DIFERENCIALNA GEOMETRIJA

PAVLE SAKSIDA
Oddelek za matematiko
Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Maj, 2007

1 Uvod

V evklidskih prostorih imamo dobro definiran pojem vzporednosti. Izberimo v tangentnem prostoru $T_A\mathbb{R}^3$ evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ v točki $A \in \mathbb{R}^3$ neki vektor V. Ker lahko vse tangentne prostore $T_{pt}\mathbb{R}^3$ na naraven način identificiramo z eno samo kopijo $\mathbb{R}^3$, lahko brez težav povemo, kdaj je vektor $W \in T_B\mathbb{R}^3$ vzporeden z vektorjem V. Izkaže se, da je v geometriji in v fiziki koristno razmišljati o prirejanju vzporednih vektorjev kot o procesu, ki ga poznamo iz tehničnega risanja: trikotnik, katerega stranico smo poravnali z začetnim vektorjem premikamo vzdolž priložnega ravnila do točke v katero hočemo vzporedno prenesti naš vektor. Iz točke A v B pa bi lahko vektor V vzporedno prenašali vzdolž različnih krivulj. Vzporedni prenos bi namreč lahko realizirali tako, da bi npr. uporabili žirokompas. Vrtilna količina je vektorska količina, ki se ohranja, če na naš sistem ne deluje noben navor, zato bo žirokompas na koncu potovanja kazal v isto smer, kot je na začetku. Izkušnja kaže, da je v prostoru $\mathbb{R}^3$ rezultat prenosa vedno isti, ne glede na to, po kateri krivulji smo krenili. Simbolično lahko vzporedno prenašanje vektorja vzolž kruvulje opišemo takole: Izberimo krivuljo

$$\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3,$$

ki povezuje točki $\gamma(\alpha) = A$ in $\gamma(\beta) = B$. Naj bo $V(t)$ vektor V, vzporedno prenesen iz točke A v točko $\gamma(t)$. Dobimo preslikavo

$$V(t) = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3.$$

Preslikavi $\gamma(t)$ in $V(t)$ lahko zložimo v dve komponenti ene same preslikave

$$PL_\gamma(t) = (\gamma(t), V(t)) : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

Kot smo že omenili, imamo vektor $V(t)$ lahko za element tangentnega prostora $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3$. Torej dobimo preslikavo

$$PL_\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow T\mathbb{R}^3.$$

Preslikavo PL_γ običajno imenujemo vzporedni (paralelni) dvig krivulje $\gamma(t)$ v tangentni sveženj. V primeru, ko je naša krivulja premica, imamo

$$\langle V(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = konstanta.$$

To sicer očitno dejstvo, ki smo ga zgoraj že omenili v zvezi s tehničnim risanjem, bi lahko uporabili za definicijo vzporednega prenosa.

Kaj pa naj bi bil vzporedni prenos vektorja vzdolž krivulje, na kakšnem "ukrivljenem" prstoru, na primer na S^3 ali na S^2? Vektorji, ki jih prenašamo, so tangentni vektorji. Dveh vektorjev $X \in T_pS^2$ in $Y \in T_qS^2$ ne moremo kar tako primerjati med seboj, saj sta elementa dveh različnih prostorov, med katerima ni videti kakšne naravne identifikacije. Mnogoterost (npr. S^2) je torej treba opremiti z neko dodatno strukturo, ki bo omogočala primerjavo vektorjev iz različnih tangetnih prostorov. Ta struktura nam bo priskrbela "priložno ravnilo", oziroma, še bolje, "žirokompas" na ukrivljenih prostorih.

1.1 Foucaultovo nihalo

Poglejmo si Foucaultovo nihalo z nekoliko drugačnimi očmi kot običajno. Mislimo si, da pod zemljino površino, ki se vrti, miruje "sfera" S^2. Foucaultovo nihalo je torej nihalo, ki ga z enakomerno kotno hitrostjo počasi peljemo vzdolž vzporednika. Ker na Foucaultovo nihalo deluje le gravitacijska sila, ki je pravokotna na S^2, je smiselno gledati na potovanje preseka nihajne ravnine nihala in tangentne ravnine na sfero v ustrezni točki kot na vzporedni prenos tega preseka vzdolž našega vzporednika.

Kot vemo, se po 24 (štiriindvajsetih) urah (takrat se nihalo vrne na svojo izhodiščno lego na S^2) nihajna ravnina zasuka za kot α, ki je takole odvisen od zemljepisne širine θ, na kateri je nihalo:

$$\alpha = -2\pi \sin\theta.$$

Eksperiment pokaže: če je Foucaultovo nihalo na ekvatorju, nihajna ravnina "miruje". Tudi po štiriindvajsetih urah nihalo še vedno niha v isti ravnini. To spominja na dejstvo, da se pri paralelnem premiku v $\mathbb{R}^3$ kot med krivuljo in premikanim vektorjem ohranja. Premici v $\mathbb{R}^3$ in ekvator na S^2 sta geodetski krivulji.

Opazimo naslednje pomembno dejstvo: Če naj bo Foucaultovo nihalo prototip za paralelni prenos, potem je na S^2 rezultat vzporednega premika odvisen od izbire poti.

Opomba: V mehaniki pojasnjujemo Foucaultovo nihalo z delovanjem Coriolisove sile. Izkaže se, da lahko na vzporedni prenos v tem primeru gledamo kot na geometrizacijo Coriolisove sile.

Naj bo sedaj X poljubna gladka mnogoterost, $a, b \in X$ točki, in $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to X$ krivulja, ki povezuje a in b. Označimo s TX tangentni sveženj nad X in s T_aX tangentni prostor v točki $a \in X$ na mnogoterost X. Naj bo $V_0 \in T_aX$ tangentni vektor. Denimo, da znamo določiti vzporedni premik vektorja V_0 vzdolž γ v vsako točko $\gamma(t)$ na γ. Označimo z $V(t) \in T_{\gamma(t)}X$ rezultat tega vzporednega premika. Dobimo krivuljo:

$$V\colon [\alpha, \beta] \to TX.$$

Naj bo $\pi\colon TX \to X$ naravna projekcija. Za vsak $t \in [\alpha, \beta]$ velja:

$$\pi(V(t)) = \gamma(t).$$

Vsaka krivulja $W\colon [\alpha, \beta] \to TX$, za katero velja

$$\pi(W(t)) = \gamma(t)$$

se imenuje dvig krivulje γ v tangentni sveženj. Vsi dvigi dane krivulje tvorijo neki neskončno dimenzionalni vektorski prostor. Vzporedni prenos vektorja V vzdolž krivulje γ je neki odlikovan dvig krivulje γ v tangentni sveženj.

Kot bomo videli v nadaljevanju, lahko tangentnemu svežnju priredimo objekt, ki se imenuje sveženj ogrodij. Sveženj ogrodij mnogoterosti X je gladka mnogoterost $\mathcal{F}X$ skupaj z gladko preslikavo

$$\widetilde{\pi}\colon \mathcal{F}X \to X.$$

Za vsako točko $a \in X$ je $\widetilde{\pi}^{-1}(a)$ množica vseh baz (ogrodij) prostora T_aX. Torej

$$\widetilde{\pi}^{-1}(a) \overset{difeo}{\cong} GL(n; \mathbb{R}),$$

kjer je $n = \dim_{\mathbb{R}}(X)$.

Denimo, da imamo pravilo, ki vsaki krivulji γ in vsaki začetni vrednosti $\widetilde{\gamma}_H(\alpha) \in \mathcal{F}_{\gamma(\alpha)}X$ priredi natančno določen dvig

$$\widetilde{\gamma}_H\colon [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}X.$$

Tak dvig bomo imenovali horizontalni dvig. Naj bo sedaj $V_0 \in T_aX$ izbran tangentni vektor. Horizontalni dvig $\widetilde{\gamma}_H$ enolično določa dvig

$$V\colon [\alpha, \beta] \to TX$$

krivulje γ, za katerega velja $V_{(a)} = V_0$.

Res: Izberimo trivializacijo svežnja TX vzdolž γ:

$$\tau\colon TX/U \to U \times \mathbb{R}^n,$$

kjer imamo $\gamma \subset U \subset X$. Vsako ogrodje $g_x \in \mathcal{F}X$ je baza prostora T_xX. Trivializacija τ ogrodju g_x priredi n-terico

$$\tau(g_x) = (S_1^x, S_2^x, ..., S_n^x) \in GL(n; \mathbb{R})$$

tangentnih vektorjev $S_x^i \in T_xX = \mathbb{R}^n$, zloženih v matriko. Torej imamo natanko določene skalarje $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, za katere velja:

$$\tau(V_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^a.$$

Trivializacija τ priredi horizontalnemu dvigu

$$\widetilde{\gamma}_H(t) = g(t) \colon [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}X$$

poti γ novo pot

$$\widetilde{\tau}(g(t)) = (S_1(t), S_2(t), ..., S_n(t)) \colon [\alpha, \beta] \to GL(n; \mathbb{R}), \qquad S_i(0) = S_i^a.$$

Vzporedni premik vektorja V_0 vzdolž poti $\gamma(t)$ je tedaj definiran s predpisom:

$$\tau(V(t)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i(t).$$

Domača naloga: Zgornja definicija uporablja izbiro trivializacije τ. Dokaži, da je definicija neodvisna od te trivializacije.

Pravilo, ki bo vsaki krivulji $\gamma \colon [\alpha, \beta] \to X$ in vsaki "začetni vrednosti" $g_0 \in \mathcal{F}_{\gamma(\alpha)}X$ priredilo natančno določeni horizontalni dvig

$$g \colon [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}X; \qquad \widetilde{\pi}(g(t)) = \gamma(t), \qquad g(\alpha) = g_0,$$

bomo imenovali povezava.

Prej omenjena primera vzporednega premika v $\mathbb{R}^3$ in na S^2 nam sugerirata naslednje: Na "ravnem" prostoru je vzporedni premik neodvisen od izbire poti - odvisen je le od izbire začetne vrednosti. Na "ukrivljenem" prostoru S^2 da vzporedni premik istega vektorja po dveh različnih poteh $\gamma, \beta \colon [\alpha, \beta] \to S^2$, $\gamma(\alpha) = \beta(\alpha)$, $\gamma(h) = \beta(b)$ različna rezultata. Vzporedni premik torej zazna ukrivljenost prostora. Vzporedni premik je določen s povezavo in res je prav povezava tisti matematični objekt, s katerim opisujemo ukrivljenost.

Povezavo smo podali na prostoru $\mathcal{F}X$, ki ga obravnavamo skupaj z naravno projekcijo $\widetilde{\pi} \colon \mathcal{F}X \to X$. Ta prostor je sveženj, katerega vlakno $\widetilde{\pi}^{-1}(x)$ je difeomorfno grupi $GL(n; \mathbb{R})$. Grupa $GL(n; \mathbb{R})$ je primer Liejeve grupe. V nadaljevanju se bomo ukvarjali s svežnji, katerih vlakna so Liejeve grupe. Taki svežnji se imenujejo glavni svežnji.

Najprej pa moramo povedati nekaj malega o Liejevih grupah.

2 Liejeve grupe in Liejeve algebre

V tem poglavju bomo spoznali osnove teorije Liejevih grup in Liejevih algeber. Liejeva teorija je eno najobsežnejših matematičnih področij. Mi se bomo omejili na nekaj osnovnih pojmov in konstrukcij, ki jih bomo nato potrebovali v nadaljevanju.

2.1 Definicija Liejeve grupe in primeri

Liejeva grupa je matematični objekt, ki je opremljen z algebraično in s topološko strukturo. Ti dve strukturi morata biti kompatibilni.

Definicija 1 *Liejeva grupa* $(G, \circ)$ *je gladka mnogoterost* G*, ki je dodatno opremljena z grupno strukturo. Pri tem mora veljati:*

1. *Preslikava kompozitum* $\circ : G \times G \longrightarrow G$*, podana s predpisom*

$$(a, b) \longmapsto a \ \circ \ b,$$

   je gladka.

2. *Preslikava inverz* $\mathrm{Inv} : G \longrightarrow \ G$*, podana s predpisom*

$$g \longmapsto \ \mathrm{Inv}(g) = g^{-1},$$

   je gladka.

Primeri:

1. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{C}^n, +)$.
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
3. Grupa krožnice: $U(1) = (\{z \in \mathbb{C}^*; |z| = 1\}, \cdot) \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Kot mnogoterost je $U(1)$ res krožnica, $U(1) \overset{difeo}{\cong} S^1$.
4. Torusi: $U(1) \times U(1) \times ... \times U(1) \overset{difeo}{\cong} T^n$, operacija je definirana po komponentah.

5. Grupa obrnljivih matrik $GL(n;\mathbb{R})$ z operacijo matričnega množenja. Kot prostor je $GL(n;\mathbb{R})$ podmnožica $\mathbb{R}^{n^2} = Mat_{n\times n}$. Preslikava $\mathrm{Det} : Matrika \longmapsto \mathbb{R}$ je zvezna, množica $\mathrm{Det}^{-1}(0)$ je zato zaprta, množica $GL(n,\mathbb{R}) = Mat_{n\times n} - \mathrm{Det}^{-1}(0)$ pa odprta. Torej je $GL(n,\mathbb{R})$ podmnogoterost v $\mathbb{R}^{n^2}$.

   Množenje je polinomsko (celo linearno) odvisno od argumentov, torej je

$$\circ : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$$

   očitno gladka preslikava.

   Preslikava Inv je v tem primeru matrično invertiranje in je podano s predpisom

$$\mathrm{Inv} : g \longmapsto g^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(g)} \cdot \widetilde{g}, \qquad \widetilde{g} = matrika \;\; kofaktorjev.$$

   Kofaktorji in determinanta so polinomsko odvisni od elementov matrike g, poleg tega pa determinanta ni enaka 0, ker $g \in GL(n,\mathbb{R})$.

6. $GL(n;\mathbb{C})$ - podobno kot zgoraj. Grupa $GL(n;\mathbb{C})$ je kompleksna mnogoterost.

7. $SU(2) = \{g \in GL(2;\mathbb{C});\;\, g^* = g^{-1}, \;\; \mathrm{Det}(g) = 1\}$

   Kot mnogoterost je $SU(2)$ tri-sfera, $SU(2) = S^3$. Res, iz definicije sledi, da so elementi $g \in SU(2)$ oblike

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

   kjer sta a, b poljubni kompleksni števili. Pogoj $\mathrm{Det}(g) = 1$ nam da enačbo

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,$$

   to pa je enačba 3-sfere $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

8. Med pomembne Liejeve grupe sodijo med drugimi naslednje podgrupe grupe $GL(n,\mathbb{C})$.

   $U(n) = \{g \in GL(n;\mathbb{C}); g^* = g^{-1}\}$

   $SU(n) = \{g \in U(n); \mathrm{Det}(g) = 1\}$

   $O(n) = \{g \in GL(n;\mathbb{R}), g^T = g^{-1}\}$

   $SO(n) = \{g \in O(n); \mathrm{Det}(g) = 1\}$

Med zgornjimi primeri imamo precej Liejevih grup, katerih elementi se izražajo s pomočjo kompleksnih števil. Zato je naravno vprašanje, ali so mnogoterosti teh grup morda kompleksne mnogoterosti. Izkaže se, da ni vedno tako. Mnogoterost grupe $SU(2)$ je tri-sfera in torej očitno ni kompleksna mnogoterost, čeprav se njeni elementi izražajo s kompleksnimi števili.

Definicija 2 *(a) Naj bo $G^{\mathbb{C}}$ kompleksna Liejeva grupa, t.j., Liejeva grupa, ki je kompleksna mnogoterost in v kateri sta operaciji*

$$\begin{aligned} \circ \ &: \ G^{\mathbb{C}} \times G^{\mathbb{C}} \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \\ \mathrm{Inv} \ &: \ G^{\mathbb{C}} \longrightarrow G^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

holomorfni preslikavi.

Involutivni antiholomorfni homomorfizem

$$\tau \colon G^{\mathbb{C}} \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$$

se imenuje realna struktura na $G^{\mathbb{C}}$. Za τ mora torej veljati:

1. $\tau(g_1.g_2) = \tau(g_1) \circ \tau(g_2)$
2. $\tau^2 = id$
3. $D_e\tau : T_eG^{\mathbb{C}} \longrightarrow T_eG^{\mathbb{C}}$ *je anti-linearna preslikava.*

(b) Naj bo $\tau \colon G^{\mathbb{C}} \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ realna struktura. Podgrupa

$$G_\tau = \{g \in G^{\mathbb{C}}; \tau(g) = g\}$$

se imenuje realna forma grupe $G^{\mathbb{C}}$.

(c) Naj bo G (realna) Liejeva grupa. Če obstaja taka kompleksna grupa $G^{\mathbb{C}}$ in taka realna struktura $\tau \colon G^{\mathbb{C}} \longrightarrow G^{\mathbb{C}}$ na $G^{\mathbb{C}}$, da je $G = G_\tau$, tedaj pravimo, da je $G^{\mathbb{C}}$ kompleksifikacija G.

Oglejmo si nekaj primerov realnih struktur in realnih form. Osnovni model je seveda naslednji. Naj bo $G^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}, +)$. Preslikava

$$\tau(z) = \overline{z}$$

je realna struktura. Pripadajoča realna forma je grupa $(\mathbb{R}, +)$. Med eno-dimenzionalnimi grupami imamo še en "realno-kompleksni" par. Naj bo $G^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ in preslikava

$$\tau(z) = -\frac{1}{\overline{z}}.$$

Hitro se prepričamo, da je zgornja preslikava res realna struktura. Ustrezna realna forma je krožnica $U(1)$.

Na grupi $GL(n;\mathbb{C})$ pri $n > 1$ imamo več realnih struktur. Najočitnejša je

$$\tau_1(g) = \overline{g}$$

z realno formo $GL(n;\mathbb{R})$.

Naj bo sedaj p naravno ševilo, manjše od n. Označimo z I_p identično $p \times p$ -matriko in naj bo

$$J_p = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

bločno izražena matrika ter $q = n - p$. Preslikava

$$\tau_p : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$$

naj bo podana s predpisom

$$\tau_p(g) = J_p \cdot (g^*)^{-1} J_p.$$

Spet se lahko takoj prepričamo, da je τ_p realna struktura. Ustrezno realno formo označujemo s simbolom $U(p,q)$. Element grupe $U(p,q)$ so natanko vsi elementi , ki ohranjajo kvadratno formo

$$(z_1, \ldots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix} = |z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2 - |z_{p+1}|^2 - \ldots - |z_n|^2$$

na $\mathbb{C}^n$. Element $g \in GL(n,\mathbb{C})$ leži v $U(p,q)$ natanko tedaj, ko zanj velja:

$$H_p(Z) = \alpha \iff H_p(g(Z)) = \alpha.$$

S H_p smo označili "p-psevdonormo" vektorja $Z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$H_p(Z) = Z \cdot J_p Z^* = (z_1, \ldots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}.$$

To takoj sledi iz enakosti

$$g \cdot J_p \cdot g^* = J_p \ ,$$

ki ji po definiciji ustrezajo elementi grupe $U(p,q)$.

V posebnem primeru, ko je $p = n$, imamo $J_p = I_n$, realna struktura $\tau = \tau_n$ pa je podana kar s preslikavo

$$\tau(g) = (g^*)^{-1}.$$

Realna forma je unitarna grupa $U(n)$. Elementi te grupe ohranjajo običajno hermitsko normo na $\mathbb{C}^n$.

Veja torej:

$$U^{\mathbb{C}}(p,q) = U^{\mathbb{C}}(n) = GL(n;\mathbb{C}),$$

za vsak $p < n$.

2.2 Translacije in trivializacije

Preslikavo $L_g\colon G \longrightarrow G$ Liejeve grupe same vase, podano s predpisom

$$L_g(h) = g \cdot h\ ,$$

imenujemo leva translacija za g. Desna translacija $R_g\colon G \longrightarrow G$ je podana s formulo

$$R_g(h) = h \cdot g.$$

Preslikavi L_g in R_g sta difeomorfizma. Res, njuna inverza sta

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \quad \text{in} \quad (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Označimo s T_gG tangentni prostor na G v točki $g \in G$ in s TG tangentni sveženj grupe G. Grupna lastnost na G poskrbi, da je tangentni sveženj enostaven.

Trditev 1 *Tangentni sveženj poljubne Liejeve grupe je trivialen. (Liejeve grupe so paralelizabilne mnogoterosti.)*

Dokaz: Naj bo $g \in G$ poljuben, T_gG tangentni prostor v točki g, in T_eG tangentni prostor v enoti grupe. Ker je

$$L_{g^{-1}}\colon G \longrightarrow G$$

difeomorfizem, je odvod te preslikave

$$D_gL_{g^{-1}}\colon T_gG \longrightarrow T_eG$$

v vsaki točki g linearni izomorfizem.

Naj bo $V_g \in T_gG$ poljuben tangentni vektor na G v točki g. Preslikava

$$\tau : TG \longrightarrow G \times T_eG$$

naj bo podana s predpisom

$$\tau(V_g) = (g, D_gL_{g^{-1}}(V_g)).$$

Lahko je videti, da je τ difeomorfizem. Inverz

$$\tau^{-1} : G \times T_eG \longrightarrow TG$$

je podan s predpisom

$$(g, \alpha) \longmapsto D_eL_g(\alpha).$$

Poleg tega je skrčitev $\tau_{/T_gG}$ izomorfizem za vsako vlakno T_gG tangentnega svežnja TG. Preslikava τ je torej res trivializacija.

□

Spomnimo se pojma vektorsko polje na mnogoterosti.

Definicija 3 *Vektorsko polje X na G je gladek prerez tangentnega svežnja TG. To pomeni, da je X gladka preslikava*

$$X : G \longrightarrow TG,$$

za katero velja $X(g) \in T_gG$ za vsak $g \in G$.

Prostor vseh vektorskih polj na G bomo označili z $\Gamma(TG)$.

Definicija 4 *Vektorsko polje $X \in \Gamma(TG)$ je levo invariantno, če za vsak g in $h \in G$ velja*

$$X_{gh} = D_gL_h(X_g).$$

Dokaz naslednje trditve je trivialen.

Trditev 2 *Množica $\Gamma_L(TG)$ levo invariantnih polj tvori vektorski podprostor v $\Gamma(TG)$.*

Lahko je videti tudi naslednje.

Trditev 3 *Vektorska prostora T_eG in $\Gamma_L(TG)$ sta linearno izomorfna.*

Dokaz: Definirajmo preslikavo $\lambda : T_eG \longrightarrow \Gamma_L(TG)$ s predpisom

$$\lambda(\alpha) = X_{(\alpha)} \in \Gamma_L(TG), \qquad \alpha \in T_eG,$$

kjer je $X_{(\alpha)}(g) = D_eL_g(\alpha)$. Inverz preslikave λ je preslikava

$$\mu : \Gamma_L(TG) \longrightarrow T_eG,$$

podana z evaluacijo polja X v identiteti e,

$$\mu(X) = X(e).$$

Lahko je videti, da sta λ in μ linearni preslikavi.

□

Naj bodo sedaj $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T_eG$ linearno neodvisni vektorji. Označimo z $X_1, X_2 \dots, X_n \in \Gamma_L(TG)$ levo invariantna vektorska polja, za katera velja $X_i(e) = \alpha_i$. Ker je

$$D_eL_g : T_eG \longrightarrow T_gG$$

linearnen difeomorfizem za vsak $g \in G$, so za vsak g vektorji

$$X_1(g), ..., X_n(g) \in T_gG$$

med seboj linearno neodvisni, torej so baza T_gG. Izbor n linearno neodvisnih levo invariantnih polj $\{X_i\}_{i=1}^n$ nam podaja trivializacijo TG

$$\sigma : TG \longrightarrow G \times \mathbb{F}^n, \qquad \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ ali } \mathbb{C}.$$

Res, razvijmo tangentni vektor $V_g \in T : gG$ po bazi $\{X_i\}(g)_{i=1}^n$ prostora T_gG:

$$V_g = \sum_{i=1}^n v_i X_i(g) \in T_gG.$$

Trivializacija σ je tedaj podana s formulo

$$\sigma(V_g) = (g, (v_1, v_2, ..., v_n)).$$

V nadaljevanju bomo videli, da ima prostor T_eG algebrsko strukturo, ki je bogatejša od strukture vektorskega prostora. Ta prostor je namreč opremljen še s produktom, ki ga bomo imenovali Liejev produkt. Ta produkt bomo vpeljali na izomorfnem prostoru $\Gamma_L(TG)$ levo-invariantnih polj. Seveda pričakujemo, da bo ta produkt vseboval neko geometrijsko informacijo o grupi G, če naj bo sploh smiseln. Zato bo podan s primernim odvajanjem enega polja vzdolž drugega. V naslednjem razdelku bomo na hitro ponovili osnovne pojme o tokovih vektorskih polj, ki jih bomo v potrebovali v nadaljevanju.

