Parcialne diferencialne enačbe

Pavle Saksida
Oddelek za matematiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Maj 2023

1 Uvod

Definicija 1 *Naj bo najprej* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *območje. Označimo z*

$$\begin{array}{ccc} u:\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,...,x_n) & \longrightarrow & u(x_1,x_2,...,x_n) \end{array}$$

funkcijo, definirano na Ω*. Naj bo sedaj* $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ *za neki* N *in naj bo*

$$F:\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$$

neka zvezna funkcija. Enačba oblike

$$F(x_1,...,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_ix_j},\ldots,u_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}})=0 \tag{1}$$

je parcialna diferencialna enačba za neznano funkcijo $u=u(x_1,...,x_n)$*. Pri tem je*

$$u_{x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Red enačbe (70) je enak stopnji najvišjega odvoda, ki v (70) nastopa.

Primeri 1 *Enačba*

$$uu_t-u_x=f(x,t)$$

je enačba I. reda. Enačba

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$$

je enačba II reda.

Vsaka funkcija $u_0(x_1,\ldots,x_n)$, ki (70) spremeni v identiteto

$$F\Big(x_1,\ldots,x_n,(u_0)_{x_1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,(u_0)_{x_n}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,(u_0)_{x_{i_1}\ldots x_{i_l}}(x_1,\ldots,x_n)\Big)\equiv 0$$

je rešitev enačbe (70)

2 O rešljivosti

Vsak sistem navadnih diferencialnih enačb (NDE) je vsaj lokalno rešljiv-imamo eksistenčni izrek. Pri paricalnih diferencialnih enačbah (PDE) ni tako.

Oglejmo si primer. Naj bosta $f(x, y)$ in $g(x, y)$ gladki funkciji. Oglejmo si sistem PDE za $u(x, y)$, potem z:

$$\begin{aligned} u_x &= f(x,y) \\ u_y &= g(x,y) \end{aligned}$$

Po čem se ta sistem sprašuje? Vpeljimo vektorsko polje

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

na nekem obmoǰu v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Naj bo podano z

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

Naš sistem lahko zapišemo v obliki:

$$\nabla u = F, \tag{2}$$

oziroma

$$\text{grad } u = F$$

Iščemo torej potencial $u(x, y)$ polja $F(x, y)$. Toda, kot vemo, vsako polje ni potencialno.

Oglejmo si geometrijski pomen sistema (2). Funkciji $u = u(x, y)$ pripada graf:

$$(x, y) \longrightarrow (x, y, u(x, y)),$$

torej neka ploskev $\mathcal{G}$

$$\Omega \longrightarrow \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3.$$

V vsaki točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ lahko poiščemo tangentno ravnino $T_{(x_0,y_1,u(x_0,y_0))}\mathcal{G}$ na graf funkcije u.

Poišiemo bazo te tangentne ravnine: Imamo dve koordinatni krivulji:

$$x \longmapsto (x, y_0, u(x, y_0))$$

$$y \longmapsto (x_0, y, u(x_0, y))$$

Tangenti v x_0 oziroma v y_0 bosta baza tangentnega prostora $T_{(x_0,y_0,u(x_0,y_0))}\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|_{x=x_0}(x, y_0, u(x, y_0)) &= (1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)) \\ \frac{d}{dy}|_{y=y_0}(x_0, y, u(x_0, y)) &= (0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Naš sistem zahteva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

Situacijo si lahko razlagamo takole: Naše vektorsko polje $F = (f, g)$ podaja polje ravnin v $\mathbb{R}^3$. Za vsako točko (x_0, y_0, z_0) je "vrednost" tega polja ravnina

$$\mathcal{L}\{(0, 1, f_(x_0, y_0)), (0, 1, g_(x_0, y_0))\},$$

torej linearna lupina vektorjev v $(1, 0, f)$ in $(0, 1, g)$v točki (x_0, y_0, z_0). Naše polje ravnin je invariantno glede na translacije v smeri z. Polje ravnin je dvodimenzionalna analogija vektorskega polja.

Spomnimo se: Rešitev (sistema) navadnif diferencialnih enačb I. reda je integralska krivulja nekega vektorskega polja. (To vektorsko polje je postalo desna stran enačbae. Spomnimo se, kaj je to integralska krivulja:

Krivulja $\gamma(t)\colon t \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ je integralska krivulja vektorskega polja $\mathcal{F}$ v $\mathbb{R}^n$, če za vsak $t_0 \in (a, b)$ velja:

$$\dot{\gamma}(t_0) = \mathcal{F}(\gamma(t_0)).$$

V našem primeru imamo namesto vektorskega polja polje ravnin,

$$\mathcal{L}\{(1, 0, f_(x_1, y_0)), (0, 1, g_(x_0, y_0))\}$$

Iščemo ploskev S, za katero bo veljalo: V vsaki točki $(x_0, y_0, z_0) \in S$ imamo:

$$T_{(x_0,y_0,z_0)}S = \mathcal{L}\{(1, 0, f(x_0, y_0)), (0, 1, g(x_0, y_0))\}.$$

Označimo $\mathcal{R}_{(x,y,z)} = \mathcal{L}\{(1, 0, f(x, y)), (0, 1, g(x, y))\}$. Preslikava $(x, y, z) \mapsto \mathcal{R}_{(x,y,z)}$ podaja polje ravnin v $\mathbb{R}^3$. Iščemo ploskve S, za katere velja

$$T_{(x,y,z)}S = \mathcal{R}_{(x,y,z)}.$$

Denimo, da vsako S lahko predstavimo kot graf $\mathcal{G}_u$ neke funkcije $(x, y) \mapsto u(x, z)$. Tedaj torej iščemo take funckije $u(x, y)$, da bo veljajo

$$S = \mathcal{G}_u.$$

Za vsak (x, y) mora zato veljati

$$\mathcal{L}\{(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}), (0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}) = \mathcal{R}_{(x,y,z)}$$

Zgornja zahteva nam očitno da sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= g(x, y) \end{aligned}$$

Vemo, da ta sistem v splošnem ni rešljiv. Spomnimo se Stokesovega izreka : Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ območje v $\mathbb{R}^2$ Naj bo $t \mapsto (x(t), y(t))$ parametrizacija robu $\partial\Omega$. Imamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_{\partial\Omega} \langle (f, g), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle \, dt \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathrm{rot}(f(x, y), g(x, y), 0) dxdy \\ &= \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dxdy \end{aligned}$$

Fiksirajmo izhodišvno točko $p \in \mathbb{R}^2$ Vektorsko polje $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ je potencialno natanko tedaj, ko je krivuljni integral

$$\int_p^{u_0} f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

odvisen le od končne točke u_0 in je neodvisen od izbire poti med p in u_0. To je res natanko tedaj, ko je integral zgornjega integranda po vsaki sklenjeni poti enak 0. Zgoraj navedeni Stokesov izrek in kratek razmislek pa nam pove, da je to res natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{3}$$

Ugotovili smo: Sistem

$$u_x = f, \quad u_y = g$$

je rešljiv natanko tedaj, ko je polje $F(x, y)$ potencialno, to pa je res natanko tedaj, ko je izpolnjen pogoj (3).

Na tem enostavnem primeru smo ugotovili naslednje. Nekatere sisteme PDE lahko razumemo kot iskanje integralskih ploskev podanih polj ravnin. Integralske ploskve ne obstajajo za vsako polje ravnin. To poljemora zadoščati nekemu dodatnemu pogoju. V tem se PDE bistveno razlikujejo od NDE. Vsak sistem NDE namreš lahko prevedemo na sistem NDE 1. reda. Eksistenčni izrek pove, da ima vsak tak sistem (vsaj lokalno) rešitev. Torej, vektorska polja imajo integralske objekte. Polja večdimenzionalnih prostorov pa ne nujno. Splošnih eksistenčnih izrekov za PDE ni.

3 Število rešitev PDE

Spomnimo se: sistem rešitev NDE I reda za n neznanih funkcij je neka n-parametrična družina funkcij. Na primer, homogen sistem n linearnih NDE: rešitev je n-dimenzionalni vektorski prostor. Ekvivalentno: ena NDE reda n ima n- parametrično družino rešitev.

Oglejmo si naslednjo PDE za $u(x, t)$:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4}$$

Hitro opazimo:

$$u(x, t) = f(x + ct)$$

je rešitev (4) za vsako funkcijo $f(s)$ ene spremenljivke. Opazimo pa tudi:

$$u(x, t) = g(x - ct)$$

je tudi rešitev (4) za vsako dvakrat odvedljivo funkcijo g. Lahko je videti. Za poljuben par (f, g) dvakrat odvedljivih funkcij ene spremenljivke velja:

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \tag{5}$$

je spet rešitev (4).

Kasneje bomo videli: Družina (5) je "splošna rešitev" enačbe (4). Splošna rešitev je torej neki neskončno dimenzionalni prostor.

Enačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

se imenuje valovna enačba. Natančneje, to je valovna enčba v eni prostorski dimenziji.

Oglejmo si izpeljavo enačbe, ki opisuje nihanje neskončne strune. Nihanje strune opišemo s funkcijo dveh spremenljivk $u = u(x,t)$, ki meri odmik strune od mirovne lege $u_0(x) = 0$. Naj bo ρ gostota mase na dolžinsko enoto naše strune. Oglejmo si zelo kratek delček strune nad intervalom $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ na abscisni osi.

Katere sile delujejo na naš delček?

1. Neka zunanja sila $f(x,t)$. Predpostavili bomo, da je vzporedna z enotskim vektorjem $\vec{e_2} = (0,1)$.

2. Sila napetosti $\vec{T}$ v struni.

O sili napetosti govori Hookov zakon. Sila napetosti je sorazmerna relativnemu raztegu strune.

$$\vec{T} = d\sqrt{1+u_x^2}\ \vec{e}_\tau$$

Izraz pod korenom je res relativni raztezek:

$$\sqrt{1+u_x^2} = \frac{\sqrt{dx^2+du^2}}{dx}.$$

Struna je opisana s krivuljo $x \mapsto (x, u(x))$. Tangenta na struno je vektor $(1, u_x)$, normirana tangenta pa je $\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \cdot (1, u_x)$.

Dinamiko našega delčka opisuje II. Newtonov zakon.

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \rho\, u_{tt}\; dl = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x,t) dl + \vec{e_2} \cdot (\vec{T_+} - \vec{T_-}),$$

kjer je T_+ sola napetosti v desem krajišču delčka, T_- pa v levem krajišču. Zapišimo to enačbo nekoliko drugače: integracija nam da

$$\vec{e_2} \cdot (\vec{T_+} - \vec{T_-}) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (\vec{e_2} \cdot \vec{T})_x\, dx$$

Pri tem je dl ločni element strune, $\rho \cdot dl$ pa linearna masa strune. Seveda je $u_{tt}(x_0, t_0)$ pospešek strune na kraju x_0 in v času t_0. Vstavimo zgornje v našo enačbo:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \rho\, u_{tt}\, dl = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f_{(xt)} dl + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (\vec{e_2} \cdot \vec{T})_x dx \tag{6}$$

Iz $dl = \sqrt{1+u_x^2}\, dx$ dobimo

$$\vec{T} = d\,\sqrt{1+u_x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \cdot (1, u_x) = d \cdot (1, u_x)$$

in od tod

$$\vec{e_2} \cdot \vec{T} = d(1, u_x) \cdot (0,1) = d \cdot u_x.$$

Vstavimo v (9) in dobimo

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \rho\, u_{tt} \sqrt{1+u_{x^2}}\ dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Big(d\, u_{xx} + f(x,t)\sqrt{1+u_x^2}\Big) dx$$

Spravimo vse na eno stran, dobimo:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \Big(\rho\, u_{tt}\sqrt{1+u_x^2} - du_{xx} - f(x,t)\sqrt{1+u_x^2}\Big)\, dx = 0 \tag{7}$$

Zgornja formula velja za vsak x_0 in za vsak, še tako majhen $\delta > 0$. Označimo na kratko

$$\alpha(x,t) = \Big(\rho\, u_{tt}\sqrt{1+u_x^2} - du_{xx} - f(x,t)\sqrt{1+u_x^2}\Big).$$

Denimo, da je $\alpha(x_0,t_0)A > 0$ za neki (x_0,t_0). Zaradi zveznosti bi tedaj ostajal $\delta > 0$, tako da bi veljalo

$$\alpha(x,t_0) > \frac{A}{2}, \quad \text{za} \quad \text{vsak} \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

To pa bi pomenilo

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \alpha(x,t_0)\ dx > 0,$$

kar pa je v nasprotju z (7). Torej velja

$$\rho\, u_{tt}\sqrt{1+u_x^2} - du_{xx} - f(x,t)\sqrt{1+u_x^2} = 0$$

Označimo $c = \sqrt{\frac{d}{\rho}}$. Delimo z $\rho\,\sqrt{1+u_x^2}$ in dobimo

$$u_{tt} - c^2\, \frac{u_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2}} = \frac{1}{\rho} f(x,t).$$

Dobili smo nelinearno valovnao enačbo.

Če je struna napeta, potem

$$(1 + u_{x^2})^{\frac{1}{2}} \approx 1. \tag{8}$$

Res; pri napeti struni je u_x majhen, torej je u_x^2 še toliko manjši, zato res velja približek (8). V tem približku dobimo *linearno valovno enačbo:*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{1}{\rho} f(x,t). \tag{9}$$

Valovna enačba kot limita sistemov navadnih diferencialnih enačb: Spomnimo se, kako smo prišli do valovne enačbe (9). Izpeljali smo enačbo za vsak delček strune nad intervali $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, kjer je δ je majhen. Mislimo si, da imamo struno končne dolžine. Naj bo ta struna sestavljena iz N delčkov, opisanih zgoraj. Pri naši izpeljavi smo za vsak delček dobili NDE oblike:

$$m\,\ddot{u} = T + f$$

Za vsak delček imamo neznano funkcijo:

$$u_i(t) : i = 1, \ldots, N$$

Imamo torej $N \times N$ sistem navednih diferencialnih enačb:

$$m\,\ddot{u}_k = T_k(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) + f_k, \quad k = 1, \ldots, N \tag{10}$$

Splošna rešitev tega sistema je $2N$ -parametrična družina funkcij. Ko pošljemo $N \to \infty$, dobimo iz sistema (10) valovno ečbo, ki je parcialna diferencialna enačba drugega reda. Pri tem bo splošna rešitev sistema (10) postala neskončna družina funkcij.

4 Enačbe prvega reda

Neznana funkcija u naj bo funkcija n spremenljivk $x_1, x_2 \ldots x_n$. Imejmo funkcijo:

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R},$$

kjer je Ω območje. Enačba oblike:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1} u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

se imenuje parcialna enačba I. reda.

Zaradi enostavnosti zapisa se bomo omejili na dve neodvisni spremenljivki (x, y). Imamo:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{11}$$

Klasični pristop k reševnju, ki ga bomo opsali, je v bistvu geometrijski. Ne bomo neposredno iskali funkcije $u(x, y)$, ampak njen graf:

$$\mathcal{G}_u = (x, y, u_{(x,y)}),$$

ki je neka ploskev v $\mathbb{R}^3$.

Vsaka točka $\mathcal{G}_u$ ima tangentno ravnino $T_{(x_0,y_0,u(x_0,y_0))}\mathcal{G}_u$. Vemo, da je ta tangentna ravnina je linearna lupi na tangentnih vektorjev, ki sta tangenti na koordinatni krivulji.

$$\begin{aligned} x &\longmapsto (x, y_0, u(x, y_0)) \ \text{ v } x_0, && (12) \\ y &\longmapsto (x_0, y, u(x_0, y)) \ \text{ v } y_0. && (13) \end{aligned}$$

Tangentna vektorja sta torej

$$(1, 0, u_x(x_0, y_0)) \quad \text{in} \quad (0, 1, u_y(x_0, y_0)).$$

Zveza (11) podaja v vsaki točki $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ pogoj na par $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$. Spomnimo se: Normala na $T_{(x_0,y_0,u(x_0,y_0))}\mathcal{G}_u$ je vektorski produkt naših baznih vektorjev, torej:

$$\vec{n}(x_0, y_0) = (-u_x, -u_y, 1)_{(x_0,y_0)}$$

Lahko si mislimo, da (11) v vsaki točki $\mathbb{R}^3$ podaja pogoj na $\vec{n}(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$. Zdi se, da naša zveza (11) torej podaja vektorsko polje normal. Vsaka normala podaja ravnino, ki je nanjo pravokotna. Ta ravnina mora biti tangentna ravnina grafa $\mathcal{G}_u$. Spet torej iščemo integralski objekt nekega polja ravnin v $\mathbb{R}^3$.

Toda zgornji opis ni povsem pravilen. Eňacba (11) je le ena, količini u_x in u_y pa sta dve. Torej (11) v vsaki točki (x_0, y_0, u_0) podaja 1-parametrično družino normal in s tem enoparametrično družino potencialnih tangentnih ravnin.

Videli bomo, da je kljub tej dodatni težavi problem rešljiv. Najprej se bomo lotili posebnega primera (11), ki je enostavejši od splošnega.

4.1 Kvazilinearna PDE I reda

Kvazilinearna enačba I. reda je enačba oblike:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

kjer so $a(x,y,u)$, $b(x,y,u)$, $c(x,y,u)$ neke, dovolj lepe funkcije.

Oglejmo si zelo enostaven primer:

$$u_x = c_0\, u + c_1(x,y)$$

Torej $a(x,y,u) = 1$ in $b(x,y,u) = 0$ in $c(x,y,u) = c_0 u + c_1(x,y)$. Zgornja enačba je v bistvu navadna diferencialna enačba. Ker je linearna NDE I. reda, jo znamo rešiti. Splošna rešitev je

$$u(x,y) = e^{c_0 x}\Big(\int_0^x (e^{-c_0\,\xi} c_1(\xi,y)\, d\xi + F(y)\Big)$$

Za vsako funkcijo $F(y)$ je $u(x,y)$ rešitev naše enačbe. Če hočemo dobiti zgolj eno rešitev, moramo naši enačbi dodati še kaj. V tem primeru dodamo začetni pogoj. Tak pogoj je na lahko primer :

$$u(0,y) = y$$

Vstavimo v rešitev in dobimo:

$$u(0,y) = e^{c_0\, 0}\Big(\int_0^0 \dots\ + F(y)\Big),$$

torej

$$u(0,y) = F(y)$$

Iz naše zahteve $F(y) = y$ torej dobimo natanko določeno rešitevzačetnega problema

$$u_x = cu + c_1(x,y), \quad u(0,y) = y.$$

Podana je s formulo

$$u(x,y) = e^{c_0 x}\Big(\int_0^x (e^{-c_0\,\xi} c_1(\xi,y) d\xi + y\Big).$$

Kako smo reševali: Najprej smo glede na eno spremenljivko rešili družino navaddnih diferencialnih enačb. Torej, "po eni spremenljivki smo integrirali". Pri vsakem y_0 smo dobili mnogo rešitev. Zato smo pri vsakem y_0 dodali začetni pogoj, ki je pri y_0 izbral natanko eno rešitev.

