emačbe.

Izrek 3 *Naj bo $m \in M$ in $X(m) \neq 0$. Tedaj obstaja krivulja*

$$\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M,$$

za katero velja začetni pogoj

$$\beta(0) = m$$

in

$$\dot{\beta}(t) = X_{\beta(t)}, \qquad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Pravimo, da je $\beta(t)$ integralska krivulja polja X skozi točko m.

Dokaz: Naj bo U, $m \in U \subset M$ odprta okolica točke m, in

$$\beta : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

lokalna karta. Denimo, da je skrčitev $TM_U = TU$ trivialen sveženj (npr. U je kontraktibilna). Tedaj je preslikava

$$\tau : TU \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n,$$

podana z

$$\tau(v_m) = \Big(\beta(\pi(v_m)), D_m\beta(v_m)\Big),$$

lokalna karta mnogoterosti TM. V tej karti je vektorsko polje X podano kot vektorska funkcija

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Integralska krivulja polja F je krivulja

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \Big(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\Big), \end{aligned}$$

za katero velja:

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)),$$

oziroma v koordinatah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned} \tag{10}$$

Pri naših pogojih (gladkost X, gladkost F) nam eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe zagotavlja obstoj natanko ene krivulje

$$\gamma(t) = \Big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\Big),$$

za katero velja (10) in ki ustreza začetnemu pogoju $\gamma(0) = \beta(m)$.

Iskana krivulja $\beta\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ je tedaj $\beta(t) = \varphi^{-1}(\gamma(t))$.

□

Definicija 17 *Tok gladkega vektorskega polja X na gladki mnogoterosti M (v okolici U neke točke $m \in M$) je enoparametrična družina lokalnih difeomorfizmov*

$$\Phi_t : U \longrightarrow M,$$

pri kateri je $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ parameter. Družina je podana s predpisom

$$\Phi_t(p) = \beta_p(t),$$

kjer je β_p integralska krivulja polja X skozi točko p,

$$\beta_p(t) = X_{\beta_p(t)}$$

in

$$\beta_p(0) = p.$$

Za tok vektorskega polja velja mikrogrupna lastnost.

Trditev 4 *Naj bo Φ_t tok vektorskega polja X. Tedaj velja*

$$\Phi_{(s+t)} = \Phi_s \circ \Phi_t,$$

če so le $|t|$, $|s|$ in $|t + s|$ dovolj majhni.

Dokaz: Krivulja $\alpha(s) = \Phi_s(\Phi_t(p))$ je integralska krivulja polja X z začetno vrednostjo $\alpha(0) = \Phi_t(p)$. Krivulja

$$\beta(s) = \Phi_{(s+t)}(p)$$

je prav tako integralska krivulja polja X z začetno vrednostjo $\beta(0) = \Phi_t(p)$. Iz edinosti v eksistenčnem izreku in ODE sledi:

$$\Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_{s+t}(p).$$

□

2.4 Liejev odvod

Naj bo M gladka mnogoterost. Izraz Liejev odvod označuje "smerni" odvod nekega tenzorskega polja (funkcije, diferencialne forme, vektorska polja, metrike, matričnega polja, …) vzdolž nekega izbranega in fiksiranega vektorskega polja X na M.

Definicija 18 *Liejev odvod gladke funkcije $f\colon M \to \mathbb{R}$ vzdolž vektorskega polja X na M je podan s predpisom*

$$\mathcal{L}(f)_{(m)} = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\beta_X(t)),$$

kjer je $\beta_X\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ integralska krivulja X skozi m.

Liejev odvod funkcije je torej kar običajni smerni odvod.

Preslikava $f \mapsto \mathcal{L}_X(f)$ je preslikava prostora $\mathcal{C}^\infty(M)$ vase. Ta preslikava je linearna in ustreza Leibnitzevemu pravilu:

$$\mathcal{L}_X(gf)(m) = (\mathcal{L}_X g)(m) f(m) + g(m)(\mathcal{L}_X f)(m).$$

Res:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(gf)(m) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(gf)(\beta_X(t)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(g(\beta_X(t)) f(\beta_X(t))) \\
&= (\mathcal{L}_X g)(m) f_{(m)} + g(m)(\mathcal{L}_X f)(m).
\end{aligned}$$

Naj bo sedaj $Y \in \Gamma(TM)$ še eno vektorsko polje na M in naj bo $\Phi_t^X\colon U \subset M \to M$ tok vektorskega polja X v okolici točke $m \in U$. ($\Phi_0^X(m) = m$).

Definicija 19 *Liejev odvod vektorskega polja Y vzdolž vektorskega polja X je novo vektorsko polje, podano s predpisom*

$$(\mathcal{L}_X Y)(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Big[(D_m \Phi_t^x)^{-1}(Y(\beta_X(t))\Big].$$

Pri tem je $\beta_X(t)\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ integralska krivulja polja X skozi m.

Komentirajmo zgornjo definicijo. Krivulja $t \mapsto (D_m \Phi_t^X)^{-1}(Y(\beta_X(t))$ je pot v prostoru $T_m M$. Tangenta v $t = 0$ na to pot je spet vektor v $T_m M$. Torej je $(\mathcal{L}_X Y)(m)$ res element tangentnega prostora $T_m M$, zato je $\mathcal{L}_X Y$ res vektorsko polje na M.

Poiščimo izrazitev Liejevih odvodov $\mathcal{L}_X(f)$ in $\mathcal{L}_X Y$ v lokalnih koordinatah. Naj bo $m \in U \subset M$ in $\psi \colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ lokalna karta. Vsaki točki $p \in U$ priredi φ lokalne koordinate

$$\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), \dots x_n(p)).$$

Odvod karte φ je preslikava

$$D\varphi : TU = TM_U \longrightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

ki je v vsaki točki $p \in M$ podana z

$$(D_p\varphi)(X(p)) = \Big((x_1(p), x_2(p), \dots x_n(p)), (X_1(p), X_2(p), \dots, X_n(p))\Big),$$

kjer so $X_i(p) = X_i(x_1(p), \dots, x_n(p))$ komponente slike tangentnega vektorja $X(p) \in T_pM$ glede na preslikavo $D_p\beta$. Izrazimo krivuljo $\beta_X(t)$ v naših koordinatah:

$$\beta_X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Za njen časovni odvod, oziroma za njeno tangento, velja

$$\dot{\beta}_X(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1\Big(x_1(t)), \dots, x_n(t)\Big) \\ X_2\Big(x_1(t), \dots, x_n(t)\Big) \\ \vdots \\ X_n\Big(x_1(t), \dots, x_n(t)\Big) \end{pmatrix}.$$

S $\psi_X(t)$ označimo krivuljo, ki jo dobimo, če krivuljo $\beta_X(t)$ s karto φ dvignemo na mnogoterost M:

$$\psi_X(t) = \varphi(\beta_X(t)).$$

a) Odvajajmo sedaj lokalno izrazitev $\widetilde{f} = f \circ \varphi$ funkcije f vzdolž lokalne izrazitve $\psi_X(t)$ krivulje $\beta_X(t)$. Imamo $f(p) = \widetilde{f}(x_1(p), ..., x_n(p))$. V nadaljevanju bomo opustili akcent $\widetilde{}$ nad f.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)(m) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\beta_X(t)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f((x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle(\mathrm{grad}(f))(\beta(m),(\dot{x}_1(0),\dot{x}_2(0),\ldots,\dot{x}_n(0))\rangle \\
&= \langle\mathrm{grad}(f)(m),X(m)\rangle \\
&= (\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}X_i)(m).
\end{aligned}
$$

Koordinatni zapis Liejevega odvoda funkcije f v smeri polja X je torej

$$
(\mathcal{L}_X f)(m) = (\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}X_i)(m). \tag{11}
$$

b) Poiščimo sedaj še lokalno izrazitev Liejevega odvoda $\mathcal{L}Y$ polja Y v smeri X. Koordinatni izrazitvi naših polj sta podani s komponentami

$$
X_i(x_1,\ldots,x_n),\quad Y_i(x_1,\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots n.
$$

Naj bo spet $\psi_X(t)$ lokalna izrazitev integralske krivulje $\beta_X(t)$ polja X skozi m. Krivulja $\psi_X(t)$ torej poteka skozi $\beta(m) = x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Tok vektorskega polja X v lokalni karti φ je enoparametrična družina lokalnih difeomorfizmov

$$
\Psi_t : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Psi_t(U) \subset \mathbb{R}^n.
$$

Izraženo v koordinatah:

$$
(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \Psi_t^1(x_1,\ldots,x_n) \\ \Psi_t^2(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \Psi_t^n(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.
$$