2.3 Integralske krivulje in tokovi vektorskih polj

Naj bo M gladka mnogoterost in $X \in \Gamma(TM)$ vektorsko polje. Naslednji izrek je posledica osnovnega eksistenčnega izreka za navadne diferencialne enačbe.

Izrek 1 *Naj bo $m \in M$ in $X(m) \neq 0$. Tedaj obstaja krivulja*

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M,$$

za katero velja začetni pogoj

$$\varphi(0) = m$$

in

$$\dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}, \qquad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Pravimo, da je $\varphi(t)$ integralska krivulja polja X skozi točko m.

Dokaz: Naj bo U, $m \in U \subset M$ odprta okolica točke m in

$$\beta : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

lokalna karta. Denimo, da je skrčitev TM/U trivialen sveženj (npr. U je kontraktibilna). Tedaj je preslikava

$$\widetilde{\beta} : TM/U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n,$$

podana z

$$\beta(V_m) = \Big(\beta(\pi(V_m)), D_{\pi(V_m)}\beta(V_m)\Big),$$

lokalna karta mnogoterosti TM. V tej karti je vektorsko polje X podano kot vektorska funkcija

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Integralska krivulja polja F je krivulja

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow V \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \Big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\Big), \end{aligned}$$

za katero velja:

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)),$$

oziroma v koordinatah

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n & = & F_n(x_1, x_2, ..., x_n).\end{array} \tag{1}$$

Pri naših pogojih (gladkost X, gladkost F) nam eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe zagotavlja obstoj natanko ene krivulje

$$\gamma(t) = \Big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\Big),$$

za katero velja (1) in ki ustreza začetnemu pogoju $\gamma(0) = \beta(m)$.

Iskana krivulja $\varphi\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ je tedaj $\varphi(t) = \beta^{-1}(\gamma(t))$.

□

Definicija 5 *Tok gladkega vektorskega polja X na gladki mnogoterosti M (v okolici U neke točke $m \in M$) je enoparametrična družina lokalnih difeomorfizmov*

$$\Phi_t : U \longrightarrow M,$$

pri kateri je $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ parameter. Družina je podana s predpisom

$$\Phi_t(p) = \varphi_p(t),$$

kjer je φ_p integralska krivulja polja X skozi točko p,

$$\dot{\varphi}_p(t) = X_{\varphi_p(t)}$$

in

$$\varphi_p(0) = p.$$

Za tok vektorskega polja velja mikrogrupna lastnost.

Trditev 4 *Naj bo Φ_t tok vektorskega polja X. Tedaj velja*

$$\Phi_{(s+t)} = \Phi_s \circ \Phi_t,$$

če so le $|t|$, $|s|$ in $|t+s|$ dovolj majhni.

Dokaz: Krivulja $\alpha(s) = \Phi_s(\Phi_t(p))$ je integralska krivulja polja X z začetno vrednostjo $\alpha(0) = \Phi_t(p)$. Krivulja

$$\beta(s) = \Phi_{(s+t)}(p)$$

je prav tako integralska krivulja polja X z začetno vrednostjo $\beta(0) = \Phi_t(p)$. Iz edinosti v eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe sledi:

$$\Phi_s(\Phi_t(p)) = \Phi_{s+t}(p).$$

□

2.4 Enoparametrične podgrupe Liejevih grup

V Liejevi teoriji igrajo pomembno vlogo tokovi levoinvariantnih vektorskih polj. Opisali jih bomo na tri načine.

Definicija 6 *Enoparametrična podgrupa Liejeve grupe G je vsak gladek homomorfizem*

$$\varphi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G.$$

Povezavo med enoparametričnimi podgrupami in levoinvariantnimi polji opisuje tale izrek.

Izrek 2 *Naj bo X levoinvariantno polje na G in naj bo*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

integralska krivulja polja X z začetno točko e;

$$\varphi_X(0) = e \in G.$$

Tedaj je φ enoparametrična podgrupa v G.

Dokaz: Ni pretežko videti, da so tokovi levoinvariantnih polj na Liejevih grupah kompletni. To pomeni, da so definirani za vse realne vrednosti parametra t. Bralec si lahko ogleda dokaz npr. v knjigi [1].

Naj bo sedaj pot $\alpha\colon \mathbb{R} \to G$ definirana z

$$\alpha(t) = \varphi_X(s)\varphi_X(t) = L_{\varphi_X(s)}\varphi_X(t),$$

kjer je $\varphi_X(t)$ integralska krivulja polja X skozi enoto e, kot v predpostavki izreka. Naj bo po drugi strani krivulja $\beta\colon \mathbb{R} \to G$ podana z

$$\beta(t) = \varphi_X(s + t).$$

Velja:

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\alpha(t) = \varphi_X(s)\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi_X(t) = \varphi_X(s)X(\varphi(t_0)) \overset{leva\ invariantnost}{=} X(\varphi_X(s)\varphi_X(t_0))$$

in

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\beta(t) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi_X(s+t) = \frac{d}{dt}|_{(s+t)=(s+t_0)}\varphi_X(s+t) = X_{(\varphi_X(s+t_0))}.$$

Torej sta $\alpha(t)$ in $\beta(t)$ integralski krivulji polja X. Poleg tega velja $\alpha(0) = \varphi_X(s) = \beta(0)$. Po edinosti v izreku o eksistenci za navadne diferencialne enačbe spet velja $\alpha(t) = \beta(t)$, oziroma

$$\varphi_X(s)\varphi_X(t) = \varphi_X(s+t).$$

□

Velja tudi obratno.

Trditev 5 *Naj bo $\varphi: \mathbb{R} \to G$ enoparametrična podgrupa. Tedaj je φ integralska krivulja skozi e levoinvariantnega polja*

$$X_\varphi(g) = D_e L_g(X_\varphi),$$

kjer je

$$X_\varphi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t).$$

Dokaz: Velja $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$. Zato:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(s+t) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(s)\varphi(t) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}L_{\varphi_{(s)}}\varphi(t) \\
&= D_e L_{\varphi_{(s)}}(\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(t)) \\
&= D_e L_{\varphi_{(s)}} X_\varphi \\
&= X_\varphi(\varphi_{(s)}).
\end{aligned}$$

□

Spotoma smo ugotovili tudi tole:

Trditev 6 *Tok levoinvariantnega polja X je podan s predpisom*

$$\Phi_t(g) = g \cdot \varphi_X(t),$$

kjer je $\varphi_X(t): \mathbb{R} \to G$ integralska krivulja polja X skozi e.

Opomba 1 *Tok levoinvariantnega polja je enoparametrična družina globalnih difeomorfizmov*

$$\Phi_t : G \longrightarrow G$$

grupe G, definirana za vsak realni t. Velja

$$\Phi_{(s+t)} = \Phi_s \cdot \Phi_t$$

za vsak $s, t \in \mathbb{R}$.

Dokaz trditve 6: Očitno velja $\Phi_0(g) = g$. Poleg tega pa imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\Phi_t(g) &= \frac{d}{dt}|_{t=t_0} g\varphi_X(t) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=t_0} L_g\varphi_X(t) \\
&= D\varphi_x(t_0)L_g(\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi_X(t)) \\
&= D\varphi_x(t_0)L_g(X(\varphi_X(t_0)) \overset{leva\ invariantnost}{=} X(g\varphi_X(t_0)).
\end{aligned}$$

Torej je krivulja $t \mapsto \Phi_t(g) = g \cdot \varphi_X(t)$ res integralska krivulja polja X skozi g.

□

2.5 Liejev odvod

Naj bo M gladka mnogoterost. Izraz Liejev odvod označuje "smerni" odvod nekega tenzorskega polja (funkcije, diferencialne forme, vektorska polja, metrike, matričnega polja, ...) vzdolž nekega izbranega in fiksiranega vektorskega polja X na M.

Definicija 7 *Liejev odvod gladke funkcije $f\colon M \to \mathbb{R}$ vzdolž vektorskega polja X na M je podan s predpisom*

$$\mathcal{L}_X(f)_{(m)} = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi_X(t)),$$

kjer je $\varphi_X\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ integralska krivulja X skozi m.

Liejev odvod funkcije je torej kar običajni smerni odvod.

Preslikava $f \mapsto \mathcal{L}_X(f)$ je preslikava prostora $\mathcal{C}^\infty(M)$ vase. Ta preslikava je linearna in ustreza Leibnitzevemu pravilu:

$$\mathcal{L}_X(gf)(m) = (\mathcal{L}_X g)(m)f(m) + g(m)(\mathcal{L}_X f)(m).$$

Res:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(gf)(m) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(gf)(\varphi_X(t)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(g(\varphi_X(t))f(\varphi_X(t))) \\
&= (\mathcal{L}_X g)(m)f_{(m)} + g(m)(\mathcal{L}_X f)(m).
\end{aligned}$$

Naj bo sedaj $Y \in \Gamma(TM)$ še eno vektorsko polje na M in naj bo $\Phi_t^X\colon U \subset M \to M$ tok vektorskega polja X v okolici točke $m \in U$. ($\Phi_0^X(m) = m$).

Definicija 8 *Liejev odvod vektorskega polja Y vzdolž vektorskega polja X je novo vektorsko polje, podano s predpisom*

$$(\mathcal{L}_X Y)(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Big[(D_m\Phi_t^X)^{-1}(Y(\varphi_X(t)))\Big].$$

Pri tem je $\varphi_X(t)\colon(-\epsilon,\epsilon) \to M$ integralska krivulja polja X skozi m.

Komentirajmo zgornjo definicijo. Krivulja $t \mapsto (D_m\Phi_t^X)^{-1}(Y(\varphi_x(t))$ je pot v prostoru T_mM. Tangenta v $t = 0$ na to pot je spet vektor v T_mM. Torej je $(\mathcal{L}_X Y)(m)$ res element tangentnega prostora T_mM, zato je $\mathcal{L}_X Y$ res vektorsko polje na M.

Poiščimo izrazitev Liejevih odvodov $\mathcal{L}_X(f)$ in $\mathcal{L}_X Y$ v lokalnih koordinatah. Naj bo $m \in U \subset M$ in $\beta\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ lokalna karta. Vsaki točki $p \in U$ priredi β lokalne koordinate

$$\beta(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)).$$

Odvod karte β je preslikava

$$D\beta : TU = TM_{/U} \longrightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

ki je v vsaki točki $p \in M$ podana z

$$(D_p\beta)(X(p)) = \Big((x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p)), (X_1(p), X_2(p), ..., X_n(p))\Big),$$

kjer so $X_i(p) = X_i(x_1(p), \ldots, x_n(p))$ komponente slike tangentnega vektorja $X(p) \in T_pM$ glede na preslikavo $D_p\beta$. Izrazimo krivuljo $\varphi_X(t)$ v naših koordinatah:

$$\varphi_X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Za njen časovni odvod, oziroma za njeno tangento, velja

$$\dot{\varphi}_X(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ X_2(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \vdots \\ X_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{pmatrix}.$$

S $\psi_X(t)$ označimo krivuljo, ki jo dobimo, če krivuljo $\varphi_X(t)$ s karto β dvignemo na mnogoterost M:

$$\psi_X(t) = \beta(\varphi_X(t)).$$

a) Odvajajmo sedaj lokalno izrazitev $\widetilde{f} = f \circ \beta$ funkcije f vzdolž lokalne izrazitve $\psi_X(t)$ krivulje $\varphi_X(t)$. Imamo $f(p) = \widetilde{f}(x_1(p), ..., x_n(p))$. V nadaljevanju bomo opustili akcent $\widetilde{}$ nad f.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X f)(m) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi_X(t)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
&= \langle (\mathrm{grad}(f))(\beta(m)), (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \ldots, \dot{x}_n(0)) \rangle \\
&= \langle \mathrm{grad}(f)(m), X(m) \rangle \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i)(m).
\end{aligned}$$

Koordinatni zapis Liejevega odvoda funkcije f v smeri polja X je torej

$$(\mathcal{L}_X f)(m) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i)(m). \tag{2}$$

b) Poiščimo sedaj še lokalno izrazitev Liejevega odvoda $\mathcal{L}_X Y$ polja Y v smeri X. Koordinatni izrazitvi naših polj sta podani s komponentami

$$X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad Y_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots n.$$

Naj bo spet $\psi_X(t)$ lokalna izrazitev integralske krivulje $\varphi_X(t)$ polja X skozi m. Krivulja $\psi_X(t)$ torej poteka skozi $\beta(m) = x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Tok vektorskega polja X v lokalni karti β je enoparametrična družina lokalnih difeomorfizmov

$$\Psi_t : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Psi_t(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Izraženo v koordinatah:

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \Psi_t^1(x_1, \ldots, x_n) \\ \Psi_t^2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \Psi_t^n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Spomnimo se: $\Phi_0 = id$ (sledi tudi iz mikrogrupne lastnosti.) Torej:

$$(\mathcal{L}_X Y)_{(x_0)} = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\mathrm{Jac}_{x_0}(\Psi_t))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(\psi_X(t)) \\ Y_2(\psi_X(t)) \\ \vdots \\ Y_n(\psi_X(t)) \end{pmatrix}.$$

Po t odvajamo produkt matrike in vektorja, torej moramo uporabiti Leibnitzevo pravilo. Označimo:

$$\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_t) = A(t) : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}).$$

Ker je $\Psi_0 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identična preslikava, $\Psi_0 = id$, je tudi $\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_0) = A(0) = id$. Z odvajanjem identitete

$$A^{-1}(t)A(t) = Id \qquad \frac{d}{dt}|_{t=0}$$

dobimo

$$(\dot{A^{-1}})(0)A(0) + A^{-1}(0)\dot{A}(0) = 0,$$

in zato

$$(\dot{A^{-1}})(0) = -\dot{A}(0),$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} (\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0} \Psi_t)^{-1} = -\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Psi_t).$$

Spomnimo se, da je tok Ψ_t "sestavljen" iz integralskih krivulj $\psi_X(t)$ polja X, torej:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} (\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0} \Psi_t)^{-1} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}_0}.$$

V drugem sumandu naše Leibnitzeve formule nastopa odvod

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\ Y(\psi_X(t)). \tag{3}$$

Vsaka komponenta (3) je Liejev odvod funkcije Y_i po polju X. Torej:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}Y(\psi_X(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j.$$

Spravimo oba rezultata skupaj in dobimo izrazitev $\mathcal{L}_X Y$ v lokalnih koordinatah:

$$(\mathcal{L}_X Y)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j.$$

Sedaj bom podali alternativno definicijo Liejevega odvoda vektorskega polja.

Trditev 7 *Naj bosta X in Y dve gladki vektorski polji na M. Diferencialni operator $[X, Y]$ na $\mathcal{C}^\infty(M)$, podan s predpisom*

$$[X, Y](f) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)),$$

je diferencialni operator prve stopnje. (Ustreza Leibnitzevemu pravilu.)

Dokaz: Računajmo v lokalni karti β.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) &= \mathcal{L}_X(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_X(\frac{\partial f}{\partial x_i} Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathcal{L}_X(\frac{\partial f}{\partial x_i}) Y_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathcal{L}_X(Y_i) \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(Y_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} X_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j \Big) \\
&= \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} X_j Y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j).
\end{aligned}$$

Torej:

$$[X, Y](f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j).$$

$\square$

Zgornji račun pa pokaže še več. Za vsak $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ imamo

$$[X, Y](f) = (\mathcal{L}_X Y)(f).$$

Torej, Liejev oklepaj polj X in Y je operator na prostoru $\mathcal{C}^\infty$, ki počne isto kot smerni odvod vzdolž polja $\mathcal{L}_X Y$, skratka $[X, Y]$ je smerni odvod v smeri $\mathcal{L}_X Y$. Ker so smerni odvodi na M isto kot vektorska polja, lahko pišemo:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Iz lokalne izrazitve Liejevega odvoda takoj vidimo, da velja

$$\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X,$$

oziroma pisano z oklepajem

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Bralec lahko za vajo sam dokaže tole trditev.

Trditev 8 *Za Liejev odvod velja Leibnitzevo pravilo, če za produkt polj vzamemo Liejev oklepaj.*

$$\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]. \tag{4}$$

Formulo (4) lahko zapišemo tudi nekoliko drugače:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

V tej obliki se naše Leibnitzevo pravilo imenuje Jacobijeva identiteta.

Liejev odvod oziroma oklepaj izrazimo še na en način. Naj bosta Φ_t^X in Φ_s^Y tokova polj X in Y. Tedaj velja:

$$[X, Y](f)(m) = \frac{d^2}{dt\ ds}|_{t=0,\ s=0}\Big(f(\Phi_s^X(\Phi_t^Y(m)) - f(\Phi_t^Y(\Phi_s^X(m))\Big), \tag{5}$$

Res, imamo

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\Phi_s^X(\Phi_t^Y(m))) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathcal{L}_X f(\Phi_t^Y(m)) = \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)(m),$$

zato nam odvajanje po s in po t v formuli (5) da

$$[X, Y](f) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(f)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(f)).$$

Formula (5) ima zelo jasno geometrijsko interpretacijo. Oklepaj $[X,Y]$ meri infinitezimalno razliko med končnima točkama poti

$$\gamma_1(u) = \begin{cases} \Phi_u^X & u \in [0,t] \\ \Phi_{u-t}^Y(\Phi_t^X) & u \in [t,t+s] \end{cases}$$

in

$$\gamma_2(u) = \begin{cases} \Phi_u^Y & u \in [0,s] \\ \Phi_{u-s}^X(\Phi_s^Y) & u \in [s,t+s]. \end{cases}$$

Če nas ti dve poti (pri dovolj majhnih s in t) pripeljeta v isto točko, bo seveda veljalo $[X,Y]=0$, saj bo tedaj $[X,Y](f)=0$ za vsak f. Tedaj pravimo, da polji X in Y komutirata, ali da sta v involvaciji.

Primer 1 *Naj bo $S \subset M$ 2-dimenzionalna podmnogoterost in $\beta\colon U \to \mathbb{R}^n$ podmnogoterostna karta:*

$$\beta : (U \cap S, U) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}, \mathbb{R}^n).$$

Vzemimo koordinatni vektorski polji $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$, polji X_1 in X_2 pa naj bosta sliki koordinatnih polj glede na odvod karte. Torej

$$X_i = D(\beta^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_i}), \quad i=1,2.$$

S pomočjo zgornje geometrijske interpetacije se je lahko prepičati, da v tem primeru velja

$$[X_1, X_2] = 0.$$

Pomembno in netrivialno dejstvo pa je, da je res tudi obratno. Če sta X_1, X_2 komutirajoči polji na M, tedaj okoli vsakega $p \in M$ obstaja lokalna karta (U,β), tako da velja

$$\beta : (\mathbb{R}^2 \times \{0\}^{n-2}, \mathbb{R}^n) \longrightarrow (S \cap U, U).$$

Velja

$$D(\beta^{-1})(\frac{\partial}{\partial x_i}) = X_i, \quad i=1,2.$$

Polji X_1 in X_2 sta torej tangentni na ploskev $S \subset M$. Pravimo, da je ploskev S integralska ploskev para vektorsih polj X_1 in X_2. Trditev, da taka ploskev obstaja, je poseben primer znanega Frobeniusovega izreka.

Naslednja lema govori o "ekvivariantnosti" Liejevega odvoda glede na delovanje grupe difeomorfizmov.

Lema 1 *Naj bo $F\colon M \longrightarrow M$ difeomorfizem. Tedaj velja*

$$(\mathcal{L}_X(f \circ F))(m) = (\mathcal{L}_{DF(X)}(f))(F(m)).$$

Dokaz: Naj bo $\varphi_X(t)$ integralska krivulja polja X skozi točko m. Tedaj:

$$(\mathcal{L}_x(f \cdot F))(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(F(\varphi_X(t))). \tag{6}$$

Velja pa

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} F(\varphi_X(t)) = (D_m F)(X(m)).$$

Torej je desna enačbe (6) res smerni odvod funkcije F v točki $F(m)$ v smeri vektorja $(D_m F)(X(m))$.

□

Sedaj lahko hitro dokažemo, da difeomorfizmi delujejo kot izomorfizmi glede na Liejev produkt. Natančneje, velja naslednji izrek.

Izrek 3 *Naj bo $F\colon M \to M$ difeomorfizem in naj bosta $X, Y \in \Gamma(TM)$ gladki polji na M. Tedaj velja:*

$$DF([X, Y]_m) = [DF(X), DF(Y)]_{F(m)}.$$

Dokaz: Označimo

$$\mathcal{A} = DF([X, Y])(f)(F(m)).$$

Po zgornji lemi imamo:

$$\mathcal{A} = DF([X, Y])(f)(F(m)) = [X, Y](f \circ F)(m).$$

Po tretji definiciji Liejevega odvoda sedaj dobimo

$$\mathcal{A} = \frac{d^2}{dtds}|_{s=0,\ t=0}(f(F(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)))) - (f(F(\Phi_t^X(\Phi_s^Y(m)))).$$

Če spet uporabimo prejšnjo lemo, nazadnje vidimo

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathcal{L}_{DF(Y)} f)(F(\Phi_t^X(m))) - \frac{d}{ds}|_{s=0}(\mathcal{L}_{DF(X)} f)(F(\Phi_s^Y(m))) \\
&= (\mathcal{L}_{DF(X)}(\mathcal{L}_{DF(Y)}(f)))(F(m)) - (\mathcal{L}_{DF(Y)}(\mathcal{L}_{DF(X)}(f)))(F(m)) \\
&= [DF(Y), DF(X)](f)(m).
\end{aligned}$$

□

2.6 Liejeve algebre

V tem razdelku bomo videli, da ima Liejev odvod središčno vlogo v Liejevi teoriji. Naj bo G Liejeva grupa in $X, Y \in \Gamma_L(TG)$ levoinvariantni polji.

Trditev 9 *Liejev oklepaj levoinvariantnih polj je spet levoinvariantno polje.*

Dokaz: Za vsak $h \in G$ je $L_h \colon G \longrightarrow G$ difeomorfizem. Po zgoraj dokazanem izreku velja:

$$D_g L_h([X,Y](g)) = [DL_h X, DL_h Y](hg) \overset{leva\ invariantnost}{=} [X,Y](hg).$$

□

Definicija 9 *Vektorski prostor* $\Gamma_L(TG)$*, skupaj z operacijo*

$$\begin{array}{rcccl} [-,-]\colon \Gamma_L(TG) & \times & \Gamma_L(TG) & \longrightarrow & \Gamma_L(TG) \\ & (X,Y) & & \longrightarrow & [X,Y], \end{array}$$

se imenuje Liejeva algebra grupe G*.*

Videli smo, da za operacijo $[-,-]$ veljata dve pravili:

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$ - antikomutativnost

(b) $[X,[Y,Z]], +[Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ - Jacobijeva identiteta

Seveda veljata tudi identiteti:

(c) $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$

(d) $[\alpha X, Z] = \alpha[X,Z] \quad \alpha \in \Gamma$, itd...

Vpeljimo sedaj na prostor $\mathfrak{g} = T_eG$ operacijo $[-,-]$ na naraven način. Naj bosta $\xi, \eta \in T_eG$ poljubna vektorja in X_ξ, Y_η levoinvariantni polji na G, za kateri velja

$$X_\xi(e) = \xi, \quad Y_\eta(e) = \eta.$$

Definicija 10 *Liejev produkt (ali komutator na $\mathfrak{g}$) je podan s predpisom*

$$[\![\xi, \eta]\!] := [X_\xi, Y_\eta](e) \in T_eG.$$

Vektorski prostor $\mathfrak{g} = T_eG$, opremljen z operacijo $[\![-,-]\!]$, se imenuje Liejeva algebra Liejeve grupe G.