Geometrijsko gledano smo iskali smo ploskev $(x, y, u(x, y))$ Najprej smo dobili krivulje, parametrizirane z x, ki so bile kandidatke za krivulje na iskani ploskvi. Nato pa smo zahtevali še, da na iskani ploskvi leži začetna krivulja

$$y \longmapsto (0, y, y) \subset \mathbb{R}.$$

Ta nam je potem podala začetne pogoje za krivulje, dobljene z integracijo enačbe. Tako je nastala iskana ploskev. Ker je bla ploskev podana kot graf funkcije, smo lahko iz ploskve hitro "prebrali" iskano funkcijo $u(x, y)$.

4.2 Metoda karakteristik

S to metodo rešujemo začetne probleme za PDE I reda. Metodo je razvil W. R. Hamilton. Imejmo torej kvazilinearno enačbo:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{14}$$

in začetni pogoj:

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad s \in (\alpha, \beta)$$

Zahtevamo, da krivulja $\gamma(s)$ leži na rešitveni ploskvi $\mathcal{G}_u$, ki je graf iskane funkcije $u(x, y)$,

$$\mathcal{G}_u = \{(x, y, (x, y))\}$$

Enačbo (14) lahko za pišemo takole:

$$\langle (a, b, c)), (u_x, u_y, -1) \rangle = 0 \tag{15}$$

Iščemo tako družino krivulj, ki bi lahko vse ležale v rešitveni ploskvi $(x, y, u(x, y))$. Normala na rešitveno ploskev v poljubni točki je:

$$(-u_x, -u_y, 1)$$

Izraz (15) pove: V vsaki točki $(x, y, u(x, y)$ je vektorsko polje

$$(x, y, u) \longmapsto (a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$$

pravokotno na vektor

$$(-u_x, -u_y, 1) \in T_{(x,y,u(x,y))}\, \mathcal{G}_u$$

Torej mora veljati:

$$(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)) \in T_{(x,y,u(x,y))}\, \mathcal{G}_u,$$

Integralske krivulje polja (a, b, c) bodo torej ležale v ploskvi $\mathcal{G}_u$. Z drugimi besedami, krivulje $t \longrightarrow (x(t), y(t), u(t))$, ki rešijo sistem

$$\begin{aligned} x_t &= a(x(t), y(t), u(t)) \\ y_t &= b(x(t), y(t), u(t)) \\ u_t &= c(x(t), y(t), u(t)) \end{aligned} \tag{16}$$

bodo ležale v kandidatih za rešitveno ploskev. Iz splošnih rešitev zgornjega sistema bomo izbrali krivulje, ki dejansko ležijo v rešitveni ploskvi s pomočjo začetnih pogojev, ki jih določa krivulja

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$

Rešujemo torej družino začetnih problemov za sisteme navadnih diferencialnih enačb z neodvisno spremenljivko t. Družina je parametrizirana s parametrom s. Iščemo torej funkcije $x(t, s), y(t, s), u(t, s)$, ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned} x_t(t, s) &= a(x(t, s)), y(t, s), u(t, s)) \\ y_t(t, s) &= b(x(t, s)), y(t, s), u(t, s)) \\ u_t(t, s) &= c(x(t, s)), y(t, s), u(t, s)) \end{aligned} \tag{17}$$

pri začetnih pogojih

$$x(0, s) = x_0(s) \quad y(0, s) = y_0(s) \quad u(0, s) = u_0(s).$$

Pri tem je $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ zgoraj navedena začetna krivulja. Rešitev začetnega problema (17) je preslikava

$$(t, s) \longmapsto (x(t, s), y(t, s), u(t, s)). \tag{18}$$

Denimo, da je ta preslikava parametrizacija neke ploskve v $\mathbb{R}^3$. Ta ploskev je dobljena tako, da iz vsake toške $\Gamma(s_0)$ potegnemo integralsko krivuljo

$$t \longmapsto (x(t,s_0), y(t,s_0), u(t,s_0)), \tag{19}$$

vektorskega polja

$$(x,y,z) \longmapsto (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u).$$

Družina integralskih krivulj (19), parametrizirana s parametrom s se združi v ploskev $S \subset \mathbb{R}^3$.

Vpeljimo nekaj standardne terminologije. Sistem (17) se imenuje *karakteristični sistem* snačbe (14). Integralske krivulje (19) se imenujejo *karakteristične krivulje* ali *karakteristike* enačbe (14). Velikokrat s terminom *karakteristična krivulja* označujemo tudi krivulje

$$t \longmapsto (x(t,s_0), y(t,s_0)) \subset \mathbb{R}^2,$$

torej projekcije zgoraj definiranih karakteristik na ravnino $xy \subset \mathbb{R}^3$. Velikokrat s terminom *karakteristika* označujemo tudi integralske krivulje polja (a,b,c), ki ne ustrezajo začetnum pogojem, podanim s krivuljo Γ.

V nadaljevanju bomo formulirali pogoj, ki zagotavlja, da je preslikava (18) res parametrizacija neke ploskve. Izkazalo se bo, da bo isti pogoj zagotovil tudi, da je ta ploskev reparametrizacija grafa $\mathcal{G}_u$, kjer je $u(x,y)$ rešitev začetnega problema, podanega z enačbo (14) in z začetno krivuljo $s \mapsto \Gamma(s)$. Preslikava (18) je parametrizacija neke ploskve v $\mathbb{R}^3$ natanko tedaj, ko je njen rang povsod enak 2.

Oglejmo si najprej poseben primer kvazilinearne PDE I. reda, namreč *linearno* PDE I. reda. Ta enačba je oblike

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c_0(x,y)u + c_1(x,y) \tag{20}$$

skupaj z začetnim pogojem

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)).$$

Karakteristični sistem se glasi

$$\begin{aligned} x_t &= a(x(t),y(t)) \\ y_t &= b(x(t),y(t)) \\ u_t &= c_0(x(t),y(t))\,u + c_1(x(t),y(t)). \end{aligned} \tag{21}$$

Opazimo, da sta prvi dve enačbi neodvisni od tretje. Poskušimo torej najrej rešiti 2×2 sistem

$$\begin{aligned} x_t &= a(x,y) \\ y_t &= b(x,y) \end{aligned}$$

Natančneje, rešujemo družino začetnih problemov

$$\begin{aligned} x_t(t,s) &= a(x(t,s)), y(t,s)) \\ y_t(t,s) &= b(x(t,s)), y(t,s)) \end{aligned}$$

$$x(0,s) = x_0(s), \quad y(0,s) = y_0(s),$$

Če nam ta problem uspe rešiti, dobimo preslikavo

$$(t,s) \longrightarrow (x(t,s), y(t,s)).$$

To lahko vstavimo v tretjo enačbo

$$u_t(t,s) = c_0(x(t,s), y(t,s))u + c_1(x(t,s), y(t,s)) \tag{22}$$

sistema (22) in dobimo nehomogeno linearno navadno diferencialno enačbo prvega reda. To enačbo pa znamo rešiti. Iz njene splošne rešitve dobimo za vsak s natanko določeno iskano rešitev z uporabo začetne vrednosti

$$u(0,s) = u_0(s),$$

kjer je $\gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. Denimo, da je rang preslikave

$$(t,s) \longrightarrow (x(t,s), y(t,s)) \tag{23}$$

enak 2. Potem je tudi rang

$$(t,s) \longrightarrow (x(t,s), y(t,s), u(t,s))$$

enak 2. Zato je zgornja preslikava parametrizacija neke ploskve v $\mathbb{R}^3$. Poleg tega pa nam dejstvo, da je preslikava (23) ranga 2 zagotavlja, da je njen odvod v vseh točkah obrnljiv. To pa po izreku o inverzni preslikavi zagovavlja obstoj inverza

$$(x,y) \longmapsto (t(x,y), s(x,y)) \tag{24}$$

preslikave (23). (Spomnimo se, da je za lokalni obstoj inverza dovolj že obrnljivost odvoda

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

že v eni sami točki (x_0, y_0).)

V rešitev $u(t,s)$ enačbe (22) lahko torej vstavimo komponenti inverzne preslikave (28) in dobimo,

$$\widetilde{u}(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$$

Upravičeno domnevamo, da je $\widetilde{u}(x,y)$ rešitev našega Cauchyjevega problema (20). V nadaljevanju bomo dokazali, da je domneva drži.

Primer 1 *Rešimo Cauchyjev problem*

$$u_x + u_y = 2$$
$$u(x,0) = x^2$$

Karakteristični sistem enačbe je

$$\begin{aligned} x_t(t,s) &= 1 \\ y_t(t,s) &= 1 \\ u_t(t,s) &= 2, \end{aligned}$$

začetni pogoj pa je podan s funkcijami

$$x(0,s) = s, \quad y(0,s) = 0, \quad u(0,s) = s^2.$$

Dobimo:

$$x(t,s) = t + f(s), \quad y(t,s) = t + g(s), \quad u(t,s) = 2t + h(s)$$

in

$$x(0,s) = f(s) = s, \quad y(0,s) = g(s) = 0, \quad u(0,s) = h(s) = s^2$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} x(t,s) &= t + s \\ y(t,s) &= t \\ u(t,s) &= t + s^2 \end{aligned}$$

Invertiranje preslikave $(t,s) \mapsto (x(t,s), y(t,s))$ *je trivialno in nam da*

$$\begin{aligned} t &= y \\ s &= x - y \end{aligned}$$

To vstavimo v izraz za $u(t,s)$ *in dobimo končni rezultat.*

$$u(x,y) = u(t(x,y), s(x,y) = 2y - (x-y)^2.$$

Zapišimo sedaj osnovni eksistenčni izrek za kvazilinearne parcialne diferencialne enačbe I reda.

Izrek 1 *Cauchyjeva naloga naj bo podana z enačbo:*

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

in z začetno krivuljo

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)).$$

Denimo, da na nekem intervalu $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ *velja*

$$J(s) = \begin{pmatrix} a & b \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{pmatrix} \neq 0 \tag{25}$$

kjer je $a = a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)), b = b(x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ *in* $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. *Predpostavimo tudi, da so* a, b, c *so gladke funkcije v neki okolici vsake točke*

$$(x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta).$$

Tedaj ima naša Cauchyjeva naloga natanko eno rešitev v neki okolici

$$U = \{(t,s) \in (-\epsilon, \epsilon) \times (s_0 - \delta, (s_0 + \delta)\}$$

začetne krivulje. Pri tem je $\epsilon > 0$ *neko (dovolj majhno) število.*

Če pogoj (25) ni izpolnjen na nekem intervalu $(s - \delta, s + \delta)$*, potem ima Cauchyjev problem bodisi neskončno rešitev ali pa nobene.*

Preden dokažemo izrek, si oglejmo geometrijski pomen pogoja (25). Videli bomo, da je $J(s)$ Jacobijeva matrika neke preslikave. Spomnimo se: reševanje s pomočjo karakterističnega sistema nam da preslikavo

$$(t,s) \longmapsto (x(t,s), y(t,s), u(t,s)).$$

Pričakujemo, da bo ta preslikava ploskev in da bo reparametrizacija grafa $\mathcal{G}_u$, kjer je $u(x,y)$ rešitev našega Cauchyjevega problema. Oglejmo si prvi dve komponenti zgornje preslikave. Podajata nam preslokavo

$$\mathcal{F} : (t,s) \longrightarrow (x(t,s), y(t,s)).$$

Oglejmo si Jacobijanko $\mathcal{F}$

$$D_{(t_0,s_0)}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}_{(t_0,s_0)}.$$

Naj bo $(t_0, s_0) = (0, s_0)$. Karakteristični sistem nam pove

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b\end{aligned}$$

Prvi stoplec $D_{(0,s_0)}\mathcal{F}$ je torej vektor $(a,b)^T$, izračunan v začetni točki $(0, s_0)$. To je torej projekcija tangente na karakteristično krivuljo v točki $\Gamma(s_0)$ na začetni krivulji. Drugi stolpec $(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s})^T_{(0,s_0)}$ je projekcija tangentnega vektorja $(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s})^T_{(0,s_0)}$ na krivuljo $\Gamma(s)$ v točki s_0. Pogoj (25) torej zahteva da tangenti na projicirano karakteristiko in na začetno ktivuljo, izračunani v skupni točki $(0, s_0)$ *nista kolinearni.* Če projekciji tangent nista kolinearni, potem tudi tangenti sami nista kolinearni; sta transverzalni. To pomeni, da je rang ploskve

$$(t, s) \longmapsto (x(t, s), y(t, s), u(t, s)) \tag{26}$$

v točki $\Gamma(s_0)$ enak 2. Zaradi zveznosti pa je enak 2 tudi v neki okolici točke $\Gamma(s_0)$. Torej je zgornja preslikava res parametrizacija neke ploskve.

Pogoj (25) pa ima še eno pomembno vlogo. Omogoči nam izraziti ploskev (26) kot graf neke funkcije. Res: Če je $J(s_0) \neq 0$ v točki $\Gamma(s_0)$ na začetni krivulji, potem po izreku o inverzni preslikavi lokalno obstja preslikava

$$(x, y) \longmapsto (t(x, y), s(x, y)),$$

ki je inverzna preslikavi $(t, s) \mapsto (x(t, s), y(t, s))$. V neki dovolj majhni okolici točke $(0, s_0)$ torej lahko zapišemo

$$\widetilde{u}(x, y) = u(t(x, y), s(x, y)).$$

Domnevamo, da je ta funkcija rešitev našega Cauchyjevega problema.

Dokaz izreka: Začetek dokaza bo v resnici le ponovitev zgornjih opazk o geometrijskem pomenu transverzalnostnega pogoja.

Oglejmo si spet karakteristični sistem

$$\begin{aligned}x_t(t, s) &= a(x(t, s)), y(t, s), u(t, s))\\ y_t(t, s) &= b(x(t, s)), y(t, s), u(t, s))\\ u_t(t, s) &= c(x(t, s)), y(t, s), u(t, s))\end{aligned}$$

z začetnimi pogojo

$$x(0,s) = x_0(s) \quad y(0,s) = y_0(s) \quad u(0,s) = u_0(s).$$

Po osnovnem eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe ima ta začetni problem natanko eno rešitev ori vsakem $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Dobimo torej preslikavo

$$G : (t,s) \longmapsto (x(t,s), y(t,s), u(t,s))$$

Odvod te preslikave v vsaki točki $(0,s)$, $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ je enak

$$D_{(0,s_0)}G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix}_{(0,s_0)} = \begin{pmatrix} a & x_0'(s_0) \\ b & y_0'(s_0) \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix}_{(0,s_0)}$$

Po pogoju (25) je zgornji 2×2 blok te matrike neizrojen, zato je rang celotne matrike v točki $(0.s_0)$ enak 2. Torej je enak 2 tudi v neki okolici te točke.

Prepričajmo se sedaj, da je funkcija

$$\widetilde{u}(x,y) = u(t(x,y), s(x,y))$$

res rešitev enačbe naše enačbe

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u).$$

Imamo

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x &= u_t t_x + u_s s_x \\ \widetilde{u}_y &= u_t t_y + u_s s_y \end{aligned} \tag{27}$$

Ker sta si preslikavi

$$(t,s) \longmapsto (x(t,s), y(t,s)), \quad (t,s) \longmapsto (t(x,y), s(x,y))$$

inverzni, sta si inverzna tudi njuna odvoda. Torej imamo matrično enačbo

$$\begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & x_s \\ b & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ki nam da sistem skalarnih enačb

$$\begin{aligned} at_x + bt_y &= 1 \\ as_x + bs_y &= 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Sedaj lahko vstavimo (27) in (28) v našo kvazilinearno enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} a\widetilde{u}_x + b\widetilde{u}_y &= a(u_t t_x + u_s s_x) + b(u_t t_y + u_s s_y) \\ &= u_t(at_x + bt_y) + u_s(as_x + bs_y) \\ &= \widetilde{u}_t \\ &= c \end{aligned}$$

V drugi enakosti smo uporabili karakteristični sistem. Torej funkcija $\widetilde{u}(x, y)$ res reši našo kvazilinearno enačbo.

Edinost: Dokazati moramo, da je pri pogoju (25) rešitev, dobljena s pomočjo karakterističnega sistema res edina rešitev pri danem začetnem pogoju.

Naj bo $f(x, y)$ neka rešitev našega začetnega problema. Integralska ploskev $(x, y, f(x, y))$ torej vsebuje začetno krivuljo $\Gamma(s)$. dokazati moramo, da je ta ploskev sestavljena iz karakterističnih krivulj.

Izberimo poljuben s_1 in označimo

$$\Gamma(s_1) = (x(0), y(0), f(x(0), y(0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

Naj bo sedaj

$$t \longrightarrow ((x(t), y(t), u(t)),$$

karakteristična krivulja, za katero velja:

$$(x(0), y(0), u(0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

Dokazati hočemo, da ta karakteristika v celoti leži na ploskvi $(x, y, f(x_0, y_0))$. Oglejmo si funkcijo:

$$\Psi(t) = u(t) - f(x(t)), y(t))$$

Upoštevajmo karakteristični sistem:

$$x_t = a(x, y, u), \quad y_t = b(x, y, u), \quad u_t = c(x, y, u)$$

Upoštevajmo $u = \Psi + f$. Vstavimo v Ψ_t karakteristični sistem in dobimo

$$\begin{aligned} \Psi_t &= u_t - f_x x_t - f_y y_t \\ &= c - f_x a - f_y b, \end{aligned}$$

oziroma

$$\Psi_t = c(x, y, \Psi + f) - f_x(x, y)a(x, y, \Psi + f) - f_u(x, y)b(x, y, \Psi + f). \tag{29}$$

Dobili smo navadno diferencialno enačbo za $\Psi(t)$ in začetni pogoj $\Psi(0) = 0$, saj se naša karakteristika začne na ploskvi $(x, y, f(x, y))$. Ker je po predpostavki $f(x, y)$ rešitev naše kvazilinearne enačbe, je $\Psi(t) \equiv 0$ rešitev enačbe (29). Zaradi edinosti iz eksistenčnega izreka na navadne diferencialne enačbe je to tudi edina rešitev enačbe (29) pri začetnem pogoju $\Psi(0) = 0$. Torej, karakteristika

$$t \longrightarrow (x(t), y(t), u(t))$$

res v celoti leži na ploskvi $(x, y, f(x, y)$. To seveda velja za vsako karakteristiko, torej je ploskev $(x, y, f(x, y))$ res generirana s karakteristikami.