Spomnimo se: $\Phi_0 = id$ (sledi tudi iz mikrogrupne lastnosti.) Torej:

$$
(\mathcal{L}Y)_{x_0)} = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Jac}_{x_0}(\Psi_t))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(\psi_X(t)) \\ Y_1(\psi_X(t)) \\ \vdots \\ Y_1(\psi_X(t)) \end{pmatrix}.
$$

Po t odvajamo produkt matrike in vektorja, torej moramo uporabiti Leibnitzevo pravilo. Označimo:

$$
\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_t) = A(t) : (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R}).
$$

Ker je $\Psi_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identična preslikava, $\Psi_0 = id$, je tudi $\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_0) = A(0) = id$. Z odvajanjem identitete

$$
A^{-1}(t)A(t) = Id \qquad \frac{d}{dt}|_{t=0}
$$

dobimo

$$(\dot{A^{-1}})(0)A(0) + A^{-1}(0)\dot{A}(0) = 0,$$

in zato

$$(\dot{A^{-1}})(0) = -\dot{A}(0),$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}\Psi_t)^{-1} = -\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_t).$$

Spomnimo se, da je tok Ψ_t "sestavljen" iz integralskih krivulj $\psi_X(t)$ polja X, torej:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}\Psi_t)^{-1} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}_0}.$$

V drugem sumandu naše Leibnitzeve formule nastopa odvod

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\; Y(\psi_X(t)). \tag{12}$$

Vsaka komponenta 12 je Liejev odvod funkcije Y_i po polju X. Torej:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}Y(\psi_X(t)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j.$$

Spravimo oba rezultata skupaj in dobimo izrazitev $\mathcal{L}_X Y$ v lokalnih koordinatah:

$$(\mathcal{L}_x Y)_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}Y_j.$$

Sedaj bom podali alternativno definicijo Liejevega odvoda vektorskega polja.

Trditev 5 *Naj bosta X in Y dve gladki vektorski polji na M. Diferencialni operator $[X,Y]$ na $\mathcal{C}^\infty(M)$, podan s predpisom*

$$[X,Y](f) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)),$$

je diferencialni operator prve stopnje. (Ustreza Leibnitzevemu pravilu.)

Dokaz: Računajmo v lokalni karti φ.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) &= \mathcal{L}_X(\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial f}{\partial x_i}Y_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}_X(\frac{\partial f}{\partial x_i}Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\mathcal{L}_X(\frac{\partial f}{\partial x_i})Y_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathcal{L}_X(Y_i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(Y_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}X_j + \frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j\Big) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}X_jY_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j).
\end{aligned}$$

Torej:

$$[X,Y](f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}Y_j).$$

□

Zgornji račun pa pokaže še več. Za vsak $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ imamo

$$[X,Y](f) = (\mathcal{L}_X Y)(f).$$

Torej, Liejev oklepaj polj X in Y je operator na prostoru $\mathcal{C}^\infty$, ki počne isto kot smerni odvod vzdolž polja $\mathcal{L}_X Y$, skratka $[X,Y]$ je smerni odvod v smeri $\mathcal{L}_X Y$. Ker so smerni odvodi na M isto kot vektorska polja, lahko pišemo:

$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y].$$

Iz lokalne izrazitve Liejevega odvoda takoj vidimo, da velja

$$\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X,$$

oziroma pisano z oklepajem

$$[X,Y] = -[Y,X].$$

Bralec lahko za vajo sam dokaže tole trditev.

Trditev 6 *Za Liejev odvod velja Leibnitzevo pravilo, če za produkt polj vzamemo Liejev oklepaj.*

$$\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]. \tag{13}$$

Formulo (13) lahko zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0.$$

V tej obliki se naše Leibnitzevo pravilo imenuje Jacobijeva identiteta.

Liejev odvod oziroma oklepaj izrazimo še na en način. Naj bosta Φ_t^X in Φ_s^Y tokova polj X in Y. Tedaj velja:

$$[X,Y](f)(m)=\frac{d^2}{dt\ ds}|_{t=0,\ s=0}\Big(f(\Phi_s^X(\Phi_t^Y(m))-f(\Phi_t^Y(\Phi_s^X(m))\Big). \tag{14}$$

Res, imamo

$$\frac{d}{ds}|_{s=0}f(\Phi_s^X(\Phi_t^X(m)))=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(\mathcal{L}_Y f(\Phi_t^X(m))=\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y Y)(m),$$

zato nam odvajanje po s in po t v formuli (14) da

$$[X,Y](f)=\mathcal{L}_x(\mathcal{L}_y(f))-\mathcal{L}_y(\mathcal{L}_x(f)).$$

Formula (14) ima zelo jasno geometrijsko interpretacijo. Oklepaj $[X,Y]$ meri infinitezimalno razliko med končnima točkama poti

$$\gamma_1(u)=\begin{cases}\Phi_u^X & u\in[0,t]\\ \Phi_{u-t}^Y(\Phi_t^X) & u\in[t,t+s]\end{cases}$$

in

$$\gamma_2(u)=\begin{cases}\Phi_u^Y & u\in[0,s]\\ \Phi_{u-s}^X(\Phi_s^Y) & u\in[s,t+s].\end{cases}$$

Če nas ti dve poti (pri dovolj majhnih s in t) pripeljeta v isto točko, bo seveda veljalo $[X,Y]=0$, saj bo tedaj $[X,Y](f)=0$ za vsak f. Tedaj pravimo, da polji X in Y komutirata, ali da sta v involvaciji.

Primer 5 *Naj bo $S\subset M$ 2-dimenzionalna podmnogoterost in $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$ podmnogoterostna karta:*

$$\varphi:(U\cap S,U)\longrightarrow(\mathbb{R}^2\times\{0\}^{n-2},\mathbb{R}^n).$$

Vzemimo koordinatni vektorski polji $\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}$, polji X_1 in X_2 pa naj bosta sliki koordinatnih polj glede na odvod karte. Torej

$$X_i=D(\varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_i}),\quad i=1,2.$$

S pomočjo zgornje geometrijske interpetacije se je lahko prepičati, da v tem primeru velja

$$[X_1, X_2] = 0.$$

Pomembno in netrivialno dejstvo pa je, da je res tudi obratno. Če sta X_1, X_2 komutirajoči polji na M, tedaj okoli vsakega $p \in M$ obstaja lokalna karta (U, φ), tako da velja

$$\varphi : (\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow (S \cap U, U).$$

Velja

$$D(\varphi^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_i}) = X_i, \quad i = 1, 2.$$

Polji X_1 in X_2 sta torej tangentni na ploskev $S \subset M$. Pravimo, da je ploskev S integralska ploskev para vektorskih polj X_1 in X_2. Trditev, da taka ploskev obstaja, je poseben primer znanega Frobeniusovega izreka.

Naslednja lema govori o "ekvivariantnosti" Liejevega odvoda glede na delovanje grupe difeomorfizmov.

Lema 1 *Naj bo $F\colon M \longrightarrow M$ difeomorfizem. Tedaj velja*

$$(\mathcal{L}_x(f \cdot F))(m) = (\mathcal{L}_{DF(x)}(f))(F(m)).$$

Dokaz: Naj bo $\beta_X(t)$ integralska krivulja polja X skozi točko m. Tedaj:

$$(\mathcal{L}_x(f \cdot F))(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(F(\beta_X(t))). \tag{15}$$

Velja pa

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(F(\beta_X(t)) = (D_m F)(X(m)).$$

Torej je desna enačbe (15) res smerni odvod funkcije F v točki $F(m)$ v smeri vektorja $(D_m F)(X(m))$.

□

Sedaj lahko hitro dokažemo, da difeomorfizmi delujejo kot izomorfizmi glede na Liejev produkt. Natančneje, velja naslednji izrek.