Odslej naprej bomo tudi to operacijo označevali kar z $[-,\ -]$.

Sedaj bomo navedli nekaj osnovnih lastnosti Liejevih algeber.

Definicija 11 *Eksponentna preslikava*

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

je podana s predpisom

$$\mathrm{Exp}(\xi) = \varphi_\xi(1),$$

kjer je $\varphi_\xi \colon \mathbb{R} \to G$ enoparametrična grupa, pripadajoča vektorju $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$. Z drugimi besedami, $\varphi_\xi(t)$ je integralska krivulja skozi $e \in G$ levoinvariantnega polja X_ξ, za katero velja $X_\xi(e) = \xi$.

Trditev 10 *Za eksponentno preslikavo velja*

$$\mathrm{Exp}(t\xi) = \varphi_\xi(t).$$

Dokaz: Po definiciji imamo $\mathrm{Exp}(t\xi) = \varphi_{t\xi}(1)$. Krivulji

$$s \longmapsto \varphi_{t\xi}(s), \quad s \longmapsto \varphi_\xi(s \cdot t)$$

sta obe integralski krivulji skozi $e \in G$ levoinvariantnega vektorskega polja $X_{t\xi}$, za katero velja $X_{t\xi}(e) = t \cdot \xi$. Obe sta namreč 1-parametrični podgrupi. Vstavimo $s = 1$ in dobimo trditev.

$\square$

Dokazali smo celo, da velja $\varphi_\xi(s \cdot t) = \varphi_{t\xi}(s)$ za vsak t.

Izrek 4 *Odvod eksponentne preslikave v točki $0 \in \mathfrak{g}$ je identična preslikava:*

$$D_0\mathrm{Exp} : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG = \mathfrak{g}.$$

Zato je Exp *v neki okolici $V \subset \mathfrak{g}$ točke 0 difeomorfizem.*

Dokaz: Z upoštevanjem definicije eksponentne preslikave dobimo

$$\begin{aligned}(D_0\mathrm{Exp})(\xi) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Exp}(t\xi)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_\xi(t)\\ &= X_\xi(e)=\xi.\end{aligned}$$

Dokaz druge trditve je neposredna uporaba izreka o inverzni preslikavi.

□

Definicija 12 *Adjungirano ($\widetilde{\mathrm{Ad}}$) delovanje Liejeve grupe G samo nase je podano s predpisom:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ad}}_g:\ G &\longrightarrow G\\ h &\longmapsto \widetilde{\mathrm{Ad}}_g(h)=R_{g^{-1}}(L_g(h)).\end{aligned}$$

Za vsak element $g\in G$ je preslikava $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ difeomorfizem grupe G vase. Ker preslikava $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ preslika pri vsakem g enoto e vase, je odvod $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ glede na spremenljivko h preslikava Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ vase.

Definicija 13 *Adjungirano delovanje grupe G na Liejevo algebro $\mathfrak{g}=T_eG$ je odvod delovanja $\widetilde{\mathrm{Ad}}$, izračunan v enoti grupe.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}_g:\ \mathfrak{g}=T_eG &\longrightarrow \mathfrak{g}=T_eG\\ \xi &\longmapsto \mathrm{Ad}_g(\xi)=(D_e\widetilde{\mathrm{Ad}}_g)(\xi).\end{aligned}$$

Očitno je za vsak g preslikava Ad_g linearni izomorfizem, saj je $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ difeomorfizem (z inverzom $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{g^{-1}}$). Imamo torej preslikavo

$$\begin{aligned}g &\longmapsto \mathrm{Ad}_g\\ G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}),\end{aligned}$$

ki je homomorfizem grup, saj

$$gh\longmapsto \mathrm{Ad}_{gh}=\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{Ad}_h=\mathrm{Ad}_g(\mathrm{Ad}_h(\quad)).$$

Preslikava $g\mapsto\mathrm{Ad}_g$ je pomembna upodobitev grupe G in se imenuje adjungirana upodobitev. V Liejevi teoriji je morda ta upodobitev najnaravnejša, čeprav to seveda ni tista (tudi naravna) predstavitev, ki nam najprej pride na misel pri grupah $GL(n;\mathbb{R})$ in drugih matričnih grupah.

Izrek 5 *Naj bosta ξ in η elementa Liejeve algebre $\mathfrak{g} = T_eG$. Tedaj velja:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{Exp(t\xi)}(\eta) = [\xi, \eta].$$

Dokaz: Spomnimo se definicije Liejevega odvoda $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.

$$\mathcal{L}_X(Y)(m) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_m\Phi_t^X)^{-1}(Y(\varphi_X(t))), \tag{7}$$

kjer je Φ_t^X tok polja X in $\varphi_X(t)$ integralska krivulja X skozi m. Naj bo sedaj $m = e \in G$, $X = X_\xi$ in $Y = Y_\eta$ levo invariantni polji z začetnima vrednostma ξ in η. Tedaj je

$$\varphi_{X_\xi}(t) = \mathrm{Exp}(t\xi).$$

Trditev 6 pravi, da je tok levoinvariantnega polja X_ξ podan s formulo

$$\Phi_t^{X_\xi}(g) = g \cdot \mathrm{Exp}(t\xi) = R_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(g).$$

Po mikrogrupni lastnosti imamo:

$$(\Phi_t^X)_g^{-1}(X(g)) = \Phi_{-t}^X(g) = R_{\mathrm{Exp}(-t\xi)}(g).$$

Za vsak element $g \in G$ zato velja

$$D_g(\Phi_t^X)^{-1}(X_g) = (D_gR_{\mathrm{Exp}(-t\xi)})(X_g), \qquad X_g \in T_gG.$$

Torej:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= [X_\xi, Y_\eta](e) = \mathcal{L}_{X_\xi}(Y_\eta)(e) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_e\Phi_t^{X_\xi})^{-1}(Y_\eta(\mathrm{Exp}(t\xi))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(\Phi_t^{X_\xi})^{-1}(Y_\eta(\mathrm{Exp}(t\xi))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}D_{\mathrm{Exp}(t\xi)}R_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(Y_\eta(\mathrm{Exp}(t\xi))) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}D_{\mathrm{Exp}(t\xi)}R_{\mathrm{Exp}(-t\xi)}(D_eL_{(\mathrm{Exp}(t\xi))}(\eta)) \qquad (\textit{ker je } Y_\eta \textit{ levo invarianten}) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}R_{\mathrm{Exp}(-t\xi)}(L_{(\mathrm{Exp}(t\xi))}(\eta)) \qquad (\textit{pisano na kratko}) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(\eta)).
\end{aligned}$$

□

Omenimo še splošno definicijo Liejeve algebre, ki ne omenja morebitne pripadajoče Liejeve grupe.

Definicija 14 *Liejeva algebra je vektorski prostor $\mathcal{A}$ skupaj z operacijo*

$$[-,-]\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},$$

ki ustreza aksiomoma

1. $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$
2. $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] = 0.$

Poleg tega sta za vsak fiksen $\eta \in \mathcal{A}$ preslikavi $\xi \mapsto [\xi, \eta]$ in $\xi \mapsto [\eta, \xi]$ prostora $\mathcal{A}$ vase linearni.

Naravno vprašanje je, ali za vsako Liejevo algebro $\mathcal{A}$ obstaja Liejeva grupa G, tako da bi veljalo $T_eG = \mathfrak{g} = \mathcal{A}$. Odgovor je negativen, vendar je Liejeva algebra, ki nima pripadajoče Liejeve grupe, nujno neskončno dimenzionalna. Velja torej: vsaka končno dimenzionalna Liejeva algebra je Liejeva algebra neke grupe v zgoraj opisanem smislu. Tega dejstva tu ne bomo dokazovali.

V matematiki in matematični fiziki so poleg končno dimenzionalnih zelo pomembne tudi neskončno dimenzionalne Liejeve algebre. Zelo pomemben primer je tale primer. Naj bo M gladka mnogoterost in $\mathcal{A}$ vektorski prostor vseh gladkih vektorskih polj na M. Opremimo $\mathcal{A}$ z Liejevim oklepajem na običajni način. Tako dobimo (neskončno dimenzionalno) Liejevo algebro. Kaj bi bila pripadajoča Liejeva grupa $\mathcal{G}$? Naraven in plavzibilen odgovor je

$$\mathcal{G} = \mathrm{Diff}(M) = \{grupa\ difeomorfizmov\ mnogoterosti\ M\ vase\}.$$

Še vedno je odprt problem, kako natanko opremiti $\mathcal{G}$ z gladko strukturo.

Drugi pomembni primeri neskončno dimenzionalnih Liejevih algeber so npr. prostor gladkih funkcij na Poissonovi mnogoterosti, ali pa Hamiltonska vektorska polja na Poissonovi (ali na simplektični) mnogoterosti M. V tem, zadnjem primeru bi bila ustrezna Liejeva grupa grupa vseh simplektomorfizmov M, če je le $\pi_1(M) = 0$.

2.7 Matrične Liejeve grupe in algebre

Konstrukcije, ki smo jih opisali v prejšnjih razdelkih, si bomo sedaj ogledali na primerih konkretnih, matričnih grup. Za model si bomo vzeli grupo $SU(n)$ - pri drugih so nato potrebne le manjše modifikacije. Spomnimo se:

$$SU(n) = \{g \in GL(n; \mathbb{C});\ g^* = g^{-1},\ \mathrm{Det}(g) = 1\}.$$

Poiščimo najprej Liejevo algebro $SU(n)$. Naj bo $g(t)\colon(-\epsilon,\epsilon)\to SU(n)$ pot, za katero velja

$$g(0)=e=I,$$

kjer smo z I označili $n\times n$-identično matriko, in

$$\dot{g}(0)=\alpha\in T_eSU(n).$$

Za vsak $t\in(-\epsilon,\epsilon)$ imamo

$$g^*(t)\cdot g(t)=I.$$

Zgornjo identiteto odvajajmo po t in vstavimo $t=0$. Dobimo

$$\dot{g^*}(0)\cdot g(0)+g^*(0)\dot{g}(0)=0,$$

oziroma,

$$\alpha^*+\alpha=0.$$

Elementi Liejeve algebre $\mathfrak{su}(n)$ grupe$SU(n)$ so torej poševno simetrične matrike.

Poiščimo sedaj eksplicitno formulo za eksponentno preslikavo.

$$\mathrm{Exp}\colon\mathfrak{su}(n)\longrightarrow SU(n).$$

Spomnimo se definicije

$$\mathrm{Exp}(\alpha)=\varphi_{X_\alpha}(1)=\varphi_\alpha(1)$$

in dejstva, ki smo ga dokazali,

$$\mathrm{Exp}(t\alpha)=\varphi_\alpha(t).$$

Levoinvariantno polje na katerikoli matrični grupi je podano z

$$X_\alpha(g)=D_eL_g(\alpha)=g\cdot\alpha,$$

kjer je $g\cdot\alpha$ običajni matrični produkt. Integralska krivulja $\varphi_\alpha(t)=g(t)$ polja $X_\alpha(g)=g\cdot\alpha$ je torej rešitev diferencialne enačbe:

$$\dot{g}(t)=g(t)\cdot\alpha.$$

To pa je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti α_{ij}. Njena rešitev je

$$g(t)=I+t\alpha+\frac{t^2}{2!}\alpha^2+\frac{t^3}{3!}\alpha^3+...+\frac{t^n}{n!}\alpha^n+..., \tag{8}$$

oziroma, zapisano na kratko:

$$g(t) = e^{t\alpha} = \mathrm{Exp}(t\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{t^k}{k!}\alpha^k.$$

Zgornji razmislek in formula (exp) veljata za vsako matrično grupo in njeno algebro.

Spotoma smo tudi ugotovili tole. Enoparametrične podgrupe v matričnih grupah so oblike:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(t): \ \mathbb{R} &\longrightarrow SU(n), GL(n;\mathbb{R}), \ldots \\ t &\longmapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\alpha} \frac{t^k}{k!}\alpha^k = e^{t\alpha} = \mathrm{Exp}(t\alpha). \end{aligned}$$

Mimogrede omenimo: Liejeva algebra $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{F})$ Liejeve grupe $GL(n;\mathbb{R})$ sestoji iz vseh matrik dimenzije $n \times n$ z elementi iz polja $\mathbb{F}$. Res, matrična grupa $GL(n;\mathbb{F}) \subset \{\textit{vse } n \times n \textit{ matrike}\}$ je odprta podmnožica, zato

$$T_e GL(n;\mathbb{F}) = \mathfrak{gl}(n;\mathbb{F}) = \textit{vse } n \times n \textit{ matrike}.$$

Zgornje lahko povemo na malo drugačen način v "brezkoordinatnem jeziku" takole. Naj bo V končno dimenzionalni vektorski prostor in naj bo $G = Aut(V)$ grupa avtomorfizmov V. To je očitno Liejeva grupa. Tedaj je pripadajoča Liejeva algebra enaka prostoru vseh endomorfizmov, $T_e G = End(V)$.

Poglejmo si še, kako se izraža v primeru matričnih algeber Liejev oklepaj. Spomnimo se definicije

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \mathrm{Ad}_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(\eta).$$

V matričnih grupah velja:

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g(h) = (L_g \circ R_{g^{-1}})(h) = ghg^{-1},$$

saj sta leva in in desna translacija kar primerna matrična produkta. Naj bo $h(t)$ pot v grupi, za katero velja $h(0) = I$ in $\dot{h}(0) = \xi$. Odvajanje nam da

$$\mathrm{Ad}_g(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(g \cdot h(t) \cdot g^{-1}) = g \cdot \xi \cdot g^{-1}.$$

Torej:

$$[\xi, \eta] \ = \ \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \mathrm{Ad}_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(\eta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \mathrm{Exp}(t\xi)\cdot\eta\cdot\mathrm{Exp}(t\xi)^{-1} \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \mathrm{Exp}\ (t\xi)\cdot\eta\cdot\mathrm{Exp}(-t\xi) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (I + t\xi + \mathcal{O}(t^2))\cdot\eta\cdot(I - t\xi + \mathcal{O}(t^2)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\eta + t\ \xi\cdot\eta - t\ \eta\cdot\xi + \mathcal{O}(t^2)) \\
&= \xi\cdot\eta - \eta\cdot\xi.
\end{aligned}
$$

Skratka:

$$[\xi,\eta] = \xi\cdot\eta - \eta\cdot\xi.$$

Liejev oklepaj v matričnih grupah je običajni komutator matrik.

3 Glavni svežnji

Bralec se je verjetno že srečal s pojmom sveženja v geometriji ali v globalni analizi. Najpogosteje naletimo na vektorske svežnje. Naivno rečeno, je vektorski sveženj z vlaknom $\mathbb{F}$ nad mnogoterostjo M unija kopij prostora $\mathbb{F}$, parametrizirana z M. Glavni sveženj je podobna konstrukcija. Približno rečeno, je glavni sveženj nad mnogoterostjo M in s strukturno grupo G unija kopij Liejevih grup G, parametrizirana z M.

Naj bo torej M gladka mnogoterost in G Liejeva grupa.

Definicija 15 *Gladka mnogoterost P, skupaj z gladko preslikavo $\pi\colon P \longrightarrow M$, je glavni G- sveženj, če velja:*

1. *G prosto deluje na P z desne:*

$$\begin{aligned} \varrho: \quad P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \varrho_g(p) = p \cdot g. \end{aligned}$$

2. *$M = P/G$ je gladka mnogoterost in naravna projekcija*

$$\pi : P \longrightarrow P/G = M$$

   je gladka preslikava.

3. *Sveženj P je lokalno trivialen. To pomeni, da za vsak $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subset M$, tako da je praslika $\pi^{-1}(U)$ izomorfna produktu $U \times G$ v temle smislu:*

   Obstaja difeomorfizem

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

   oblike

$$\varphi(p) = (\pi(p), s(p)),$$

   pri čemer je $s\colon \pi^{-1}(U) \to G$ ekvivariantna preslikava. Velja torej

$$s(p \cdot g) = s(p) \cdot g, \qquad \textit{za vsak } g \in G.$$

Glavne svežnje bomo označevali z enim od naslednjih simbolov: P, $\pi\colon P \to M$, ali pa tudi $\pi\colon P \xrightarrow{G} M$, če bomo želeli poudariti identiteto vlakna G. Mnogoterost M se imenuje bazna mnogoterost svežnja, grupa G pa vlakno. Pravimo, da je P sveženj nad M z vlaknom G.

Primer 2 *Najenostavnejši je tako imenovali trivialni ali produktni glavni sveženj $P = M \times G$ skupaj s projekcijo na prvi faktor. To je očitno glavni sveženj. Tak glavni sveženj se imenuje trivialni sveženj.*

Primer 3 *Hopfov sveženj ali Hopfova fibracija.*

Naj bo $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ tri-sfera v $\mathbb{C}^2$ oziroma v $\mathbb{R}^4$. Definirajmo delovanje grupe $U(1)$ na S^3 takole:

$$\begin{aligned} \varrho: \quad S^3 \times U(1) &\longrightarrow S^3 \\ ((z_1, z_2), e^{i\varphi}) &\longmapsto (z_1 e^{i\varphi}, z_2 e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Lahko je preveriti, da je to delovanje prosto. Kvocientna projekcija $\pi\colon S^3 \to S^3/U(1)$ je projekcija na prostor orbit delovanja

$$[\pi(z_1, z_2)] = [\pi(w_1, w_2)] \iff (w_1, w_2) = (z_1 e^{i\varphi}, z_2 e^{i\varphi})$$

za kak φ. Torej $[\pi(z_1, z_2)] = [\pi(w_1, w_2)] =$ natanko tedaj, ko (z_1, z_2) in (w_1, w_2) predstavljata isto točko $[z_1, z_2]$ v $\mathbb{C}P^2$. (Oznaka $[z_1, z_2]$ pomeni homogene koordinate točke v $\mathbb{C}P^2$.) Preslikava

$$\begin{aligned} \pi: \quad S^3 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto [z_1, z_2] \end{aligned}$$

je gladka in $\pi^{-1} = U(1)$. Domnevamo torej, da je $\pi\colon S^3 \overset{U(1)}{\to} S^2$ glavni sveženj. Prepričati se moramo še, da je naš sveženj lokalno trivialen.

Naj bo $U \subset \mathbb{C}P^1$ podmnožica, podana z $U = \{[z_1, z_2]; z_2 \neq 0\}$. Oglejmo si preslikavo:

$$\begin{aligned} \psi: \quad \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times U(1) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (\pi(z_1, z_2), s(z_1, z_2)) = ([z_1, z_2], e^{iArg(z_2)}). \end{aligned}$$

Seveda velja:

$$s(z_1 e^{i\varphi}, z_2 e^{i\varphi}) = e^{i(Arg(z_2)+\varphi)} = s(z_1, z_2) \cdot e^{i\varphi}.$$

Torej je preslikava ψ res lokalna trivializacija našega svežnja. Za drugo lokalno karto vzamemo podmnožico

$$V = \{[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1; z_1 \neq 0\}$$

in postopamo podobno kot zgoraj. Ker je $U \cup V = \mathbb{C}P^1$, smo s tem dokazali, da je $\pi\colon S^3 \overset{U(1)}{\to} S^2$ res glavni sveženj.

Z nekaj premisleka (npr. z opazovanjem fundamentalnih grup) vidimo, da prostora S^3 in $S^2 \times S^1$ nista homeomorfna. Torej vsi glavni svežnji niso trivialni.

Sedaj bomo predstavili drugačen opis glavnega svežnja. S pomočjo tega opisa je v splošnem laže "meriti" netrivialnost, oziroma "zvitost" (twistedness) svežnja. Naj bo $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ odprto pokritje bazne mnogoterosti M. Naj bo za vsak α praslika $\pi^{-1}(U_\alpha)$ trivialni glavni sveženj nad U_α. Torej za vsak α obstaja preslikava

$$\begin{array}{rccc} \pi_\alpha : & \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times G \\ & p & \longmapsto & (\pi(p), s_\alpha(p)), \end{array}$$

kjer je s_α ekvivariantna preslikava:

$$s_\alpha(\varrho_g(p)) = s_\alpha(p) \cdot g.$$

Naj bo $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$. Tedaj lahko definiramo prehodno preslikavo

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

takole: Naj bo $m = \pi(p)$. Tedaj

$$g_{\alpha\beta}(m) = s_\beta(p) \cdot s_\alpha(p)^{-1}.$$

Zaradi ekvivariantnosti preslikav s_α in s_β je $g_{\alpha\beta}(m)$ res neodvisen od izbire elementa $p \in (\pi)^{-1}(m)$. Naj bo $p \neq \widetilde{p} \in (\pi)^{-1}(m)$. Tedaj obstaja $g \in G$, tako da je $\widetilde{p} = p \cdot g$ in

$$(s_\beta(p \cdot g)) \cdot s_\alpha(p \cdot g)^{-1} = (s_\beta(p) \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot s_\alpha(p)^{-1}) = s_\beta(p) \cdot s_\alpha^{-1}(p).$$

Preslikava $g_{\alpha\beta}$ inducira prehodno preslikavo

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \Big[(U_\alpha \cap U_\beta) \times G \longmapsto (U_\alpha \cap U_\beta) \times G\Big]$$

med dvema trivializacijama, ki deluje s predpisom

$$\widetilde{g}_{\alpha\beta}(m)(m, h) = (m, g_{\alpha\beta}(m) \cdot h).$$

Preslikavo $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ bomo v nadaljevanjuj tudi ozačevali kar z $g_{\alpha\beta}$.

Očitno za prehodne preslikave velja:

1. $g_{\alpha\beta}(m)^{-1} = g_{\alpha\beta}(m)$.
2. $g_{\alpha\beta}(m) \cdot g_{\beta\gamma}(m) = g_{\alpha\gamma}(m), \qquad za\ m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Družina preslikav $\{g_{\alpha\beta}\}$, za katero veljata zgornji dve lastnosti, se imenuje kocikel.

Torej: Vsakemu glavnemu svežnju $\pi: P \to M$ in vsakemu trivializirajočemu pokritju $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ bazne mnogoterosti M pripada kocikel prehodnih preslikav.

Velja tudi obratno. Naj bo M gladka mnogoterost, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ odprto pokritje M in G Liejeva grupa.

Trditev 11 *Naj nabor $\{g_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha\cap U_\beta\neq 0}$ gladkih preslikav*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

ustreza pogojema 1. in 2. za kocikel. Tedaj ta nabor določa neki glavni svežen $\pi : P \xrightarrow{G} M$. Pri primerno izbranih lokalnih trivializacijah z nosilci U_α za $\alpha \in A$, so prehodne preslikave dobljenega svežnja prav preslikave $\{g_{\alpha\beta}\}$.

Dokaz: Svežen $\pi : P \to M$, ki pripada kociklu $\{g_{\alpha\beta}\}$, konstruiramo takole. Za vsak α označimo $Q_\alpha = U_\alpha \times G$. Naj bo

$$Q = \coprod_{\alpha\in\mathcal{A}} Q_\alpha.$$

Vpeljimo v Q ekvivalenčno reakcijo takole. Elemente množice $Q_\alpha = U_\alpha \times G$ označimo s trojicami (α, x, g), kjer je $x \in U_\alpha$ in $g \in G$. Relacija je tedaj definirana s predpisom

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \iff h = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g \textit{ in } x = y.$$

Lahko je videti, da je ta relacija res ekvivalenčna. Naj bo sedaj

$$P = Q/\sim.$$

Trdimo, da je P res totalni prostor iskanega glavnega svežnja. Projekcija $\pi: P \to M$ je podana s predpisom:

$$\pi([\alpha, x, g]) = x.$$

Delovanje G na P je podano s predpisom

$$[(\alpha, x, h)] \cdot g = [(\alpha, x, h \cdot g)].$$

Ta predpis je res neodvisen od izbire predstavnika v ekvivalenčnem razredu. Naj bosta (α, x, h) in $(\beta, x, \widetilde{h})$ ekvivalentna elementa. Tedaj je

$$\widetilde{h} = g_{\alpha\beta}(x) \cdot h.$$

Zato:

$$\begin{aligned}(\alpha, x, h) \cdot g &= (\alpha, x, h \cdot g) \sim (\beta, x, g_{\alpha\beta}(x) h \cdot g) \\ &= (\beta, x, \widetilde{h} \cdot g) \\ &= (\beta, x, \widetilde{h}) \cdot g.\end{aligned}$$

Vse ostale definicijske lastnosti glavnega svežnja je lahko preveriti.