Kaj se zgodi, če pogoj (25) ne drži. (Ni izpolnjen na vsakem intervalu $(s_0-\delta, s_0+\delta)$ vzdolž začetne krivulje.) Tedaj $J(s) \equiv 0$ za $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ pomeni, da sta vrstici v $J(s)$ vzporedni. Spomnimo se, vrstica (a, b) je projekcija tangente (a, b, c) karakteristične krivulje na ravnino $(xy) \subset \mathbb{R}^3$, vrstica $(x_0'(s), y_0'(s))$ pa je projekcija tangente $(x_0'(s), y_0'(s), u_0'(s))$ na to isto ravnino.

Imamo dve možnosti:

1.) Tangenti (a, b, c) in (x_s, y_s, u_s) nista vzporedni.

Opazujemo obe v isti točki. Oba zgornja vektorja sta tangenti na rešitveno ploskev. Ker sta različna, sta linearno neodvisna in v točki $p$razpenjata $T_p\mathcal{G}_u$ v tangentno ravnino na rešitveno ploskev. Projekcija te ravnine na ravnino (x, y) pa je premica. Torej $\mathcal{G}_u$ ne more biti graf kake funkcije spremenljivk (x, y). V tem primeru torej naš začetni problem nima rešitve.

Denimo, da sta tudi tangenti (a, b, c), $(x_s, y_s u_s)$ v celoti vzporedni vzdolž $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Tedaj pa je kos začetne krivulje hkrati tudi kos neke karakteristike. Transverzalno na to karakteristiko lahko potegnemo poljubno krivuljo, ki se seka s to karakteristiko oziroma s staro začetno krivuljo. To krivuljo lahko vzamemo za novo začetno krivuljo. Zanjo je pogoj (25) po konstrukciji izpolnjen, torej lokalno obstaja rešitev pripadajočega začetnega problema. Takih krivulj je neskončno mnogo, torej je neskončno mnogo tudi rešitev.

Primer 2 *Poiščimo rešitev enačbe:*

$$-y_(u_x) + x(u_y) = u$$

pri začetnem pogoju:

$$u(x, 0) = \Psi(x)$$

Oglejmo si najprej transverzalnostni pogoj:

$$J(s) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & x \\ (x_0)_s & (y_0)_s \end{pmatrix}_{\Gamma(s)}$$

Začetni pogoj podaja začetno krivuljo

$$\Gamma(s) = (s, 0, \psi(s))$$

Transvelzalnostni pogoj je izpolnjen povsod na Γ, razen v točki $\Gamma(0)$. Projekcija te točke na ravnino (xy) je $(x, y) = (0, 0)$.

Karakteristični sistem enačbe je:

$$\begin{aligned} x_t &= -y \\ y_t &= x \\ u_t &= u \end{aligned}$$

Prvi dve enačbi lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vsaka rešitev je torej oblike

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Exp}(t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Upoštevajmo, da rešujemo družino sistemov, parametrizirano s parametrom s. Splošna rešitev je torej

$$\begin{aligned} x(t, s) &= A_1(s) \cos(t) - A_2(s) \sin(t) \\ y(t, s) &= A_1(s) \sin(t) + A_2(s) \cos(t) \end{aligned}$$

Rešitev tretje enačbe je

$$u(t, s) = A_3(s) \cdot e^t$$

Zadostimo začetnim pogojem:

$$\begin{aligned} x(0, s) &= A_1(s) = s \\ y(0, s) &= A_2(s) = 0 \\ u(0, s) &= A_2(s) = \psi(s) \end{aligned}$$

Rešitvena ploskev je torej podana s parametrizacijo

$$x(t,s) = s \cdot \cos(t), \quad y(t,s) = s \cdot \sin(t), \quad u(t,s) = \psi(s) \cdot e^t \tag{30}$$

Takoj opazimo:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = \arctan(\frac{y}{x}).$$

Rešitvena funkcija je torej:

$$u(x,y) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})e^{\arctan(\frac{y}{x})}$$

Kakšna je oblika rešitvene ploskve? Denimo, da je $\psi(s)$ kar konstantna funkcija. Potem iz izrazitve (30) vidimo, da ima rešitvena ploskev obliko zavitih stopnic, ki pa se eksponentno hitro dvigajo. V točki $(0,0)$ transverzalnostni pogoj ni izpolnjen. Naša ploskev je na premici $(0,0,z)$ res singularna. Ni graf nobene funkcije, saj priredi točki $(0,0)$ vse realne vrednosti. Tudi v drugih točkah (x,y) je ta funkcija večlična. Vsaki točki priredi neskončno diskretno množico vrednosti. Vidimo torej, da neizpolnjevanje transverzalnostnega pogoja lahko povzroči zanimive pojave.

5 Nelinearna enačba I. reda

Spomnimo se:

$$F(x, y, u, u_{x)}, u_y) = 0$$

je splošna enačba I reda. Tudi to enačbo imamo lahko za podatek, ki predpiše neki geometrijski objekt, katerega integralski objekt bo rešitev evačbe. Fiksirajmo točko $(x_0, y_0, u_0) \in \mathbb{R}^3$, in si oglejmo izraz

$$F(x_0, y_0, u_0, u_x, y_y) = 0.$$

Ta izraz lahko razumemo poda pogoj, ki mu morajo ustrezati komonente vektorja $(u_x, u_y, -1)$ v točki (x_0, y_0, u_0). Ta vektor bo normala na bodočo tangentno ravnino na rešitveno ploskev

$$(x, y) \longmapsto (x, y, u(x, y)).$$

Označimo: $u_x = p$, $u_y = q$. Normala je torej podana z $(p, q, -1)$ in mora ustrezati pogoju

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0. \tag{31}$$

Opazimo, da je enačba samo ena, neznanki pa sta dve. Torej, po izreku o implicitni funkciji (31) določa enoparametrično družino normal $(p(\lambda), q(\lambda), -1)$,

$$F(x_0, y_0, u_0, p(\lambda), q(\lambda)) \equiv 0.$$

V vsaki točki $\mathbb{R}^3$ ta enoparametrična družina normal določa enoparametrično družino potencialnih tangentnih ravnin na iskano ploskev.

Oglejmo si družino potencialnih tangentnih ravnin na rešitveno ploskev v točki (x_0, y_0, u_0). Enačba vsake take ravnine je

$$\Big(\vec{R} - (x_0, y_0, u_0)\Big) \cdot (p(x), q(t), -1) = 0,$$

ali krajše

$$(\vec{R} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n}(\lambda) = 0. \tag{32}$$

Definicija 2 *Ogrinjača družine ravnin (32) se imenuje Mongeev stožec.*

Enačba

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

določa polje Mongeevih stožcev v prostoru.

Parametrizacija Mongeevega stožca Označimo

$$P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Odvajajmo identiteto

$$F(x, y, u, p(\lambda), q(\lambda)) = 0$$

po λ. Dobimo

$$P\, p(\lambda) + Q\, q(\lambda) = 0 \tag{33}$$

Vpeljimo enoparametrično družino vektorskih polj $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ na $\mathbb{R}^3$ tako, da bo veljalo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \cdot \vec{n}'(\lambda) &= 0 \\ \mathcal{F} \cdot \vec{n}(\lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Prva enačba tega sistema je kar (33) in je avtomatično izpolnjena. Druga pa bo izpolnjena, če bo za R veljalo

$$R = p\, P + q\, Q.$$

saj tedaj res:

$$(P, Q, R) \cdot (p, q, -1) = 0.$$

Torej

$$\mathcal{F} = (P, Q, p\,P + q\,Q)$$

Spomnimo se enačbe za ogrinjačo. Ogrinjača družine ravnin $(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}(\lambda) = 0$ sestoji iz vseh vektorjev $\vec{R}$, ki rešijo sistem:

$$\begin{aligned}(\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}(\lambda) &= 0\\ (\vec{R}-\vec{r})\cdot\vec{n}'(\lambda) &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

Iz (34) in (35) vidimo

$$(\vec{R}-\vec{r}) \parallel \mathcal{F}.$$

Natančneje, $(\vec{R}-\vec{r})$ in $\mathcal{F}$ sta pri istih vrednostih λ vzporedna. Pri fiksiranem λ torej za vsako točko na tvorilki $(\vec{R}-\vec{r})$ Mongeevega stožca obstaja realno število μ, tako, da velja Zato

$$(\vec{R}-\vec{r}) = \mu\,\mathcal{F}$$

Parametrizacijo Mongeevega stožca lahko torej podamo z enačbo

$$\vec{R}-\vec{r} = \mu\,(P(\lambda), Q(\lambda), R(\lambda)),$$

oziroma

$$\vec{R} = \vec{r} + \mu\,(P(\lambda), Q(\lambda), R(\lambda)).$$

Tako smo dobili parametrizacijo Mongeevega stožca.

V vsaki točki p iskana ploskev vsebuje vrh nekega Mongeevega stožca in ena od tvorilk tega stožca leži v tangentni ravnini naše iskane ploskve v naši izbrani točki p. Ne vemo pa, katera od tvorilk leži v tangetni ravnini!

Poskusimo konstriurati krivulje $\mathbb{R}^3$: $r(t) = (x(t), y(t), u(t))$, za katere velja

$$\dot{\vec{r}}(t) = \mathcal{F}). \tag{36}$$

Razpišimo to enačbo po komopnentah:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= P\\ \dot{y}(t) &= Q\\ \dot{u}(t) &= R = pP + qQ\end{aligned}$$

Konkretneje:

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,u,p,q) \tag{37}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial q}(x,y,u,p,q) \tag{38}$$

$$\dot{u} = p\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,u,p,q) + q\frac{\partial F}{\partial q}(x,y,u,p,q) \tag{39}$$

Vidimo: x, y, u so neznanke. p in q nista niti neznanki, niti podatka. Zato zgornji sistem ne bo dal smiselne družine integralskih krivulj, tudi če bomo dodali smiselne začetne pogoje. Sistem je nesmiselen zato, ker v enači (36) na desni strani nastopa družina vektorskih polj, parametrizirana z λ in ne eno, natanko določeno vektorsko polje. To se zrcali v dejstvu, da p in q v zgornjem sistemu nista niti spremenljivki niti podatka. To težavo bomo rešili tako, da bomo p in q obravnavali kot funkciji parametra t in zanju poiskali dodatni, smiselni enačbi. Tako bomo dobili nov karakteristični sistem petih enačb za pet neznank $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$ in $q(t)$.

Opomba 1 *Vprašajmo se, kako to, da pri kvazilinearni enačbi ne pridemo do problema izbire pravega vektorskega polja, ki ga je treba pointegrirati, iz enoparametrične družine polj.*

Ker je v primeru kvazilinearne enačbe

$$[F(x,y,u,u_x,u_y) = a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y - c(x,y,u)$$

se sistem (38) v tem primeru glasi

$$\begin{aligned} x_t &= a(x,y,u) \\ y_t &= b(x,y,u) \\ u_t &= c(x,y,u) \end{aligned}$$

Torej količini u_x in u_y v sistemu ne nastopata in imamo dobro definiran 3×3 sistem. Geometrijsko to pomeni, da vse potencialne normale na kandidate za tangentne ravnine v neki izbrani točki (x_0, y_0, u_0) ležijo v isti ravnini in ta ravnina je pravokotna na vektor $(a(x_0,y_0,u_0), b(x_0,y_0,u_0), c(x_0,y_0,u_0))$. Potencialnih tangentnih ravnin je tudi tu veliko, vendar vse vsebujejo vektor $(a(x_0,y_0,u_0), b(x_0,y_0,u_0), c(x_0,y_0,u_0))$. Zato je to vektorsko polje naraven kandidat za polje, ki generira karakteristične krivulje. Pravimo, da v tem primeru Mongeev stožec kolabira na Mongeevo os.

V splošnem primeru količini p in q na desni strani nastopata. Ker nista podatka, ju bomo razglasili za novi neznanki. Krakteristične krivulje bomo v $\mathbb{R}^3$ bomo nadmestili s krivuljami v $\mathbb{R}^5$. Ker pa bomo tudi tu najprej poiskali rešitveno ploskev $\mathcal{G}_u$ iskane funkcije $u(x, y)$, bomu tudi tu iskali ploskev v $\mathbb{R}^3$. Zato bomo krivulje

$$t \longmapsto (x(t), y(t), u(t), p(t), q(t))$$

raje interpretirali kot *karakteristične trakove* v $\mathbb{R}^3$. Vsaki točki $(x(t), y(t), u(t))$ dodamo še ravnino, ki jo razpenjata vektorja $(1, 0, p(t))$ in $(0, 1, q(t))$. Tako res dobimo nekakšen trak.

Prepričajmo se najprej, da tangenta $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{u})$ na delno karakteristiko $t \mapsto ((x(t), y(t), u(t))$ leži v našem traku.

Imamo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{y} &= Q \\ \dot{u} &= pP + qQ \end{aligned} \tag{40}$$

Od tod:

$$\begin{aligned} (u_x, u_y, -1) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}) &= (p, q, -1) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}) \\ &= \dot{x}p + \dot{y}q - \dot{u} \\ &= Pp + Qq - (pP + qQ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Torej je res smiselno govoriti o traku. Če želimo p in q vpeljati kot novi spremenljivki, moramo sistemu (38) dodati še dve enačbi. Dobili ju bomo iz povezave med x, y, u, p, q.

Odvajajmo

$$F(x, y, u, u(x, y), p(x, y), q(x, y) = 0 \qquad / \frac{\partial}{\partial x} \;\; \frac{\partial}{\partial y}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} F_x + F_u\, u_x + F_p\, p_x + F_q\, q_x &= 0 \\ F_y + F_u\, u_y + F_p\, p_y + F_q\, q_y &= 0 \end{aligned}$$

Vemo: $p_y = u_{xy} = q_x$. Zgornji dve enačbi lahko zato prepišemo nekoliko drugače:

$$\begin{aligned} F_x + F_u\, u_x + F_p\, p_x + F_q\, p_y &= 0 \\ F_y + F_u\, u_y + F_p\, q_x + F_q\, q_y &= 0 \end{aligned}$$

Vzdolž traku pa imamo tudi:

$$p(t) = p(x(t)), y(t)), \quad q(t) = q(x(t), y(t)),$$

torej

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y = Pp_x + Qp_y \\ \dot{q} &= \dot{x}q_x + \dot{y}q_y = Pq_x + Q_q. \end{aligned}$$

V drugih dveh enakostih zgoraj smo uporabili delni karakteristični sistem (38).

$$\begin{aligned} F_x + F_u\, u_x + P\, p_x + Q\, p_y &= 0 \\ F_y + F_u\, u_y + P\, q_x + Q\, q_y &= 0. \end{aligned}$$

Iz zgornjih dveh sistemov dobimo

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -(F_x + pF_u) \\ \dot{q} &= -(F_y + qF_u) \end{aligned}$$

Skupaj s prvimi tremi enačbami za $\dot{x}\dot{y}\dot{u}$ torej dobimo:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\partial F}{\partial p} \\ y_t &= \frac{\partial F}{\partial q} \\ u_t &= p\,\frac{\partial F}{\partial p} + q\,\frac{\partial F}{\partial q} \\ p_t &= -\frac{\partial F}{\partial x} - p\,\frac{\partial F}{\partial u} \\ q_t &= -\frac{\partial F}{\partial y} - q\,\frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned} \tag{41}$$

To pa je pet enačb za pet neznank:

$$x(t), y(t), u(t), p(t), q(t).$$

Sedaj moramo poiskati začetne pogoje za Cauchyjevo nalogo za nelinearno parcialno diferencialno enačbo I. reda. Izhajali bomo iz začene krivulje

$$\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)).$$

Takoj opazimo, da zaětna krivulja $\Gamma(s)$ ne bo dovolj, saj nam da le tri začetne pogoje, za zgornji sistem pa jih potrebujemo 5. Dobiti moramo še začetni funkciji $p_0(s)$ in

$q_0(s)$. Videli pa bomo, da ju ne moremo izbrati poljubno. Iščemo namreč ploskev v $\mathbb{R}^3$, ki bo graf iskane funkcije $u = u(x, y)$. Najprej pa opazimo naslednje: Naj bo krivulja:

$$\kappa : t \longmapsto (x(t), y(t), u(t), p(t), q(t))$$

taka, da velja:

1. $F(x(0), y(0), u(0), p(0), q(0)) = 0$
2. $\kappa(t)$ reši karakteristični sistem (41)

Tedaj velja:

$$F(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) \equiv 0.$$

Res, oglejmo si odvod zgornje identitete po t:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_t}F(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) &= x_tF_x + y_tF_y + u_tF_u + p_tF_p + q_tF_q \\ &= P\,F_x + Q\,F_y + F_u\,(p\,P + q\,Q) \\ &\quad -P(F_x + pF_u) - Q(f_y + qF_u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Konstruirajmo sedaj pravi začetni pogoj. Začeli bomo z začetno krivuljo $\gamma(s)$ v $\mathbb{R}^3$.

$$\gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$

Koliko svobode imamo pri izbiri funkcij $p_0(s)$ in $q_0(s)$?

Definicija 3 *Naj bo*

$$\gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$

krivulja in naj bo $P_0 = (x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0)), p_0(s_0), q_0(s_0))$. *točka v* $\mathbb{R}^5$, *katere projekcija* $(x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0)) = \gamma(s_0)$, *torej leži na* $\gamma(s)$. *Točka* P_0 *in krivulja* $\gamma(s)$ *ustrezata kompatibilnostnima pogojema če velja:*

$$F(P_0) = 0, \tag{42}$$

$$u_0(s_0) = p_0(s_0) \cdot (x_0)'(s_0) + q_0(s_0) \cdot y'(s_0). \tag{43}$$

Če poleg tega za P_0 *in* $\gamma(s)$ *velja še :*

$$(x_0)'(s_0)F_q(P_0) + (y_0)'(s_0)F_p(P_0) \neq 0$$

pravimo, da Cauchyjev problem

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

$$\gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$$
$$P_0 = (x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0) p_0(s_0) q_0(s_0))$$

ustreza transverzalnostnemu pogoju.