Izrek 4 *Naj bo $F\colon M \to M$ difeomorfizem in naj bosta $X, Y \in \Gamma(TM)$ gladki polji na M. Tedaj velja:*

$$DF([X, Y]_m) = [DF(X), DF(Y)]_{F(m)}.$$

Dokaz: Označimo

$$\mathcal{A} = DF[(X,Y])(f)(F(m)).$$

Po zgornji lemi imamo:

$$\mathcal{A} = [(X,Y](f)(F(m)) = [(X,Y](f \circ F)(m).$$

Po tretji definiciji Liejevega odvoda sedaj dobimo

$$\mathcal{A} = \frac{d^2}{dtds}|_{s=0,\ t=0}(f(F(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)))) - (f(F(\Phi_t^X(\Phi_s^Y(m)))).$$

Če spet uporabimo prejšnjo lemo, nazadnje vidimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathcal{L}_{DF(Y)}f)(F(\Phi_t^X(m))) - \frac{d}{ds}|_{s=0}(\mathcal{L}_{DF(X)}f)(F(\Phi_s^Y(m))) \\
&= (\mathcal{L}_{DF(X)}(\mathcal{L}_{DF(Y)}(f)))(F_(m)) - (\mathcal{L}_{DF(Y)}(\mathcal{L}_{DF(X)}(f)))(F_(m)) \\
&= [DF(Y), DF(X)](f)(m).
\end{aligned}$$

$\square$

3 Kotangentni sveženj in diferencialne forme

V tem poglavju bomo najprej opisali dualni objekt tangentnega svežnja in dualne objekte vektorskim poljem. Dualni objekt vektorja je funkcional. Konstruirali bomo torej objekte, ki bodo dualni vektorskim poljem na način, ki bo analogen dualnosti med vektorji in funkcionali. Nekoliko kasneje se bomo posvetili še objektom, ki bodo dualni distribucijam.

Definicija 20 *Naj bo $\pi\colon E \to M$ gladek vektorski sveženj. Dualni sveženj $\widetilde{\pi}\colon E^* \to M$ svežnja E je sveženj, katerega vlakna so dualni prostori*

$$\widetilde{\pi}^{-1}(m) = (\pi^{-1}(m))^*.$$

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas na M in naj bo $\pi\colon E \to M$ sveženj s kociklom

$$\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{F})\}.$$

Pri tem je $n = \mathrm{rk}E$. Sveženj $\widetilde{\pi}\colon E^* \to M$ je tedaj podan s kociklom

$$\{h_{\alpha\beta} = (g^T_{\alpha\beta})^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{F})\}.$$

Definicija 21 *Naj bo M gladka mnogoterost in TM njen tangentni sveženj. Dualni sveženj $(TM)^*$ se imenuje kotangentni sveženj. Označujemo ga z T^*M.*

Definicija 22 *Gladek prerez kotangentnega svežnja se imenuje diferencialna 1-forma.*

Naj bo $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ diferencialna 1-forma in $X \in \Gamma(TM)$ vektorsko polje. Za vsak $m \in M$ imamo:

$$X(m) \in T_mM \ , \qquad \omega_m \in T^*_mM = (T_mM)^*.$$

Torej imamo podano paritev:

$$\omega_m(X(m)) \in \mathbb{R},$$

saj je

$$\omega_m : T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$$

linearen funkcional na T_mM. Predpis

$$\begin{array}{rccc} \omega(X) : & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & m & \longmapsto & \omega_m(X_m) \end{array}$$

je torej gladka funkcija na M.

3.1 Lokalni opis 1-forme

Naj bo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta na M. Karta nam podaja trivializacijo $TM_{U_\alpha} = TU_\alpha$. Lokalno trivializacijo lahko podamo z $n = \dim(M)$ linearno neodvisnimi prerezi. Naravno bazo prerezov glede na karto φ_α smo označili z

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}.$$

Vsako vektorsko polje $X \in \Gamma(TM)$ lahko lokalno izrazimo v obliki

$$X(m) = \sum_{j=1}^{n} a_j(m) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}.$$

Naj bodo sedaj

$$dx_i^\alpha : U_\alpha \longrightarrow T^*U_\alpha$$

prerezi dualnega svežnja, za katere velja

$$dx_j^\alpha(m)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(m)\Big) \equiv \delta_{ij}.$$

Za vsak $m \in M$ je torej baza $\{dx_i^\alpha(m)\}$ dualna bazi $\{\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(m)\}$.

Vsako 1-formo $\omega \in \Omega^1(M)$ lahko torej lokalno zapišemo v obliki

$$\omega_m = \sum_{i=1}^{n} b_i(m)\ dx_i^\alpha(m),$$

ali na kratko

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} b_i\ dx_i^\alpha.$$

Naj bo sedaj $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$ vektorsko polje. Paritev med poljem X in formo ω se lokalno izraža s formulo

$$\omega_m(X(m)) = \sum_{i=1}^{n} b_i(m) \cdot a_i(m).$$

Ta izraz nas spominja na lokalno izrazitev smernega odvoda

$$X(f)(m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i^\alpha}(m) \cdot a_i(m)$$

funkcije $f\colon M \to \mathbb{R}$ vzdolž vektorskega polja X. Zato se lahko vprašamo, v kakšni zvezi so funkcije in 1-forme.

Naj bo torej $f\colon M \to \mathbb{R}$ funkcija. Oglejmo si njen odvod, oziroma diferencial.

$$D_m f : T_m M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vsakemu tangentnemu vektorju $X(m) \in T_m M$ ta preslikava priredi skalar

$$(D_m f)\Big(X(m)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i^\alpha} a_i(m),$$

pri čemer je

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Diferencial funkcije torej deluje na enak način kot 1-forma. Drugače povedano, smerni odvod funkcije f je paritev

$$\Big(X(f)\Big)(m) = \langle (\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_n^\alpha}), (a_1, \dots, a_n) \rangle.$$

Odvod ali diferencial funkcije $f\colon M \to \mathbb{R}$, ki se lokalno izraža z

$$(\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x_n^\alpha}),$$

torej deluje kot funkcional na vektorskih poljih in je zato 1-forma.

Definicija 23 *Diferencialna 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$, za katero velja*

$$\omega = Df$$

za neko funkcijo $f\colon M \to \mathbb{R}$, se imenuje eksaktna forma. Običajno pišemo

$$\omega = df.$$

Zgornjo definicijo moramo še opravičiti. Pokazati moramo, da je eksaktnost neodvisna od izbire lokalne karte. Oglejmo si torej, kako se eksaktnost vede glede na zamenjavo trivializacije, oziroma lokalne karte. Naj bo $\omega \in \Omega^1(M)$ in naj v $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ velja

$$\omega = df.$$

To pomeni: na $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ imamo:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i^\alpha}\, dx_i^\alpha,$$

kjer je $f^\alpha = f \circ \varphi_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za neko funkcijo $f \colon M \to \mathbb{R}$. Naj bo sedaj polje X lokalno podano z

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

Tedaj

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i^\alpha}.$$

Zapišimo:

$$Df^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i^\alpha} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_n^\alpha} \end{pmatrix}^T, \quad \text{in} \quad X^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Tedaj

$$\omega(X) = (Df^\alpha) \cdot X^\alpha$$

Naj bo sedaj (U_β, φ_β) neka druga umeritev istega dela mnogoterosti M. Oglejmo si, kako izgleda Df^β v primerjavi z Df^α. Imamo

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1}$$

in zato

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = f_\alpha \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = f_\alpha \circ g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Verižno pravilo za odvajanje nam da:

$$Df^\beta = Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Spomnimo se:

$$X^\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = Dg_{\alpha\beta} \cdot X^\alpha = Dg_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Uporabimo Df^β na X^β. Dobimo:

$$Df^\beta(X^\beta) = Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta} X^\alpha = Df^\alpha \cdot X^\alpha = Df^\alpha(X^\alpha).$$

Dokazali smo torej, da je paritev neodvisna od izbire karte. Eksaktnost forme je zato dobro definiran pojem.

Spotoma smo v resnici skoraj že dokazali tudi tole trditev.

Trditev 7 *Naj bo $\{g_{\alpha\beta}\}$ kocikel prehodnih preslikav mnogoterosti M glede na atlas $\{\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$. Tedaj je kocikel svežnja T^*M podan z $\{(Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T\}$.*

Dokaz: Odvodi Df^α so vrstice, zato so $(Df^\alpha)^T$ stolpci. Če hočemo, da bodo prehodne preslikave delovale z leve, morajo biti elementi T_m^*M stolpci. Torej dobimo:

$$(Df^\beta)^T = \left(Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta}^{-1})\right)^T = ((Dg_{\alpha\beta})^{-1})^T \cdot (Df^\alpha)^T.$$

Če to transformacijsko pravilo velja za eksaktne, mora seveda veljati za poljubne 1-forme.

□

"Invariantnost" eksaktnosti lahko povzamemo tudi takole. Če je forma ω taka, da v umeritvi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ velja

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; dx_i^\alpha,$$

in obstaja f^α, za katero velja:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

tedaj tudi za izrazitev

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \; dx_i^\beta$$

naše forme v drugi karti obstaja funkcija f^β, za katero velja

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} = \beta_i.$$

To funkcijo dobimo s predpisom

$$f^\beta = f^\alpha \circ (g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Pomembno vprašanje je, ali so vse 1-forme diferenciali funkcij? Seveda hitro vidimo, da je odgovor negativen. To vprašanje je sorodno vprašanju, ali je vsako vektorsko polje gradientno. Videli pa bomo, da je to vprašanje zelo zanimivo. Velja namreč: Tudi, če je neka forma na vsaki karti diferencial neke funkcije, ni nujno, da obstaja globalna funkcija, da bi veljalo

$$\omega = df.$$

Ovire za obstoj take globalne funkcije so topološke. Na enostavno povezanih mnogoterostih obstoj globalne "potencialne" funkcije f sledi iz obstojev "lokalnih potencialov", če pa M ni enostavno povezana, obstajajo forme $\omega \in \Omega(^1(M)$, ki imajo lokalne potenciale, globalnega pa ne.