□

3.1 Infinitezimalno delovanje

V tem razdelku bomo na glavnem svežnju konstruirali na naraven način prostor vektorskih polj, ki bo podan z delovanjem strukturne grupe.

Definicija 16 *Naj bo $\pi\colon P \to M$ glavni G- sveženj in $\xi \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ poljuben element v Liejevi algebri. Infinitezimalno delovanje grupe G v smeri ξ je vektorsko polje $\widetilde{\xi}$ na P, podano s predpisom*

$$\widetilde{\xi}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\; p \cdot \mathrm{Exp}(t \cdot \xi).$$

V nadaljevanju bomo potrebovali tole dejstvo:

Trditev 12 *Preslikava*

$$\begin{aligned} V:\; \mathfrak{g} &\longrightarrow \Gamma(TP) \\ V:\; \xi &\longmapsto \widetilde{\xi} \end{aligned}$$

je injektivni homomorfizem Liejevih algeber.

Dokaz: Preslikava je seveda linearna. Ker G prosto deluje na P, je $p \neq p \cdot Exp(t\xi)$ za vsak $t \neq 0$ in $\xi \neq 0$. Torej, če je $\xi \neq 0$, tedaj $\widetilde{\xi} \neq 0$, preslikava je res injektivna. Dokažimo še homomorfnost. Spomnimo se definicije:

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}](p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_p\Phi_t^{\widetilde{\xi}})^{-1}(\widetilde{\eta}(\varphi_p^{\widetilde{\xi}}(t))),$$

kjer je $\Phi_t^{\widetilde{\xi}}$ tok polja $\widetilde{\xi}$ in $\varphi_p^{\widetilde{\xi}}(t)$ integralska krivulja polja $\widetilde{\xi}$ skozi p. Za vsak $p \in P$ velja:

$$\Phi_t^{\widetilde{\xi}}(p) = p \cdot \mathrm{Exp}(t \cdot \xi), \qquad \varphi_p^{\widetilde{\xi}}(t) = p \cdot \mathrm{Exp}(t \cdot \xi).$$

Ker je

$$(D_p \Phi_t^{\tilde{\xi}})^{-1} = D_{\Phi_t^{\tilde{\xi}}(p)} (\Phi_t^{\tilde{\xi}})^{-1} = D_{\Phi_t^{\tilde{\xi}}(p)} \Phi_{-t}^{\tilde{\xi}},$$

imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0} (D_p \Phi_t^{\tilde{\xi}})^{-1} (\widetilde{\eta}(\varphi_p^{\tilde{\xi}}(t))) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Big(D_{p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi)} \Phi_{-t}^{\tilde{\xi}} \Big) (\widetilde{\eta}(p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi)) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} \Big(p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi) \cdot \mathrm{Exp}(s\eta) \Big) \cdot \mathrm{Exp}(-t\xi) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0}\ p \cdot \Big(\mathrm{Exp}(t\xi)) \cdot \mathrm{Exp}(s\eta) \cdot \mathrm{Exp}(-t\xi) \Big) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \widetilde{\mathrm{Ad}_{\mathrm{Exp}(t\xi)}(\eta)}(p) \\
&= \widetilde{[\xi, \eta]}(p).
\end{aligned}$$

Torej res:

$$[V(\xi), V(\eta)](p) = V([\xi, \eta])(p).$$

$\square$

4 Povezave na glavnih svežnjih in njihova ukrivljenost

V tem poglavju bomo opisali osnovni objekt diferencialne geometrije, povezavo. Kasneje bomo videli, da je prav povezava tisti objekt, ki nam omogoči matematično opisati intuitivni pojem ukrivljenosti prostora. V uvodu smo videli, da je prostor ukrivljen, če se paralelni prenos $p(V)$ tangentnega vektorja V vzdolž sklenjene krivulje razlikuje od vektorja V. Zveza med povezavo, opisano v tem poglavju, in intuitivno ukrivljenostjo bo postala jasna šele kasneje. Tu bomo spoznali pojem horizontalnega dviga, katerega poseben primer je paralelni premik. Videli bomo, da bodo konstrukcije kljub svoji veliki splošnosti zelo geometrijske in naravne.

Naj bo N gladka mnogoterost dimenzije n.

Definicija 17 *Gladka distribucija F ranga k na N je predpis, ki vsaki točki $p \in N$ priredi podprostor $F_p \subset T_pN$ dimenzije k. V okolici U točke p obstaja k gladkih vektorskih gladkih polj $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TU)$, tako da velja*

$$F_u = span\{X_1(u), \dots, X_k(u)\}$$

za vsak $u \in U$.

Gladkost predpisa $p \mapsto F_p$ lahko opišemo tudi takole: Naj bo

$$\tau : TN/U \longrightarrow U \times \mathbb{F}^n$$

gladka lokalna trivializacija tangentnega svežnja TN. Distribucija F je gladka, če je za vsak τ gladka preslikava

$$\mathcal{F} : U \longrightarrow G_k(n)$$

podana s predpisom:

$$\mathcal{F}(p) = pr_2(\tau(F_p)) \subset \mathbb{F}^n.$$

Naj bo sedaj $\pi : P \longrightarrow M$ glavni G-svežen. Označimo

$$\mathrm{Vert}_p = ker(D_p\pi) \subset T_pP.$$

Definicija 18 *Povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \to M$ je gladka distribucija H ranga $n = \dim M$ na P, za katero velja:*

1. *Za vsak p je*
$$T_pP = H_p \oplus \mathrm{Vert}_p.$$

2. *Preslikava*
$$D_p\pi : H_p \subset T_pP \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$
je linearni izomorfizem.

3. *Distribucija H je G-invariantna. To pomeni*
$$D_pR_g(H_p) = H_{R_g(p)} = H_{p\cdot g}.$$

Povezava nam omogoča na enoličen način dvigniti krivuljo iz M na P.

Trditev 13 *Naj bo $\gamma\colon[\alpha,\beta] \to M$ odsekoma gladka krivulja. Naj bo $p_a \in \pi^{-1}(a)$. Tedaj obstaja natanko ena krivulja*
$$\widetilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \longrightarrow P$$
za katero velja:

(a) $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$

(b) $\widetilde{\gamma}(t) = p_a$ *za t, pri katerem je* $\gamma(t) = a$.

(c) $\dot{\widetilde{\gamma}}(t) \in H_{\widetilde{\gamma}(t)}$ *za vsak* $t \in [a,b]$.

Dokaz: Označimo z $\Gamma \subset P$ podmnogoterost dimenzije $\dim(G)+1$, podano z:
$$\Gamma = \pi^{-1}(\gamma).$$
Za vsako točko $p \in \Gamma$ označimo z
$$(D_p\pi)_H : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$
skrčitev linearne preslikave
$$(D_p\pi) : T_pP \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$
na podprostor $H_p \subset T_pP$. Skrčitev $(D_p\pi)_H$ je izomorfizem. Definirajmo vektorsko polje X na Γ s predpisom:
$$X(p) = (D_p\pi)_H^{-1}(\dot{\gamma}(t_p)),$$

pri čemer je $\pi(p) = \gamma(t_p)$.

Polje $X(p)$ je gladko vektorsko polje na Γ. Po izreku o eksistenci rešitev za navedene diferencialne enačbe obstaja natanko ena integralska krivulja polja X, za katero velja $\gamma(a) = P_a$.

$\square$

Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe je lokalne narave, horizontalni dvig pa dejansko obstaja za vsak t iz definicijskega območja krivulje γ. Bralec naj za vajo dokaže, da je res tako. Namig: Za vsak t velja $X(\gamma(t)) \in H_{\gamma(t)} \cap T_{\gamma(t)}\Gamma$, vendar je vektorsko polje X "odvisno samo od t" in nič od koordinat na vlaknu.

Opišimo horizontalni dvig v lokalnih koordinatah oziroma v lokalni trivializaciji. Naj bo $\tau\colon P_{/U} \to U \times G$ lokalna trivializacija. Zaradi enostavnosti označimo s H kar inducirano distribucijo (povezavo) za $U \times G$. Za $p = (\pi(p), s(p)) \in U \times G$ imamo torej

$$H_p \subset T_p(U \times G) = T_{\pi(p)}U \times T_{s(p)}G.$$

Ker je

$$pr_1 : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}U$$

linearni izomorfizem, obstaja linearna preslikava

$$A_p : T_{\pi(p)}U \longrightarrow T_{s(p)}G, \qquad A_p = pr_2 \circ (D_{\pi(p)}\pi_{/H_p})^{-1},$$

tako da je

$$H_p = \{(v, A_p(v)); v \in T_{\pi(p)}U\}.$$

Naj bo sedaj $\widetilde{\gamma}(t)$ dvig krivulje $\gamma(t)$. Tedaj velja:

$$\widetilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \beta(t))$$

za neko krivuljo $\beta\colon [a,b] \to G$. Ker mora biti $\dot{\widetilde{\gamma}}(t) \in H_{\widetilde{\gamma}(t)}$, imamo

$$\dot{\beta}(t) = A_{(\gamma(t),\beta(t))}(\dot{\gamma}(t)). \tag{9}$$

Rešitev te navadne diferencialne enačbe pa obstaja.

Opomba 2 *Oblika enačbe (9) je morda nekoliko zavajajoča. Velja namreč: Če poznamo krivuljo*

$$\alpha(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \beta^{-1}(t) : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathfrak{g},$$

tedaj poznamo tudi $\dot{\beta}(t)$. Res, $\beta(t)$ je rešitev linearne diferencialne enačbe

$$\dot{\beta}(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t).$$

Ker velja za povezavo ekvivariantnost

$$H_p \cdot \beta^{-1} = H_{p \cdot \beta^{-1}} \tag{10}$$

iz (9) dobimo:

$$\dot{\beta}(t) \cdot \beta^{-1}(t) = A_{(\gamma(t), \beta(t))}(\dot{\gamma}(t)) \cdot \beta^{-1}(t)$$

in iz (10)

$$\dot{\alpha}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \beta^{-1}(t) = A_{(\gamma(t), e)}(\dot{\gamma}(t)).$$

Iskana komponenta $\beta(t)$ dvignjene poti je tedaj rešitev enačbe

$$\dot{\beta}(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t).$$

Videli smo torej, da lahko krivulje horizontalno dvigujemo. Naravno vprašanje je: Ali lahko horizontalno dvignemo tudi takšno dvo- ali večdimenzionalno podmnogoterost bazne mnogoterosti M? Objekt, ki da odgovor na to vprašanje, je ukrivljenost povezave.

Za razumevanje problema dvigovanja večdimenzionalnih podmnogoterosti se je potrebno spomniti Frobeniusovega izreka.

Izrek 6 *Naj bo N gladka mnogoterost in H neka gladka distribucija ranga k na N. Označimo s $\Theta_H \subset \Gamma(N)$ množico vektorskih polj X^H, za katera velja:*

$$X^H(x) \in H_x \subset T_x N \qquad \text{za vsak } x \in N.$$

Očitno je Θ_H linearni podprostor v $\Gamma(N)$. Če je poleg tega Θ_H tudi Liejeva podalgebra v $\Gamma(N)$ glede na Liejev oklepaj, tedaj za vsako točko $n \in N$ obstaja k-dimenzionalna podmnogoterost (natanko ena maksimalna) $N_H \subset N$, za katero velja:

$$T_y N_H = H_y \qquad \text{za vsak } y \in N_H \subset N$$

in $n \in N_H$.

Naj bo sedaj $\pi\colon P \to M$ glavni G-sveženj in H povezava na njem. Imejmo gladko preslikavo $F\colon V \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset M$, ki odprto množico $V \subset \mathbb{R}^2$ preslika difeomorfno na $F(V) = S$. Slika $F(V) = S$ je torej neka ploskev v M. Ali obstaja ploskev $\widetilde{S} \subset P$, ki vsebuje izbrano točko $p \in P$ in za katero velja:

$$\pi(\widetilde{S}) = S \qquad \text{in} \qquad T_p\widetilde{S} \subset H_p \subset T_p P \ \ \text{za vsak} \ \ p \in \widetilde{S}?$$

Vektorski polji X_i, $i = 1, 2$ naj bosta podani z $X_i = DF(\frac{\partial}{\partial x_i})$, kjer sta x_1, x_2 koordinati na V. Torej sta X_1, X_2 vektorski polji na S. Označimo z istima črkama neki gladki razširitvi teh polj na ves M.

Naj bosta $\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2$ horizontalna dviga teh polj na P. Torej

$$\widetilde{X}_i(p) = (D_p\pi_H)^{-1}(X_i(\pi(p)),$$

kjer je

$$D_p(\pi_H) : H_p \subset T_pP \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$

linearni izomorfizem, dobljen kot skrčitev odvoda sveženjske projekcije π na H. Označimo s $\Phi_t^{\widetilde{X}_i}$ tokova polj $\widetilde{X}_i$.

Če obstaja horizontalni dvig $\widetilde{S}$ ploskve S , tedaj morata za vsak dovolj majhen par $s, t \in \mathbb{R}$ točki

$$\Phi_s^{\widetilde{X}_i}(\Phi_s^{\widetilde{X}_1}(p)) \qquad in \qquad \Phi_t^{\widetilde{X}_2}(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p))$$

sovpadati. Torej, če obstaja dvig $\widetilde{S}$, mora veljati:

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2]f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}\Big(f(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}((\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p))) - (f(\Phi_t^{\widetilde{X}_2}((\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p)))\Big) = 0.$$

Oziroma, na kratko:

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2](p) = 0$$

v vsaki točki $p \in \widetilde{S}$.

Kaj gre lahko pri poskusu dvigovanja S na horizontalni $\widetilde{S}$ narobe? To nam pove prav količina $[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2]$. Poglejmo si jo nekoliko podrobneje.

Za projekciji točk seveda velja

$$\pi(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p))) = \pi(\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p))).$$

Točki $\Phi_s^{\widetilde{X}_2}((\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p))$ in $\Phi_t^{\widetilde{X}_1}((\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p))$ torej ležita v istem vlaknu. Za vsak (t, s) zato obstaja element $g(t, s) \in G$, tako da velja:

$$\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p)) = \Phi_t^{\widetilde{X}_1}(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p)) \cdot g^{-1}(t, s). \tag{11}$$

Za vsak (t_0, s_0) je pot

$$\widetilde{\gamma} = \begin{cases} \Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p) & t \in [0, t_0] \\ \Phi_s^{\widetilde{X}_2}(\Phi_{t_0}^{\widetilde{X}_1}(p)) & t \in [t_0, t_0 + s_0] \\ \Phi_{-t}^{\widetilde{X}_1}(\Phi_{s_0}^{\widetilde{X}_2}(\Phi_{t_0}^{\widetilde{X}_1}(p))) & t \in [t_0 + s_0, 2t_0 + s_0] \\ \Phi_{-s}^{\widetilde{X}_2}(\Phi_{-t_0}^{\widetilde{X}_1}(\Phi_{s_0}^{\widetilde{X}_2}(\Phi_{t_0}^{\widetilde{X}_1}(p)))) & t \in [2t_0 + s_0, 2t_0 + 2s_0] \end{cases}$$

horizontalni dvig poti, ki je podana z isto formulo, le da nastopajo X_i namesto $\widetilde{X}_i$. Pot $\gamma(t) \in M$ je sklenjena. Takoj opazimo dvoje:

1. $\widetilde{\gamma}(0)$ in $\widetilde{\gamma}(2t_0 + 2s_0)$ ležita v istem vlaknu.
2. $\widetilde{\gamma}(2t_0 + 2s_0) = \widetilde{\gamma}(0) \cdot g(t_0, s_0)$,
   kjer je $g(t_0, s_0)$ element grupe G iz formule (11), izračunan v vrednosti parametrov $t = t_0$ in $s = s_0$.

SLIKA

$p_1 = p_2 \cdot g^{-1}$; $q_2 = q_1 \cdot g$.

Druga točka zgoraj sledi iz naslednjega dejstva. Naj bo $\widetilde{\gamma}(t)$ horizontalni dvig $\gamma(t)$ z začetno točko $\widetilde{\gamma}(0) = p$, krivulja $\check{\gamma}(t)$ pa horizontalni dvig iste bazne krivulje, tokrat z začetno točko $\check{\gamma}(0) = p \cdot g$. Tedaj zaradi G-invariantnosti distribucije H velja

$$\widetilde{\gamma}(t) = \check{\gamma}(t) \cdot g \qquad \textit{za vsak } t.$$

Označimo:

$$p_1(t,s) = \Phi_s^{\widetilde{X}_2}(\Phi_t^{\widetilde{X}_1}(p))$$
$$p_2(t,s) = \Phi_t^{\widetilde{X}_1}(\Phi_s^{\widetilde{X}_2}(p)).$$

Velja:

$$p_2(t,s) = p_1(t,s) \cdot g(t,s),$$

kjer je

$$g(t,s) : I_{\epsilon_1} \times I_{\epsilon_2} \longrightarrow G$$

gladka preslikava, $I_{\epsilon_1} = (-\epsilon_1, \epsilon_1)$ interval, po katerem teče t, in $I_{\epsilon_2} = (-\epsilon_2, \epsilon_2)$ interval, po katerem teče s. Po definiciji Liejevega oklepaja imamo

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] f(p) = \frac{d^2}{dt\, ds}|_{t,s=0} \Big(f(p_1(t,s) \cdot g(t,s)) - f(p_1(t,s)) \Big).$$

Zato, da bodo naši računi v nadaljevanju bolj konkretni in lažje razumljivi, bomo predpostavili, da je naša strukturna grupa G matrična. To ni prehuda omejitev, saj ima zelo velik razred Liejevih grup injektivne matrične upodobitve, torej lahko namesto z abstraktnimi elementi takih grup računamo z matrikami, ki jim pripadajo glede na izbrano zvesto (t.j. injektivno) upodobitev. Grupe, ki imajo zveste upodobitve, so na primer vse kompaktne grupe, pa tudi vse grupe iz obsežnega in pomembnega razreda polenostavnih grup.

Spomnimo se, da je eksponentna preslikava $\mathrm{Exp}\colon \mathfrak{g} \to G$ difeomorfizem v bližini izhodišča $0 \in \mathfrak{g}$. Torej obstaja preslikava

$$(t, s) \longmapsto \xi(t, s) \in \mathfrak{g} = Lie(G),$$

za katero velja

$$g(t, s) = \mathrm{Exp}(\xi(t, s)) = I + \xi(t, s) + \frac{1}{2!}\xi^2(t, s) + \ldots + \frac{1}{n!}\xi^n(t, s) + \ldots .$$

Razvijmo v Taylorjevo vrsto funkcijo

$$\widetilde{f} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R},$$

podano s predpisom

$$\widetilde{f} : \xi \longmapsto f\Big(p_1(t, s) \cdot \mathrm{Exp}(\xi)\Big).$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} f\Big(p_1(t, s) \cdot g(t, s)\Big) &= f(p_1(t, s))\Big(I + \xi(t, s) + \tfrac{1}{2!}\xi^2(t, s) + \ldots + \tfrac{1}{n!}\xi^n(t, s) + \ldots\Big) \\ &= f(p_1(t, s)) + (D_{p_1(t,s)}f)(\widetilde{\xi}_{t,s}) + \mathcal{O}(\widetilde{\xi}^2(t, s)), \end{aligned}$$

kjer smo z $\widetilde{\xi}(t, s)$ označili infinitezimalno delovanje G v smeri $\xi(t, s)$. Očitno je $g(0, 0) = e$, zato $\xi(0, 0) = 0$. Prav tako je $g(0, s) = g(t, 0) = e$, od koder sledi

$$\xi(0, s) = \xi(t, 0) = 0. \tag{12}$$

Torej:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt\ ds}\big|_{t,s=0}\Big(f(p_0(t, s) \cdot g(t, s)) - f(p_0(t, s))\Big) &= \tfrac{d^2}{dt\ ds}\big|_{t,s=0}(D_{(p_1(s,t)}f)(\widetilde{\xi}_{t,s}) + \mathcal{O}(\widetilde{\xi}^2(t, s))) \\ &= \tfrac{d^2}{dt\ ds}\big|_{t,s=0}(D_{(p_1(t,s)}f)(\widetilde{\xi}(t, s) \\ \textit{po Liebnitzevem pravilu in po } (12) \qquad &= \tfrac{d^2}{dt\ ds}\big|_{t,s=0}(D_{(p_1(t,s)}f) \cdot \widetilde{\xi}(0, 0) \\ &+ (D_{(p_1(0,0)}f)(\tfrac{d^2}{dt\ ds}\big|_{t,s=0}\widetilde{\xi}(t, s)) \\ &= (\widetilde{\eta}(f))(p), \end{aligned}$$

kjer je

$$\widetilde{\eta} = \frac{d^2}{dt\ ds}|_{t,s=0}\ \widetilde{\xi}_{s,t} \in T_pP.$$

Upoštevali smo, da je preslikava $\xi \mapsto \widetilde{\xi}_p$ linearna.

Povzemimo:

$$[\widetilde{X}_1, \widetilde{X_2}](p) = \widetilde{\eta}(p),$$

kjer je

$$\eta = \frac{d^2}{dt\ ds}|_{t,s=0}\ \xi_{t,s}$$

in

$$g(t,s) = \mathrm{Exp}(\xi(t,s)).$$

Iz zgornjega takoj vidimo:

$$\frac{d^2}{dt\ ds}|_{t,s=0}\ g(t,s) = \eta.$$

Oglejmo si sedaj še sorodno situacijo. Spomnimo se: $\gamma(t)\colon [0, 2t_0 + 2s_0] \to M$ je sklenjena pot, sestavljena iz integralskih krivulj dolžin t_0 oziroma s_0 vektorskih polj X_1 oz. X_2. Z $\widetilde{\gamma}$ smo označili horizontalni dvig te poti, za katerega velja $\widetilde{\gamma}(0) = p \in P$.

Definicija 19 *Element $g(t_0, s_0) \in G$, za katerega velja*

$$\widetilde{\gamma}(2t_0 + 2s_0) = \widetilde{\gamma}(0) \cdot g(t_0, s_0),$$

se imenuje holonomija povezave H vzdolž poti $\gamma(t)$ v točki $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$.

Infinitezimalizacija zgoraj definirane holonomije nam da:

$$\frac{d^2}{ds\ dt}|_{s,t=0}\ g(t_0, s_0) = \eta,$$

torej element Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Spomnimo se, da smo izračunali:

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p) = \widetilde{\eta}(p) = \frac{d^2}{ds\ dt}|_{s,t=0}(p \cdot g(t_0, s_0)) = \widetilde{\eta}(p),$$

kjer je $\widetilde{\eta}(p)$ infinitezimalno delovanje η, evaluirano v p. Kaj je torej ovira za horizontalen dvig ploskve S v totalni prostor svežnja P? Poglejmo : Če je

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](p) = \widetilde{\eta}(p) \neq 0 \in T_pP,$$

tedaj dviga ni. Sklenjena krivulja $\gamma(t) \subset S$ se ne dvigne v sklenjeno krivuljo $\widetilde{\gamma}(t)$, saj ima dvignjena krivulja netrivialno holonomijo. Ovira za horizontalno dvigovanje večdimenzionalnih podmnogoterosti je torej (infinitezimalizirana) holonomija.

Infinitezimalni holonomiji pravimo *ukrivljenost* povezave H. Na podlagi zgornjega razmišljanja zapišimo tale *osnutek definicije*. (Kasneje bomo videli, da je kar dober!)