Opomba 2 *Zaenkrat sta $p_0(s_0), q_0(s_0)$ dejansko le dve vrednosti. Funkcij $p_0(s)$ in $q_0(s)$ še nimamo.*

Spotoma smo definirali Cauchyjevo nalogo za nelinearno parcialno diferencialno enačbo I. reda. Kompaibilnostna pogoja (42) in (43) sta del definicije Cauchyjeve naloge.

Napišimo osnovni eksistenčni izrek za nelinearno PDE I reda:

Izrek 2 *naj bosta za Cauchyjev problem*

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

$$\gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)), \quad P_0 = (x_0(s_0), y_0(s_0), u_0(s_0) p_0(s_0) q_0(s_0))$$

izpolnjena kompatibilnostna pogoja:

$$F(P_0) = 0,$$

$$u_0(s_0) = p_0(s_0) \cdot (x_0)'(s_0) + q_0(s_0) \cdot y'(s_0).$$

Naj bo izpolnjen še transverzalni pogoj:

$$(x_0)'(s_0) F_q(P_0) - (y_0)'(s_0) F_p(P_0) \neq 0 \tag{44}$$

v točki P_0. Tedaj obstaja $\epsilon > 0$ in natanko ena rešitev Cauchyjevega problema:

$$(t, s) \longmapsto (x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)),$$

definirana za (t, s), $|s - s_0| + |t| < \epsilon$. Zgornja parametrična reprezentacija podaja eksplicitno obliko rešitve $u = u(x, y)$. Poleg tega velja $u_x = p$, $u_y = q$.

Opomba 3 *Hitro vidimo, da je kompatibilnostni pogoj*

$$u_0'(s_0) = p_0(s_0)x_0'(s_0) + q_0(s_0)y'(s_0)$$

naraven in pričakovan. Res: Imamo: $u = u(x, y)$*, zato je vzdolž* $\gamma(s)u(s) = u(x(s), y(s))$.

$$\frac{d}{ds}u = u_s = u_x x' + u_y y' = px' + qy'$$

Če zgornje izračunamo v $s = s_0$*, res dobimo kompatibilnostni pogoj.*

Skica dokaza: Vseh korakov dokaza ne bomo izvedli. So podobni korakom v eksistenčnem dokazu za Cauchyjev problem s kvazilinearno enačbo, le daljši in nekoliko bolj zapleteni. Zato se bomo posvetili samo bistveni razliki med kvazilinearnim in nelinearnim primerom, namreč konstrukciji manjkajočih začetnih pogojev $p(s)$ in $q(s)$.

Pokazali bomo, kako iz podatkov, ki jih imamo (enačba, oba kompatibilnostna pogoja ,in transverzalnostni pogoj lahko izračunamo manjkajoči funkciji $p_0(s)$ in $q_0(s)$. Za iskani funkciji bo pri vsakem s moralo veljati:

$$u_0'(s) = p_0(s)\, x'(s) + q_0(s)\, y'(s)$$

in

$$F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0$$

Kompatibilnostna pogoja povesta, da je zgornja res v $s = s_0$

Definirajmo:

$$\begin{aligned} A_1(s, p_0, q_0) &= p_0 x_0'(s) + q_0 y_0'(s) - u_0'(s) \\ A_2(s, p_0, q_0) &= F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0, q_0) \end{aligned}$$

Z zgornjima funkcijama definirajmo preslikavo:

$$\mathcal{F}(s, p_0, q_0) : \mathbb{R}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

s predpisom

$$\mathcal{F}(s, p_0, q_0) = (A_1(s, p_0, q_0), A_2(s, p_0, q_0))$$

Videli bomo, da transverzalnostni pogoj (44) zagotavlja, da je izpolnjen pogoj izreka o implicitni funkciji, podani z enačbo

$$\mathcal{F}(s, p_0, q_0) = 0$$

Oglejmo si "delni " odvod $\mathcal{F}$ glede na spremenljivki p_0, q_0.

$$D(s, p_0, q_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial p_0} & \frac{\partial A_1}{q_0} \\ \frac{\partial A_2}{\partial p_0} & \frac{\partial A_2}{q_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0'(s) & y_0'(s) \\ F_p & F_q \end{pmatrix}$$

Transverzalnostni pogoj pravi

$$\det(D(s, p_0, q_0)|_{s=s_0} = x_0'(s_0)\, F_q(P_0) - y_0'(s_0)\, F_p(P_0) \neq 0$$

Torej po izreku o implicitni funkciji obstajata natanko določeni funkciji:

$$\begin{aligned} s &\longmapsto p_0(s) \\ s &\longmapsto q_0(s), \end{aligned}$$

za kateri velja $\mathcal{F}(s, p_0(s), q_0(s)) \equiv 0$.

Dobili smo torej pravilno konstruiranozačetno krivuljo

$$s \longmapsto (x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s))$$

za naš 5×5 karakteristični sistem.

Na podoben način kot pri kvazilinearni enačbi tudi tu transverzalnostni pogoj (44) zagotavlja, da lahko izrazimo $u(t, s)$ v obliki $u(x, y)$. Velja pa tudi $u_x = p, u_y = q$.

$\square$

6 Linearne parcialne diferencialne enačbe II. reda

Parcialne diferencialne enačbe II. reda so najpogostejše in jih največkrat srečamo. Najpomembnejši vzrok za to je dejstvo, da je II. Newtonov zakon navadna differencialna enačba II. reda. Linearna parcialna enačba II. reda za neznano funkcijo:

$$u(x_1, \cdots x_n) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ima obliko:

$$L(u) = g.$$

Pri tem je:

$$L : \mathcal{C}^{2+k}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\Omega)$$

linearen diferencialni operator drugega reda, podan na $2 + k$-krat zvezno odvedljivih funkcijah $u = \mathcal{C}^{2+k}(\Omega)$, kjer je poljubno nenegativno celo število, lahko pa tudi $k = \infty$. Operator L je podan s predpisom

$$
\begin{aligned}
L(u) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} b_k(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k} \\
&+ c(x_1,\ldots,x_n)\, u.
\end{aligned}
$$

Spet se bomo omejili na $n = 2$, torej na dve neodvisni spremenljivki. V tem primeru so operatorji L oblike.

$$
L(u) = a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u.
$$

Koeficienti $a(x,y), \cdots, f(x,y)$ so primerno lepe.

Definicija 4 *Glavni del L_0 operatorja L je:*

$$
L_0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.
$$

6.1 Klasifikacija enačb II reda dveh spremenljivk

Definicija 5 *Enačba:*

$$
a\, u_{xx} + 2b\, u_{xy} + c\, u_{yy} + d\, u_x + e\, u_y + f\, u = g \tag{45}
$$

je hiperboličnega tipa na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, če velja:

$$
\delta(x.y) = b^2(x,y) - g(x,y)c(x,y) > 0 \quad \text{na} \quad \Omega
$$

Enačba (45) je paraboličnega tipa na Ω, če velja

$$
\delta(x,y) \equiv 0 \quad \text{na} \quad \Omega.
$$

Enačba (45) je eliptičnega tipa na Ω, če velja:

$$
\delta(x,y) < 0 \quad \text{na} \quad \Omega.
$$

Dokazati moramo, da je zgornja klasifikacija smiselna. Videli bomo, da pri zamenjavi neodvisnih spremenljivk:

$$(x,y) \longrightarrow (\xi(x,y),(\eta(x,y))$$

enačba ohrani svoj tip. Torej izbira koordinat ne vpliva na tip enačbe.

Zamenjava ali substitucija neodvosnih spremenljivk je difeomorfizem

$$(x,y) \longmapsto (\xi(x,y),\eta(x,y)))$$

med dvema območjema Ω in $\widetilde{\Omega}$ v $\mathbb{R}^2$. V novih spremenljivkah se neznana funkcija izraža $u(x,y)$ izraža v obliki

$$w(\xi(x,y),\eta(x,y)) = u(x,y).$$

Zveze med prvimi odvodo so

$$\begin{aligned} u_x &= w_\xi\,\xi_x + w_\eta\,\eta_x \\ u_y &= w_\xi\,\xi_y + w_\eta\,\eta_y. \end{aligned}$$

Odtod dobimo zveze med drugimi odvodi

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w_{\xi\xi}\,\xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\,\xi_x\eta_x + w_{\eta\eta}\,\eta_x^2 + w_\xi\,\xi_{xx} + w_\eta\,\eta_{xx} \\ u_{xy} &= w_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y + w_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + w_{\eta\eta}\,\eta_x\eta_y + w_\xi\,\xi_{xy} + w_\eta\,\eta_{xy} \\ u_{yy} &= w_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2w_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + w_{\eta\eta}\,\eta_y^2 + w_\xi\,\xi_{yy} + w_\eta\,\eta_{yy} \end{aligned} \tag{46}$$

Glavni del operatorja L se bo v novih spremenljivkah glasil

$$l_0(w) = A(\xi,\eta)\,w_{\xi\Xi} + 2B(\xi,\eta)\,w_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)\,w_{\eta\eta}$$

Poiskati moramo izraze za koeficiente A, B in C. V izraz za L_0 vstavimo izrazitve dvojnih odvodov funkcije u, nato pa združimo vse faktorje, ki nastopajo pri drugih odvodih w. Dobimo

$$\begin{aligned} A(\xi,\eta) &= a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_x^2 \\ B(\xi,\eta) &= a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_y) + c\,\xi_x\eta_y \\ C(\xi,\eta) &= a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 \end{aligned} \tag{47}$$

Zgornje kvadratne forme lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Opazimo, da velja

$$\delta(x,y) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{in} \quad \delta(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Iz enačbe (48) sledi

$$\begin{aligned}
\delta(\xi,\eta) &= \det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}^T \\
&= \det\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ker je kvadrat vsakega realnega števila vedno pozitiven, sta števili $\det(x,y)$ in $\det(\xi,\eta)$ res vedno istega znaka, ali pa sta obe hkrati enaki 0. Tip enačbe je torej res naodvisen od izbire neodvisnih spremenljivk.

6.1.1 Kanonične oblike

Vsako enačbo določenega tipa lahko s substitucijo neodvisnih spremenljivk prevedemo na obliko, ki je v nekem natančno določenem smislu najenostavnejša. Bolj konkretno, vsako enačbo lahko prededemo na obliko v kateri bo njen glavni del tako enostaven kot je le lahko.

Definicija 6 *Z $l_1(w)$ označimo poljuben parcialni diferencialni operator prvega reda. Kanonična oblika huperbolične enačbe je*

$$w_{\xi\eta} + l_1(w) = G(\xi,\eta).$$

Kanonična oblika paranoločne enačbe je

$$w_{\xi\xi} + l_1((w) = G((\xi, eta).$$

Kanonična oblka eliptične enačbe je

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + l_1(w) = G(\xi,\eta).$$

Videli bomo,da za vsako enačbo obstajajo pari neodvisnih spremenljivk v katerih ima enačba ustrezno kanoničo obliko.

Hiperbolična enačba:

Izrek 3 *Naj bo enačba*

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + L_1(u) = g(x,y),$$

hiperboličnna $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Z* L_1 *som ozněili parcialni diferencialni oprator prvega reda. Tedaj obstajajo pari neodvisnih spremenljivk* (ξ,η)*, v katerih ima na ustreznem obnočju* $\widetilde{\Omega}$ *naša enačba obliko*

$$w_{\xi\eta} + l_1(w) = G(\xi,\eta)$$

Dokaz: V novih spremenljivkah se naša enačba glasi

$$A(\xi,\eta)w_{\xi\xi} + 2B(\xi,\eta)w_{\xi\eta} + C(\xi\eta)w_{\eta\eta} + l_1(w) = G(\xi,\eta).$$

Od substitucije

$$(x,y) \longmapsto (\xi(x,y), \eta(x,y))$$

zahtevamo

$$A(\xi,\eta) \equiv 0, \quad \text{in} \quad C(\xi,\eta) \equiv 0.$$

Spomnimo se izrazitev A in C s koecifienti a, b, c, d. Podani sta s prvo in zadnjo enačbo v sistemu (48). Imamo torej

$$\begin{aligned} a(x,y)\,\xi_x^2 + 2b(y,y)\,\xi_x\xi_y + c(x,y)\,\xi_y^2 &= 0 \\ a(x,y)\,\eta_x^2 + 2b(y,y)\,\eta_x\eta_y + c(x,y)\,\eta_y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Vidimo, da imata obe enačbi enake koeficiente. Zato imata seveda isto množico rešitev. Zaskrbelo bi nas lahko, da bomo dobili premalo neodvisnih rešitev (potrebujemo dve), vendar bomo hitro videli, da je skrb odveč. Enačba

$$a(x,y)\,\xi_x^2 + 2b(y,y)\,\xi_x\xi_y + c(x,y)\,\xi_y^2 = 0$$

je nelinearna parcialna diferencialna enačba prvega reda. Opazimo pa, da je leva stran *homogen* polinom druge stopnje dveh spremenljivk. Lahko je videti, da je vedenje takega polinoma zelo podobno nehomogenemu polinomu druge stopnje ene spremenljivke. Če enačbo delimo z ${\xi_y}^2$, dobimo

$$a\,(\frac{\xi_x}{\xi_y})^2 + 2b\,(\frac{\xi_x}{\xi_y}) + c = 0,$$

to pa je običajna kvadratna enačba spremenljivke $\frac{\xi_x}{\xi_y}$, ki jo znamo razstaviti v produkt linearnih faktorjev s pomočjo formule

$$(\frac{\xi_x}{\xi_y})_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dobimo

$$\frac{1}{a}(a\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\xi_y) \cdot (a\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\xi_y) = 0$$

Funkcija $\xi(x, y)$ je rešitev zgornje enačbe natanko takrtat, ko je rešitev ene od enačb

$$\begin{aligned} a\,\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\,\xi_y &= 0 && (49) \\ a\,\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\,\xi_y &= 0. && (50) \end{aligned}$$

To pa sta dve *linearni* parcialni diferencialni enačbi prvega reda in sta bistveno lažje rešljivi, kot nelainearna enačba. Te enačbe rešujemo s pomošjo pripadajočih karakterističnih sistemov. Sistema za zgornji dve enačbi sta

$$\begin{aligned} x_t &= a \\ y_t &= b \pm \sqrt{b^2 - ac} \\ \xi_t &= 0 \end{aligned} \qquad (51)$$

Kot vedno pri linearnih enačbah prveg reda, je sistem prvid dveh enačb “razklopljen” od tretje enačbe. Oglejmo si sistem, pri katerem ima srednja enačba desno stran enako $b + \sqrt{b^2 - ac}$. Izberimo začetno krivuljo $\Gamma(s)$ za naš sistem. Naj bo podana s predpisom

$$\Gamma(s) = (s, s, h(s)).$$

Izberimo s_0. Rešitev

$$(t, s) \longmapsto (x(t, s), y(t, s))$$

začetnega problema

$$\begin{aligned} x_t &= a && (52) \\ y_t &= b + \sqrt{b^2 - ac} && (53) \end{aligned}$$

$$x(0, s_0) = s_0, \quad y(0, s_0) = s_0$$

je izohipsa na ploskvi, podani s parametrizacijo

$$t \longmapsto (x(t, s_0), y(t, s_0), \xi(t, s_0)) = (x(t, s_0), y(t, s_0), h(s_0))$$

Izbira začetnega pogoja $\Gamma(s)$ je bila povsem poljubna. Očitno pa je, da so rešitve sistema prvih dveh enačb izohipse vseh ploskev, ki jih dobimo s poljubno izbiro začetneg krivulje $\Gamma(s)$.

Če za parametrizacijo reǐtvenih krivulj $t \mapsto (x(t), y(t))$ sistema (53) izberemo $x \mapsto (x, y(x)$, lahko sistem prepišemo v obliki enačbe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{54}$$

Splošna rešitev te enačbe je družina funkcij $f(x; C) = y(x; C)$, parametrizirana s konstanto C. Iz enačbe

$$y = f(x; C)$$

lahko s pomočjo izreka o implicitni funkciji izrazimo C in dobimo funkcijo

$$C(x, y) = F(x, y)$$

Seveda za to funkcijo velja

$$F(x, y(x)) \equiv C,$$

kjer je $y(x)$ rešitev (53) pri izbiri konstante C, torej $y(x) = y(x; C)$. Pri vsaki izbiri začetne vrednosti $y(0) = \gamma$ dobimo drugo rešitev $y_\gamma(x)$ enačbe (54) in tudi drugo konstanto C_γ, za katero velja

$$F(x, y_\gamma(x)) \equiv C_\gamma.$$

Vsaka krivulja $x \mapsto y_\gamma$ je neka izohipsa ploskve, podane s parametrizacijo.

$$(x, y) \longmapsto (x, y, F(x, y))$$

Ta ploskev je torej rešitvena ploskev enačbe

$$a\,\xi_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\,\xi_y = 0$$

pri začetnem pogoju

$$\Gamma(\gamma) = (0, \gamma, C_\gamma).$$

Zato lahko za $\xi(x, y)$ vzamemo

$$\xi(x, y) = F(x, y).$$

Podobno lahko za novo spremenljivko $\eta(x, y)$ vzamemo

$$\eta(x, y) = G(x, y),$$

kjer je $G(x,y)$ podana z

$$G(x, y(x, D)) \equiv D$$

in je $y(x;D)$ splošna rešitev enačbe

$$a\,\xi_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\,\xi_y = 0.$$

$\square$

Opomba 4 *Parov kanoničnih spremenljivk je res neskončno mnogo. Enačbi (50) in (49) določata le dve družini izohips do parametrizacije natančno. Višine, na katerih ležijo posamezne izophipse pa lahko še poljubno določimo. Na ta način dobimo neskončno mnogo parov rešitvenih ploskev.*

Rešitvene krivulje

$$t \longmapsto (x(t,s), y(t,s))$$

sistemov

$$\begin{aligned} x_t &= a \\ x_t &= b \pm \sqrt{b^2 - ac} \end{aligned}$$

se imenujejo *karakteristične krivulje* enačbe

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + l_1(u) = g(x,y).$$

Ker imamo dva sistema, iamo tudi dve drižini karakterističnih krivulj. Ti dve družini karakterističnih kruvulj smo že srečali pri obravnavi valovne enačbe.