3.2 Integral 1-forme

Ker je 1-forma objekt, ki je dualen vektorskemu polju, je dualen tudi 1-dimenzionalnim podmnogoterostim v M, in sicer v temle smislu.

Naj bo:

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

gladka krivulja v M in $\omega \in \Omega^{-1}(M)$ 1-forma na M.

Definicija 24 *Integral 1-forme ω vzdolž krivulje γ je podan s predpisom:*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))dt.$$

Trditev 8 *Integral 1-forme je neodvisen od parametrizacije krivulje γ.*

Dokaz: Naj bo $t(s)$ reparametrizacija γ. Torej

$$\beta(s) = \gamma(t(s)) : [\alpha, \beta] \longrightarrow M.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega_{\gamma(t)}\Big(\dot{\gamma}(t)\Big)dt &= \int_\alpha^\beta \omega_{\gamma(t(s))}\Big(\frac{d}{dt}\gamma(t(s)\Big)\overbrace{t'(s)\ ds}^{dt} \\
&= \int_\alpha^\beta \omega_{\beta(s)}\Big(\frac{1}{t'}\beta'(s)\Big) \cdot t'ds \\
&= \int_\alpha^\beta \omega_{\beta(s)}(\beta'(s))\ ds.
\end{aligned}$$

$\square$

Zgornja definicija torej res podaja paritev med 1-formami in 1-dimenzionalnimi podmnogoterostmi, pa tudi krivuljami, ki niso podmnogoterosti.

3.3 Diferencialne k-forme

Sedaj bomo konstruirali objekte, ki bodo dualni večdimenzionalnim podmnogoterostim. Kakor 1-forme, bodo tudi ti objekti prerezi nekega primerno konstruiranega vektorskega svežnja. Najprej bomo naše objekte opisali infinitezimalno. To pomeni, da bomo povedali, kakšne vrednosti zavzemajo naši prerezi. Opisati moramo torej vlakno svežnja, katerega prerezi bodo k-forme. Začeli bomo z objekti, ki bodo dualni dvodimenzionalnim podmnogoterostim.

Definicija 25 *Linearna 2-forma ω na $\mathbb{R}^n$ je predpis*

$$\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

za katerega velja:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= \alpha_1 \omega(x_1 y) + \beta\omega(x_2, y) \\ \omega(x, \alpha y_1 + \beta y_2) &= \alpha\omega(x, y_1) + \beta\omega(x, y_2) \\ \omega(x, y) &= -\omega(y, x). \end{aligned}$$

Primer 6 *Naj bo ω v $\mathbb{R}^n$ podan s predpisom:*

$$\omega(v_1, v_2) = \textit{ploščina orientiranega paralelograma, ki ga razpenjata } v_1, v_2.$$

Naj bo $\{e_1, e_2\}$ poljubna baza v $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11}e_1 + v_{12}e_2 \\ v_2 &= v_{11}e_1 + v_{22}e_2. \end{aligned}$$

Tedaj imamo

$$\omega(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{11} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}.$$

Primer 7 *Naj bo sedaj naš ambientni prostor tridimenzionalni evklidski prostor* $\mathbb{R}^3$*. Opišimo 2-formo, ki podaja potek tekočine skozi enoto ploščine. Označimo s* ξ_1*,* ξ_2 *vektorja, ki razpenjata paralelogram, skozi katerega se pretaka tekočina,* v *pa naj bo hitrost pretakanja tekočine skozi ta paralelogram. Volumen tekočine, ki se v dani časovni enoti pretoči skozi naš paralelogram, je podan s predpisom*

$$\omega_v(\xi_1, \xi_2) = (v, \xi_1 \times \xi_2).$$

Primer 8 *Naj bo sedaj naš ambientni prostor* n*-dimenzionalni realni prostor* $\mathbb{R}^n$*. Izkaže se, da za vsako 2-formo* ω_V *na* $\mathbb{R}^n$ *obstaja sistem* V*, sestavljen iz* $n-2$ *vektorjev*

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\},$$

tako, da velja naslednje. Naj bo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *poljubna baza v* $\mathbb{R}^n$ *in naj bo*

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\ e_j.$$

Forma ω_V *je podana s predpisom*

$$\omega_V(\xi_1, \xi_2) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \ldots & v_{(n-2)1} & \xi_{11} & \xi_{21} \\ v_{12} & v_{22} & \ldots & v_{(n-2)2} & \xi_{12} & \xi_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \ldots & v_{(n-2)n} & \xi_{1n} & \xi_{2n} \end{pmatrix}.$$

Pri tem seveda velja

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\ e_j.$$

Definicijo 2-forme takole razširimo na predpise s k argumenti, ki jim pravimo k-forme.

Definicija 26 *Preslikava*

$$\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

je k*-forma na* $\mathbb{R}^n$*, če velja:*

$$\omega(\alpha v_1 + \beta w_1, v_2, \ldots, v_k) = \alpha\omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \beta\omega(w_1, v_2, \ldots, v_n)$$

in

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\ \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

kjer je σ *poljubna permutacija* k*-elementov.*

Primer 9 *Naj bo spet* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *poljubna baza v* $\mathbb{R}^n$ *in naj bodo*

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\ e_j$$

razvoji vektorjev ξ_i*,* $i = 1, \dots, n$ *po tej bazi. Osnovni primer* n*-forme na* $\mathbb{R}^n$ *je podan s predpisom*

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tako formo včasih imenujemo volumska forma.

Primer 10 *Opišimo sedaj* k*-formo na* $\mathbb{R}^n$*, kjer je* $k < n$*. Označimo spet z*

$$V = \{v_1, \dots, v_{(n-k)}\}$$

sistem $(n-k)$ *fiksnih vektorjev. Naj bo* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *spet poljubna baza. Formo* ω_v *definirajno s predpisom*

$$\omega_V(\xi_1, \dots \xi_k) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{(n-k)1} & \xi_{11} & \dots & \xi_{k1} \\ v_{12} & \dots & v_{(n-k)2} & \xi_{12} & \dots & \xi_{k2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{(n-2)n} & \xi_{1n} & \dots & \xi_{2n} \end{pmatrix}.$$

Naš cilj je sedaj pojem k-forme globalizirati na način, ki je analogen razširitvi tangentnega vektorja v vekorsko polje ali funkcionala na tangentnem prostoru v diferencialno 1-formo. To bomo spet naredili tako, da bomo k-formo definirali kot prerez primernega vektorskega svežnja. Iz definicije je očitno, da k-forme na $\mathbb{R}^n$ tvorijo vektorski prostor. Ta prostor bo vlakno našega svežnja.

Začeli bomo s tem, da bomo natančneje opisali strukturo vektorskega prostora k-form.

3.3.1 Vnanji produkt 1-form

Definicija 27 *Naj bosta* ω_1, ω_2 *1-formi na* $\mathbb{R}^n$*. Vnanji produkt* ω_1, ω_2 *je 2-forma, podana s predpisom:*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{pmatrix}.$$

Zgornji predpis res podaja 2-formo. Velja namreč

$$
\begin{aligned}
(\omega_1 \wedge \omega_2)(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \eta) &= \det \begin{pmatrix} \omega_1(\alpha\xi_1) + \beta\xi_2) & \omega_2(\alpha\xi_1) + \beta\xi_2) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha\ \omega_1(\xi_1) + \beta\ \omega_1\xi_2) & \alpha\ \omega_2(\alpha\xi_1) + \beta\ \omega_2(\xi_2) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha\omega_1(\xi_1) + \beta\omega_1(\xi_2) & \omega_1(\eta) \\ \alpha\omega_2(\xi_1) + \beta\omega_2(\xi_2) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} \\
&= \alpha\ \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\eta) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} + \beta\ \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_2) & \omega_1(\eta) \\ \omega_2(\xi_2) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} \\
&= \alpha(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \eta) + \beta(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_2, \eta).
\end{aligned}
$$