Definicija 20 *Naj bo H povezava na G-svežnju $\pi\colon P \to M$. Označimo z X_H horizontalno komponento vektorskega polja $X \in \Gamma(P)$, z X_{Vert} pa vertikalno. Imamo*

$$X(p) = X_{\mathrm{Vert}}(p) + X_H(p) \in T_pP.$$

Naj bosta $X, Y \in T_pP$ poljubna tangentna vektorja in $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ gladki polji na P, za kateri velja

$$\widetilde{X}(p) = X \qquad , \qquad \widetilde{Y}(p) = Y.$$

Ukrivljenost F_H povezave H je diferencialna 2-forma na P z vrednostmi v $\mathfrak{g} = Lie(G)$, ki je podana s predpisom:

$$(F_X)_p(X, Y) = V^{-1}\Big([\widetilde{X}_H, \widetilde{Y}_H]_{\mathrm{Vert}}(p)\Big),$$

kjer je

$$V(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi).$$

Opomba 3 *Ne vemo še, ali je zgornja definicija dobra, t.j. ali je neodvisna od izbire razširitev $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ vektorjev X in Y.*

4.1 Diferencialne forme z vrednostmi v Liejevih algebrah in definicija povezave

V tem razdelku bomo podali rigorozno definicijo povezave in njene ukrivljenosti. V ta namen je smiselno vpeljati orodje, ki bo naše definicije naredilo preglednejše in laže razumljive. To orodje so diferencialne forme z vrednostmi v Liejevih algebrah.

Definicija 21 *Diferencialna k-forma na mnogoterosti P z vrednostmi v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ je gladek predpis, ki vsaki k-terici tangentnih vektorjev $X_1, X_2, \ldots, X_k \in T_pP$ priredi vrednost*

$$\omega_p(X_1, X_2, \ldots, X_k) \in \mathfrak{g}$$

v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$. Ta predpis mora biti k-linearen in anti-simetričen. Gladkost predpisa je definirana takole: Za poljubno izbiro gladkih vektorskih polj $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ mora biti preslikava

$$p \longmapsto \omega_p(\widetilde{X}_1(p), \ldots, \widetilde{X}_k(p))$$

gladka.

Primer tega objekta smo že srečali. Naj bosta $X, Y \in T_pP$ poljubna tangentna vektorja in $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ gladki polji na P, za kateri velja $\widetilde{X}(p) = X$ in $\widetilde{Y}(p) = Y$. Ukrivljenost F_H povezave H je diferencialna 2-forma z vrednostmi v $\mathfrak{g} = Lie(G)$, podana s predpisom

$$F_H(p)(X, Y) = V^{-1}([\widetilde{X}_H, \widetilde{Y}_H]_{\mathrm{Vert}}(p)),$$

kjer je

$$V(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \ \Big(p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi)\Big).$$

Kot že rečeno, moramo še dokazati, da je zgornja definicija dobra.

Forme z vrednostmi v Liejevih algebrah lahko opišemo tudi takole. Spomnimo se konstrukcije tenzorskega produkta. Naj bosta V, W dva vektorska prostora. Tedaj velja

$$\mathrm{Hom}(V, W) = W \otimes V^*.$$

Naj bo $w \otimes v^* \in W \otimes V^*$ in $X \in V$. Tedaj

$$(w \otimes v^*)(X) = v^*(X) \cdot w.$$

Izberimo bazi v W in V. Tedaj

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad v^* = (v_1, v_2, \ldots, v_m).$$

Imamo

$$v^*(X) = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Po drugi strani pa

$$w \otimes v^* = \sum_{i,j} w_i, v_j (e_i \otimes f_j^*) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_m) = \begin{pmatrix} w_1 v_1 & \ldots & w_1 v_m \\ w_2 v_1 & \ldots & w_1 v_m \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ w_n v_1 & \ldots & w_n v_m \end{pmatrix}.$$

Natančno in ekonomično definicijo 1-forme M z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ lahko torej zapišemo takole:

Definicija 22 *Diferencialna 1-forma na M z vrednostmi v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ je gladek prerez svežnja*

$$\widetilde{\mathfrak{g}} \otimes T^*M,$$

kjer smo z $\widetilde{\mathfrak{g}}$ označili trivialni sveženj $\widetilde{\mathfrak{g}} = M \oplus \mathfrak{g}$.

Diferencialna k-forma je gladek prerez

$$\varphi : M \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes \Lambda^k M = \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes \Lambda^k(T^*M),$$

kjer je $\Lambda^k(T^*M)$ kot običajno k-ta vnanja potenca kotangentnega svežnja, torej svežnja, katerega prerezi so običajne k-forme na M.

Če je $\mathfrak{g}$ matrična Liejeva algebra, tedaj ω izgleda takole:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \dots & \omega_{nn} \end{pmatrix},$$

kjer so ω_{ij} običajne (skalarne $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) k-forme na P. V splošnem naj bo $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ baza $\mathfrak{g}$. Tedaj

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \omega^\alpha \otimes e_\alpha,$$

kjer so ω^α običajne k-forme.

Definirajmo sedaj povezavo s pomočjo diferencialne forme z vrednostmi v Liejevi algebri.

Definicija 23 *Povezava na glavnem G-svežnju $\pi \colon P \to M$ je gladka 1-forma ω na P z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, za katero velja:*

(a) Naj bo

$$\widetilde{\xi}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(p \cdot \mathrm{Exp}(t\xi)).$$

Tedaj:

$$\omega_p(\widetilde{\xi}(p)) = \xi.$$

(b) Ekvivariantnost oz. G-invariantnost: Naj bo $X \in T_pP$. Tedaj imamo

$$\omega_{p \cdot g}(X \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega_p(X)).$$

Pokažimo, da sta naši definiciji (18) in (23) ekvivalentni.

Naj bo ω distribucija, opisana z definicijo (23). Definirajmo distribucijo H na P takole:

$$H_p = \ker(\omega_p\colon T_pP \to \mathfrak{g}).$$

Iz točke *(a)* definicije (23) sledi

$$T_pP = H_p \oplus \mathrm{Vert}.$$

Iz točke *(b)* pa sledi:

$$X \in H_p \iff X \cdot g \in H_{p\cdot g}.$$

Torej distribucija H res ustreza definiciji (18) za povezavo.

Naj bo sedaj povezava podana kot G-invariantna distribucija H na P. Definirajmo formo ω takole:

$$\begin{array}{cccc} \omega_p : & T_pP & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ & X = X_H + X_{\mathrm{Vert}} & \longmapsto & V_p^{-1}(X_{\mathrm{Vert}}), \end{array}$$

kjer je

$$V_p(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} p \cdot (\mathrm{Exp}(t\xi)).$$

Očitno je izpolnjena točka *(a)* iz definicije (23) povezavne forme ω. Točko *(b)* je zaradi G-invariantnosti distribucije H potrebno preveriti samo za vektorje $\widetilde{\xi}(p) \in \mathrm{Vert}_p \subset T_pP$. Z upoštevanjem *(a)* vidimo, da za vertikalne vektorje točka *(b)* pravi, da mora veljati:

$$\widetilde{\xi}(p) = g = \widetilde{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi)}(p \cdot g).$$

To pa je res. Naj bo $\eta \in \mathfrak{g}$ tak element , da velja:

$$\widetilde{\xi}(p) \cdot g = \widetilde{\eta}(p \cdot g)$$

$$\widetilde{\eta}(p \cdot g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (p \cdot g) \cdot \mathrm{Exp}(t\eta).$$

Če vzamemo $\eta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi) = g^{-1} \cdot \xi \cdot g$, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (p \cdot g) \cdot \mathrm{Exp}(t\ (g^{-1} \cdot \xi \cdot g)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (p \cdot g) \cdot g^{-1} \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi) \cdot g \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi) \cdot g \\ &= \widetilde{\xi}(p) \cdot g. \end{aligned}$$

$\square$

Opišimo sedaj ukrivljenost povezave s pomočjo naše nove definicije povezave. Spet označimo:

$$X = X_H \oplus X_{\text{Vert}} \in T_pP.$$

Definicija 24 *Ukrivljenost povezave ω na glavnem G-svežnju $\pi\colon P \to M$ je 2-forma na P z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, ki je podana s predpisom*

$$F_\omega(X,Y) = d\omega(X_H, Y_H).$$

Pri tem je:

$$d\omega = d\Big(\sum_\alpha \omega^\alpha \otimes e_\alpha\Big) \stackrel{def}{=} \sum_\alpha d\omega^\alpha \otimes e_\alpha.$$

Poglejmo, kaj je geometrijski pomen zgornje definicije. Spomnimo se, da zunanji odvod 1-forme lahko izrazimo tudi takole. Naj bosta $X, Y \in T_pP$ in $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(TP)$ poljubni vektorski polji, za kateri velja $\widetilde{X}(p) = X$, in $\widetilde{Y}(p) = Y$. Tedaj imamo:

$$d\omega_p(X,Y) = \widetilde{X}(\omega(\widetilde{Y})) - \widetilde{Y}(\omega(\widetilde{X})) - \omega([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]).$$

Očitno zgornja formula velja tudi za forme z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. Iz definicije ukrivljenosti dobimo:

$$\begin{aligned}
F_\omega(X,Y)_p &= d\omega_p(X_H, Y_H) \\
&= \Big(\widetilde{X}_H(\omega(\widetilde{Y}_H)) - \widetilde{Y}_H(\omega\widetilde{X}_H)) - \omega([\widetilde{X_H}, \widetilde{Y_H}])\Big)|_p \\
&= -\omega([\widetilde{X_H}, \widetilde{Y_H}]) \\
&= -V^{-1}\Big([\widetilde{X}_H, \widetilde{Y}_H]_{\text{Vert}}\Big)|_p.
\end{aligned}$$

Vidimo torej, da sta obe naši definiciji ukrivljenosti ekvivalentni. S tem je tudi dokazano, da je naša prva definicija ukrivljenosti dobra.

4.2 Strukturna enačba

Naj bo N gladka mnogoterost. Označimo z $\Omega^k(N, \mathfrak{g})$ vektorski prostor k-form na N z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. V prostor

$$\bigoplus_k \Omega^k(N, \mathfrak{g})$$

lahko vpeljemo strukturo stopničaste Liejeve algebre.

Definicija 25 *Imejmo $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g})$ in $\psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{g})$. Liejev oklepaj form φ in ψ je podan s predpisom:*

$$[\varphi, \psi](X_1, X_2, ..., X_{i+j}) = \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} [\varphi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(i)}),\ \psi(X_{\sigma(i+1)}, \ldots, X_{\sigma(i+j)})],$$

kjer so σ permutacije na $(i+j)$ elementih.

Po komponentah to lahko zapišemo takole. Izrazimo najprej v komponentah φ in ψ:

$$\varphi = \sum_{\alpha} \varphi^{\alpha} \otimes E_{\alpha} \qquad , \qquad \psi = \sum_{\beta} \psi^{\beta} \otimes E_{\beta}.$$

Tedaj imamo

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\alpha,\beta} (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes [E_{\alpha}, E_{\beta}] = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C^{\gamma}_{\alpha\ \beta} (\varphi^{\alpha} \wedge \varphi^{\beta}) \otimes E_{\gamma},$$

kjer so $C^{\gamma}_{\alpha\ \beta}$ strukturne konstante Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Oglejmo si to za občutek na 1-formah. Naj bosta torej φ , ψ 1-formi z vrednostmi v $\mathfrak{g}$. Imamo

$$[\varphi, \psi](X_1, X_2) = [\varphi(X_1), \psi(X_2)] - [\varphi(X_2), \psi(X_1)].$$

Po drugi strani pa:

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi](X_1, X_2) &= \Big(\sum_{\alpha,\beta} (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \oplus [E_{\alpha}, E_{\beta}]\Big)(X_1, X_2) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \Big(\varphi^{\alpha}(X_1) \cdot \psi^{\beta}(X_2) - \varphi^{\alpha}(X_2) \cdot \psi^{\beta}(X_1)\Big) \oplus [E^{\alpha}, E^{\beta}] \\
&= \sum_{\alpha,\beta} [\varphi^{\alpha}(X_1) E_{\alpha}, \psi^{\beta}(X_2) E_{\beta}] - \sum_{\alpha,\beta} [\varphi^{\alpha}(X_2) E_{\alpha}, \psi^{\beta}(X_1) E_{\beta}] \\
&= [\varphi(X_1), \psi(X_2)] - [\varphi(X_2), \psi(X_1)].
\end{aligned}$$

Opomba 4 *Če imamo φ in ψ izpisani v obliki matrik, katerih elementi so 1-forme, moramo pri računanju $[\varphi, \psi]$ paziti. Označimo s $\varphi \dot{\wedge} \psi$ množenje matrik, kombinirano z $\wedge$-produktom: Torej:*

$$[\varphi, \psi] = \varphi \dot{\wedge} \psi + \psi \dot{\wedge} \varphi.$$

Če je $\mathfrak{g}$ komutativna, mora veljati:

$$[\varphi, \psi] = 0,$$

ker za vsak X, Y velja $[\varphi(X), \psi(Y)] = 0$.

Lahko je preveriti veljavnost naslednje trditve.

Trditev 14 *Naj bodo* $\varphi \in \Omega^i(N, \mathfrak{g}), \psi \in \Omega^j(N, \mathfrak{n})$ *in* $\varrho \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ *poljubno izbrani.*

Tedaj velja

1. $[\varphi, \psi] = (-1)^{i \cdot j}[\psi, \varphi]$.
2. $(-1)^{ik}[[\varphi, \psi], \varrho] + (-1)^{kj}[[\varrho, \varphi], \psi] + (-1)^{ji}[[\psi, \varrho], \varphi] = 0$.

Vektorski prostor, v katerem je definirana operacija $[-,-]$ z zgornjima lastnostma, se imenuje stopničasta Liejeva algebra. V stopničasti Liejevi algebri lahko zvezo med povezavo in njeno ukrivljenostjo izrazimo takole:

Izrek 7 *Naj bo* $\pi\colon P \to M$ *glavni sveženj in* $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ *povezava na* P*. Tedaj velja*

$$F_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{13}$$

Zgornji izraz se imenuje Cartanova strukturna enačba.

Dokaz: Najprej dokažimo tale pomožni rezultat. Naj bo vektorsko polje $\widetilde{X} \in \Gamma(M)$ horizontalni dvig polja $X \in \Gamma(M)$. Naj bo $\widetilde{\xi} \in \Gamma(P)$ infinitezimalno delovanje $\xi \in \mathfrak{g}$ na P. Tedaj velja:

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{X}] = 0.$$

Res: Ker je $\widetilde{X}$ horizontalni dvig polja X v bazi, velja

$$\widetilde{X}(p \cdot g) = \widetilde{X}(p) \cdot g, \qquad \textit{za vsak } g \in G.$$

Velja tudi

$$\widetilde{\xi}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Big(p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi)\Big).$$

Označimo integralsko krivuljo polja $\widetilde{\xi}$ s

$$\varphi_p(t) = p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi).$$

Imamo torej

$$\begin{aligned} [\widetilde{\xi}, \widetilde{X}] = \mathcal{L}_{\widetilde{\xi}}(\widetilde{X}) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_p\Phi_t^\xi)^{-1}(\widetilde{X}(\varphi_t(p))) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(D_{p\cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi)}\Phi_{-t}^\xi)(\widetilde{X}(p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \widetilde{X}(p) = 0. \end{aligned}$$

Zgoraj smo upoštevali:

$$\Phi_t^\xi(p) = p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi), \qquad \Phi_{-t}^\xi(p \cdot \mathrm{Exp}(t\ \xi)) = p,$$

in dejstvo, da je polje $\widetilde{X}$ invariantrno na desne translacije.

Posvetimo se zdaj dokazu Cartanove enačbe. Velja

$$\frac{1}{2}[\omega,\omega](Y,Z) = \frac{1}{2}([\omega(Y),\omega(Z)] - [\omega(Z),\omega(Y)]) = [\omega(Y),\omega(Z)].$$

Dokazati moramo torej enačbo:

$$d\omega(Y_H, Z_H) = d\omega(Y,Z) + [\omega(Y),\omega(Z)]. \tag{14}$$

Zaradi linearnosti lahko posebej obravnavamo primere, ko sta oba vektorja horizontalna, ko sta oba vertikalna in ko je eden horizontalen, drugi pa vertikalen.

(a) Vektorja Y in Z sta oba horizontalna:

Tedaj: $\omega(Y) = \omega(Z) = 0$. Pa tudi $Y_H = Y$ in $Z_H = Z$. Torej je enačba (14) v tem primeru izpolnjena.

(b) Vektorja Y in Z sta oba vertikalna:

Leva stran (14) je tedaj enaka 0. Naj bo $Y = \widetilde{\xi}(p)$ in $Z = \widetilde{\eta}(p)$ za primerna $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Tedaj

$$d\omega(Y,Z) = \widetilde{\xi}(\omega(\widetilde{\eta})) - \widetilde{\eta}(\omega(\widetilde{\xi})) - \omega([\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}]).$$

Po definiciji povezave imamo

$$\omega(\widetilde{\eta}) = \eta, \qquad \omega(\widetilde{\xi}) = \xi,$$

zato

$$d\omega(Y,Z) = -\omega([\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}]).$$

Dokazali pa smo tudi

$$[\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}] = \widetilde{[\xi,\eta]},$$

zato

$$d\omega(Y,Z) = -[\xi,\eta].$$

Po drugi strani pa velja

$$[\omega(Y),\omega(Z)] = [\omega(\widetilde{\xi}),\omega(\widetilde{\eta})] = [\xi,\eta].$$

Torej je tudi desna stran enačbe (14) enaka 0.

(c) Vektor Y je vertikalen, vektor Z pa horizontalen.

Leva stran (14) je spet enaka 0, ker $Y_H = 0$. Naj bo $\widetilde{\xi}$ tako infinitezimalno delovanje, da velja $\widetilde{\xi}(p) = Y$ in $\widetilde{Z}$ horizontalno G-invariantno polje, za katero velja $\widetilde{Z}(p) = Z$. Tedaj imamo

$$d\omega(Y, Z) = d\omega(\widetilde{\xi}, \widetilde{Z}) = \widetilde{\xi}(\omega(\widetilde{Z})) - \widetilde{Z}(\omega(\widetilde{\xi})) - \omega([\widetilde{\xi}, \widetilde{Z}]) = -\omega(0) = 0.$$

Zgoraj smo upoštevali $\omega(\widetilde{Z}) = 0$, ker je $\widetilde{Z}$ horizontalno polje in $\omega(\widetilde{\xi}) \equiv \xi$. Dokazali pa smo tudi

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{Z}] = 0.$$

Zadnji člen na desni strani (14) pa je tudi enak 0,

$$[\omega(Y), \omega(Z)] = 0,$$

saj $\omega(Z) = 0$ zaradi horizontalnosti Z. Torej sta spet obe strani enačbe (14) enaki 0.

$\square$

4.3 Lokalna izrazitev povezave

Naj bo $\pi: P \to M$ glavni G-sveženj in $U \subset M$ odprta okolica, tako da je P/U trivializabilen. Naj bo

$$\tau_U : P/U \longrightarrow U \times G$$

lokalna trivializacija. Trivializacija τ_U na kanoničen način določa lokalni prerez

$$\sigma : U \longrightarrow P/U$$

s predpisom

$$\sigma(m) = \tau_U^{-1}(m, e).$$

Velja tudi obratno. Vsak lokalni prerez σ na kanoničen način določa lokalno trivializacijo τ_U s predpisom

$$\widetilde{\tau}_U(p) = \widetilde{\tau}_U\Big(\sigma(\pi(p) \cdot g)\Big) = (\pi(p), g),$$

saj obstaja natanko en $g \in G$, tako da velja $\sigma(\pi(p)) \cdot g = p$.

Posledica 1 *Če ima glavni sveženj globalni (zvezen) prerez, je ta sveženj trivialen.*

$\square$

Imejmo sedaj dve trivializaciji:

$$\tau_\alpha : P/U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G, \qquad \tau_\beta : P/U_\beta \longrightarrow U_\beta \times G.$$

Naj bo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Primerjajmo $\tau_\alpha(p)$ in $\tau_\beta(p)$. Imamo

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : p = \sigma_\alpha(m) \cdot g \quad &\longmapsto \quad (m, g) \\ \tau_\beta : p = \sigma_\beta(m) \cdot h \quad &\longmapsto \quad (m, h). \end{aligned} \tag{15}$$

Tedaj obstajata ekvivariantni preslikavi

$$s_\alpha : P_{/U_\alpha} \longrightarrow G, \qquad s_\beta : P_{/U_\beta} \longrightarrow G,$$

za kateri velja

$$\tau_\alpha(p) = (m, s_\alpha(p)), \qquad \tau_\beta(p) = (m, s_\beta(p)).$$

Iz definicije

$$\sigma_\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}(m, e)$$

vidimo, da za α velja

$$s_\alpha(\sigma_\alpha(m)) \equiv e. \tag{16}$$

Spomnimo se prehodne preslikave

$$g_{\alpha\beta}(m) = s_\beta(p) \cdot s_\alpha^{-1}(p). \tag{17}$$

Ekvivariantnost preslikave s_α in enačba (16) dasta

$$s_\alpha(\sigma_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}(m)) \equiv g_{\alpha\beta}^{-1}(m),$$

oziroma

$$g_{\alpha\beta}(m) \cdot s_\alpha\Big(\sigma_\alpha(m) g_{\alpha\beta}^{-1}(m)\Big) \equiv e$$

in končno iz (17) ter iz (16)

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}(m) \qquad \textit{za vsak } m \in U_\alpha \cap U_\beta. \tag{18}$$

Vrnimo se k povezavam in kovariantnim odvodom. Naj bo ω povezava na glavnem svežnju $\pi\colon P \to M$. Naj bo $\tau_U\colon P/U \to U \times G$ lokalna trivializacija in $\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to P/U_\alpha$ ustrezni prerez ($\sigma_\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}(m, e)$). Tedaj lahko 1-formo ω s P/U_α potegnemo (naredimo pull-back) s prerezom σ_α na U_α. Dobimo 1-formo na U_α z vrednostmi v $\mathfrak{g}$

$$\omega_\alpha = (\sigma_\alpha)^*(\omega).$$

Za vsak $m \in U_\alpha$ in vsak $X_m \in T_m U_\alpha$ imamo

$$\omega_\alpha(X_m) = \omega_{\sigma_\alpha(m)}\Big(D_m \sigma_\alpha(X_m)\Big).$$

Trditev 15 *Naj bosta τ_α in τ_β lokalni trivializaciji (umeritvi) na P in $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$ prehodna preslikava. Naj bosta ω_α in ω_β lokalni izrazitvi povezave ω na P v teh umeritvah. Tedaj velja*

$$\omega_\beta = -dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha).$$

Natančneje zapisano to pomeni naslednje. Za vsak $X_m \in T_mM$ imamo

$$\omega_\beta(X_m) = -(D_{g_{\alpha\beta}(m)} R^{-1}_{g_{\alpha\beta}(m)})(D_m g_{\alpha\beta}(X_m)) + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}(m)}(\omega_\alpha(X_m)).$$

Dokaz: Naj bo $X_m \in T_mM$ tangentni vektor na M in $D_m\sigma_\beta(X_m) \in T_{\sigma_\beta(m)}P$ njegova slika na P. Oglejmo si

$$\omega_\beta(X_m) = \omega(D_m\sigma_\beta(X_m)).$$

Zaradi lažjega pisanja v nadaljevanju označimo

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Torej imamo:

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha \cdot h_{\alpha\beta}.$$

Torej

$$\omega_\beta(X_m) = \omega\Big(D_m(\sigma_\alpha \cdot h_{\alpha\beta})(X_m)).$$

Naj bo $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ krivulja, za katero velja $\gamma(0) = m$ in $\dot\gamma(0) = X_m$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}
\Big(D_m(\sigma_\alpha \cdot h_{\alpha\beta}) \quad \Big) \quad (X_m) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot h_{\alpha\beta}(\gamma(t)) \\
&= (D_m\sigma_\alpha)(X_m) \cdot h_{\alpha\beta}(m) + \frac{d}{dt}|_{t=0} \Big(\sigma_\alpha(m) \cdot h_{\alpha\beta}(m) \cdot h_{\alpha\beta}^{-1}(m) h_{\alpha\beta}(\gamma(t)\Big) \\
&= (D_m\sigma_\alpha)(X_m) \cdot h_{\alpha\beta}(m) + \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \sigma_\beta(m) \cdot (h_{\alpha\beta}^{-1}(m) h_{\alpha\beta}(\gamma(t))) \\
&= (D_m\sigma_\alpha)(X_m) \cdot h_{\alpha\beta}(m) + \Big(\widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1}(m) D_m h_{\alpha\beta}(X_m)}\Big)(\sigma_\beta(m)).
\end{aligned}$$

Zadnji člen v zadnji vrstici je vrednost infinitezimalnega delovanja $(\widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1}(m) D_m h_{\alpha\beta}}(X_m))$, porojenega z elementom $h_{\alpha\beta}^{-1}(m) D_m h_{\alpha\beta}(X_m) \in \mathfrak{g}$, izračunana v točki $\sigma_\beta(m)$ svežnja P. Torej imamo

$$\begin{aligned}
\omega(D_m(\sigma_\alpha \cdot h_{\alpha\beta})(X_m)) &= \omega(D_m\sigma_\alpha(X_m) \cdot h_{\alpha\beta}(m)) + \omega\Big[\Big(\widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1} D_m h_{\alpha\beta}}(X_m)\Big)(\sigma_\beta(m))\Big] \\
&= \mathrm{Ad}_{h_{\alpha\beta}^{-1}(m)} \omega(D_m\sigma_\alpha(X_m) + g_{\alpha\beta}^{-1}(m) D_m h_{\alpha\beta}(X_m) \\
&= \mathrm{Ad}_{h_{\alpha\beta}^{-1}(m)} \omega_\alpha(X_m) + h_{\alpha\beta}^{-1}(m) D_m h_{\alpha\beta}(X_m).
\end{aligned}$$

Res velja

$$\omega_\beta = h_{\alpha\beta}^{-1} dh_{\alpha\beta} + \mathrm{Ad}_{h_{\alpha\beta}}^{-1}(\omega_\alpha).$$

Če v zgornjo formulo vstavimo $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1}$, res dobimo

$$\omega_\beta = -dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha).$$

Pri tem smo upoštevali, formulo

$$dg^{-1} = -g^{-1} \cdot dg \cdot g^{-1},$$

ki velja za vsako funkcijo $g\colon M \to G$ z vrednostmi v Liejevi grupi G. $\square$

Naj bo $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ družina trivializacij glavnega svežnja $\pi\colon P \to M$, prirejena pokritju $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ mnogoterosti M. Naj bo $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ družina 1-form na U_α z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, za katero velja: Če je $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, tedaj

$$\omega_\beta = -dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha), \tag{19}$$

kjer je $g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$ prehodna preslikava iz trivializacije τ_α v τ_β.