Parabolična enačba:

Izrek 4 *Naj bo enačba*

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + L_1(u) = g$$

parabolična na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tedan obstajajo sistemi koordinat (ξ,η), v katerih se enačba glasi

$$w_{\xi\xi} + l_1(w) = G(\xi,\eta)$$

Dokaz: Ker je $b^2 - ac \equiv 0'$, lahko predpostavimo, da je $a(x,y) \neq 0$. (V nasprotnem primeru je enačba že podana v kanonični obliki.) Iščemo torej par funkcij (ξ, η), ki reši enačbo

$$C(\xi,\eta) = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2 = 0.$$

Zaradi $B^2 - AC = 0$, bo potem res A edini od nič različen koeficient v glevnem delu transformirane enačbe. Ker je diskriminanta $\delta(x,y) = \delta(\xi,\eta) = 0$, imamo

$$C = \frac{1}{a}(a\,\eta_x + b\,eta_y)^2 = 0$$

Dobimo le eno enačbo

$$a\,\eta_x + b\,\eta_y = 0$$

in zato le eno novo koordinato. Drugo lahko izberemo skoraj poljubno. Edina zahteva je, da bo

$$(x,y) \longmapsto (\xi(x,y), \eta(x,y))$$

difeomorfizem.

Zapišimo torej karakteristični sistem

$$\begin{aligned} x_t &= a \\ y_t &= b \\ \eta_t &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

Kakor v hiperboličnem primeru, prvi dve enačbi nadomestimo z enačbo

$$\frac{dy}{dy} = \frac{b}{a}.$$

Iskano funkcija $\eta(x,y)$ spet dobimo iz splo sne rešitve $y(x;C)$ zgornje enačbe, tako da izrazimo Cz x,y,

$$F(x,y) = C, \quad \text{kjer je} \quad F(x, y(x;C)) \equiv C.$$

Za novo spremenljivko η lahko vzamemo

$$\eta(x,y) = F(x,y).$$

$\square$

Eliptična enačba: Obravnava eliptičnega tipa je nekoliko težja od prejšnjih dveh. Tudi tu imamo izrek, analogen izrekoma za prejšnja tipa.

Izrek 5 *Za poljubno trojico gladkih funkcij $a(x,y)$, $b(x,y)$ in $c(x,y)$ obstajajo pari koordinat $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$, tako, da eliptočna enačba*

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + L_1(u) = g(x,y)$$

v novih koordinatah dobi obliko

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + l_1(w) = G(\xi,\eta).$$

Dokaz: Izrek bomo dokazali le za realno analitične koeficiente a, b, c. Izrek sicer velja za poljubne gladke koeficiente, vendar je splošen dokaz težji.

Spomnimo se: Funkcija $a(x,y)$ je realno analitična, če jo lahko na nekem območju, ki vsebuje točko (x_0, y_0) razvijemo v Taylorjevo vrsto. Torej, zapišemo jo lahko v obliki

$$a(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a_{j,k-j}(x-x_0)^j(y-y_0)^{k-j}$$

Naša enačba bo zavzela kanonično obliko, če bo v novih koordinatah veljalo

$$A = C, \quad B = 0.$$

Eksplicitno to pomeni

$$a\,\xi_x^2 + 2b\,\xi_x\xi_y + c\,\xi_y^2 = a\,\eta_x^2 + 2b\,\eta_x\eta_y + c\,\eta_y^2,$$

$$a\,\xi_x\eta_x + b\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\,\xi_y\eta_y = 0$$

To lahko prepišemo v obliki

$$\begin{aligned} a\,(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b\,)\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c\,(\xi_y^2 - \eta_y^2) &= 0 \\ a\,\xi_x i\eta_x + b\,(\xi_x i\eta_y + \xi_y i\eta_x) + c\,\xi_y i\eta_y &= 0 \end{aligned}$$

Vpeljemo novo funkcijo $\varphi(x,y) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$ in opazimo, da zgornji sistem lahko zapšemo kot eno kompleksno enačbo

$$a\,\varphi_x^2 + 2b\,\varphi_x\varphi_y + c\,\varphi_y^2 = 0.$$

Takoj opazimo, da je zgornji sistem ekvivalenten tudi enačbi, v pateri φ nadomestimo z $\psi = \xi - i\eta$. Kompleksificirajmo naš problem. Realni spremenljivki x in y nadomestimo s kompleksima. Zaradi analitičnosti koeficienti a, b c postanejo holomorfne funkcije. Zgornjo enačbo lahko v kompleksnem razstavimo na linearna faktorja

$$a\,\varphi_x + (b \pm i\sqrt{ac - b^2})\,\varphi_y = 0. \tag{56}$$

Od tod dobimo dve linearni parcialni diferencialni, kjer so tako neodvisne in odvisne spremenljivke kompleksne. Ni težko videti, da postopek uporabe karakterističnega sistema lahko prenesemo na kompleksni sistem, če so le koeficienti $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ naše enačbe holomorfne funkcije. Podobno, kakor prej iz karakterističnih sistemov linearbih faktorjev tega razcepa spet dobimo dve enačbi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

Kompleksna verzija eksistenčnega izreka za navadnediferencialne enačbe zagotavlja obstoj holomorfnih rešitev obeh zgornjih enačb. Dobimo torej rešitvi $\varphi(x, y)$ in $\psi(x, y)$ obeh enačb (56). Našo eliptično enačbo lahko torej zapišemo v obliki

$$4v_{\varphi\psi} + \widetilde{l}_1(v) = 0. \tag{57}$$

To nas spominja na kanonično obliko hiperbolične enačbe, le da so tu vse spremenljivke kompleksne.

Spomnimo se sedaj na zveze

$$\begin{aligned}\varphi &= \xi + i\eta\\ \psi &= \xi - i\eta\end{aligned}$$

Te izraze invetiramo in dobimo

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}(\varphi + i\psi)\\ \eta &= -\frac{i}{2}(\varphi - i\psi)\end{aligned}$$

Spremenljivki ξ in η sta *realni* ! Enačbo (57) želimo izraziti s spremenljivkama ξ, η. Vidimo, da je Jakobijanka prehoda med (ξ, η) in (φ, η)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\varphi} & \frac{\xi}{\psi} \\ \frac{\eta}{\varphi} & \frac{\eta}{\psi} \end{pmatrix}$$

Matrika koeficientov v spremenljivkah (ξ, η) je kongruentna matriki koeficientov v spremenljivkah (φ, ψ). Torej

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To pa pomeni, da se v spremenljivkah (ξ, η) naša enačba res glasi

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + l_1(w) = G(\xi, \eta)$$

□

6.2 Valovna enačba

Najpomemnej$\sigma_{\mathfrak{g}}$in najenostavnejša hiperbolična enačba je valovna enačba

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = g(x, y)$$

V tem razdelku si bomo ogledali valovno enačbo, definirano na $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$.

Najprej se bomo posvetili homogeni valovni enačbi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Kanonična oblika te enačbe je

$$w_{\xi\eta} + l_1(0) = 0$$

Enačba je tako enostavna, da bi lahko kanonični spremenljivki uganili, vendar jih bomo za vajo vseeno iračunali po receptu iz prejšnjega poglavja. Ket je črka t že zasedena z eno od neodvisnih spremenljivk, bomo pomožni parameter v kanoničnem sistemu označevalis s. Karakteristični sistem se tako glaci

$$\begin{aligned} t_s &= 1 \\ x_s &= \pm c \\ \xi &= 0 \end{aligned}$$

Torej

$$\frac{dx}{ds} = \pm c$$

in od tod

$$x = \pm c + C,$$

kjer je C konstanta. Novi neodvisni spremenljivki sta torej

$$\xi = x + ct, \quad \text{in} \quad \eta = x - ct$$

Ker so koeficienti izrazitve ξ, η z x, y konstantni, pri prehodu na kanonične spremenljivke ne pridobimo odvodov prvega reda. Kanonična oblika valovne enačbe se torej v spremenljivkah ξ, η glasi enostavno

$$w_{\xi\eta} = 0$$

To enačbo pa enostavno rešimo z integracijo po η in ξ. Dobimo

$$w_\xi = f(\xi)$$

in nato

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

V originalnih koordinatah se rešitev glasi

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Člen $G(x - ct)$ se glasi odhajajoči val, člen $F(x + ct)$ pa prihajajoči val.

Funkciji F in G sta načeloma povsem poljubni funkciji ene spremenljivke. Tu se zastavi zanimivo vprašanje. Če funkciji nista dvakra odvedljivi, potem zgornje rešitve ne moremo v staviti v enačbo in preiskusiti, ali gre res za rešitev. Vendar se izkaže, da imajo lahko tudi npr. neodvedljive rešitve fizikalen smisel in jih zato ni smiselno "prepovedati".

Definicija 7 *Naj bosta funkciji F in G dvakrat odvedljivi funkciji ene spremenljivke. Funkcija*

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

se tedaj imenuje krepka ali klasična rešitev valovne enačbe.

Naj bo $\{u_n(x, t) = F_n(x + ct) + G_n(x - ct)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zporedje klasičnih rešitev, ki v neki normi (npr. sup ali L_2 normi) konvergira k funkciji $u(x, t)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = u(x, t).$$

Funkcija$u(x, t)$ se tedaj imenuje šibka rešitev valovne enačbe.

Definicija 8 *Premice*

$$x - ct = konst. \quad x + ct = konst.$$

se imenujejo karakteristične premice ali karakteristike valovne enačbe.

Pri valovni enačbi se informacija širi vzdolž karakteristik. Ilustrirajmo to precej nejasno trditev s primerom. Naj bo rešitev $u(x,t)$ v neki točki (x_0,t_0) negladka. Tedaj mora biti v tej točki negladka vsaj ena od funkcij $F(x+ct$ ali $G(x-ct)$. Denimo, da je funkcija G v točki $G(s_0) = G(x_0 - ct_0)$ negladka. Potem je funkcija

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

singularna (negladka) v vsaki točki (x_1,t_1), za katero velja

$$x_1 - ct_1 = x_0 - ct_0.$$

Torej je singularna vzdolž celotne karakteristike, podane z enačbo

$$x = ct + (x_0 - ct_0).$$

Rešitve homogene valovne enačbe so elementi jedra lonearnega parcialnega ope ratorja

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ta operator lahko razstavimo v kompozitum dveh komutirajočih operatorjev prvega reda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial x} - c\frac{\partial}{\partial t}) \circ (\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial t}).$$

Množica rešitev valovne enačbe vsebuje tudi jedri zgornjih dveh operatorjev prvega reda. Očitno so rešitve enačbe

$$(\frac{\partial}{\partial x} - c\frac{\partial}{\partial t})u = 0$$

odhajajoči valovi, rešitve

$$(\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial t})u = 0$$

pa prihajajoči valovi.

6.2.1 Cauchyjev problem in D'Alambertova formula

Homogena enačba: Cauchyjev ali začetni problem za homogeno valovno enačbo je podan z

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Problem bomo rešili po D'Alambertovem postopku. Splošna rešitev je

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Začetna pogoja nam dasta enačbi

$$\begin{aligned} u(x,0) = F(x) + G(x) &= f(x) \\ u_t(x,0) = c\,F'(x) - c\,G'(x) &= g(x) \end{aligned}$$

Drugo enačbo integrirajmo od 0 do x in dobimo

$$c\,F(x) - c\,G(x) = \int_0^x g(s)\,ds + C$$

Dobimo sistem fveh enačb

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) \\ F(x) - G(x) &= \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds + \frac{C}{c} \end{aligned}$$

Od tod

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + \frac{C}{2c} \\ G(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - \frac{C}{2c} \end{aligned}$$

Seštejemo zgornji funkciji in dobimo rešitev

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(\int_0^{x+ct} g(s)\,ds - \int_0^{x-ct} g(s)\,ds)$$

oziroma

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \tag{58}$$

Rešitev (58) se imenuje D'Alambertova rešitev Cauchyjevega problema za homogeno valovno enačbo.

S pomočjo formule (58) lahko dokažemo eksistenčni izrekza naš Cauchyjev problem.

Definicija 9 *Začetni problem je dobro pogojen, če*

1. *rešitev obstaja, rešitev.*
2. *rešitev je natanko ena.*
3. *rešitev je zvezno odvisna od začetnih pogojev v primerni topologiji.*

Izrek 6 *Naj bo $T > 0$ fiksno število. Začetni problem za homogeno valovno enačbo na $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]\}$ je za začetna pogoja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ in $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dobro pogojen in ima klasično rešitev.*

Dokaz: D'Alambertova formula (58) nam da obstoj in edinost rešitve. Dokazati moramo le še zvezno odvisnost od začetnih pogojev. Dokazali bomo zveznost glede na topologijo, porojeno s *supremum* -normo.

Naj bo $\epsilon > 0$ poljubno majhno število. Naj bosta $u_i(x,t)$, $i = 1,2$ rešitvi našega problema pri začetnih pogojih

$$u_i(x,0) = f_i(x), \quad (u_i)_t(x,0) = g_i(x).$$

Poiskati moramo tak $\delta > 0$, da bo veljalo

$$\|f_1 - f_2\| < \delta,\ \|g_1 - g_2\| < \delta \Rightarrow \|u_1 - u_2\| < \epsilon$$

D'alambertova formula nam za vsak $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ da

$$\begin{aligned}
|u_1(x,t) - u_2(x,t)| &= |\frac{f_1(x+ct) + f_1(x-ct)|}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(s)\,ds \\
&\quad - \frac{f_2(x+ct) + f_2(x-ct)|}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_2(s)\,ds| \\
&\le \frac{|f_1(x+ct) - f_2(x+ct)|}{2} + \frac{|f_1(x-ct) - f_2(x-ct)|}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |g_1(s) - g_2(s)|\,ds \\
&\le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2c}\,2ct\,\delta \\
&= \delta + t\delta \\
&= (1+T)\,\delta
\end{aligned}$$

Torej, naj bo $\epsilon > 0$ poljubno število. Če je

$$\delta < \frac{\epsilon}{1+T},$$

potem očitno res velja

$$\|f_1 - f_2\| < \delta, \ \|g_1 - g_2\| < \delta \Rightarrow \|u_1 - u_2\| < \epsilon.$$

□

Opomba 5 *Zvezna odvisnost rešitve of začetnih pogojev res velja le na konňih časovnih intervalih. Če bi dovolili $T \to \infty$, bi to potisnilo $\delta \to 0$, število δ pa mora biti pri vsaki izbiri ϵ pozitivno.*

Nehomogena enačba: Oglejmo si Cauchyjev problem za nehomogeno valovno enačbo:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t); \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u(x,L) &= g(x) \end{aligned}$$

D'Alambertovo formulo za ta problem bomo izpeljali na dva načina: z uporabo Greenovega izreka v ravnini in z uporabo Duhamelovega principa.

Dokaz z Greenovim izrekom:

D'Alambertova forumla zahomogeni problem nam pove, da na vrednost rešitve $u(x_0,t_0)$ v točki (x_0,t_0) vplivajo le vrednosti začethega pogoja f v tokah $x_0 - ct_0$ in $x_0 + ct_0$, ter vrednosti začetnega pogoja na intervalu $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$. Tri stranice, ki povezujejo točke $(x_0 - ct_0, 0)$, $(x_0 + ct_0, 0)$ in (x_0, t_0) v $\mathbb{R}^2$ omejujejo trikotnik, ki se imenuje karateristični trikotnik. Stranico, ki povezujeta točki $(x_0 - ct_0, 0)$ in $(x_0 + ct_0, 0)$ s točko (x_0, t_0) sta namreč karakteristiki naše enačbe Videli bomo, da je vrednost $u(x_0,t_0)$ rešitve nehomogene enačbe dolčena z vrednostmi podatkov na celotnek karakterističnem trikotniku Δ z vrhom (x_0,t_0). Natančneje, začetna pogoja vplivata na isti način, kot pri homogeni enačbi, desna stran $F(x,t)$ pa vpliva z vsemi vrednostmi na Δ.

Spomnimo se Greenovega izreka za enostavno povezano območje $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Naj bo $(x,t) \mapsto (P(x,t), Q(x,t))$ vektorsko polje na Ω. Velja

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega ((Q_x - P_t)\,dxdt &= \oint_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dt) \\
&= \oint_\gamma (P(x(s),t(s))x'(s) + Q(x(s),t(s)), t'(s))\,ds \\
&= \oint_\gamma \langle (P,Q),(x',t')\rangle\,ds,
\end{aligned}
$$

kjer je $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ neka parametrizacija robne krivulje $\partial\Omega$. Vzemimo sedaj za Ω karakteristični trikotnik Δ z vrhom (x_0, t_0) in integrirajmo $F(x,t)$ po Δ. Valovna enačba nam da

$$
\begin{aligned}
\iint_\Delta F(x,t)\,dxdt &= \iint_\Delta (u_{tt} - c^2u_{xx})\,dxdt \\
&= -\iint_\Delta (Q_x - P_t)\,dxdt,
\end{aligned}
$$

kjer smo vzeli

$$
Q = c^2 u_x \quad \text{in} \quad P = u_t.
$$

Po Greenovem izreku dobimo

$$
\iint_\Delta F(x,t)\,dxdt = -\oint_{\partial\Delta} u_t\,dx + c^2u_x\,dt
$$

Rob $\partial\Delta$ na desni strani je sestavljen iz treh stranic B, D in L, kjer je B osnovnica karakterističnega trikotnika, D desna karakteristika, L pa leva karakteristika. Torej

$$
\oint_{\partial\Delta} = \int_B + \int_D - \int_L
$$

Na B je $dt = 0$, torej

$$
\int_B u_t dx + c^2 u_x dt = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0+ct_0} u_t(x,0)\,dx = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx,
$$

kjer je $u_t(x,0) = g(x)$ začetni pogoj.