Osnovna lastnost determinante zagotavlja tudi, da velja

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1.$$

Definicija 28 *Naj bodo ω_i, $i = 1, \ldots, k$ linearne 1-forme. Vnanji produkt 1-form na $\mathbb{R}^n$ je podan s prepisom*

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_k)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) & \ldots & \omega_k(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) & \ldots & \omega_k(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_2(\xi_k) & \omega_2(\xi_k) & \ldots & \omega_k(\xi_k) \end{pmatrix}.$$

Spet se je lahko prepričati, da je $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ linearna k-forma na $\mathbb{R}^n$. Linearnost dokažemo tako, kot zgoraj. Osnovne lastnosti determinante spet zagotavljajo, da velja

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(k)}) = \mathrm{sign}(\sigma)(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge ... \wedge \omega_k)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k).$$

Vnanji produkt nam bo pomagal razumeti strukturo vektorskega prostora k-form. Ta prostor bomo opisali s koordinatami. Izberemo bazo $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ prostora $V = \mathbb{R}^n$. V tej bazi elemente $v \in \mathbb{R}^n$ podajamo z:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

Opremimo sedaj prostor 1-form $W = V^*$ z dualno bazo $\{f_i\}$. Velja torej

$$F_i(e_j) =< f_i, e_j >= \delta_{ij}.$$

Elemente $\omega \in W$ torej podajamo z

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f_i.$$

Lotimo se sedaj predstavitve 2-form. Linearne 2-forme so bilinearni funkcionali, torej bo njihova koordinatna izrazitev matrika. Naj bo $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$, in naj bo

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\omega_1^1, \omega_2^1, ..., \omega_n^1) \\ \omega_2 &= (\omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_n^2) \end{aligned}$$

glede na bazo $\{f_i\}$ dualno bazi $\{e_j\}$. Bilinearnost nam da:

$$\omega(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \cdot \omega(e_i, e_j).$$

Izračunajmo $\omega(e_i, e_j) = (\omega_1 \wedge \omega_2)(e_i, e_j)$. Po naši definiciji imamo

$$\omega(e_i, e_j) = (\omega_1 \wedge \omega_2)(e_i, e_j) = \omega_1(e_i)\omega_2(e_j) - \omega_2(e_i)\omega_1(e_j) = \omega_i^1 \omega_j^2 - \omega_i^2 \omega_j^1.$$

Poiščimo matriko $\Omega = (\omega_{ij})$, za katero bo veljalo

$$e_i^T \cdot \Omega \cdot e_j = \omega(e_i, e_j)$$

za vsak $i, j = 1. \dots, n$. Označimo:

$$\omega_1 \otimes \omega_2 = \omega_1^T \cdot \omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_1^1\omega_1^2 & \omega_1^1\omega_2^2 & \dots & \omega_1^1\omega_n^2 \\ \omega_2^1\omega_1^2 & \omega_2^1\omega_2^2 & \dots & \omega_2^1\omega_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^1\omega_1^1 & \omega_n^2\omega_1^2 & \dots & \omega_n^1\omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Takoj se lahko prepričamo, da velja:

$$\Omega = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1.$$

Opazimo tudi: $\omega_2 \otimes \omega_1 = (\omega_1 \otimes \omega_2)^T$. Naša konstrukcija in linearnost vseh operacij in postopkov nam da

$$\omega(v, w) = v^T \cdot \Omega \cdot w = v^T(\omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1) \cdot w.$$

Operacija, ki smo jo zgoraj označevali z $\otimes$, se imenuje tenzorski produkt.

Definicija 29 *Naj bo V vektorski prostor in $v_1, v_2 \in V$. Tenzorski produkt elementov v^1, v^2 je bilinearna preslikava (forma)*

$$v^1 \otimes v^2 : V^* \times V^* \longrightarrow V,$$

podana s predpisom

$$(v^1 \otimes v^2)(w_1, w_2) = v^1(\omega_1) \cdot v^2(\omega_2).$$

Naj bo $\{e_i\}$ baza V. Koordinatna izrazitev tenzorskega produkta $v^1 \otimes v^2$ glede na bazo $\{e_i\}$ je matrika:

$$v^1 \otimes v^2 = v^1 \cdot (v^2)^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} (v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2) = \begin{pmatrix} v_1^1 v_1^2 & \ldots & v_n^1 v_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^1 v_1^2 & \ldots & v_n^1 v_n^2 \end{pmatrix},$$

pri čemer je $v^i = \sum_{j=1}^n v_j^i e_j$. Naj bo sedaj $\{f_i\}$ druga baza in naj bo $G\colon V \to V$ prehodna preslikava

$$G\ (e_i) = f_i.$$

Koordinatna izrazitev $v^1 \otimes v^2$ v bazi $\{f_i\}$ je tedaj

$$v^1 \otimes v^2 = G(v^1) \cdot G(v^2)^T = G\Big(v^1 \cdot (v^2)^T\Big) G^T;$$

pri čemer je $v^1 \cdot (v^2)^T$ koordinatna izrazitev $v^1 \otimes v^2$ glede na $\{e_i\}$.

Definicija 30 *Tenzorski produkt vektorskih prostorov V in U je vektorski prostor*

$$V \otimes U = \operatorname{span}\{v \otimes u; v \in V, u \in U\} = \operatorname{span}\{e_i \otimes f_j\},$$

kjer je $\{e_i\}$ je baza za V in $\{f_j\}$ je baza za U.

Naloga 2 *Naj bosta V, U vektorska prostora: Dokažite, da velja*

$$V \otimes U^* = \operatorname{Hom}(U, V).$$

Namig: *Naj bo $\alpha \in V \in U^*$. Tedaj:*

$$\alpha = \sum_{ij} v_i \otimes u_j^*$$

in za poljuben vektor $\xi \in U$ lahko definiramo

$$\alpha(\xi) = \sum_{ij} v_i \cdot u_j^*(\xi) = \sum_{ij} u_j^*(\xi) \cdot v_i.$$

Definicija 31 *Vnanji produkt vektorjev $v^1, v^2 \in V$ je podan s predpisom:*

$$v^1 \wedge v^2 = v^1 \otimes v^2 - v^2 \otimes v^1.$$

Definicija 32 *Vnanja potenca vektorskega prostora V je vektorski prostor*

$$\Lambda^2 V = \mathrm{span}\{v \wedge u \ ; \ v, u \in V\} = \mathrm{span}\{e_i \wedge e_j\},$$

kjer je $\{e_i\}$ baza V.

Očitno velja

$$V \wedge V \subset V \otimes V.$$

Glede na identifikacijo $V \otimes V \approx \mathrm{Hom}(V^*, V)$ so elementi $V \wedge V$ natanko *antisimetrični* operatorji.

Višje tenzorske produkte lahko definiramo na analogen način. Prostori $V^{\otimes k}$ so prostori k-dimenzionalnih "kubičnih" matrik, oziroma k-linearnih preslikav.

Definicija 33 *Naj bo V vektorski prostor in $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorji. Njihov vnanji produkt je podan s formulo*

$$v_1 \wedge v_2, \ldots, \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} v_{\sigma(1)} \wedge v_{\sigma(2)} \wedge, \ldots, \wedge v_{\sigma(k)}.$$

Vnanja potenca $\Lambda^k V$ vektorskega prostora V je vektorski prostor

$$\Lambda^k V = \mathrm{span}\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge \ldots e_{i_k}; \ e_i \in \mathrm{baza}(V)\}.$$

Prostor $\Lambda^k V$ je podprostor v $V^{\otimes k}$.

Definicija 34 *Naj bosta $G\colon V \to V$ in $H\colon U \to U$ linearni preslikavi. Njun tenzorski produkt je definiran s predpisom:*

$$G \otimes H : V \otimes U \longrightarrow V \otimes U$$

$$(G \otimes H)(\sum_{ij} v_i \otimes u_j) = \sum_{ij} G(v_i) \otimes H(u_j).$$

3.3.2 Konstrukcije novih svežnjev iz starih

Zgoraj smo opisali nekaj načinov, kako iz vektorskih prostorov dobimo zanimive nove prostore, katerih elemente s skupnim izrazom imenujemo tenzorji. V tem razdelku bomo te konstrukcije na očiten način posplošili na vektorske svežnje.