Izrek 8 *Družina $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in A}$ z lastnostjo (19) določa skupaj z družino trivializacij $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ povezavo ω na enoličen način. Za to povezavo velja:*

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(\omega)$$

za vsak $\alpha \in A$.

Skica dokaza: Najprej definirajmo $\omega^\alpha \in \Omega^1(P/U_\alpha, \mathfrak{g})$ takole: Naj bo $\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to P$ prerez, ki pripada trivializaciji τ_α. Velja zveza $\sigma_\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}((m, e))$. Graf prereza σ_α je v vsakem m transverzalen na vlakno $\pi^{-1}(m)$. Naj bo $X \in T_{\sigma_\alpha(m)}P$ poljuben tangentni vektor. Obstaja natanko en par vektorjev $X_m \in T_m U_\alpha = T_m M$ in $X_{\mathrm{Vert}} \in T_{\sigma(m)}\pi^{-1}(m) \subset T_{\sigma(m)}P$, za katerega velja

$$X = X_{\mathrm{Vert}} + D_m\sigma(X_m).$$

Nota bene: Zgornji razcep *ni* razcep tipa $X_{\mathrm{Vert}} + X_H$! Naj bo sedaj $\xi \in \mathfrak{g}$ tak, da je $\widetilde{\xi}(\sigma(m)) = X_{\mathrm{Vert}}$. Definirajmo:

$$\omega^\alpha(X) = \xi + \omega_\alpha(X_m).$$

Naj bo $p \in P/U_\alpha$ poljubna točka in $Y \in T_pP$ poljuben tangentni vektor. Tedaj je

$$p = \sigma(m) \cdot g \qquad \textit{za neki par } m \in U_\alpha \textit{ in } \mathfrak{g} \in G$$

in

$$Y = X \cdot g \qquad za\ neki\ X \in T_{\sigma(m)}P.$$

Definiramo:

$$\omega^\alpha(Y) = \omega^\alpha(X \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega^\alpha(X)).$$

Sedaj je treba le še preveriti, da se tako definirane forme $\omega^\alpha \in \Omega^1(P/U_\alpha;\mathfrak{g})$ zlepijo v gladko 1-formo ω na $\Omega^1(P;\mathfrak{g})$. To pa seveda sledi iz lastnosti (19). Bralec naj račun opravi sam.

$\square$

4.4 Lokalna izrazitev ukrivljenosti

Spomnimo se: Ukrivljenost F povezave ω je 2-forma na P z vrednostmi v $\mathfrak{g}$, podana s predpisom

$$F(X,Y) = d\omega(X_H, Y_H).$$

Videli smo tudi, da zanjo velja Cartanova strukturna formula

$$F = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega].$$

Dokažimo najprej še eno nelokalno lastnost ukrivljenosti. Označimo z R_g preslikavo:

$$\begin{aligned} R_g : P &\longrightarrow P \\ p &\longmapsto R_g(p) = p \cdot g. \end{aligned}$$

Trditev 16 *Za ukrivljenost velja ekvivariantnostna lastnost*

$$R_g^*(F) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(F),$$

oziroma napisano jasneje

$$R_g^*(F)(X,Y) = F(X \cdot g, Y \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(F(X,Y)).$$

Dokaz: Dokazujemo s pomočjo strukturne enačbe:

$$\begin{aligned} R_g^*(F) &= R_g^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]) \\ &= d(R_g^*\omega) + \frac{1}{2}[R_g^*\omega), R_g^*\omega)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega) + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega), \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega)] \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(F).
\end{aligned}
$$

□

Opomba 5 *Na tem mestu omenimo tole: Če je $\mathfrak{g}$ matrična Liejeva algebra (oz. tako upodobljena) in tedaj velja $[\xi, \eta] = \xi \cdot \eta - \eta \cdot \xi$, se operacija $[\alpha, \beta]$ med formami z vrednostmi v $\mathfrak{g}$ izraža z matričnim množenjem takole:*

Označimo z $\alpha \wedge \beta$ produkt matrik, katerih elementi so forme. Element na (i, j)-tem mestu produkta bo "skalarni produkt" i-te vrstice in j-tega stolpca, le da množenje v $\mathbb{R}, (\mathbb{C})$ nadomestimo z vnanjim produktom. Velja:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta - (-1)^{deg(\alpha) \cdot deg(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

Bralec naj se o veljavnosti zgornje formule prepriča sam.

V teh oznakah torej lahko pišemo

$$F = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Posvetimo se zdaj lokalni izrazitvi ukrivljenosti. Naj bo $\tau_\alpha \colon P/U_\alpha \to U_\alpha \times G$ trivializacija. Definirajmo:

$$F_\alpha = \sigma_\alpha^*(F).$$

Natančneje,

$$F_\alpha(X_m, Y_m) = F\Big(D_m\sigma_\alpha(X_m), D_m\sigma_\alpha(Y_m)\Big).$$

Lahko je videti

$$F_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha],$$

ali v matričnem primeru

$$F_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha.$$

Primerjajmo sedaj F_α in F_β pri $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$.

Trditev 17 *Naj bo $g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G$ prehodna preslikava med umeritvama τ_α in τ_β. Tedaj velja*

$$F_\beta = \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(F_\alpha).$$

Dokaz: Spomnimo se:

$$\sigma_\beta(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}(m) = h_{\alpha\beta}(m).$$

Torej dobimo

$$\begin{aligned}
F_\beta(X_m, Y_m) &= F\Big((D_m\sigma_\beta)(X_m),\ (D_m\sigma_\beta)(Y_m)\Big) \\
&= F\Big((D_m(\sigma_\alpha h_{\alpha\beta})(X_m),\ D_m(\sigma_\alpha h_{\alpha\beta})(Y_m)\Big) \\
\textit{po Leibnitz. prav.} \quad &= F\Big(D_m\sigma_\alpha(X_m) \cdot h_{\alpha\beta} + \widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1} dh_{\alpha\beta}},\ D_m\sigma_\alpha(Y_m) \cdot h_{\alpha\beta} + \widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1} dh_{\alpha\beta}}\Big) \\
\textit{ker } F(X, \mathrm{Vert}) = 0 \quad &= F\Big(D_m(\sigma_\alpha(X_m) \cdot h_{\alpha\beta}),\ (D_m(\sigma_\alpha(Y_m) \cdot h_{\alpha\beta}\Big) \\
&= \mathrm{Ad}_{h_{\alpha\beta}^{-1}}\Big(F(D_m\sigma_\alpha(X_m),\ (D_m\sigma_\alpha(Y_m))\Big) \\
&= \mathrm{Ad}_{h_{\alpha\beta}^{-1}}\Big(F_\alpha(X_m, Y_m)\Big).
\end{aligned}$$

V tretji vrstici zgornjega računa pomeni oznaka $\widetilde{h_{\alpha\beta}^{-1} dh_{\alpha\beta}}$ infinitezimalno delovanje elementa $h_{\alpha\beta}(m)^{-1} \cdot D_m h_{\alpha\beta}(X_m)$, izračunano v točki $\sigma_\beta(m) \in P$.

$\square$

5 Povezave na vektorskih svežnjih

Najpomembnejši svežnj v geometriji je seveda tangentni sveženj. Smiselno je pričakovati, da bo intuitivni pojem ukrivljenosti podan z objekti, ki so definirani prav na tangentnem svežnju. Tangentni sveženj pa je najznačilnejši primer vektorskega svežnja. V tem poglavju bomo prenesli definicijo povezave in ukrivljenosti z glavnega na vektorski sveženj. Najprej moramo zato vzpostaviti zvezo med glavnimi in vektorskimi svežnji.

5.1 Pridruženi vektorski svežnji

Omenili smo že, da imajo glavni svežnji posebno vlogo med svežnji. Na to konec koncev kaže že njihovo ime. Glavnemu svežnju lahko pridružujemo nove svežnje, ki imajo drugačna vlakna, podani pa so z istim kociklom kot glavni sveženj, s katerim smo začeli. Da pa bi tako konstrukcijo lahko izpeljali, moramo imeti nekakšno zvezo med Liejevo grupo G, ki je vlakno našega začetnega glavnega svežnja, in novim vlaknom F.

Naj bo torej F neka gladka mnogoterost in naj Liejeva grupa G deluje z leve na F. Imamo torej homomorfizem

$$\varrho : G \longrightarrow Aut(F) = Diff(F).$$

Pišemo

$$\varrho(g) \cdot f = g \cdot f, \qquad za\ f \in F.$$

Tedaj lahko vsakemu G-svežnju $\pi\colon P \to M$ priredimo sveženj $\pi_F\colon \mathcal{F} \to M$ z vlaknom F takole. Totalni prostor $\mathcal{F}$ novega svežnja je kvocient

$$\mathcal{F} = (P \times F)/\sim,$$

kjer je ekvivalenčna relacija $\sim$ podana s pravilom

$$(p_1, f_1) \sim (p_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad obstaja\ g \in G,\ tako\ da\ je\ (p_1, f_1) = (p_2 \cdot g^{-1}, g \cdot f_2).$$

Torej

$$\mathcal{F} = \{[p, f]; p \in P, f \in F\}, \qquad [p, f] = \{(p \cdot g^{-1}, g \cdot f); g \in G\}.$$

Pišemo:

$$\mathcal{F} = P \times_G F.$$

Bodimo sedaj bolj konkretni. Naj bo $F = V$ končno razsežen realni ali kompleksen vektorski prostor in naj G deluje na V. Torej, imamo upodobitev G na V. Glavnemu svežnju $\pi\colon P \to M$ pridruženi sveženj z vlaknom V je vektorski sveženj

$$E = P \times_G V.$$

Projekcijo $\pi_E\colon E \to M$ definiramo s predpisom

$$\pi_E([p, v]) = \pi(p) \in M.$$

Vlakno $\pi_E^{-1}(m)$ je res natanko V.

$$\begin{aligned}\pi_E^{-1}(m) &= \{[p, v]; \pi(p) = m, v \in V\}\\ &= \{[p_0, w]; \pi(p_0) = m, w \in V\}.\end{aligned}$$

Dobljeni sveženj

$$\pi_E : E \xrightarrow{V} M$$

opremimo z lokalnimi trivializacijami takole. Trivializacija glavnega svežnja

$$\begin{aligned}\tau_\alpha : P/U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times G\\ p &\longmapsto (\pi(p), s_\alpha(p)) = (m, s_\alpha(p))\end{aligned}$$

inducira trivializacijo pridruženega vektorskega svežnja

$$T_\alpha : E/U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times V$$

takole:

$$\begin{aligned}T_\alpha([p, v]) &= \widetilde{T}_\alpha([(m, s_\alpha(p)), v])\\ \textit{po definiciji } P \times_G V &= \widetilde{T}_\alpha([(m, e), s_\alpha(p) \cdot v])\\ &= (m, s_\alpha(p) \cdot v).\end{aligned}$$

Skratka

$$T_\alpha([p, v]) = (m, s_\alpha(p) \cdot v).$$

Od tod vidimo

$$T_\beta^{-1}(m, v) = [p, s_\beta^{-1}(p) \cdot v],$$

kjer je $p = \tau_\beta^{-1}(m, e))$. Kompozitum ene trivializacije in inverza druge je prehodna preslikava

$$G_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \subset \mathrm{Aut}(V)$$

pridruženega vektorskega svežnja $\pi_E\colon E \to M$ in je torej podana s predpisom

$$\begin{aligned}(G_{\alpha\beta}(m))(v) = (T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(m,v) &= (m,\ s_\beta(p)\cdot s_\alpha^{-1}(p)\cdot v) \\ &= (m,\ g_{\alpha\beta}(m)\cdot v).\end{aligned}$$

Zgoraj smo uporabili zvezo

$$g_{\alpha\beta} = s_\beta(p)\cdot s_\alpha^{-1}(p),$$

ki velja v glavnem svežnju.

Dokazali smo izrek

Izrek 9 *Naj bo glavni sveženj $\pi_G\colon P \to M$ podan s kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$. Tedaj je pridruženi vektorski sveženj $\pi_E\colon E \to M$ podan s kociklom $\{G_{\alpha\beta}\}$, kjer je*

$$G_{\alpha\beta}(m) = \varrho(g_{\alpha\beta}),$$

$\varrho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ pa je upodobitev grupe G uporabljena pri konstrukciji pridruženega svežnja E.

$\square$

5.2 Povezave na vektorskem svežnju

Spomnimo se naše motivacije iz uvoda. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ je jasno, kaj je vzporedni premik vektorja vzdolž neke krivulje. Kaj pa naj bi bil vzporedni premik (tangentnega) vektorja vzdolž neke krivulje na poljubni mnogoterosti?

Naj bo najprej naša mnogoterost $M = \mathbb{R}^n$ in naj bo $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gladka krivulja v M. Izberimo vektor $V_a \in T_{\gamma(a)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Vektorsko polje V v $\mathbb{R}^n$ lahko podamo kar s preslikavo

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Vektorsko polje, ki je definirano vzdolž krivulje γ, je torej podano s preslikavo

$$\begin{aligned} V_\gamma : [a,b] &\longrightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \Big(\gamma(t), V(\gamma(t))\Big) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Definicija vzporednosti, ki se ujema z našo intuicijo, je tale:

Definicija 26 *Polje V, definirano vzdolž krivulje γ v $\mathbb{R}^n$, je vzporedno (ali paralelno), če velja*

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t)) \equiv 0.$$

Za zgornji smerni odvod velja

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t)) = \langle D_{\gamma(t)}V,\ \dot{\gamma}(t)\rangle \equiv 0.$$

Ker $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, mora torej veljati $D_{\gamma(t)}V = 0$. Če nas zanima polje, definirano na vsem $\mathbb{R}^n$, ki bo paralelno vzdolž vsake krivulje, bo seveda zanj moralo veljati $DV = 0$. Torej, polje V na $\mathbb{R}^n$ je paralelno natanko tedaj, ko je konstantno.

Ali lahko ta premislek prenesemo na poljubno mnogoterost M? Kako je s pojmom konstantnosti na M? Posplošimo nekoliko našo situacijo in nadomestimo tangentni sveženj TM s poljubnim vektorskim svežnjem $\pi\colon E \to M$. Ker je vektorsko polje *prerez* tangentnega svežnja, nas bo zanimalo, kdaj je paralelen *prerez* poljubnega vektorskega svežnja $\pi\colon E \to M$. Mnogoterost M in sveženj sta podana z zbirko lokalnih podatkov, ki so na pravi način zlepljeni skupaj. Mnogoterost M je podana z atlasom $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\}$, sveženj pa s kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$ prehodnih preslikav

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G,$$

prirejenim atlasu $\mathcal{U}$. (Predpostavili smo, da so odprte množice U_α kontraktibilne.)

Imejmo sedaj prerez $: M \to E$ vektorskega svežnja E. Naj bo $\tau_\alpha\colon P/U_\alpha \to U_\alpha \times V$ lokalna trivializacija svežnja E. V tej trivializaciji se prerez V izraža kot vektorska funkcija

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_\alpha : U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times V \\ m &\longmapsto (m, V_\alpha(m)). \end{aligned}$$

Smiselno je pričakovati, da bo paralelno vektorsko polje V tako, da bo veljalo

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(\gamma(t)) = \langle D_{\gamma(t)}V_\alpha,\ \dot{\gamma}(t)\rangle = 0,$$

po analogiji s pojmom paralelnosti polja na $\mathbb{R}^n$. Če to zahtevo po paralelnosti razširimo na okolico krivulje γ, vidimo, da mora veljati

$$DV_\alpha = 0. \tag{20}$$

Toda, kako je z zgornjim pogojem, če se preselimo v drugo trivializacijo istega dela svežnja E? Naj bo torej $U_\alpha \cap U_\beta \neq \{0\}$ in $\tau_\beta \colon E/U_\beta \to U_\beta \times V$ druga trivializacija svežnja, preslikava

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_\beta : U_\beta &\longrightarrow U_\beta \times V \\ m &\longmapsto (m, V_\beta(m)) \end{aligned}$$

pa ustrezna lokalna izrazitev prereza V. Prehodna preslikava med umeritvama α in β je

$$g_{\alpha\beta} : U\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G.$$

Zveza med preslikavama V_α in V_β je tedaj

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot V_\beta.$$

Eksplicitno, v koordinatah, se ta zveza glasi

$$\begin{pmatrix} V_1^\alpha \\ \vdots \\ V_k^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^{\alpha\beta} & \dots & g_{1n}^{\alpha\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1}^{\alpha\beta} & \dots & g_{nn}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^\beta \\ \vdots \\ V_n^\beta \end{pmatrix}.$$

Paralelnost sedaj zahteva

$$DV_\beta = 0.$$

Toda, če ta pogoj primerjamo s pogojem (20), dobimo

$$DV_\alpha = D(g_{\alpha\beta} \cdot V_\beta)$$

in z upoštevanjem Leibnitzevega pravila

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}^{-1} D(g_{\alpha\beta} \cdot V_\beta) &= (g_{\alpha\beta}^{-1}) \cdot V_\beta + DV_\beta \\ &= (D + g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta})V_\beta. \end{aligned}$$

Torej, če se odvod v trivializaciji α izraža z operatorjem D, se v trivializaciji β isti odvod izraža z operatorjem $D + g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta}$. Na splošni mnogoterosti M torej ni kanoničnega operatorja odvoda, ki bi deloval na prerezih vektorskih svežnjev. Konkretno, med drugim ni kanoničnega operatorja odvoda, ki bi deloval na vektorskih poljih.

Vseeno si oglejmo nekoliko podrobneje lokalno definiran operator

$$D + g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta},$$

ki deluje na prerezih vektorskega svežnja E. Če hočemo kot rezultat spet dobiti prerez istega svežnja, moramo objekt

$$(D + g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta})V_\alpha \tag{21}$$

v vsaki točki $m \in M$ evaluirati na nekem tangentnem vektorju X_m. Objekt (21) je torej 1-forma na M z vrednostmi v E. Drugi sumand v (21) je treba namreč razumeti takole: Preslikava

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap \beta \longrightarrow \varrho(G) = Aut(V)$$

priredi vsaki točki $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ s pomočjo reprezentacije ϱ grupe G na V neki avtomorfizem vektorskega prostora V. Odvod te preslikave je preslikava

$$D_m g_{\alpha\beta} : T_m(U_\alpha \cap U_\beta) = T_m M \longrightarrow T_{g_{\alpha\beta}} Aut(V) = End(V),$$

na $End(V)$ pa $Aut(V)$ deluje (npr. z desne) in tako dobimo

$$\Big((g_{\alpha\beta}^{-1} Dg_{\alpha\beta})V_\alpha\Big)(X_m) = \Big(g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot D_m g_{\alpha\beta}(X_m)\Big)(V_\alpha). \tag{22}$$

Za vsak $m \in M$ je torej zgornji objekt element vlakna $E_m = \pi^{-1}(m)$ svežnja E. Skratka, (22) je spet (lokalni!) prerez svežnja $\pi\colon E \to M$.

Če želimo torej smiselno definirati konstantnost oz. paralelnost prerezov svežnja E, moramo (približno rečeno) na pravilen način zlepiti skupaj lokalne operatorje oblike

$$D + g_{\alpha\beta}^{-1} Dg_{\alpha\beta}$$

v globalni objekt. V ta namen bomo najprej definirali diferencialne forme z vrednostmi v vektorskih svežnjih.

Definicija 27 *Naj bo $\pi\colon E \to M$ vektorski sveženj. Diferencialna k-forma z vrednostmi v E je prerez svežnja $\pi_t\colon E \otimes \Lambda^k T^* M \to M$. Prostor k-form označujemo z $\Omega^k(E)$.*

Naj bo $\varphi \in \Omega^k(E)$ poljubna k-forma z vrednostmi v E. Tedaj je za vsak nabor gladkih vektorskih polj $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_p) \in \Omega^0(E),$$

torej prerez svežnja E. Na prostoru $\Omega^0(E)$ bomo sedaj definirali diferencialni operator, ki bo ustrezal zahtevam, ki smo jih v grobem navedli zgoraj.

Definicija 28 *Kovariantni odvod na svežnju E je linearna preslikava*

$$\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E),$$

ki ustreza Leibnitzevemu pravilu

$$\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla(s). \tag{23}$$

Splošneje, diferencialni operator

$$\nabla : \Omega^k(E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(E)$$

je kovariantni odvod, če pri $k = 0$ velja (23) in poleg tega velja še

$$\nabla(\omega \wedge \theta) = \nabla(\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge \nabla(\theta)$$

za $\omega \in \Omega^k(E)$.