Stranica D je podana z enačbo $x + ct \equiv x_0 + ct_0$ od koder dobimo $dx + cdt = 0$ in od tod $dx = -cdt$. Torej

$$
\int_L u_t dx + c^2 u_x dt = c\int_L (u_t dt + u_x dx) = c\int_D du = c(u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)).
$$

Začetni pogoj $u(x,0) = f(x)$ nam da

$$\int_L u_t dx + c^2 u_x dt = c(u(x_0,t_0) - f(x_0 + ct_0)$$

Leva stranica je karakteristika $x - ct \equiv x_0 - ct_0$. Po analognem postopku, kot zgoraj, dobimo

$$\int_L u_t dx + c^2 u_x dt = c(f(x_0 - ct_0) - u(x_0,t_0))$$

Zgornje izračune zberemo skupaj in dobimo

$$-\iint_\Delta F(x,t)\,dxdt = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx + c(f(x_0 - ct_0) + f(x_0 + ct_0)) - 2cu(x_0,t_0).$$

Od tod

$$\boxed{u(x_0,t_0) = \frac{f(x_0 + ct_0) + f(x_0 - ct_0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} g(x)\,dx + \iint_\Delta F(x,t)\,dxdt.}$$

Izpeljali smo D'Alambertovo formula za Cauchyjev problem za nehomogeno valovno enačbo. Pomagali smo si z Greenovim izrekom. Vnaprej nismovedeli, da nas bo ta izrek res pripeljal do rešitve. Zgornjo formulo lahko izpeljemo tudi na manj "skrivnostten" način, pri katerem je motivacija za uporabo ustreznih orodij bolj jasna.

Dokaz s pomočjo Duhamelovega principa:

Bistvo Duhamelovega principa je v tem, da nam pokaže, kako lahko nehomogenost neke enačbe pretvorimo v začetni pogoj.

Zaradi linearnosti je jasno, da velja naslednje: naj bosta $u_i(x,t)$, $i = 1,2$ rešitvi začetnih problemov z začetnima pogojema

$$u_i(x,0) = 0, \quad (u_i)_t(x,0) = g_i(x), \quad i = 1,2.$$

Tedaj je funkcija $u_1(x,t) + u_2(x,t)$ rešitev začetnega problema z začetnima pogojema

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = g_1(x) + g_2(x).$$

Ta princip velja tudi v primeru, ko so različni začetni pogoji zastavljeni ob različnih začetnih časih.

Naj bo $F(x,s)$ začetni pogoj problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} u(x,s) &= 0 \\ u_t(x,s) &= F(x,s) \end{aligned}$$

Začetni čas zgornjega začetnega problema je torej s. Naj bo funkcija $v(x,t;s)$ rešitev zgornjega problema. Poleg tega, da reši valovno enačbo zanjo torej velja

$$\begin{aligned} v(x,s;s) &= 0 \\ v_t(x,s;s) &= F(x,s) \end{aligned}$$

Trdimo: Vsota teh funkcij reši nehomogen problem. Konkretno:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\,ds$$

je rešitev nehomogenega začetnega problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 \\ u_t(x,t) &= 0 \end{aligned}$$

Prepričajmo se, da je to res. Označimo

$$\widetilde{u} = \int_0^t v(x,t;s)\,ds.$$

Očitno velja

$$\widetilde{u}(x,0) = 0 \tag{59}$$

Velja pa tudi

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t(x,t) &= v(x,t;s)|_{s=t} + \int_0^t v_t(x,t;s)\,ds \\ &= v(x,t;t) + \int_0^t v_t(x,t;s)\,ds \\ &= \int_0^t v_t(x,t;s)\,ds \end{aligned}$$

Od tod takoj dobimo

$$\widetilde{u}_t(x,0) = 0 \tag{60}$$

Dobimo pa tudi

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_{tt} &= v_t(x,t;t) + \int_0^t v_{tt}(x,t;s)\,ds \\
&= F(x,t) + \int_0^t c^2 v_{xx}(x,t;s)\,ds \\
&= F(x,t) + c^2\Big(\int_0^t v(x,t;s)\,ds\Big)_{xx} \\
&= F(x,t) + c^2\widetilde{u}_{xx}
\end{aligned}$$

Torej $\widetilde{u}$ res reši nehomogeno valovno enačbo

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t).$$

in ustreza ničelnima začetnima pogojema (59) in (60).

Problem

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,s;s) = 0, \quad v_t(x,s;s) = F(x,s)$$

znamo rešiti s pomočjo D'Alambertove formule za homogeno enačbo. Upoštevati moramo le, da je uačetni čas s in ne 0. Zato za rešitev dobimo

$$v(x,t;s) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)\,d\xi$$

Integriramo torej po vodoravni daljici, ki je presečisče karakterističnega trikotnika in vodoravne premice $t = s$. Zato dobimo

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}(x,t) &= \int_0^t v(x,t;s)\,ds \\
&= \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)\,d\xi ds \\
&= \iint_\Delta F(\xi,s)\,d\xi ds.
\end{aligned}$$

Očitno je rešitev začetno-robnega problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

vsota rešitev problemov

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

in

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Torej je rešitev nehomogenega začetno-robnega problema podana s formulo

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds + \iint_\Delta F(\xi,s)\,d\xi ds,$$

kjer Δ označuje karakteristični trikotnik z vrhom (x,t).

7 Uporaba Fourierove analize pri reševanju parcialnih diferencialnih enačb

Fourierova analiza in ideje, ki izhajajo iz nje so morda najpomembnejša orodja za reševanje in analiziranje parcialnih diferencialnih enačb. Videli bomo, da je osnovna ideja uporabe Fourierove analize pri obravnavi diferencialnih enačb podobna vpeljavi koordinat v študij geometrijskih problemov. Zelo shematično lahko to trditev razložimo takole: Denimo, da rešujemo neko hiperbolično ali parabolično enačbo. Pri teh tipih enačb je običajno ena od neodvisnih spremenljivk čas t. Funkcijo $u(x,t)$ dveh spremenljivk lahko razumemo kot pot

$$t \longmapsto u(x,t) \in \mathcal{V}$$

v nekem prostoru $\mathcal{V}$, katerega elementi so funkcije $f(x)$ spremenljivke x. Ti prostori so sicer običajno neskončno dimenzionalni, vendar lahko s pomočjo Fourierove analize konstriuramo primerne "baze" teh neskončno dimenzionalnih prostorov. Iskano rešitev lahko torej razvijemo po kakšni od teh baz in dobimo

$$u(x,t) = \sum_n T_n(t) v_n,$$

kjer je $\{v_n\}$ baza $\mathcal{V}$. Če zgornji razvoj vstavimo v našo enačbo, dobimo sistem navadnih diferencialnih enab̆b za neznane koeficiente $T_n(t)$. Če bazo izberemo smiselno, bo dobljeni sistem popolnoma razklopljen. To pomeni, da bo v vsaki enačbi nastopala le ena neznanka $T_n(t)$. Te enačbe pa bodo velikokrat lahko rešljive.

Začeli bomo nekoliko bolj naivno. približno bomo sledili idejam, ki jih je razvil francoski matematik Joseph Fourier (1786 - 1830) v dvajsetih letih devetnajstega stoletja. To njegovo delo brez dvoma velja za enega od jnajpomembnejših mejnikov v novodobnem razvoju matematike in fizike.

7.1 Homogena toplotna enačba na končnem nosilcu

Najprej si bomo ogledali začetno robni problem za homogeno toplotno enačbo. Reševali bomo nalogo

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} = 0, \quad (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}^+, \quad k > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{aligned} \tag{61}$$

Robna pogoja (67) se imenujeta Dirichletova robna pogoja.

Naloge se bomo lotili tako, da bomo najprej poiskali zelo enostavne rešitve enačbe, nato pa iz teh poskušali sestaviti rešitev celotnega problema.

Denim torej, da je funkcija $u(x,t)$ razcepna, torej, da je oblike

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

kjer sta $X(x)$ in $T(t)$ funkciji ene spremenljivke. Če zgornjo funkcijo vstavimo v toplotno enačbo, dobimo

$$T'X = kTX'',$$

kjer apostrofi pomenijo običajne odvode po primernih spremeljivkah t oz. x.Delimo enačbo z XT in dobimo

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}$$

Leva stran je odvisna le od t, desna pa le od x, torej sta obe strani konstani - enaki isti konstanti $-\lambda$. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} X'' &= -\lambda X \\ T' &= -\lambda kT \end{aligned}$$

Ker v obeh enačbah nastopa ista konstanta λ, pravimo, da sta enačbi *šibko sklopljeni.*

Oglejmo si najprej prvo enačbo. Robna pogoja za funkcije oblike $X(x)T(t)$ se glasita

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0,$$

oziroma

$$X(0) = X(L) = 0,$$

če zanemarimo trivialno rešitev $T(t) \equiv 0$.

Prostorski del naše enačbe je torej robni problem

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{62}$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Opomba 6 *Zgornji problem je drugačen od problema, o katerem govori osnovni eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe. Izrek govori o začetnem problemu. V našem primeru bi imeli dva začetna pogoja. Toda naš problem je podan z dvema robnima pogojema in o takih problemih osnovni izrek ne govori.*

Splošno rešitev enačbe (62) dobimo s pomočjo karakteristične enačbe in je

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Če je $\lambda < 0$, lahko to reǐtev izrazimo v obliki

$$X(x) = \widetilde{A}\cosh{(\sqrt{-\lambda})} + \widetilde{B}\sinh{(\sqrt{-\lambda})}.$$

Hitro vidimo, da nobena funkcija zgornje oblike ne ustreza robnima pogojema. Rešitev pri $\lambda = 0$ je enaka

$$X(x) = ax + b$$

in tudi ta funkcija ne ustreza robnima pogojema.

Naj bo sedaj $\lambda > 0$. Tedaj rešitev lahko zapišemo v obliki

$$X(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} = \widetilde{A}\cos{(\sqrt{\lambda}x)} + \widetilde{B}\sin{(\sqrt{\lambda}x)}$$

Prvi robni pogoj nam da

$$X(0) = \widetilde{A} = 0,$$

drugi pa nato

$$X(L) = \widetilde{B}\sin{(\sqrt{\lambda}L)} = 0$$

Sinus ima ničle v točkah $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Naš robni problem je torej rešljiv natanko takrat, ko je λ eno od števil

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešitve robnega problema so torej vse funkcije oblike

$$X_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sedaj lahko izračunamo še časovni del problema. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ dobimo

$$T_n' = -\lambda_n k T_n,$$

torej

$$T_n(t) = e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t}.$$

Tako dobimo množico rešitev robnega problema

$$u_t - ku_{xx} = 0$$

$$u(0,t) = u(L,0) = 0,$$

parametrizirano z naravnimi števili

$$u_n(x,t) = a_n\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{63}$$

Ker je toplotna enaˇba linearna in ker sta robna pogoja homogena vidimo, da je poljubna linearna kombinacina funkcij $u_n(x,t)$ zgornje oblike tudi rešitev istega robnega problema. Torej, za poljubno N-terico realnih konstant A_n je funkcija

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n\, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

rešitev robnega problema

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

Začetno-robni problem (67) predpisuje še začetni pogoj

$$u(x,0) = f(x).$$

Funkcije oblike (63) lahko zadostijo le začetnim pogojem oblike

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Seveda pa ni vsak smiselen začetni pogoj $f(x)$ trigonometrični polinom zgornje oblike. Pri reševanju začetno-robnih problemov s splošnejšimi začetnimi pogoji si pomagamo s Fourierovo analizo. Osnovna teorija Fourierovih vrst nam pove, da vsako dovolj lepo funkcijo

$$f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki ustreza robnima pogojema

$$f(0) = f(L) = 0$$

razvijemo v Fourierovo vrsto oblike

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Če ja naša funkcija npr. odsekoma zvezna, potem bo desna stran zgornje enačbe enaka levi v skoraj vsaki točki intervala $[0, L]$.

Opomba 7 *Zgornjo Fourierovo vrsto včasih imenujejo tudi posplošeno Fourierovo vrsto. Originalne Fourierove vrste se nanašajo na periodične funkcije. Pri teh uporabljamo pri razvojih funkcije oblik* $\sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right)$ *in* $e^{\frac{2\pi n}{L} x}$. *Te funkcije so lahko* gladko *nadaljujemo v periodične funkcije na* $\mathbb{R}$.

Rešitev začetno robnega problema (67) bomo torej iskali v obliki

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Zgornja funkcija bo ustrezala začetnemu pogoju, če bo velalo

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \tag{64}$$

Ker velja

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) = \frac{L}{2} \delta_{m,n},$$

je začetni pogoj (64) izpolnjen natanko tedajm ki je $A_n = \alpha_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Rešitev našega začeno-robnega problema (67) je torej

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),}$$

kjer so α_n Fourierovi koeficienti začetnega pogoja $f(x)$.

Primer: Videli smo, da se pri valovni enačbi vzdolž karakteristik ohranja določena informacija, npr. negladkost začetnega pogoja. Naslednji primer pa bo pokazal, da se pri toplotni enačbi taka informacija takoj izgubi. Ta dva primera lepo ilustrirata izrazito različni naravi hiperboličnih in paraboličnih enačb.

Začetno robni primer naj bo podan z enačbo

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^+$$

in pogoji

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } \; x \in [0, \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{if } \; x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Začetni pogoj ima torej v $x = \frac{\pi}{2}$ "koleno", oz. v tej točki je to neodvedljiva funkcija.

Kakor prej, bomo nalogo reševali z nastavkom

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

Izračunati moramo neznane koeficiente A_n. Dobili jih bomo iz Fourierovega razvoja začetnega pogoja:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \; \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[\frac{x\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \Big[\frac{(x-\pi)\cos(x)}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin(\frac{(n\pi)}{2}). \end{aligned}$$

Za vrednosti v zgornji enačbi velja

$$\frac{4}{\pi n^2} \sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \; n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & \text{if } \; n = 2k-1. \end{cases}$$

Formalna oz. šibka rešitev je torej

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 tk} \sin((2n-1)x) \tag{65}$$

Definicija 10 *Vsota*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$$

je krepka rešitev začetno-robnega problema če konvergira k neki funkciji, ki je vsaj enkrat odvedljiva po t in vsaj dvakratpo x.

Zaenkrat ne vemo, ali ta vrsta konvergira (65) ustreza pogojem zgornje definicije. Prepričajmo se, (65) ni zgolj formalna rešitev, ampak je res tudi krepka.

1. *Konvergenca:* Naj bo $\epsilon > 0$ poljubno majhen. Za vsak $t > \epsilon$ imamo

$$\begin{aligned} |\frac{(-1^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)x) e^{-(2n-1)t}| &< |\frac{1}{(2n-1)^2} e^{(2n-1)^2 t}| \\ &\leq |\frac{1}{(2n-1)^2}\, e^{-(2n-1)t}| \\ &\leq |\frac{1}{(2n-1)^2}\, e^{-(2n-1)\epsilon}| = M_n \end{aligned}$$

Vidimo, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

Po Weierstrassovem M-testu vrsta (65) torej konvergiraabsolutno in enakomerno na $D_\epsilon = [0,\pi] \times [\epsilon, \infty]$. Torej je (65) na D_ϵ zvezna funkcija.

2. *Odvedljivost po t:* Oglejmo si zaporedje funkcij $\{(u_n)_t(x,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Imamo

$$|(u_n)_t(x,t) = |\frac{-4}{\pi}(-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x) < \frac{4}{\pi} e^{-(2n-1)^2 \epsilon} = \widetilde{M}_n$$

Spet velja $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{M}_n < \infty$. Torej je po M-testu in po izreku o odvajanju vrst po členih funkcija (65) zvezno odvedljiva po t.

3. *Odvedljivost po x:* Odvajanje členov vrste (65) po x nam da

$$|(u_n)_x(x,t)| = |\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 t} \cos((2n-1)x)| < \frac{1}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \epsilon} = \widehat{N}_n,$$

$$|(u_n)_{xx}(x,t)| = (-1)^n e^{-(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x) < e^{-(2n-1)^2 \epsilon} = \widehat{M}_n$$

Tudi tu imamo $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{N}_n < \infty$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{M}_n < \infty$. Isti argument kot zgoraj nam pove, da ustrezni vrsti absolutni in enakomerno konvergirata k prvemu in drugemu odvodu funkcije $u(x,t)$, podane z vrsto (65).

Dokazali smo torej, da vrsta je funkcija

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-(2n-1)^2tk}\sin\left((2n-1)x\right)$$

krepka rešitev našega začetno-robnega problema.

Poglejmo si še, kaj dobimo, če vrsto (65) m-krat odvajamo po členih. Pri tem je k poljubno naravno število. Odvode po času lahko ocenimo z neenačbo

$$|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}(x,t)| < ((2n-1)k)^{2m}\cdot e^{-(2n-1)^2\epsilon},$$

odvode po x pa z neenačbo

$$|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x,t)| < ((2n-1)k)^{m}\cdot e^{-(2n-1)^2\epsilon},$$

Vrste vseh teh odvodov po Weierstrassovem M-testi konvergirajo absolutno in enakomerno. Zato je funkcija $u(x,t)$ na D_ϵ neskončnokrat odvedliva po t in po x.

Ugotovimo torej naslednje: Singularnost (v obliki neodvedljivosti) v začetnem pogoju toplotne enačbe popolnoma izgine v času ϵ, kjer je ϵ poljubno majhno število. Takšno vedenje rešitve je v popolnem nasprotju z vedenjem rešitev valovne enačbe, kjer se singularnost ohranja vzdož karakterističnih premic. Videli smo, da je rešitev singularna pri poljubno velkem času, če je singularen začetni pogoj. ∇

7.2 Nehomogena toplotna enačba na končnem nosilcu

Oglejmo si sedaj *nehomogen* začetno - robni problem za valovno enačbo

$$u_{tt} - uxx = F(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]$$

z robnima pogojema

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

in začetnima pogojema

$$u(x,0) = f(x)$$
$$u_x(x,0) = g(x)$$

Ali se tudi reševanja tga problema lahko lotimo s strategijo, ki smo jo uporabili pr prejšnjem problemu? Ločitev spremenljivk

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

nam da
$$T''X - TX'' = F(x,t)$$
Tu se vse skupaj ustavi. Vendar pa smo se pri reševanju prejšnjega, homogenega problema naučili nečesa zelo pomembnega. Videli smo namreč, da lahko funkcije, ki nastopajo v problemu, izražamo v obliki (neskončnih) vsot sinusoid. Lahko bi rekli, da ta pristop k obravnavi funkcije imenujemo Fourierova analiza. Osnovna Fourierova analza nam pove naslednje:

1. Zvezna periodična funkcija $f(x)$ s periodo 1 je izrazljiva s konvergentno funkcijsko vrsto oblike
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n e^{2\pi inx}$$
2. Zvezna funkcija $f(x)$, ki ustreza Dirichletovima robnima pogojema
$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$
je izrazljiva s konvergentno vrsto
$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \sin(2\pi nx)$$
3. Zvezna funkcija $f(x)$, ki ustreza Neumannovima robnima pogojema
$$f_x(0) = 0, \quad f_x(1) = 0$$
je izrazljiva s konvergentno vrsto
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos(2\pi nx)$$

Prostor zveznih funkcij s kompleksnimi vrednostmi dafiniranih na intervalu $[0,1]$ je podprostor Hilbertovega prostora $L^2[0,1]$. Ta prostor je opremljen s salarnim produktom
$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$
Osnovni izrek Fourierove analize nam pove,družina funkcije $\{e^{2\pi inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ *kompletni ortonormiran sistem* v prostoru $L^2[0,1]$ S stališča linearne algebre je *kompetni ortonormira sistem* ortonormirana baza neskončno dimenzionalnega prostora. V splošnem so funkcijski prostori neskončno dimenzioalni.