Definicija 35 *Naj bosta $\pi_E\colon E \to M$ in $\pi_F\colon F \to M$ vektorska svežnja nad isto bazo. Tenzorski produkt svežnjev E in F je sveženj $\pi\colon E \otimes F \to M$, katerega vlakno je:*

$$\pi^{-1}(m) = \pi_E^{-1}(m) \otimes \pi_F^{-1}(m).$$

Naj bo E podan s kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$ in F s kociklom $\{h_{\alpha\beta}\}$. Tedaj je $E \otimes F$ podan s kociklom

$$\{g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}\}.$$

Definicija 36 *Naj bo $\pi_E\colon E \to M$ vektorski sveženj, podan s kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$. Tedaj je sveženj $\widetilde{\pi}\colon \Lambda^k E \to M$, katerega vlakno je:*

$$\{\Lambda^k g_{\alpha\beta}\} = \{\overbrace{g_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} \otimes \ldots \otimes g_{\alpha\beta}}^{k} : \Lambda^k \pi^{-1}(m) \longrightarrow \Lambda^k \pi^{-1}(m)\}.$$

Sveženj $\Lambda^k E$ se imenuje k-ti vnanji produkt svežnja E.

Zgornja definicija nam sedaj omogoča definirati diferencialno k-formo.

Definicija 37 *Diferencialna k-forma na mnogoterosti M je gladek prerez svežnja $\Lambda^k(T^*M)$.*

Vektorski prostor k-form svežnjev z $\Omega^k(M)$.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha\ ; \alpha \in A\}$ atlas na mnogoterosti M in

$$g_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta)$$

kocikel prehodnih preslikav. Tedaj je tangentni sveženj TM podan s kociklom prehodnih preslikav

$$\{Dg_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{\dim M})\},$$

kjer je

$$(Dg_{\alpha\beta})(m) = D_{\varphi_\alpha(m)} g_{\alpha\beta}.$$

Sveženj T^*M je tedaj podan s kociklom

$$\{(Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{\mathrm{dimM}})\},$$

njegov k-ti vnanji produkt $\Lambda^k(T^*M)$ pa s kociklom

$$\{[(Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T]^{\Lambda^k} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^{\binom{\dim M}{k}})\}.$$

V vsaki točki $m \in M$ lahko neko k-formo ω evaluiramo na k-vektorskih poljih in dobimo skalar

$$\omega_m(X_1(m), X_2(m), \ldots, X_k(m)).$$

Torej, za vsako k-terico vektorskih polj $X_1(m), X_2(m), \ldots, X_k(m)$ je predpis

$$m \longmapsto \omega_m(X_1(m), X_2(m), \ldots, X_k(m))$$

gladka funkcija na M.

Naloga 3 *Pokažte, da je linearna k-forma ω v resnici definirana na prostoru $\Lambda^k\mathbb{R}^k$,*

$$\omega : \Lambda^k\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Upoštevajte

$$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = (\Lambda^k\mathbb{R}^n)^*.$$

Iz zgoraj smo videli, kako iz 1-form pridobivamo k-forme. Očitno pa seveda lahko na podoben način množimo med seboj tudi forme višjega ranga.

Definicija 38 *Vnanji produkt k-forme*

$$\omega_1 = v_{11} \wedge v_{12} \wedge \ldots \wedge v_{1k}$$

in l-forme

$$\omega_2 = v_{21} \wedge v_{22} \wedge \ldots \wedge v_{2l}$$

je $k+l$-forma, podana z

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)_m = (v_{11} \wedge v_{12} \wedge \ldots \wedge v_{1k})_m \wedge (v_{21} \wedge \ldots \wedge v_{2l})_m.$$

Na kratko lahko pišemo

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = v_{11} \wedge v_{12} \wedge \ldots \wedge v_{1k} \wedge v_{21} \wedge \ldots \wedge v_{2l}.$$

Definicijo po linearnosti razširimo na nerazcepne forme, oziroma na linearne kombinacije form, ki imajo obliko zgoraj navedenih form ω_1 in ω_2.

3.3.3 Lokalna izrazitev k-forme

Naj bo $V = \mathbb{R}^n$ vektorski prostor z bazo $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Ugotovimo najprej, kaj je baza prostora $\Lambda^k\mathbb{R}^n$. Očitno je prostor $\Lambda^k\mathbb{R}^k$ razpet na vse elemente oblike:

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}.$$

Po definiciji k-tega vnanjega produkta pa vemo

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = (-1)^{|\sigma|}\, e_{\sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(i_k)},$$

za vsako permutacijo σ na k-elementih. Zato je

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} = 0 \iff i_l = i_m \quad \text{za kak par } l,\, m.$$

Za vsako podmnožico $\{i_1, i_2, \ldots i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ lahko izberemo bazni vektor

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},$$

in sicer tako, da bo $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Naloga 4 *Dokažite*

(a) *Če je $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, tedaj sta elementa*

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, \quad e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}$$

linearno neodvisna.

(b) *Če so podmnožice $I_l = \{i^l_1, i^l_2, ..., i^l_k\}$ med seboj različne, so vektorji*

$$e_{I_l} = e_{i^l_1} \wedge \ldots \wedge e_{i^l_k}$$

med seboj linearno neodvisni.

Iz zgornjega sledi

$$\dim \Lambda^k\mathbb{R}^n = \binom{n}{k}$$

in baza prostora $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ je

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\ ;\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}.$$

S pomočjo zgornje ugotovitve bomo sedaj podali lokalno izrazitev diferencialne k-forme ω. Naj bo $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ lokalna baza TM in $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ lokalna baza oziroma umeritev T^*M. Tedaj je lokalna baza svežnja $\Lambda^k(T^*M)$

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \ ; i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}.$$

Lokalna izrazitev k-forme $\omega \in \Omega^k(M)$ je zato

$$\omega_m = \sum f_{i_1,\ldots i_k}(m) \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

oziroma natančneje

$$\omega_{(x_1,\ldots,x_n)} = \sum f_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_n) \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Naj bodo $X_1, \ldots, X_k$ vektorska polja in

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \ \frac{\partial}{\partial x_j}$$

njihove lokalne izrazitve. Evaluacija forme ω na teh vektorskih poljih se tedaj glasi:

$$\omega(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

$$= \left(\sum f_{i_1,\ldots,i_k} \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(x) \ \tfrac{\partial}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum f_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{2i_1} & \ldots & a_{ki_1} \\ a_{1i_2} & a_{2i_2} & \ldots & a_{ki_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i_k} & a_{2i_k} & \ldots & a_{ki_k} \end{pmatrix}.$$

Videli smo namreč, kako deluje k-forma na k-vektorjih.

3.3.4 Transformacijsko pravilo za k-forme

Naj bo umeritvena transformacija podana z matrično funkcijo $G = (g_{ij})$, za katero velja

$$dy_j = \sum_i g_{ij} \ dx_i.$$

Tedaj med baznimi elementi $\Omega^k(M)$ velja zveza

$$dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge ... \wedge dy_{j_k} = \sum_{i=1, i_k=1}^{n} g^{j_1, j_2, \ldots, j_k}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

kjer je $g^{j_1, j_2 \ldots j_k}_{i_1, i_2 \ldots i_k}$ minor, ki ga dobimo tako, da vzamemo elemente na križiščih vrstic $j_1, j_2, \ldots, j_k$ in stolpcev $i_1, i_2, \ldots, i_k$ v matriki g_{ij}.

Naloga 5 *Dokažite zgornjo formulo.*

Oglejmo si sedaj, v kakšni zvezi je $G = (g_{ij})$ z našim osnovnim kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$. Naj bosta φ_α in φ_β dve karti, ki pokrivata isto območje na M in naj bo

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

funkcija. Tedaj je diferencial *df* 1-forma na M. Lokalna izrazitev *df* je odvod preslikave

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} \quad \text{ali} \quad f \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Imamo

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = f^\alpha \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = f^\alpha \circ g_{\alpha\beta}^{-1},$$

in od tod z verižnim pravilom za odvajanje

$$Df^\beta = Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Če sedaj 1-forme pišemo kot stolpce glede na bazi $\{dx_i\}$ in $\{dy_j\}$, imamo

$$Df^\beta = (Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T \cdot Df^\alpha$$

oziroma

$$df^\beta = (Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T \cdot df^\alpha.$$

Tedaj velja:

$$dy_i = (Dg_{\alpha\beta})^T \cdot dx_i.$$

Res, naj bo

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \; dx_i = \sum_{i=1}^{n} b_j \; dy_j$$

in naj bo prehodna preslikava podana z

$$G \cdot dx_j = dy_j.$$

Imamo torej

$$G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow j - to\ mesto \quad = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{ij} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{pmatrix},$$

in od tod

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j=1}^{n} b_j \ dy_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \ \sum_{i=1}^{n} g_{ij} \ dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \ g_{ij} \ b_j \Big) \ dx_i. \end{aligned}$$

Zato

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} \ g_{ij} \ b_j,$$

oziroma

$$G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

od koder vidimo, da velja

$$G = (Dg_{\alpha\beta})^T.$$

3.3.5 Vzvrat ali pull-back diferencialne forme

Imejmo dve mnogoterosti M in N ter gladko preslikavo

$$f : M \longrightarrow N$$

med njima. Naj bo $\omega \in \Omega^k(N)$ gladka k-forma na N.