5.3 Lokalna izrazitev kovariantnega odvoda

Imejmo spet vektorski sveženj $\pi: E \to M$ z vlaknom V. Naj bo

$$T_\alpha: E/U_\alpha \to U_\alpha \times V$$

lokalna trivializacija tega svežnja, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ pa neka baza vektorskega prostora V. Definirajmo lokalne prereze

$$\sigma_i : U_\alpha \longrightarrow E/U_\alpha$$

za $i = 1, \ldots, k$ takole:

$$\sigma_i(m) = T_\alpha^{-1}(m, e_i).$$

Družina prerezov $\{\sigma_i, \ldots, \sigma_k\}$ se imenuje lokalno ogrodje ali tudi lokalna umeritev svežnja E. *(Local frame or local gauge).* Za vsak $m \in U_\alpha$ je $\{\sigma_i(m)\}$ baza vlakna E_m. Torej lahko vsak prerez

$$s : U_\alpha \longrightarrow E/U_\alpha$$

zapišemo v obliki

$$s(m) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m) \cdot \sigma_i(m),$$

kjer so $f: U_\alpha \to \mathbb{R}$ *ali* $\mathbb{C}$ funkcije. Pravimo, da smo s razvili po ogrodju ali po bazi $\{\sigma_i\}$. (Koeficienti tega razvoja so seveda funkcije in ne skalarji, saj so prostori prerezov - tako, kot so funkcijski prostori pač običajno - neskončno dimenzionalni vektorski prostori. Za vsak i je

$$\nabla(\sigma_i) \in \Omega^1(E)$$

1-forma na M z vrednostmi v svežnju E. Uporaba ogrodja σ_i nam da

$$\nabla(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes \sigma_j,$$

kjer so $\omega_{ji} \in \Omega^1(U_\alpha)$ primerno izbrane 1-forme na U_α. Te forme lahko zložimo v matriko ω_α:

$$\omega_\alpha = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \dots & \omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

Oglejmo si sedaj, kaj kovariantni odvod ∇ naredi s poljubnim lokalnim prerezom $s\colon U_\alpha \to E/U_\alpha$.

$$\begin{aligned} \nabla(s) &= \nabla\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \sigma_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(df_i \otimes \sigma_i) + \sum_{i=1}^{n}(f_i \nabla(\sigma_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} df_i \otimes \sigma_i + \sum_{i=1}^{n} f_i(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \otimes \sigma_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\Big(df_i + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \cdot f_j\Big) \otimes \sigma_i. \end{aligned}$$

Zapišimo zgornje bolj grafično. Elementi ogrodja σ_i so (glede na trivializacijo, ki jo določajo) konstantni prerezi oblike

$$\sigma_i(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; i - to\ mesto.$$

Torej

$$s(m) = \begin{pmatrix} f_1(m) \\ f_2(m) \\ \vdots \\ f_n(m) \end{pmatrix}.$$

In nazadnje

$$\nabla(s) = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \dots & \omega_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_{n1} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Kaj se zgodi pri prehodu v drugo trivializacijo? Naj bo

$$g_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \subset Aut(V)$$

prehodna preslikava vektorskega svežnja E. Denimo, da ima kovariantni odvod

$$\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$$

v trivializaciji T_α izrazitev

$$\nabla_\alpha = d + \omega^\alpha$$

in v T_β

$$\nabla_\beta = d + \omega^\beta.$$

Naj bosta s_α, s_β izrazitvi prereza s v T_α oziroma T_β. Za lokalni izrazitvi prereza s velja

$$s_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} s_\alpha,$$

oziroma bolj eksplicitno

$$\begin{pmatrix} s_\beta^1 \\ s_\beta^2 \\ \vdots \\ s_\beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}^{11} & \dots & g_{\alpha\beta}^{1n} \\ g_{\alpha\beta}^{21} & \dots & g_{\alpha\beta}^{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{\alpha\beta}^{n1} & \dots & g_{\alpha\beta}^{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} s_\alpha^1 \\ s_\alpha^2 \\ \vdots \\ s_\alpha^n \end{pmatrix}.$$

Torej:

$$\begin{aligned} (d + \omega^\beta)(s_\beta) &= g_{\alpha\beta}((d + \omega^\alpha)(g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot s_\alpha)) \\ &= g_{\alpha\beta}(-g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \cdot s_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1} ds_\alpha + \omega^\alpha g_{\alpha\beta}^{-1} s_\alpha \\ &= \Big(-dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + d + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}} \omega^\alpha\Big)(s_\alpha) \\ &= \Big(d + (-dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}} \omega^\alpha)\Big)(s_\alpha). \end{aligned}$$

Povzemimo: Zveza med lokalnima izrazitvama kovariantnega odvoda je

$$\omega^\beta = -dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega^\alpha).$$

5.4 Ukrivljenost

Kovariantni odvod, ki smo ga definirali zgoraj, se razlikuje od običajnega diferenciala oziroma vnanjega odvoda, ki je definiran na funkcijah in na diferencialnih formah. Morda najočitnejša razlika med obema operatorjema je ta, da je za vnanji odvod d značilno $d^2 = 0$, medtem ko za kovariantni odvod v splošnem velja $\nabla^2 \neq 0$. Operator ∇^2 je celo zelo pomemben in, kot bomo videli nekoliko kasneje, nosi bistveno geometrijsko informacijo o kovariantnem odvodu.

Definicija 29 *Ukrivljenost kovariantnega odvoda*

$$\nabla : \Omega^k(E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(E)$$

je linearni operator

$$F = \nabla^2 = \nabla \circ \nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^2(E).$$

Za razliko od zaporedja

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \to 0,$$

ki je (de Rhamov) kompleks, zaporedje

$$\Omega^0(E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(E) \xrightarrow{\nabla} \Omega^2(E) \xrightarrow{\nabla} \dots \xrightarrow{\nabla} \Omega^n(E)$$

ni vedno kompleks. Ukrivljenost meri "defekt", ki zgornje zaporedje razlikuje od kompleksa.

Oglejmo si izrazitev ukrivljenosti v lokalni umeritvi. Račun nam da

$$\begin{aligned}
(d+\omega_\alpha)(d+\omega_\alpha)s &= (d+\omega_\alpha)(ds + \omega^\alpha \cdot s) \\
&= d^2 s + d(\omega^\alpha \cdot s) + \omega^\alpha \wedge ds + \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha \cdot s \\
&= d\omega^\alpha \cdot s - \omega^\alpha \wedge ds + \omega^\alpha \wedge ds + \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha \cdot s \\
&= \Big(d\omega^\alpha + \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha \Big) s.
\end{aligned}$$

Torej:

$$F_\alpha = \nabla_\alpha^2 = d\omega^\alpha + \omega^\alpha \wedge \omega^\alpha \in \Omega^2(U_\alpha; End(V)).$$

Objekt F_α je matrika 2-form na M. Tak objekt dobimo, če v neki matriki, ki je izrazitev kakega elementa iz $End(V)$ v kaki bazi, skalarje nadomestimo z 2-formami.

Oglejmo si, kako se lokalna izrazitev F_α spremeni s spremembo umeritve. Najprej ugotovimo, da (globalno) velja

$$\begin{aligned}\nabla^2(f \cdot s) &= \nabla(df \otimes s + f \cdot \nabla s) \\ &= -df \wedge \nabla(s) + df \wedge \nabla(s) + f\nabla^2(s) \\ &= f\ \nabla^2(s)\end{aligned}$$

za vsak prerez $s \in \Omega^0(E)$ in za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Operator $F = \nabla^2$ je torej linearen glede na $\mathcal{C}^\infty(M)$. Matrika $F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha, End(V))$ je določena z relacijami:

$$F(\sigma_\alpha) = \nabla^2(\sigma^i_\alpha) = \sum_{j=1}^n F^{ji}_\alpha \cdot \sigma^j_\alpha, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Iz $\sigma^i_\beta = g^{ij}_{\alpha\beta}\sigma^j_\alpha$ in iz zgornjega nato dobimo:

$$\nabla^2(\sigma^i_\beta) = \sum_{j=1}^n \Big(g_{\alpha\beta} \cdot F_\alpha \cdot g^{-1}_{\alpha\beta}\Big)_{ij}\sigma^j_\beta.$$

Torej

$$F_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot F_\alpha \cdot g^{-1}_{\alpha\beta} = \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}} F_\alpha. \tag{24}$$

Opazimo, da se ukrivljenost pri prehodu iz ene v drugo umeritev vede kot tenzor. Natančneje, dokazali smo:

Trditev 18 *Ukrivljenost F povezave ∇ je prerez svežnja*

$$\pi_c : \Lambda^2 T^*M \otimes End(E, E) \longrightarrow M.$$

Opomba 6 *Kovariantni odvod* ni *tenzor. Videli smo, da se njegove lokalne izrazitve vedno razlikujejo za aditivni člen $g^{-1}_{\alpha\beta} \cdot dg_{\alpha\beta}$, ki vključuje odvode prehodne preslikave.*

5.5 Primerjava med povezavo na glavnem svežnju in kovariantnim odvodom

Oglejmo si podrobneje "sorodstvo" med glavnimi in vektorskimi svežnji. Najprej ponovimo konstrukcijo vektorskega svežnja iz glavnega.

Vektorski sveženj pridružen glavnemu: Spomnimo se konstrukcije pridruženega svežnja. Vektorski sveženj $\pi_E\colon E \to M$ je pridružen glavnemu $GL(n;\mathbb{F})$-svežnju $\pi_G\colon P \to M$, če je

$$E = P \times_{GL(n;\mathbb{F})} V = (P \times V)/\sim \quad ,$$

pri čemer je ekvivalenčna relacija $\sim$ podana s predpisom

$$(p_1, f_1) \sim (p_2, f_2) \iff (p_1, f_1) = (p_2 \cdot g^{-1}, g \cdot f_2)$$

za kak element $g \in GL(n;\mathbb{F})$.

Naj bo $\{(U_\alpha, \phi_\alpha); \alpha \in A\}$ atlas za mnogoterost M, in $\{g_{\alpha\beta}\}$ kocikel prehodnih preslikav svežnja $\pi_G\colon P \to M$ glede na ta atlas. V razdelku 5.1 smo videli, tedaj pridruženi vektorski sveženj $\pi_E\colon E \to M$ prav tako podan s kociklom $\{g_{\alpha\beta}\}$ prehodnih preslikav.

Izpeljimo to pomembno dejstvo za vajo in za osvežitev spomina še enkrat. Naj bo

$$\tau : P_{/U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times GL(n;\mathbb{F})$$

podana s predpisom

$$p \longmapsto (\pi_G(p), s_\alpha(p)),$$

kjer je $s_\alpha\colon P_{/U_\alpha} \to GL(n;\mathbb{F})$ ekvivariantna preslikava,

$$s_\alpha(p \cdot g) = s_\alpha(p) \cdot g$$

Ta trivializacija inducira trivializacijo

$$T_\alpha : E_{/U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times V$$

pridriženega vektorskega svežnja takole:

$$\begin{aligned} T_\alpha([p, v]) &= \widetilde{T}_\alpha([m, s_\alpha(p)], v) \\ &= \widetilde{T}_\alpha([(m, e), s_\alpha(p) \cdot v]) \\ &:= (m, s_\alpha(p) \cdot v) \end{aligned}$$

Torej imamo za vsak $\beta \in A$

$$T_\alpha^{-1}(m, v) = [p, s_\alpha^{-1}(p) \cdot v],$$

kjer je $p = \tau_\beta^{-1}(m, e)$. Naj bo $U_\alpha \cap U\beta \neq 0$. Tedaj res dobimo prehodo preslikavo

$$G_{\alpha\beta} : U\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n;\mathbb{F})$$

za pridruženi vektorski sveženj, podano s preslikavo

$$\Big(G_{\alpha\beta}(m)\Big)(v) = (T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(m,v) \;=\; (m, s_\beta(p)s_\alpha^{-1}(p)\cdot v) \;=\; (m, g_{\alpha\beta}(m)\cdot v),$$

kot smo zgoraj napovedali. Upoštevali smo, da v glavnem svežnju velja $s_\beta(p)s_\alpha^{-1}(p) = g_{\alpha\beta}(m)$, kjer je $m = \pi_G(p)$.

Glavni sveženj pridružen vektorskemu - sveženj ogrodij: Oglejmo si še obratno pot. Vektorskemu svežnju $\pi_E\colon E \to M$ bomo priredili *glavni sveženj ogrodij*. Vsak vektorski sveženj je na naraven način pridružen nekemu glavnemu svežnju, ki je z vektorskim svežnjem natanko določen. Ta glavni sveženj se imenuje sveženj ogrodij.

Definicija 30 *Naj bo $\pi_E\colon E \to M$ vektorski sveženj, katerega vlakno je $V = \mathbb{F}^n$. Glavni sveženj $\pi_G\colon P_E \to M$ s strukturno grupo $GL(n;\mathbb{F})$ je se imenuje sveženj ogrodij svežnja E, če je sveženj E svežnju P pridružen glede na običajno naravno delovanje grupe $GL(n;\mathbb{F})$ na $\mathbb{F}^n$.*

Naj bo torej $\pi_E\colon E \to M$ vektoski sveženj z vlaknom $V = \mathbb{F}^n$.

Definicija 31 *Ogrodje svežnja E nad točko $m \in M$ je baza $\{v_1, \dots, v_n\}$ vlakna E_m.*

Če vektorje $(v_1, \dots, v_n)$ zložimo v matriko, dobimo zaradi linearne neodvisnosti element v grupi $GL(n;\mathbb{F})$. Množica ogrodij nad m je torej kopija grupe $GL(n;\mathbb{F})$. Namesto nad eno samo točko $m \in M$, lahko to konstrukcijo naredino nad odprto množico $U_\alpha \subset M$ iz atlasa $\mathcal{U}$ za M.

Definicija 32 *Naj bo G_m množica vseh ogrodij vektorskega prostora E_m. Označimo s P_E množico*

$$\widetilde{P}_E = \cup_{m\in M} G_m$$

in definirajmo preslikavo

$$\widetilde{\pi}_G : \widetilde{P}_E \longrightarrow M$$

s predpisom

$$\widetilde{\pi}_G : G_m \longmapsto m.$$

Izrek 10 *Za primerno izbrano gladko strukturo na $\widetilde{P}_E$ je*

$$\widetilde{\pi}_G : \widetilde{P}_E \longrightarrow M$$

glavni $GL(n;\mathbb{F})$-sveženj. Ta glavni sveženj je natanko sveženj ogrodij $\pi_G\colon P_E \to M$ vektorskega svežnja $\pi_E\colon E \to M$.

Dokaz: Izrek bomo dokazali tako, da bomo eksplicitno pokazali, da kocikla prehodnih preslikav, ki definirata E oziroma $\widetilde{P}_E$, sovpadata. Tak dokaz nam bo prišel prav pri primerjavi povezave na glavnem svežnju in kovariantnega odvoda na vektorskem svežnju. Najprej navedimo dve definiciji.

Definicija 33 *Lokalno ogrodje nad $U_\alpha \subset M$ vektorskega $V = \mathbb{F}^n$-svežnja $\pi_E\colon E \to M$ je n-terica lokalnih prerezov*

$$\sigma_1^\alpha, \ldots, \sigma_n^\alpha \;:\; U_\alpha \longrightarrow E_{/U_\alpha},$$

ki so v vsaki točki $m \in U_\alpha$ linearno neodvisni.

Če zložimo prereze σ_i^α v matriko, dobimo preslikavo

$$\sigma_\alpha \;:\; U_\alpha \longrightarrow (\widetilde{P}_E)_{/U_\alpha}. \tag{25}$$

Izberimo $m \in M$. Za vsako ogrodje $p(m) \in \widetilde{\pi}_G^{-1}(m) \subset \widetilde{P}_E$ obstaja natanko en element $s_\alpha(m) \in GL(n;\mathbb{F})$, tako da za $p(m)$ velja

$$p(m) = \sigma_\alpha(m) \cdot s_\alpha\Big(p(m)\Big). \tag{26}$$

Sedaj lahko definiramo preslikavo

$$\tau_\alpha : (\widetilde{P}_E)_{/U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times GL(n;\mathbb{F})$$

s predpisom

$$\tau_\alpha(p) = \Big(\widetilde{\pi}_G(p), s_\alpha(p)\Big),$$

pri čemer je preslikava $s_\alpha(m)$ podana z enačbo (26). Gladko strukturo na $\widetilde{P}_E$ vpeljemo tako, da proglasimo preslikave τ_α za difeomorfizme. Seveda je preslikava $\widetilde{\pi}_G\colon \widetilde{P}_E \to M$ pri tako izbiri očitno gladka. Grupa $GL(n;\mathbb{F})$ pa tudi očitno deluje na $\widetilde{P}_E$ z desne in to delovanje je gladko, prosto in na vsakem vlaknu $\widetilde{\pi}_G^{-1}(m) \subset \widetilde{P}_E$ tranzitivno. Torej je $\widetilde{\pi}_G\colon \widetilde{P}_E \to M$ res glavni $GL(n;\mathbb{F})$-sveženj, preslikave $\tau_\alpha\colon (\widetilde{P}_E)_{/U_\alpha} \to U_\alpha \times GL(n;\mathbb{F})$ pa so lokalne trivializacije.

Pokazati moramo samo še, da prehodne preslikave τ_α določajo kocikel

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cup U_\beta \longrightarrow GL(n;\mathbb{F}),$$

s katerim je določen tudi sveženj $\pi_E\colon E \to M$. Iz enačbe (26) je očitno, da velja

$$s_\alpha(\sigma_\alpha(m)) \equiv e \tag{27}$$

Primerjajmo sedaj preslikavi

$$\sigma_\alpha, \sigma_\beta : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow (\widetilde{P}_E)_{/U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Naj bo

$$f : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow E_{/U_\alpha \cap U_\beta}$$

lokalni prerez vektorskega svežnja E. Razvijmo ga po ogrodjih σ_α in σ_β:

$$f(m) = \sum_{i=1}^{n} f_i^\alpha(m)\ \sigma_\alpha(m) = \sum_{i=1}^{n} f_i^\beta(m)\ \sigma_\beta(m). \tag{28}$$

Ker je $\{g_{\alpha\beta}\}$ kocikel svežnja E, imamo

$$\begin{pmatrix} f_1^\beta \\ \vdots \\ f_n^\beta \end{pmatrix} = g_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} f_1^\alpha \\ \vdots \\ f_n^\beta \end{pmatrix}$$

Zgornja relacija in enačba (28) nam dasta

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^{n} f_j^\alpha\ \sigma_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} (g_{\alpha\beta}^{-1})_{ji}\ f_i^\beta \Big) \cdot \sigma_j^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i^\beta \Big(\sum_{j=1}^{n} (g_{\alpha\beta}^{-1})_{ji}\ \sigma_j^\alpha \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i^\beta \sigma_i^\beta. \end{aligned}$$

Iz zadnjih dveh vrstic zgornjega računa preberemo

$$\sigma_\beta = \sigma_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Spomnimo se formule (27). Upoštevajoč ekvivariantnost preslikave s_β, ki sledi neposredno iz definicije (26), dobimo

$$s_\beta(\sigma_\beta) = s_\beta(\sigma_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}^{-1}) = s_\beta(\sigma_\alpha) \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} = e$$

in zato

$$s_\beta(\sigma_\alpha) = g_{\alpha\beta}$$

Ker je $s_\alpha(\sigma_\alpha) = e$, dobimo

$$s_\beta(\sigma_\alpha) \cdot s_\alpha(\sigma_\alpha)^{-1} = g_{\alpha\beta}.$$

Ker je vsako ogrodje oblike $p = \sigma\alpha \cdot g$ za neki element $g \in GL(n;\mathbb{F})$ in zaradi ekvivariantnosti preslikav s_α in s_β končno dobimo

$$s_\beta(p) \cdot (s_\alpha(p))^{-1} = g_{\alpha\beta}$$

oziroma na kratko

$$s_\beta \cdot s_\alpha^{-1} = g_{\alpha\beta}.$$

To pa je standardna formula za prehodno preslikavo v glavnem svežnju, torej smo dokazali, da sta vektorski sveženj $\pi\colon E \to M$ in njegov sveženj ogrodij $\widetilde{\pi}_G\colon P_G \to M$ podana z istim kociklom prehodnih preslikav.

$\square$

Horizontalnost in kovariantna konstantnost Vrnimo se sedaj k povezavam in kovariantnim odvodom. Naj bo

$$f : U_\alpha \longrightarrow E_{/U_\alpha}$$

lokalni prerez vektorskega svežnja $\pi_E\colon E \to M$. Enačba za kovariantno konstantnost prereza f se glasi

$$\nabla(f) = 0,$$

kjer je

$$\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$$

naš izbrani koariantni odvod. V lokalni trivializaciji T_α postane prerez f stolpec funkcij $f = (f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha)^T$, zgornja enačba pa dobi obliko

$$df^\alpha + \omega_\alpha \cdot f^\alpha = 0,$$

kjer je ω_α primerna matrika 1-form. Izberimo neko vektorsko polje $\xi \in \Gamma(TM)$ na M. Dobimo preslikavo

$$\nabla_\xi : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^0(E)$$

Za kovariantno konstantni prerez f in za polje ξ velja

$$\nabla_\xi f = 0,$$

oziroma lokalno

$$df^\alpha(\xi) + \omega_\alpha(\xi) \cdot f^\alpha = 0.$$

Zgoraj smo vse 1-forme evaluirali na vektorskem poljiu ξ. Naj bo sedaj $\gamma(t)\colon [a,b] \to M$ neka integralska krivulja polja ξ. Označimo s

$$F(t) = f^\alpha(\gamma(t))$$

dvig krivulje $\gamma(t)$ v sveženj E. Pravimo, da je krivulja $F(t)$ horizontalna v E glede na ∇ , če je rešitev enačbe

$$(\frac{d}{dt}F)(t) + \omega_\alpha\Big((\frac{d}{dt}\gamma)(t)\Big) \cdot F(t) = 0.$$

To pomeni, da krivulja $F(t)$ leži na grafu lokalnega prereza f^α. V nadaljevanju bomo zato zgornjo enačbo pisali kar v obliki

$$f_t^\alpha + \omega_\alpha(\gamma_t) \cdot f^\alpha = 0 \tag{29}$$

Enačba (29) je homogena vektorska linearna enačba prvega reda. Poiščimo njeno splošno rešitev. Izgerimo torej začetno vrednost t_0 in nad v točki $m = \gamma(t_0) \in M$ neko n-terico linearno neodvisnih vektorjev $\{v_1, \ldots, v_n\} \in E_m$. Poiščimo rešitve $f_i^\alpha\colon [a,b] \to V$ enačbe (29) z začetnimi pogoji.

$$f_i^\alpha(t_0) = v_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(Vektorji v_i zgoraj so seveda izraženi v lokalni trivializaciji T_α.) Zložimo sedaj rešitve f_i^α (stolpce) v matriko

$$g_\alpha(t) = (f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha) : [a,b] \longrightarrow GL(n;\mathbb{F}).$$

Tedaj je $g_\alpha(t)$ rešitev homogene matrične linearne navadne diferencialne enačbe

$$\dot{g_\alpha} + \omega_\alpha(\dot\gamma(t)) \cdot g_\alpha = 0$$

z začetnim pogojem

$$g_\alpha(0) = \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix},$$

kjer je $(v_i^1, \dots, v_i^n)^T$ izrazitev vektorja $v_i \in E_{g(0)}$ v lokalni trivializaciji T_α. Pot $g_\alpha(t)$ je očitno dvig poti $\gamma(t)$ v glavni sveženj $\pi_G\colon P_E \to M$ ogrodij vektorskega svežnja $\pi_E\colon E \to M$. Dokazali bomo tale izrek.

Izrek 11 *Naj bo $\pi_E\colon E \to M$ vektorski sveženj opremljen s kovariantnim odvodom ∇. Naj bo izrazitev ∇ v lokalnih trivializacijah T_α podana z*

$$\nabla = d + \omega_\alpha \tag{30}$$

Naj bo povezava ω na glavnem svežnju ogrodij $\pi_G\colon P_E \to M$ v lokalih trivializacijah τ_α podana z elementi $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{gl}(n;\mathbb{F}))$, podanimi z (30).

Tedaj je pot

$$G(t) = \Big(\gamma(t), g_\alpha(t)\Big) : [a,b] \longrightarrow \tau_\alpha(P_E) = U_\alpha \times GL(n;\mathbb{F})$$

lokalna izrazitev glede na povezavo ω horizontalnega *dviga krivulje $\gamma(t)\colon [a,b] \to M$ natanko tedaj, ko je rešitev diferencialne enačbe*

$$\dot{g_\alpha} + \omega_\alpha(\dot\gamma(t)) \cdot g_\alpha = 0. \tag{31}$$

Z drugimi besedami, naj bo

$$\tau_\alpha : P_E \longrightarrow U_\alpha \times GL(n;\mathbb{F})$$

lokalna trivializacija. Pot

$$g(t) = \tau_\alpha^{-1}(\gamma(t), g_\alpha(t)) : [a,b] \longrightarrow P_E$$

je glede na ω horizontalna natanko tedaj, ko je $g_\alpha(t)$ rešitev enačbe (31).