Pri študiju začetno-robnih problemov za $(1+1)$ ali $(2+0)$ parcialne diferencialne enačbe so relevantni Hilbertovi prostori in najprimernejši kompletni ortonormirani sistemi (KONS) določeni z robnimi pogoji:

1. Periodični robni pogoji: Prostor - $V_p = \{f(x); f(0) = f(1), f_x(0) = f_x(1)\}$, KONS - $\{e^{2\pi inx}; n \in \mathbb{Z}\}$
2. Dirichletovi robni pogoji: Prostor $V_d = \{f(x); f(0) = f(1) = 0\}$, KONS - $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi nx); n \in \mathbb{N}\}$
3. Neumannovi robni pogoji: Prostor $V_n = \{f(x); f_x(0) = f_x(1) = 0\}$, KONS - $\{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi nx); n \in \mathbb{N}\}$

Poglejm na neki začetno-robni problem z nekoliko drugačnega stališča. Mislimo si, da je funkcija $u(x,t)$ pot

$$\begin{array}{ccc} [0,T] & \longrightarrow & V \\ t & \longmapsto & u(x,t), \end{array}$$

ki vsakemu času $t \in [0,T]$ priredi točko $u(x)$ v prostoru V. Točka $v(x) \in V$ je funkcija. Točke neskončn dimenzionalnega prostora V so pač funkcije.

Pot

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

poznamo, če vemo, kako se s časom spreminjajo sve tri koordinate $x_1(t)$, $x_2(t)$ in $x_3(t)$ te poti. Če funkcije $x_i(t)$, $i = 1,2,3$ poznamo, potem poznamo pot

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\, e_1$$

Če želimo poznati pot $u(x,t)$ v neskončno dimenzionalnem prostoru V, moramo poznati časovno evolucijo vseh neskončno mnogo koordinat $\alpha_n(t)$. Če koordinate funkcije $\alpha_n(t)$ poznamo, lahko iskano funkcijo $u(x,t)$ izrazimo kot pot

$$u(x,t) = \sum_n \alpha_n(t)\, g_n(x)$$

v primernem prostoru V. Funkcije $g_n(x)$ tvorijo ustrezni KONS. Za tri različne tipe robnih pogojev imamo torej:

1. Periodični robni pogoji:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n(t) e^{2\pi i n x} \tag{66}$$

2. Dirichletovi robni pogoji;

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) \sin(2\pi i n x) \tag{67}$$

3. Neumannovi robni pogoji:

$$u(x,t) = \gamma_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \cos(2\pi i n x) \tag{68}$$

Zgornji izrazi so torej smiselni nastavki za rešitve homofenih *in* nehomogenih začetno/robnih problemov za $(1+1)$ diferencialne enačbe. Videli bomo, da s pmočjo teh nastavkov parcialne diferencialne enačbe preoblikujemo v sistem neskončno mnogih *navadnih* diferencialnih enačb za neskonňo mnogo neznanih funkcij. Na prvi pogled se to morda ne sliši spodbudno, toda dobljeni sistemi bodo relativno enostavni. Najpomembnejša lastnost dobljenih sistemov je *razklopljenost* . To pomeni, da v vsaki enabi sistem nastopa le ena neznana funkcija. Poleg tega so vse eačbe v bistvu iste oblike. Če zamo rešiti eno, zamo rešiti vse.

Vrnimo se sedaj k nehomogenemu problemu, ki smo ga navedli na začetku razdelka, in ga rešimo. Spomnimo se: Rešujemo enačbo

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \tag{69}$$

pri robnih pogojih

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

in pri začetnih pogojih

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u_x(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

Ker je problem dirichletov, bomo reševali z nastavkom

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(2\pi n x).$$

Nastavek vstavimo v enačbo (69) in dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\sin(2\pi nx) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)(2\pi n)^2 \sin(2\pi nx) = F(x,t)$$

Zaradi kompatibilnosti mora veljati $F(x,t_0) \in V_d$ za vsak t_0. Zato ahko tudi $F(x,t)$ pri vsakem fiksnem t razvijemo po bazi, sestavljeni iz sinusov. Dobimo

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(2\pi nx)$$

in od tod

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n'' + (2\pi n)^2 T_n\Big)\sin(2\pi nx) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin(2\pi nx),$$

oziroma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n'' + (2\pi n)^2 T_n - h_n(t)\Big)\sin(2\pi nx) = 0$$

Ker je $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\pi nx); n \in \mathbb{N}\}$ kompleten ortonormiran sistem prostora V_d in ker je linearna kombinacija linearno neodvisnih vektorjev enaka nič le, če so vsi koeficienti linearne kobinacije enaki nič, iz zgornjega sledi

$$T_n'' + (2\pi n)^2 T_n - h_n(t) = 0, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N},$$

oziroma

$$T_n'' + (2\pi n)^2 T_n = h_n(t), \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Dobili smo sistem navadnih diferencialnih enačb druge stopnje za neznane funkcije $T_n(t)$. V vsaki enačbi res nastipa le ena neznanka $T_n(t)$. Nehomogenosti $h_n(t)$ so podane z razvojem desne strani $F(x,t)$.

Za vsak n je zgornja enačba nehomogena linearna navadna enačba drugega reda s konstatnimi koeficienti. Rešitve so oblike

$$T_n(t) = A_n\cos(2\pi nt) + B_n\sin(2\pi nt) + p_n(t),$$

kjer so funkcije $p_n(t)$ podane s $h_n(t)$ in jih lahko izračunamo z variacijo konstante. Splošna rešitev robega problema

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

je torej

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(2\pi nt)+B_n\sin(2\pi nt)+p_n(t)\Big)\sin(2\pi nx) \tag{70}$$

V zgornji formuli nastopajo še nedoločene konstante A_n in B_n. Določimo jih tako, da splošno rešitev vstavimo v izraza, ki podajata oba začetna pogoja. Seveda moramo tudi začetna pogoja razviti v Fourierovo vrsto. Zaradi zahteve po kompatibilnosti začetnih in robnih pogojev bomo lahko začetna pogoja $f(x)$ in $g(x)$ lahko razvili po sinusih. Označimo

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin(2\pi nx), \quad u_t(x,t)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\sin(2\pi nx).$$

Dobimo torej

$$A_n=\phi_n-p_n(0), \quad n\in\mathbb{N}$$

in

$$B_n=\frac{1}{2\pi n}(\gamma_n-p_n'(0))$$

Ko vstavimo zgornje izraze za A_n in B_n v formulo (70), dobimo rešitev, enačbe, ki ustreza tako robnim, kot tudi začetnim pogojem.

7.3 Začetno robni problemi in lastni problemi diferencialnih operatorjev

Metodo, ki smo jo uporabili pri reševanju začeno robnega problema za valovno enačbo lahko posplošimo na širok razred linearnih problemoov, povezanih z diferencialnimi enačbami.

Zelo površno si bomo ogledali začetno robne probleme za parabolične in hiperbolične enačbe naslednjih oblik.

Parabolični problemi:

$$u_t-(a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u)=F(x,t), \quad (x,t)\in[a,b]\times(0,T)$$

$$\begin{array}{rcccl} B_a[u] &=& \alpha u(a,t)+\beta u_x(a,t) &=& 0\\ B_b[u] &=& \gamma u(b,t)+\delta u_x(b,t) &=& 0 \end{array}$$

$$u(x,0)=f(x).$$

Hiperbolični problemi:

$$u_{tt} - (a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u) = F(x,t), \quad (x,t) \in [a,b] \times (0,T)$$

$$\begin{array}{rcccl} B_a[u] & = & \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) & = & 0 \\ B_b[u] & = & \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) & = & 0 \end{array}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x)$$

V obeh problemih nastopa diferencialni operator drugega reda

$$\mathcal{L}[u] = a(x)u_{xx} + b(x)u_c + c(x)u, \tag{71}$$

definiran na prostoru $\mathcal{C}^2[a,b]$ dvakrat zvezno odvedljivih funkcij na $[a,b]$. Pridružimo temu operatorju še robna pogoja B_a in B_b. Ta dva pogoja določata linearen podprostor

$$V_r = \{f(x); B_a[f] = B_b[f] = 0\} \subset \mathcal{C}^2[a,b]$$

Denimo, da poznamo rešitev lastnega problema za operator

$$\mathcal{L} : V_r \longrightarrow V_r.$$

Lastne vrednosti $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ naj bo negativno in po absolutni vrednosti naraščajoče zaporedje brez stekališč, lastne funkcije $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pa naj tvorijo kompleten ortonormiran sistem glede na skaparni produkt na V_r, podan s predpisom

$$\langle f, g\rangle_r = \int_a^b f(x)g(x)\, r(x)\, dx,$$

kjer je $r(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ povsod pozitivna integrabila funcija. Ta funkcija se imenuje utež ali utežna funkcija. Torej imamo

$$\langle \phi_m, \phi_n\rangle_r = \delta_{m,n}$$

in vsaka funkcija $f \in V_r$ je izrazljiva v obliki

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x),$$

kjer je

$$\alpha_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x) r(x)\, dx.$$

Zgornja problema lahko sedaj spet rešujemo s pomočjo nastavka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\phi_n(x)$$

Če razvijemo po bazi $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ še nehomogenost

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\phi_n(x)$$

lahko npr. parabolično enačbo zpišemo v obliki

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) - \lambda_n T_n(t)]\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(t)\phi_n$$

Kakor prej, spet dobimo sistem nehomogenih linearnih navadnih diferencialnih enačb

$$T_n'(t) - \lambda_n T_n(t) = h(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pri vsakem n je splošna rešitev take enačbe enodimenzionalen afin podprostor v ustreznem funkcijskem prostoru. Rešitev je torej oblike

$$\alpha_n e^{-\mu_n t} + p_n(t),$$

kjer je $\mu_n = -\lambda_n > 0$, funkcija $p_n(t)$ pa je neka partikularna rešitev nehomogene enačbe. Splošna rešitev robnega problema

$$u_t - [a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u] = F(x,t), \quad (x,t) \in [a,b] \times (0,T)$$

$$\begin{array}{rclcl} B_a[u] & = & \alpha u(a,t) + \beta u_x(a,t) & = & 0 \\ B_b[u] & = & \gamma u(b,t) + \delta u_x(b,t) & = & 0 \end{array}$$

je torej družina funkcij

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{-\mu_n t} + p_n(t)]\phi_n(x).$$

Določiti moramo še konstante A_n. To storimo tako, da razvijemo začetni pogoj $f(x)$ po bazi $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Naj bo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x).$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ nam enačba $u(x,0) = f(x)$ poda algebraično enačbo A_n, katere rešitev je

$$A_n = \alpha_n - p_n(0)$$

So, the solution of the initial boundary problem is

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [(\alpha_n - p_n(0))e^{-\mu_n t} + p_n(t)]\phi_n(x).$$

Zgornji opis je le groba skica postopka, s katerim lahko rešimo nekatere linearne parabolične in hiperbolične probleme drugega reda. Postopek lepo deluje, če je baza lastnih vektorjev diferencialnega operatorja $\mathcal{L}$, podanega v (71), sebi adjungirana. Vemo, da so lastni vektorji nekega operatorja, definiranega na kakem Hilbertovem prostoru ortogonali le, če je ta operator sebi adjungiran glede na skalarni produkt v prostoru. Vsak operator $\mathcal{L}$ oblike (71) ni sebi adjungiran glede na običajni L^2 skalarni produkt

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Pod milimi pogoji pa lahko ta skalarni produkt popravimo z utežno funkcijo $r(x)$, tako, da bo $\mathcal{L}$ sebi adjungiran glede na modificirani, uteženi skalarni produkt

$$\langle f(x), g(x) \rangle_r = \int_a^b f(x)g(x)\,r(x)\,dx.$$

Bralec lahko za vajo poskusi sam izračunati utežno funkcijo $r(x)$ is koeficientov $a(x)$, $b(x)$ in $c(x)$ operatorja $\mathcal{L}$.

Omeniti moramo, da je rešitev lastnega problema za poljubno izbran operator oblike $\mathcal{L}$ zelo težka in v splošnem nerešljiva naloga. Poznamo le nekaj operatorjev, za katere a lastni problem eksplicitno, analitično rešen.

Teorija, ki obravnava probleme, opisane v tem razdelku se imenuje Sturm-Liouvilleova teorija. Začetki teorije segajo precej globoko v 19. stoletje, vendar je še danes zelo aktualna. Časovno odvisna Schrödingrjeva enačba kvantne mehanike je primer enačbe, ki sodi v Sturm-Liouvilloevo teorijo.

7.4 Toplotna enačba in Fourierova transformacija

7.4.1 Diracova delta funkcija

V nadaljevanju bomo s pomočjo Fourierove transformacije rešili Cauchyjevo nalogo za toplotno enačbo na neskončnem nosilcu. Pri reševanju bomo naleteli na objekt, ki se imenuje delta funkcija ali Diracov δ. Zato si najprej oglejmo, kaj je to Diracova δ-funkcija.

Definicija 11 *Naj bo $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ družina gladkih funkcij, za katere velja:*

1.
$$supp(\varphi_\epsilon) \subset (-\epsilon, \epsilon) \quad \text{in} \quad \varphi_\epsilon > 0 \quad \text{na} \quad (-\epsilon, \epsilon).$$

2.
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x)dx = 1.$$

Potem pravimo, da družina $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ generira Diracovo δ- funkcijo s polom v $x = 0$.

Oglejmo si primer družine $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$. Naj bo za funkcija $\varphi(x)$ podana s predpisom

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(1)}\ Exp(\frac{1}{1-x^2}), & \text{ko je } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Pri tem je

$$P(1) = \int_{-1}^{1} Exp(\frac{1}{1-x^2})\, dx.$$

za vsak $\epsilon > 0$ sedaj definiramo funkcijo $\varphi_\epsilon(x)$ s predpisom

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{P(\epsilon)}\ Exp(\frac{1}{1-(\epsilon x)^2}), & \text{ko je } x \in [-\epsilon, \epsilon] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Sedaj je

$$P(\epsilon) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} Exp(\frac{1}{1-(\epsilon x)^2})\, dx.$$

Enostavnejši primer, ki pa je kljub enostavnosti velikokrat uporaben je podan z najenostavnejšo družijo stopničastih funkcij, ki ustrezjo obema pogojema zgornje definicije.

Za vsak ϵ definiramo funkcijo φ_ϵ s predpisom

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & \text{ko je } x \in [-\epsilon, \epsilon] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Velja naslednja enostavn a pomembna trditev.

Trditev 1 *Naj bo* $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *poljubna družina funkcij, ki ustreza definiciji 11. Potem za vsako zvezno funkcijo* $f(x)$*, definirano na realni osi, velja*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = f(0)$$

Dokaz: Za vsak fiksen ϵ velja po izreku o povprečni vrednosti

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = \int_\epsilon^\epsilon f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = f(\widetilde{x})\int_\epsilon^\epsilon \varphi_\epsilon(x)\,dx = f(\widetilde{x}),$$

kjer je $\widetilde{x}\in[-\epsilon,\epsilon]$. Ko pošljemo $\epsilon\to 0$, res dobimo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = f(0)$$

□

Naj bo $W=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ poljuben prostor funkcij. Na vsakem takem prostoru lahko za vsako točko $a\in\mathbb{R}$ definiramo evalvaciski funkcional

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Ev}_a : W & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f(x) & \longmapsto & f(a),\end{array}$$

ki izbrani funkciji f priredi njeno vrednost $f(a)$ pri argumentu $a\in\mathbb{R}$. Vidimo torej:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x)\,dx = \mathrm{Ev}_0[f]$$

Očitno bomo dobili evalvacijo v poljubni točki a z enostavnim premikom družine $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ v družijo $\{\varphi_\epsilon^a\}_{\epsilon>0}$, kjer je

$$\varphi_\epsilon^a(x) = \varphi_\epsilon(x-a).$$

Seveda imamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon^a(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x-a)\,dx = f(a)$$

in zato

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon^a(x)\,dx = \mathrm{Ev}_a[f].$$

Spomnimo se Fischer-Rieszovega reprezentacijskega zreka, ki pravi, da za vsak zvezni linearni funkcional F, definiran na Hilbertovem prostoru L^2 obstaja vektor w_F, za katerega velja:

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)w_F(x)\,dx.$$

V kontekstu, ki nas bo zanimal, bomo evalvacijski funkcional opazovali na prostoru zveznih funkcij. Prostor zveznih funkcij ni Hilbertov in Fischer-Rieszov izrek na tem prostoru ne velja. Lahko pa vseeno, nekoliko na silo, vpeljemo nekakšno funkcijo, ki na prostoru zveznih funkcij reprezentira ealvacijski funkcional. Ta funkcija se imenuje Diracova delta funkcija in jo označujemo s simbolom $\delta_a(x)$

Definicija 12 *Naj bo* $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ *poljubna družina funkcij z lastnostmi iz definicije 11. Diracova delta funkcija* $\delta_a(x)$ *s polom v* a *je objekt definiran z enakostjo*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta_a(x)\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\epsilon(x-a)\, dx = \mathrm{Ev}_a[f].$$

Za Diracov delta očitno velja

$$\delta_a(x) = \delta_0(x-a)$$

Diracov delta ni funkcija v običajnem pomenu besede. Če si ga že hočemo predstavljati kot funkcijo, potem je "funkcija" $\delta_a(x)$ enaka 0 povsod, razen v a, v točki a je njena vrednost enaka neskončno, integral $\delta_a(x)$ po vsej realni osi pa je enak 1. Omenimo, da obstaja čvrsto vpeljana matematična teorija znotraj katere ima pojem Diracov delta in še mnogi drugi koncepti, ki izgledajo nesmiselni v običajnem diferencialnem računu, povsem jasen pomen. Znotraj te teorije so tudi izpeljana pravila za računanje stemi objekti in to raǔnanje nam v analizi diferencialnih enačb, v verjetnosti in na drugih področjih da zelo koristne in pomembne rezultate. Ta teorija se ienuje teorija distribucij. V sredini 20. stoletja jo je razvil francoski matematik Laurent Schwartz.