Definicija 39 *Vzvrat ali pull-back k-forme $\omega \in \Omega^k(N)$ je k-forma $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$, ki je podana takole: Za vsako k-terico vektorskih polj*

$$X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$$

velja

$$f^*(\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_k) = \omega\Big(Df(X_1), Df(X_2), \ldots, Df(X_k)\Big).$$

Trditev 9 *Vzvrat eksaktne 1-forme je eksaktna 1-forma.*

Dokaz: Za vsako vektorsko polje X imamo

$$f^*(dg)(X) = \; dg(Df(X) \overset{verizno\_pravilo}{=} D(g \circ f)(X).$$

Torej je $f^*(dg)$ 1-forma, dobljena s smernim odvodom funkcije $g \circ f = M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \mathbb{R}$,

$$f^*(dg) = d\ (f \circ g).$$

$\square$

Trditev 10 *Naj bosta* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(N)$. *Tedaj velja*

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2).$$

Dokaz: Za vnanji produkt velja

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)\ (X_1, \cdots X_{l+k}) = \sum_I \text{sign}\ \omega_1(X_{i_1}, \cdots X_{i_k}) \cdot \omega_2(X_{j_1}, \cdots X_{j_l}),$$

kjer I teče po vseh podmnožicah $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots k, \cdots k+l\}$, za $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\}$ pa velja $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\} = \{1, 2, \cdots k+l\} \setminus \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$. Za sign velja

$$\text{sign} = \begin{cases} +1 & \text{permutacija } \{i_1, \ldots i_k, j_1 \ldots, j_l\} \text{ je soda} \\ -1 & \text{permutacija } \{i_1, \ldots i_k, j_1 \ldots, j_l\} \text{ je liha} \end{cases}.$$

Imamo torej

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \ldots, X_{k+l}) = (\omega_1 \wedge \omega_2)\Big(Df(X_1), \ldots, Df(X_{k+l})\Big)$$

$$= \sum_I \text{sign}\ \omega_1\Big(Df(X_{i_1}), \ldots, Df(X_{i_k}\Big) \cdot \omega_2\Big(Df(X_{j_1}), \ldots Df(X_{j_k})\Big)$$

$$= \sum_I \text{sign}(f^*\omega_1)(X_{i_1}, X_{i_2} \ldots X_{i_k}) \cdot (f^*\omega_2)(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k})$$

$$= (f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2)(X_1, X_2 \ldots X_{k+l}).$$

$\square$

Pomembna posledica te trditve nam pove, kako se pull-back izraža lokalno (v lokalni umeritvi). Zaradi zgornje trditve je namreč dovolj videti, kaj se dogaja z 1-formami.

Naj bo $f\colon M \to N$ preslikava in $\omega \in \Omega^1(N)$ naj bo 1-forma na N. Vzvrat $f^*(\omega) \in \Omega^1(M)$ je tedaj 1-forma na M. Lokalne koordinate na N označimo z $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$, tiste na M pa z $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$. Izrazitev preslikave f v teh koordinatah naj bo

$$f(m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ f_2(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}.$$

Lokalna izrazitev ω je

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(y) dy_j.$$

Z drugimi besedami

$$\langle \omega, \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle = \alpha_j.$$

Oglejmo si vrednost vzvrata $f^*(\omega)$, evaluiranega na $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Imamo

$$\begin{aligned} (f^*\omega)(\frac{\partial}{\partial x_i}) &= \omega\Big(Df(\frac{\partial}{\partial x_i})\Big) \\ &= \omega\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \; dy_k\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \; \alpha_j. \end{aligned}$$

Označimo razvoj $f^*\omega$ po bazi dy_j z

$$f^*\omega = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \; dy_j.$$

Ker je $(f^*\omega)(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \beta_i$, dobimo

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \, \alpha_k \Big) \, dx_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \, dx_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, df_k. \end{aligned}$$

Dokazali smo torej trditev:

Trditev 11 *Če velja za $\omega \in \Omega^k(N)$ v lokalnih koordinatah $\{y_1, \dots y_n\}$,*

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, dy_k,$$

tedaj za njen vzvrat velja

$$(f^*\omega)_{(x)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f(x)) \, df_k.$$

□

S pomočjo prej dokazane trditve lahko zgornjo formulo takoj posplošimo na k-forme.

Trditev 12 *Naj za k-formo $\omega \in \Omega^k(N)$ velja*

$$\omega(y) = \sum_{I} \alpha_I(y) \, dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}.$$

Tedaj velja za njen vzvrat $f^*(\omega)$

$$(f^*\omega)(x) = \sum_{I} \alpha_I(f(x)) \, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

Pri tem smo označili $I = \{i_1, \dots, i_k\}$.

□

Poglejmo si poseben primer, ki je $f\colon M \to N$ difeomorfizem in je ω $n = $ dimM-forma, torej forma vrhnje dimenzije. Tedaj imamo v lokalnih koordinatah

$$\omega_x a(x)\ dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n,$$

in zato

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)_{(x)} &= a\ (f(x))\ df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \ldots \wedge df_n(x) \\
&= a(f(x))\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\ dx_i \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\ dx_i \wedge \ldots \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\ dx_i\Big) \\
&= a(f(x))\Big(\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}}\Big)\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= a(f(x)) \cdot \mathrm{Jac}(f(x))\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Če je ω diferencialna k- forma in $f\colon M \to N$ poljubna preslikava med prostoroma iste dimenzije, je situacija povsem podobna. Naj bo torej lokalno

$$\omega = \sum_I a_I\ dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}.$$

Zaradi linearnosti vzvrata f^* je dovolj opazovati le en sumand v zgornji vsoti. Vzemimo kar $\omega_{(y)} = a(y)\ dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_k$. Če je potrebno, pač preuredimo vrstni red koordinat. Dobimo

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)_{(x)} &= a(f(x))\ df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \ldots \wedge df_k(x) \\
&= a(f(x))\ \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \wedge \ldots \wedge (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i\Big)) \\
&= a(f(x))\ \sum_I \mathrm{Jac}\Big(\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_k)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})}\Big)\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},
\end{aligned}$$

kjer spet I teče po vseh multiindeksih $\{i_1, i_2, \ldots; i_k\}$.

Naloga 6 *Primerjajte zgoraj dobljeno formulo z že prej navedenim pravilom za transformacijo izraza k-forme iz enih koordinat v druge.*

Opomba 5 *Operacija vzvrat je vedno dobro definirana na kontravariantnih poljih, na kovariantnih pa ne. Hitro vidimo, da push-forward vektorskega polja v večini primerov* *ni dobro definirana. Če f ni surjektivna ($f\colon M \to N$), dobimo iz $V \in \Gamma(M)$ le polje vzdolž $f(M) \subset N$ in ne vzdolž N. Če f ni injektivna, smo seveda sploh v težavah, razen v posebnih primerih. Naj na primer grupa G deluje na M in naj bo kvocientni prostor $N = M/G$ gladka mnogoterost. Naj bo vektorsko polje V G-invariantno. Tedaj obstaja smiselno definirana push-forward polja V na M/G.*

3.4 Vnanji odvod

Označimo z $\Omega^*(M)$ stopničasto vnanjo algebro diferencialnih form na mnogoterosti M. Nekoliko kasneje bomo definirali integral k-forme vzdolž k-dimenzionalnih podmnogoterosti. Naj bo $N \subset M$ podmnogoterost dimenzije $(k+1)$ in naj bo $\omega \in \Omega^k(M)$ diferencialna k-forma. Naš cilj bo konstruirati operator

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M),$$

za katerega bo veljalo

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega.$$

Poseben primer zgornje formule je

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f|_{\partial\gamma} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

kjer je $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $\gamma\colon [a,b] \to M$ pa krivulja. Torej že vemo, kaj je

$$d : \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(M).$$

To je kar običajni odvod funkcije. V splošnem je operator $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ opredeljen z naslednjim izrekom:

Izrek 5 *Obstaja natanko en $\mathbb{R}$-linearen operator*

$$d : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

stopnje 1, ki zadošča naslednjim lastnostim:

1. *d je glede na $\wedge$ anti-derivacija:*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha} \alpha \wedge d\beta.$$

2. Za $f \in \Omega^0(M)$ je df je običajen odvod (diferencial) funkcije. Evaluacija

$$df(V) = V(f)$$

1-forme df na vektorskem polju je običajni smerni odvod.

3. $d \circ d = 0$

Operator, ki je določen z zgornjimi lastnostmi ima tudi tole lastnost:

4. Glede na vzvrat se d vede na naraven način. Velja

$$d_M(f^*\alpha) = f^*(d_N\alpha)$$

za $f\colon M \to N$ in $\alpha \in \Omega^*(N)$.

Dokaz: Najprej bomo definirali d na odprtih množicah v $\mathbb{R}^n$. Opremimo U s koordinatami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Naj bo

$$\alpha(x) = \sum_I \alpha_I(x)\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Poskusimo z naslednjo definicijo:

$$d\alpha(x) = \sum_I d\alpha_I(x) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Preverimo lastnosti:
1.

$$\begin{aligned}
&d\Big((\alpha dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \wedge (\beta dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_e})\Big) \\
&= d(\alpha \cdot \beta) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}) \\
&= \beta \cdot \overbrace{d\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}}^{dq(\alpha\ \ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_e}) \\
&\quad + \quad \alpha\ d\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_e} \\
&\qquad = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}$$

2.
Ta lastnost je za našo definicijo očitna.

3.

$$\begin{aligned}
d(d(\alpha dx_I)) &= d(d\alpha \wedge dx_I) \\
&= d\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \cdot dx_j \wedge dx_I\Big) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\
&= \sum_{k<j} \Big(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_k \partial x_j}\Big)\, dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dokažimo zdaj še, da za naš operator velja tudi točka 4. iz izreka. Naj bo $f\colon U \to U$ funkcija med odprtima množicama $U \subset \mathbb{R}^n$. Izberimo formo $\alpha \in \Omega^k(V)$, katere koordinatna izrazitev je

$$\alpha(y) = a(y)\; dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}.$$

Za vzvrat velja

$$\begin{aligned}
d(f^*\alpha) &= d(f^*(\alpha\; dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k})) \\
&= d\Big((\alpha \circ f)\; df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}\Big) \\
&= f^*(d\alpha) \wedge f^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge f^*(dy_{i_k}) \\
&= f^*(d\alpha \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) \\
&= f^*(d\alpha).
\end{aligned}$$

Naš operator torej ustreza vsem štirim lastnostim, navedenim v izreku. Lahko je videti, da je tudi edini, saj je z lastnostmi 1., 2. in 3. že enolično določen. To je lahko videti s pomočjo indukcije na rang forme.

Zgoraj definirani operator $d\colon \Omega^*(\mathbb{R}^n) \to \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ bomo sedaj prenesli na $\Omega^*(M)$. Najprej opazimo, da je operator d lokalen: To pomeni, da za vsako odprto množico $V \subset \mathbb{R}^n$ velja

$$(d\omega)|_V \quad \text{je forma, odvisna le od } \omega|_V.$$

Definicija 40 *Naj bo M mnogoterost in (U, φ) karta na M. Naj bo*

$$(d_M\omega)|_U \stackrel{def}{=} \varphi^*\Big(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi^{-1})^*\omega\Big)$$

za $\omega \in \Omega^*(M)$.

Preveriti moramo, ali je zgornja definicija neodvisna od izbire karte.

Naj bosta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ in (U_β, φ_β) karti na M. Naj bo kar $U_\alpha = U_\beta$. Prepričati se moramo, da sta formi

$$(d_M\omega)|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^*(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega)$$

in

$$(d_M\omega)|_{U_\beta} = \varphi_\beta^*(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\beta^{-1})^*\omega)$$

enaki.

Velja

$$\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\beta,$$

in zato

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}((\varphi_\alpha^{-1})^*\omega) &= d_{\mathbb{R}^n}([(g_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\beta)^{-1}]^*\omega) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}([\varphi_\beta^{-1} \circ g_{\alpha\beta}]^*\omega) \\ &= d_{\mathbb{R}^n}(g_{\alpha\beta}^*(\varphi_\beta^{-1})^*\omega) \\ &\overset{\text{lastnost 4}}{=} (g_{\alpha\beta})^* d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\beta^{-1})^*\omega). \end{aligned}$$

Potegnimo sedaj to formo z φ_α^* na M. Upoštevajoč $\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\beta$, dobimo

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^*\Big(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega\Big) &= \varphi_\alpha^*\Big(g_{\alpha\beta}^* d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\beta^{-1})^*\omega\Big) \\ &= \Big(\varphi_\beta^* \circ (g_{\alpha\beta}^{-1})^* \circ g_{\alpha\beta}^*\Big)\Big(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\beta^{-1})^*\omega)\Big) \\ &= \varphi_\beta^*\Big(d_{\mathbb{R}^n}((\varphi_\beta^{-1})^*\omega)\Big). \end{aligned}$$

Operator d_M je torej dobro definiran. Lastnosti 1. - 4. sledijo iz lastnosti 1. - 4. za operator $d_{\mathbb{R}^n}$. Trdimo, da je zgoraj definirani operator res edini operator na $\Omega^*(M)$, ki ustreza lastnostim od 1. - 3.

Najprej dokažemo, da velja:

$$\omega|_U = 0 \quad \Rightarrow \quad d'_M\omega|_U = 0$$

za vsak operator d'_M, ki ustreza lastnostim 1., 2. in 3. Naj bo $\chi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funkcija z lastnostmi:

$$\begin{aligned} \chi|_V &= 0 \quad \text{za neki } V \subset U \\ \chi|_{M\setminus U} &= 1. \end{aligned}$$

Tedaj na V velja $\omega = \chi \cdot \omega$. Zato:

$$d'_M(\omega) = d'_M(\chi \cdot \omega) = d'_M\chi \wedge \omega + \chi \cdot d'_M(\omega).$$

Toda $d'_M\chi = d\chi = 0$ na V, zato

$$d'_M(\omega) = 0$$

na V za vsak $V \subset U$. Od tod navsezadnje sledi

$$d'_M\omega = 0.$$

Naj bo sedaj (U, φ) karta na M. Naj bo $\chi\colon M \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero velja

$$\begin{aligned} \chi|_{U'} &= 0 \quad \text{za neko } U' \subset U \\ \chi|_{M \setminus U} &= 1. \end{aligned}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} d'_M(\omega) &= d'_M(\chi \cdot \omega + (1-\chi) \cdot \omega) \\ &\overset{linearnost}{=} d'_M(\chi \cdot \omega) + d'_M((1-\chi) \cdot \omega). \end{aligned}$$

Na U' je $1-\chi = 0$, zato iz zgornjega sledi, da je $d'_M(1-\chi)\omega) = 0$ na U'. Torej imamo

$$d'_M(\omega) = d'_M(\chi \cdot \omega).$$

Forma $\chi \cdot \omega$ je forma z nosilcem v lokalni karti (U, φ). Zaradi enoličnosti d na $\mathbb{R}^n$ za tako formo velja $d'_M(\chi \cdot \omega) = d_M(\chi \cdot \omega)$.

Definicija 41 *Forma $\omega \in \Omega^k(M)$ je sklenjena, če velja*

$$d\omega = 0.$$

Forma $\omega \in \Omega^k(M)$ je eksaktna, če obstaja forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, tako da je

$$d\alpha = \omega.$$

Vpeljimo naslednje oznake:

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M)\ ;\ d\omega = 0\} \\ B^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M)\ ; \omega = d\alpha \text{ za neko} \alpha \in \Omega^{\mathrm{k+1}}(\mathrm{M})\}. \end{aligned}$$

Ker velja

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0,$$

imamo

$$B^k(M) \subset Z^k(M).$$

Opomba 6 *Množica* $\Omega^k(M)$ *je vektorski prostor. Ker je vnanji odvod linearnen operator, so vektorski prostori tudi njegove slike in jedra. Torej so tudi množice* $B^k(M)$ *in* $Z^k(M)$ *vektorski prostori za vsak* $k = 1, \ldots n$.

Definicija 42 *Za gladko mnogoterost* M *je* k*-ta de Rhamova kohomološka grupa* $H^k_{DR}(M)$ *podana kot kvocientni vektorski prostor*

$$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

Pravimo, da sta formi ω_1 in ω_2 kohomologni, če se razlikujeta za eksaktno formo:

$$\omega_1 - \omega_2 = d\alpha, \quad \text{za neki } \alpha.$$

Izrek 6 *Za vsako naravno število* $k > 0$ *velja*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = 0.$$

Za $k = 1$ *imamo*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{\textit{konstantne funkcije}\} = \textit{1- dimenzionalni vektorski prostor.}$$

Zgornji izrek se imenuje Poincaréjeva lema. Eksplicitno pravi, da je vsaka k-forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, ki je sklenjena, tudi eksaktna:

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = d\alpha.$$