Predstavitev Diracovega delte s pomočjo družin oblike $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ je morda najbolj naravna, a je le ena od mnogih možnosti. Motivirani bralec lahko razmisli in se prepriča, da na videz nesmiselna enakost

$$\delta_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n(x-a)}$$

ima smisel. Za rigorozen dokaz pa je potrebno nekaj orodja iz teorije distribucij.

7.4.2 Toplotna enačba in toplotno jedro

Naj bo podana naslednja Cauchyjeva naloga:

$$\begin{aligned} u_t &= k\, u_{xx} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

To nalogo bomo rešili s pomočjo teorije integralskih jeder.

Predpostavili bomo, da je začetni pogoj $f(x)$ funkcija, ki hitro pada proti 0, ko gre$x$ proti $\pm\infty$.

Definicija 13 *Schwartzev razred $\mathcal{S}$ je prostor gladkih funkcij realne osi vase, ki v obeh neskončnostih padajo proti* 0 *hitreje kot vse negative potence in katerih vsi odvodi padajo proti* 0 *prav tako hitro. Torej*

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{C}^\infty; \lim_{x\to\pm\infty} x^m f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0 \quad m, n, \in \mathbb{N}\}$$

Izkazalo se bo, da za vsako rešitev toplotne enačbe velja

$$u(x,0) \in \mathcal{S} \Rightarrow u(x,t) \in \mathcal{S} \;\text{ za vsak } t > 0$$

Velja naslednja trivialna a pomembna trditev

Trditev 2 *Za vsak čas $t_0 > 0$ je preslikava časovne evolucije*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{t_0} : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ f(x) &\longmapsto u(x,t_0), \end{aligned}$$

ki žačetnemu stanju priredi vrednost $u(x,t_0)$ v času t_0 linearna preslikava.

Dokaz: Naj bosta f_1 in f_2 dva različna začetna pogoja in $u_1(x,t)$ ter $u_2(x,t)$ rešitvi pri teh dveh začetnih pogojih. Naj bosta a in b poljubni realni konstanti. Zaradi linearnosti toplotne enačbe je fukcija $w(x,t) = au_1(x,t) + bu_2(x,t)$ tudi rešitev toplotne enačbe. Za njeno začetno vrednost pa velja

$$w(x,0) = au_1(x,0) + bu_2(x,0) = af_1(x) + bf_2(x).$$

Torej res velja

$$\mathcal{E}_t[af_1 + bf_2] = a\,\mathcal{E}_t[f_1] + b\,\mathcal{E}_t[f_2]$$

za poljubno izbran $t > 0$. $\square$

Pri delu z linearnimi preslikavami med končno dimenzionalnimi prostori si zelo pogosto pomagamo z matrikami. Če v domeni in kodomeni preslikave izberemo bazi, smo s tem izbrani linearni preslikavi priredili matriko. Kot vemo, to prinese številne prednosti. Smiselno se je vprašati, ali lahko tudi linearne preslikave med neskončno dimenzionalnimi prostori predstavimo na način, ki bi bil analogen predstavitvi končno dimenzionalnih preslikav z matrikami.

Spomimo se, da je matrika v resnici fukcija dveh diskretnih spremenljivk. Spremenljivki sta podani kot indeksa elementov v matriki. Denimo, da smo v domeni in kodomeni izbrali bazi. Linearni preslikavi

$$L : V \longrightarrow W$$

priredimo matriko

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ iz prostora V prslikamo z matriko M v prostor W po pravilu

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\, v_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\, v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\, v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

V bolj kompaktni obliki bi lahko zgornji račun zapisali takole: Kor reěno, lahko matriko M razumemo kot funkcijo dveh diskretnih spremenljivk i in j. Torej

$$M = M(i, j) = a_{i,j}.$$

Vektor $\vec{v}$ pa je funkcija ene diskretne spremenljivke j. Torej

$$\vec{v} = \vec{v}(j) = v_j.$$

Torej

$$L(v) = M \cdot \vec{v}(i) = \sum_{j=1}^{n} M(i, j)\vec{v}(j) = w(i). \tag{72}$$

Če v vektorju $\vec{v}$ diskretno spremenljivko zamenjamo z zvezno, dobimo realno funkcijo $f(x)$. In če v matriki obe diskretni spremenljivki zamenjamo z zvevnima, dobimo funkcijo dveh spremenljivk $K(x, y)$. Naj bo sedaj

$$\mathcal{L} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

linearen operator med dvema funkcijskima prostoroma. Kontimuumska analogija množenja matrike v vektorjem, podanega s formulo (72) je očitno formula

$$\mathcal{L}[f] = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y)\, dy = g(x) \tag{73}$$

Vprašamo se lahko, glede na kakšno bazo smo linearnemu opratorju $\mathcal{L}$ priredili "matriko" ozirmoa integralsko jedro. Tu e morem biti prav rigorozni, lahko pa si mislimo, da smo funkcije f razvili po bazi delta funkcij. Torej

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(a)\, \delta_a(x)\, da \tag{74}$$

Ta razvoj je analogen razvoju diskretnega vektorja $\vec{v}$ po Kroneckerjevih delta vektorjih. Imamo

$$\vec{v}(i) = \sum_{j=1}^{n} \vec{v}(j)\, \delta_{j,i}.$$

Hitro lahko vidimo, da je enakost (74) ekvivalentna definiciji Diracove delta funkcije 12. Res, imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(a)\, \delta_a(x)\, da \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(a)\, \delta_0(x-a)\, da \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(a)\, \delta_0(a-x)\, da \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(a)\, \delta_x(a)\, da \end{aligned} \tag{75}$$

Zadnja rstica je res prav definicija 12 Diracove delta funkcije. Pri tretjem enačaju smo uporabili dejstvo, da lahko brez škore za splošnost družino $\{\varphi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, s katero definiramo $\delta_0(x)$, izberemo tako, da so vse funkcije φ_ϵ sode. Na ta način vidimo, da se $\delta_0(x)$ vede kot soda funkcija.

Definicija 14 *Funkcija dveh spremenljivk $K(x, y)$, za katero velja (73) se imenuje integralsko jedro linearnega operatorja $\mathcal{L}$.*

Naj bo sedaj $f(x)$ začeta vrednost Cauchyjeve naloge za toplotno enačbo in $u(x,t)$ rešitev te Cauchyjeve naloge. V nadaljevanju bo naša naloga poiskati funkcijo $K(x,y;t)$, za katero bo valjalo

$$\int_{\mathbb{R}} K(x,y;t)f(y)\,dy = u(x,t)$$

Poiskali bomo torej enoparametrično družino jeder $K(x,y;t)$, parametrizirano s t. Pri vsakem fiksnem t_0 bo funkcija dveh spremenljick $K(x,y;t_0)$ integralsko jedro, pripadajoče linearni preslikavi časovne evolucije $\mathcal{E}_{t_0}$.

Pri reševanju Cahchijevega problema

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & k\,u_{xx} & \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & f(x). & \end{array} \tag{76}$$

postopali podobno, kot smo pri reševanju začetnega problema za toplotno enačbo na končnem nosilcu. Denimo najprej, da obravnavmo funkcije, definirane na intervalu $[-\frac{L}{2\pi},\frac{L}{2\pi}]$ in jih na tem intervalu razvijamo v eksponentne Fourierove vrste. Ni težko videti, da pri večanju intervala $[-\frac{L}{2\pi},\frac{L}{2\pi}]$, ko gre $L\to\infty$ Fourierova vrsta preide v Fourierovo transformacijo. Simbolično lahko zapišemo

$$f(x) = \sum_{n\to-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{n}{L}x} \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Pri reševanju problema (76) bomo torej uporabili nastavek

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A(\xi,t)e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Nastavek vstavimo v enačbo in dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} A_t(\xi,t)e^{i\xi x}\,d\xi = -k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 A(\xi,t)e^{i\xi x}\,d\xi$$

in od tod

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(A_t(\xi,t)+k\,\xi^2A(\xi,t)\Big)e^{i\xi x}\,d\xi = 0 \tag{77}$$

Na levi strani imamo inverzno Fourierovo trasforacijo funkcije

$$A_t(\xi,t)+k\,\xi^2A(\xi,t).$$

Ker je žačetni pogoj $f(x)=u(x,0)$ element Schwartzevega razreda $\mathcal{S}$, so tudi Fourierove transformacije funkcije $u(c,t)$ glede na x za vsak t elementi $\mathcal{S}$. Fourierova transformacija je na $\mathcal{S}$ bijekcija, forej so za sak t elementi $\mathcal{S}$ tudi funkcije $\xi\to A(\xi,t)$ in

$x \to A_t(\xi, t)$. Zaradi bijektivnosti in linearnosti Fourierove trasformacije na $\mathcal{S}$, je njeno jedro trivialno, zato iz (77) sledi

$$A_t(\xi, t) + k\,\xi^2 A(\xi, t) = 0$$

To je diferencialna enačba glede na t, spremennjlivka ξ pa je parameter, ki je analogen indeksu n, ki nastopa pri obravnavi začetno robnih problemov s pomočjo Fourierovih vrst. Enačbo rešimo:

$$\begin{aligned} \frac{A_t}{A}(\xi, t) &= k\xi^2 \\ \ln(A(\xi, t)) &= -k\xi^2 t + C(\xi) \\ A(\xi, t) &= F(\xi) e^{-k\xi^2 t} \end{aligned}$$

V funkciji $F(\xi)$ so "zbrane nedoločene konstante", ki jih bomo določili s pomočjo začetnega pogoja. Imamo:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-\ k\xi^2 t}\, e^{i\xi x}\, d\xi \tag{78}$$

in od tod

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi = \mathcal{G}(F(\xi)),$$

kjer smo z $\mathcal{G}$ označili inverzno transformacijo Fourierove transformacije $\mathcal{F}$

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

Imamo torej

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)](\xi),$$

kjer je

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \tag{79}$$

Če sedaj vstavimo (79) v (78) dobimo rešitev Cauchyjevega problema (76) v obliki

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} \Big[\int_{\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y}\, dy \Big] e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x}\, d\xi. \tag{80}$$

Naš problem je torej rešen, vendar je zgornja rešitev precej nepregledna. Vsebuje dvojno integracijo in ni lahko videti, akšen je pomen in vpliv posameznih sestavin formule. Na začetku obravnave smo povedali, da želimo rev sitev izraziti v preglednejši obliki, s pomočjo integralskega jedra. Zgornjo formulo bomo torej preoblikovali tako, da bomo dobili rešitev v želeni obliki.

Postopali bomo takole: Najprej bomo rešili začetni problem (76) pri katerem bo začetni pogoj Diracova delta funkcija, $f(x) = \delta_0(x)$. Iz dobljene rešitve bomo hitro dobili rešitev nekoliko splošnega problema z začetnim pogojem $f(x) = \delta_a(x)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ poljubna realna točka. Te re'v sitve bomo nazadnje lahko "sešteli" v rešitve problemov s poljubnimi začetnimi stanji $f(x) \in \mathcal{S}$.

Rešitev pri začetnm pogoju $f(x) = \delta_0(x)$: Vstavimo $f(x) = \delta_0(x)$ v rešitev (80). Evalvacijska lastnost delta funkcije nam da

$$\int_{\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy = \int_{\infty}^{\infty} \delta_0(y)e^{-i\xi y}\,dy = 1.$$

Od tod

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\xi^2 t}\,e^{i\xi x}\,d\xi.$$

Funkcijo na desni lahko izračunamo s kompleksno integracijo, lahko pa tudi nekoliko drugače z zanimivim trikom. Poglejmo si ta postopek. Odvajanje zgornje enakosti nam da

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\xi e^{-\ i\xi^2 t}\,e^{i\xi x}\ d\xi.$$

Integrirajmo po delih:

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& e^{i\xi x} & \qquad & dv &=& \xi e^{-\ k\xi^2 t}\,dt \\ du &=& ixe^{i\xi x} & & v &=& -\frac{1}{2kt}e^{-k\xi^2 t} \end{array}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \frac{i}{2\pi}\Big[\ \frac{1}{2kt}e^{\ k\xi^2 t}\,e^{i\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{(i)^2}{4\pi kt}\int_{\infty}^{\infty} xe^{\ k\xi^2 t}\,e^{i\xi x}\,d\xi \\ &= -\frac{1}{2kt}x\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\xi^2 t}\,e^{i\xi x}\ d\xi \\ &= -\frac{1}{2kt}\ x\ u(x,t) \end{aligned}$$

Dobili smo torej homgeno linearno navadno enačbo

$$u_x = -\frac{1}{2kt}\ x\ u,$$

katere rešitev je

$$u(x,t) = D(t)\,e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Določiti moramo še funkcijo $D(f)$. Imamo

$$D(t) = u(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\xi^2 t}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{kt}}$$

Dobili smo torej

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi 4kt}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

Rezultat je torej Gaussova normalna porazdelitev. V skladu z običajnimi oznakami parametrov v Gaussovi porazdelitvi lahko zapišemo

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right), \quad \sigma = \sqrt{kt}.$$

Pričakovana vrednost the Gaussove funkcije je torej enaka 0, njena varianca (sigma) pa je enaka $\sigma(t) = \sqrt{kt}$. Sigma je merilo razpršenosti Gussove funkcije. Večja ko je σ, bolj je funkcija raztegnjena in manj izrazit je njen maksimum. Vidimo, da pri rešitvi $u(x,t)$ našega zav cetnega problema $\sigma(t)$ raste s korenom iz časa. Lahko si mislimo, da je v času 0 vsa toplota skoncentriranav točki 0, nato pa se s časom širi po nosilcu. Lahko si mislimo, da je hitrost širjenja sorazmerna korenu iz prete'v cenega časa. Tak način širjenja neke informacije (npr. toplote) se imenuje difuzijsko širjenje.

Rešitev problema pri začetnem pogoju $f(x) = \delta_a(x)$: Do rešitve nas bo pripelala naslednja preprosta trditev.

Trditev 3 *Naj bo $u(x,t)$ rešitev zaětnega problema za toplotno enačbo* (76) *pri začetnem pogoju $g(x)$. Tedaj je rešitev pri premaknjenem začetnem pogoju $g(x-a)$ enaka $u_a(x,t) = u(x-a,t)$.*

Dokaz je trivialen. Vstavimo funkcijo $u(x-1,t)$ v enačbo in vidimo, da jo res reši. Poleg tega očitno ustreza začetnemu pogoju $fgx - a)$.

Razlog za veljavnost zgornje trditve je linearnost toplotne enačbe in pa konstantnost koeficientov enačbe. Za enačbo

$$u_t = k(x)u_{xx},$$

kjer bi bila $k(x)$ nekonstantna funkcija, trditev seveda ne bi veljala

Vidimo torej, da velja: Rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} u_t &= k\, u_{xx} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \delta_a(x), \end{aligned}$$

je

$$u_a(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \, \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-a}{\sigma(t)}\Big)^2\Big), \quad \sigma(t) = \sqrt{kt}. \tag{81}$$

V teoriji verjetnosti zgornji izraz predstalja Gaussovo porazdelitev s pročakovano vrednstjo a in varianco $\sigma = \sqrt{kt}$

Rešitev problema pri poljubnem začetnem pogoju: Naj bo sedaj $f(x)$ poljubna funkcija v Schwartzevem prostoru $\mathcal{S}$. Do rešitve bomo prišli na nerigorozen način, ki pa ima matematični in fizikalni smisel. Spomnimo se na izpeljavo (75). Prvo vrstico lahko razumemo kot razvoj funkcije $f(x)$ po "bazi" $\{\delta_a(x); c \in \mathbb{R}\}$, torej

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(a)\,\delta_a(x)\,da.$$

Izpeljava (75) je dokaz, da je zgornja enakost pravilna. Uporabimo trditev 2, ki pove, da je časovna evolucija pri linearnih enačbah linearna transformacija. Če je torej $u_a(x,t)$ rešitev problema

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & k\,u_{xx} & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & \delta_a(x), & \end{array},$$

potem je

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(a)\,u_a(x,t)\,da \tag{82}$$

rešitev problema z začetnim pogojem $f(x)$. Spomnimo se, da velja

$$u_a(x,t) = u_0(x-a,t)$$

Zgornjo rešitev lahko torej zapišemo v obliki

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x-a,t)f(a)\,da$$

Definicija 15 *Naj bosta $g(x)$ in $h(x)$ dve integrabilni fukciji, dafinirani na celotni realni osi. Funkcija $k(x)$, podana s forumlo*

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-a)h(a)\,da$$

se imenuje konvolucija funkcij $g(x)$ in $h(x)$.

Konvolucija je poseben primer uporabe integralskega jedra. Enakost iz definicije bi lahko zapisali v obliki

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,a)\, h(a)\, da,$$

pri čemer je integralsko jedro K podano s predpisom

$$K(x,a) = g(x-a),$$

torej s funkcijo ene spremenljivke.

Zapišimo sedaj končno rešitev našega Cauchijevega problema za toplotno enačbo. Upoštevamo, da je $u_a(x,t)$ iz formule (81) podano s formulo (82) in dobimo.

Izrek 7 *Rešitev $u(x,t)$ Cauchyjevega problema*

$$\begin{aligned} u_t &= k\, u_{xx} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

je podana s formulo

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-a}{\sigma(t)}\Big)^2\Big) \cdot f(a)\; da, \quad \sigma(t) = \sqrt{kt}$$

Rešitev torej dobimo s konvolucijo Gaussove normalne porazdelitve in začetnega pogoja $f(x)$. Konvolucijska spremenljivka v Gaussovi normali porazdeltvi je pričakovana vrednost porazdelitve, časovna odvisnost pa je podana z varianco $\sigma(t)$.

Funkcija

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-a}{\sigma(t)}\Big)^2\Big), \quad \sigma(t) = \sqrt{kt}$$

se imenuje toplotno jedro.