Dokaz: Spomnimo se, da je povezava na glavnem svežnju podana z distribucijo horizontalnih podprostorov $H_p \subset T_pP_E$. Ti podprostori so jedra 1-forme ω z vrednostmi v $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n;\mathbb{F})$. Tako distribucija pri vsakem $p \in P_E$ podaja dekompozicijo

$$T_pP = \mathrm{Hor}_\omega(p) \oplus \mathrm{Vert}_\omega(p)$$

Dokazati moramo:

$$\mathrm{Vert}_\omega(\dot{g}(t)) \equiv 0.$$

Zveza med globalno 1-form ω na P_E in njenimi lokalnimi izrazitvami $\omega_\alpha \in \Omega(M; \mathfrak{gl}(n; \mathbb{F}))$ je podana z vzvratom

$$\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(\omega)$$

Pomnožimo sedaj obe strani enačbe (31) z g_α^{-1} z leve. Dobimo

$$g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha + \mathrm{Ad}_{g_\alpha^{-1}}(\omega_\alpha(\dot{\gamma})) = 0$$

Ker je $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(\omega)$ in $\sigma_\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}(m, e)$, imamo

$$g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha + \mathrm{Ad}_{g_\alpha^{-1}}\Big(\omega(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha(\dot{\gamma}(t)))\Big) = 0$$

Ekvivariantnost ω nam da

$$g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha + \omega\Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha\Big) = 0$$

Definicija povezavne forme ω in zgornja enačba nam povesta, da velja

$$\mathrm{Vert}_\omega\Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha\Big) = -\widetilde{g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha} \tag{32}$$

Lokalne trivializacije svežnja P_E podajajo (ploščato) povezavo s predpisom:

$$\mathrm{Hor\ Triv}(\sigma_\alpha(m)) = Im(D_m\sigma_\alpha) \subset T_{\sigma_\alpha(m)}P,$$

ki ga z ekvivariantnostjo razširimo na ves P_E:

$$\mathrm{Hor\ Triv}(\sigma_\alpha(m) \cdot g) = \mathrm{Hor\ Triv}(\sigma_\alpha(m)) \cdot g = D_{\sigma_\alpha(m)}\varrho_g\Big(\mathrm{Hor\ Triv}(\sigma_\alpha(m))\Big).$$

Razstavimo sedaj tangento

$$\dot{g}(t) = D(\tau_\alpha)^{-1}(\dot{\gamma}(t), \dot{g}_\alpha(t))$$

glede na direktno vsoto

$$T_pP = \mathrm{Hor\ Triv}(p) \oplus \mathrm{Vert}(p).$$

Definicija τ_α in ekvivariantnost njene druge komponente dasta

$$g(t) = \tau_\alpha^{-1}\Big(\gamma(t), g_\alpha(t)\Big) = \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g_\alpha(t),$$

odvajanje in uporaba Leibnitzevega pravila pa nato

$$\begin{aligned}
\dot{g}_\alpha(t) &= \Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha\Big)(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha(t) + \sigma_\alpha(\gamma(t))\dot{g}_\alpha(t) \\
&= \Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha\Big)(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha(t) + \sigma_\alpha(\gamma(t))g_\alpha(t) \cdot g_\alpha(t)^{-1}\dot{g}_\alpha(t) \\
&= \Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha\Big)(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha(t) + \widetilde{g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha}(g(t)).
\end{aligned}$$

Prvi sumand je element prostora Hor Triv$(g(t)) \subset T_{g(t)}P_E$, drugi pa leži v Vert$(g(z)) \subset T_{g(t)}P_E$, saj je vrednost infinitezimalnega delovanja elementa $g_\alpha^{-1}(t)\dot{g}_\alpha(t) \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{F})$ v točki $g(t) \in P_E$.

Upoštevajmo sedaj enačbo (32). Dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vert}_\omega(\dot{g}(t)) &= \mathrm{Vert}_\omega\Big(D_{\gamma(t)}\sigma_\alpha(\dot{\gamma}(t)) \cdot g_\alpha(t)\Big) + \mathrm{Vert}_\omega\Big(\widetilde{(g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha)}(g(t)\Big) \\
&= -\widetilde{(g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha)}(g(t)) + \widetilde{(g_\alpha^{-1}\dot{g}_\alpha)}(g(t)) = 0,
\end{aligned}$$

torej je pri vsakem $t \in [a,b]$ tangenta $\dot{g}(t)$ na krivuljo $g(t)\colon [a,b] \to P_E$ res horizontalna natanko takrat, ko je $g_\alpha(t)\colon [a,b] \to GL(n;\mathbb{F})$ rešitev enačbe (31).

□

Zveza med horizontalnim dvigom poti v glavnem svežnju in kovariantno konstantnostjo na pridruženem svežnju je izjemno pomembna, zato ponovimo še enkrat (na malo drugačen način) to, kar smo zgoraj dokazali.

Naj bo $g(t)\colon [a,b] \to P_E$ horizontalni dvig poti $\gamma(t)\colon [a,b] \to M$ v glavni sveženj ogrodij vektorskega svežnja E. Tedaj lahko lokalno ta dvig izrazimo v obliki

$$g(t) = \sigma_\alpha(\gamma(t)) \cdot g_\alpha(t).$$

Spomnimo se, da je pridruženi sveženj E glavnega svežnja P_E lahko definiramo kot

$$E = P_E \times_{GL(n;\mathbb{F})} \mathbb{F}^n = (P_E \times \mathbb{F}^n)/_\sim.$$

Za elemente zgornjega kvociantnega prostora velja

$$[(p \cdot g, v)] = [p, g \cdot v].$$

Naj bo $G(t) = \tau_\alpha(g(t)) = (\gamma(t), g_\alpha(t))$ lokalna izrazitev horizontanlega dviga $g(t)$ krivulje $\gamma(t)$. Zgornja zveza nam v lokalni trivializaviji da

$$[\Big((\gamma(t), g_\alpha(t))\Big), v] = [\Big((\gamma(t), e\Big),\ g_\alpha(t) \cdot v].$$

Pot
$$g_\alpha(t)\cdot v:[a,b]\longrightarrow \mathbb{F}^n.$$
pa je lokalna izrazitev (glede na trivializacijo T_α) kovariantno konstantnega dviga poti $\gamma(t)$ v vektorski sveženj E. Začetna točka tega dviga je $g_\alpha(0)\cdot v\in\mathbb{F}^n$.

Lokalna izrazitev horizontalnega dviga $g_\alpha(t)$ je rešitev matrične homogene linearne navadne diferencialne enačbe
$$\dot g_\alpha+\omega_\alpha(\dot\gamma(t))\cdot g_\alpha=0,$$
ustrezni kovariantno konstantni prerezi svežnja E pa so rešitve pripadajočega (vektorskega) sistema
$$\dot f^\alpha+\omega_\alpha(\dot\gamma(t))\cdot f^\alpha=0.$$

Ploščatost, kovariantna konstantnost, horizontalnost: Poglejmo si še, kaj v jeziku kovariantne konstantnosti in horizontalnosti pomeni ploščatost povezave. Naj bo spet
$$\nabla:\Omega^0(E)\longrightarrow\Omega^1(E)$$
kovariantni odvod na vektorskem svežnju $\pi_E\colon E\to M$ in $\omega\in\Omega^1(P_E;\mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}))$ ustrezna povezava na glavnem svežnju ogrodij P_E.

Naj bo $U_\alpha\subset M$ odprta okolica in
$$f:U_\alpha\longrightarrow E$$
lokalni prerez svežnja E. Opremimo U_α z nekim koordinatnim sistemom $\{x_1,\dots,x_n\}$ in naj bodo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ istrezna lokalno definirana vektorska poljna na U.

Trditev 19 *Če obstaja rešitev $f\colon U\to E$ sistema parcialnih diferencialnih enačb*
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}f=0,\qquad i=1,\dots,n$$
tedaj je povezava ω nad $U_\alpha\subset M$ polščata. Nad U_α torej velja
$$F_\omega=0.$$

Dokaz: V lokalni umeritvi $T_\alpha\colon E_{/U_\alpha}\to U_\alpha\times\mathbb{F}^n$ se zgornji sistem parcialnih diferencialnih enačb glasi
$$df_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i})+\omega_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i})\cdot f_\alpha=0,\tag{33}$$

kjer je f_α izrazitev prereza f v lokalni trivializaciji T,

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (f_\alpha)_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ (f_\alpha)_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Sistem (33) lahko zapišemo tudi na kratko, kot enačbo stolpcev diferencialnih form

$$df_\alpha + \omega_\alpha \cdot f_\alpha = 0.$$

Če obstaja ena rešitev zgornjega sistema, jih obstaja n linearno neodvisnih

$$f_\alpha^i(m) = f_\alpha(m) \cdot g_i,$$

kjer so $g_i \in GL(n; \mathbb{F})$ primerno izbrane konstante matrike. Obstaja torej preslikava

$$g_\alpha : \alpha \longrightarrow GL(n; \mathbb{F}),$$

(ki jo dobimo tako, da stolpce (f_α) zložimo v matriko), za katero velja

$$dg_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}) + \omega_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}) \cdot g_\alpha = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ali na kratko

$$dg_\alpha + \omega_\alpha \cdot g_\alpha = 0.$$

Zgornja enačba je enačba za matriki diferencialnih form. Naj bo $\gamma\colon [a,b] \to U_\alpha$ poljubna krivulja. Za dvig $G_\alpha(t) = g_\alpha(\gamma(t))$ velja

$$\Big(dg_\alpha + \omega_\alpha \cdot g_\alpha\Big)(\dot\gamma) = \dot G_\alpha + \omega_\alpha(\dot\gamma) \cdot G_\alpha = 0$$

Torej je za vsako pot $\gamma\colon [a,b] \to U_\alpha$ dvig $G_\alpha(t) = g_\alpha(\gamma(t))$ v glavni svežen P_E horizontalen glede na povezavo ω Naj bo preslikava $\widetilde{g}_\alpha\colon U_\alpha \to U_\alpha \times GL(n; \mathbb{F})$ podana s predpisom

$$\widetilde{g}_\alpha(m) = (m, g_\alpha(m)$$

in lokalni prerez $g\colon U_\alpha \to P_E$ z

$$g(m) = \tau_\alpha^{-1}(\widetilde{g}_\alpha(m)).$$

Tedaj je $g(U_\alpha)$ horizontalni prerez glavnega svežnja ogrodij P_E. Velja

$$(D_m g)(X_m) \in \mathrm{Hor}_\omega(g(m)) \subset T_{g(m)}P, \qquad \textit{za vsak } m \in U_\alpha \textit{ in za vsak } X_m \in T_m U_\alpha.$$

Horizontalni dvig vsake sklenjene poti v U_α je *sklenjena* pot v P_E, zato je po definiciji ukrivljenosti povezava na glavnem svežnju, povezava ω res ploščata, $F_\omega = 0$.

$\square$

6 Riemannova metrika in Levi-Civitajeva povezava

Glavna tema tega besedila je pojem ukrivljenosti. To, kar smo videli do sedaj, se najbrž le malo naslanja ali ujema z našim izkustvenim dojemanjem tega pojma, čeprav je verjetno jasno, da je smiselno razumeti ukrivljenost kot infinitezimalizacijo holonomije, holonomija pa je paralelni prenos tangentnega vektorja vzdolž sklenjene krivulje. Paralelnost smo definirali s pomočjo povezave oziroma kovariantnega odvoda. Videli pa smo, da je povezav in njim pripadajočih kovariantnih odvodov neskončno mnogo. Še več, tvorijo neskončno dimenzionalno družino.

Izkušnja nam pove, da je geometrijska ukrivljenost neke mnogoterosti povezana s pojmom razdalje na mnogoterosti. Delec, ki potuje od točke A do B, tipično opravi daljšo pot, če se mora gibati po neki ukrivljeni ploskvi, ki leži v $\mathbb{R}^3$ in vsebuje A in B, kot če lahko potuje kar skozi $\mathbb{R}^3$. Ukrivljenost torej vpliva na razdalje in smiselno je pričakovati, da nam bo poznavanje vseh razdalj na mnogoterosti omogočilo izračunati ukrivljenost te mnogoterosti - in sicer takšno ukrivljenost, ki se bo v tistih primerih, ki jih lahko percipiramo "s čutili", ujemala z našo izkušnjo.

Da pa bi lahko ta načrt izvedli, moramo najprej povedati, kako na mnogoterostih izračunavamo razdalje. Nekaj razmisleka nam pove, da gladka struktura na mnogoterosti še ni dovolj za nedvoumno definicijo razdalje med dvema točkama na tej mnogoterosti. Za to je potrebna dodatna struktura.

Naj bo torej M gladka realna n-dimenzionalna mnogoterost in naj bo T^*M njen kotangentni sveženj. Tedaj lahko tvorimo nov sveženj

$$\pi : (T^*M)^{\otimes^2} \longrightarrow M,$$

katerega vlakno je prostor $\pi^{-1}(m) = T_mM \otimes T_mM$. Elementi vlakna so torej matrike. Spomnimo se, da za poljubna vektorja v, w velja

$$v \otimes w = v \cdot w^T.$$

Če so prehodne funkcije svežnja TM

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n; \mathbb{R}),$$

je iz zgornjega očitno, da bodo prehodne preslikave svežnja $T^{\oplus 2}M$ podane s predpisom

$$M_\alpha \rightsquigarrow M_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot M_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}^T.$$

Vsako kvadratno matriko lahko razcepimo na vsoto simetrične in antisimetrične,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Uporabimo zgornji razcep na ves sveženj $(T^*M)^{\otimes^2}$

$$(T^*M)^{\otimes^2} = S^2M \oplus \Lambda^2 M.$$

Vlakno svežnja S^2M tvorijo vsi simetrični 2-tenzorji. Vlakno je torej vektorski prostor simetričnih matrik. Prehodne preslikave na svežnju S^2 so seveda iste kot na vsem svežnju $T^{\otimes^2}M$, torej

$$S_\alpha \rightsquigarrow S_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot S_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}^T.$$

Vidimo torej, da se pri prehodu iz ene v drugo bazo (vlakna) tenzor $S \in \Omega^0(S^2M)$ ne transformira kot linearna preslikava, ampak kot kvadratna forma. Med drugimi se tako transformirajo skalarni produkti. Če je $S(m)$ v neki točki m neizrojena in pozitivno definitna matrika, ga imamo lahko za skalarni produkt na tangentnem prostoru T_M.

Naj bo $A\colon M \to (T^*M)^{\otimes^2}$ poljuben prerez. Tedaj pri vsakem $m \in M$ lahko vrednost $A(m)$ evaluiramo na paru tangentnih vektorjev $X_m, Y_m \in T_mM$ in dobimo skalar. Res, vsak prerez A lahko (po definiciji svežnja $(T^*M)^{\otimes^2}$) izrazimo v obliki

$$A = \sum_i V_i \otimes W_i, \qquad V_i,\ W_i \in \Gamma(T^*M).$$

Tedaj

$$A(m)(X_m, Y_m) = \Big(\sum_i V_i(m) \otimes W_i(m)\Big)(X_m, Y_m) = \sum_i \langle V_i(m), X(m)\rangle \cdot \langle W_i(m), Y(m)\rangle,$$

kjer smo z $\langle V_i(m), X_m\rangle$ označili evaluacijo funkcionala $V_i(m) \in T_m^*M$ na vektorju T_mM.

Definicija 34 *Riemannova metrika na M je pozitivno definiten gladek prerez*

$$g : M \longrightarrow S^2M$$

svežnja $\pi\colon S^2M \to M$. To pomeni:

$$g_m(X_m, X_m) > 0 \qquad \text{za vsak } 0 \neq X_m \in T_mM.$$

Par (M, g), kjer je M gladka mnogoterost, g pa metrika na njej, se imenuje Riemannova mnogoterost.

Kot je že rečeno zgoraj, je za vsak $m \in M$ vrednost $g(m)$ skalarni produkt na $T_m M$. Za poljubna tangentna vektorja $X_m, Y_m \in T_m$ je skalar $g_m(X_m, Y_m)$ njun skalarni produkt, število $g_m(X_m, X_m)$ pa je kvadrat norme vektorja X_m.

Če izderemo neko trivializacijo svežnja TM v okolici točke m, nam ta trivializacija inducira tudi trivializacijo svežnja S^2M na očiten način. Spet izrazimo prerez

$$A : U \longrightarrow (T^*M)^{\otimes^2} \ oz. \ S^2M$$

v obliki

$$A = \sum_i V_i \otimes W_i,$$

kjer so V_i, W_i prerezi T^*M. Tedaj nam trivializacija

$$T_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

inducira trivializacijo

$$\widetilde{T}_\alpha : T^{\otimes^2} U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^2}$$

s predpisom

$$\widetilde{T}_\alpha(A) = \Big(\pi(A), \sum T_\alpha(V) \otimes T_\alpha(W)\Big),$$

kjer $T_\alpha(V), T_\alpha(W)$ seveda označujeta le drugo komponento v trivializaciji (brez bazne točke). Vsaka trivializacija metriko lokalno predstavi kot simetrično matriko. Če izberemo drugo trivializacijo, dobimo drugo simetrično matriko. Kot smo že videli, je zveza med takima matrikama g^α in g^β podana z

$$g^\beta = g_{\alpha\beta} \cdot g^\alpha \cdot g_{\alpha\beta},$$

kar je običajna zveza med dvema koordinatnima reprezentacijama skalarnega produkta.

Metrika nam res omogoča meriti razdalje med točkami na mnogoterosti M.

Definicija 35 *Naj bo $\gamma\colon [a,b] \to M$ gladka krivulja na Riemannovi mnogoterosti (M, g). Dolžina krivulje γ je podana s predpisom*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \Big[g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\Big]^{\frac{1}{2}} \, dt = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_g \, dt,$$

kjer smo z $\|\dot\gamma(t)\|_g$ označili normo na $T_{\gamma(t)}M$, porojeno z metriko g.

Za razdaljo med dvema točkama je seveda naravno vzeti dolžino najkrajše krivulje med tema dvema točkama. Taka krivulja se imenuje geodetska krivulja. Tehnično uporabna definicija geodetske krivulje je nekoliko splošnejša.

Definicija 36 *Krivulja* $\gamma\colon [a,b] \to M$ *na Riemannovi mnogoterosti* (M,g) *je geodetka, če je stacionarna točka dolžinskega funkcionala. To pomeni, da za vsako gladko preslikavo*

$$\alpha[a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$$

za katero velja

$$\alpha(t,0) = \gamma(t) \quad \alpha(a,s) = \gamma(\alpha) \quad \alpha(b,s) = \gamma(b),$$

velja

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} \int_a^b \| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \|_g dt = 0.$$

Geodetska krivulja je torej stacionarna točka dolžinskega funkcionala. Izkaže se, da je to res prava definicija in da bi bila zahteva po minimalnosti samo v napoto.

Poskusimo sedaj na Riemannovi mnogoterosti (M,g) definirati kovariantni odvod tako, da bo na smiseln način določen z metriko g. Naj bo $\gamma\colon [a,b] \to M$ geodetska krivulja. Spomnimo se na paralelni prenos vektorja vzdolž krivulje. Smiselna je zahteva: Paralelni prenos vektorja $\dot\gamma$ vzdolž geodetke $\gamma(t)$ v $\gamma(t)$ je konstanten. To pomeni: Paralelni prenos $\dot\gamma(t_0)$ vzdolž geodetke $\dot\gamma(t)$ v $\gamma(t_1)$ je $\dot\gamma(t_1)$.

Naj bo sedaj $P(M)$ sveženj ogrodij tangentnega svežnja TM. Definirajmo povezavo na $P(M)$ takole. Naj bo $\gamma(t)$ geodetka in $\mathcal{H}(\dot\gamma(t))$ horizontalni dvig γ v $P(M)$. Tedaj mora veljati:

$$\mathcal{H}_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)) = \dot\gamma(t), \qquad \textit{za vsak } t.$$

Po prejšnjem to pomeni tole. Polje $\dot\gamma(t)$ je vektorsko polje na $TM/\gamma(t)$, torej prerez svežnja $TM/\gamma(t)$. Ta prerez mora biti kovariantno konstanten vzdolž smeri $\dot\gamma(t)$ na bazi. Iskani kovariantni odvod ∇ mora biti torej tak, da bo zanj veljalo

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) \equiv 0$$

za vsako geodetsko krivuljo $\gamma(t)$ na M.

Definicija 37 *Naj bo* (M,g) *Riemannova mnogoterost. Kovariantni odvod oziroma povezava na* TM

$$\nabla : \Omega^0(TM) \longrightarrow \Omega^1(TM)$$

se imenuje Levi-Civitajeva povezava, če za vsako trojico vektorskih polj velja:

(a) $\mathcal{L}_Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z, Y) + g(X, \nabla_Z, Y)$.

(b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. *Torzija je enaka 0.*

Dokažimo najprej, da zahtevi *(a)* in *(b)* povezavo ∇ natanko določata.

Opomba 7 *V skladu z oznakami in konstrukcijami iz prejšnjega poglavja v zapisu $\nabla_X Y$ razumemo polje Y kot prerez svežnja $Y \in \Omega^0(E)$, polje X pa kot polje na bazi, $X \in \Gamma(M)$. Toda v našem primeru je $\Omega^0(E), X = \Gamma(M)$.*

Trditev 20 *Levi-Civitajeva povezava je natanko ena.*

Dokaz: Dovolj je dokazati, da je za vsako trojico vektorskih polj $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ funkcija $g(\nabla_X Y, Z)$ natančno določena z *(a)* in *(b)*. Naj bodo $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ koordinatna vektorska polja za neke lokalne koordinate na U_α. Te koordinate podajajo lokalno trivializacijo $TM/U_\alpha = TU_\alpha$. V tej trivializaciji se ∇ izraža z neko matriko 1-form ω:

$$\nabla = d + \omega.$$

Razvijmo vsako 1-formo ω_{ij} po lokalnih koordinatah. Dobimo

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\, dx_k, \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} = e_k.$$

Torej

$$\nabla_{e_i} = \mathcal{L}_{e_i} + (\Gamma_{jk}^{i}),$$

kjer je (Γ_{jk}^{i}) matrika, indeksirana z j,k, izražena v bazi $\{e_i\}$. Zato

$$g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = g(de_j, e_i) + g\Big((\Gamma_{jk}^{i})(e_j), e_k\Big) = \Gamma_{jk}^{i}.$$

Upoštevali smo

$$de_j = d\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \ j - to\ mesto = 0.$$

Dokažimo sedaj, da je izraz $g(\nabla_X Y, Z)$ določen z *(a)* in *(b)*. Velja:

$$\begin{aligned}
X \cdot g(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
Y \cdot g(X, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \\
Z \cdot g(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y),
\end{aligned}$$

kjer $X \cdot f$ označuje smerni odvod funkcije f v smeri polja X. Odštejemo tretjo enačbo od vsote prvih dveh in uporabimo *(b)*. Dobimo

$$\begin{aligned}
2\, g(\nabla_X Y, Z) &= X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) \\
&\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).
\end{aligned}$$

Opomba: Zgornjo formulo lahko uporabimo za definicijo funkcij $g(\nabla_X Y, Z)$ in se nato prepričamo, da podajajo kovariantni odvod, ki ustreza zahtevama *(a)* in *(b)*.

□

Izrek 12 *Naj bo ∇ Levi-Civitajeva povezava na Riemannovi mnogoterosti (M, g). Tedaj za vsako geodetsko krivuljo $\gamma(t)\colon [a, b] \to M$ velja:*

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0.$$

Dokaz: Naj bo $\alpha\colon [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ gladka variacija $\gamma(t)$. Veljati mora torej:

$$\alpha(t, 0) = \gamma(t), \qquad \alpha(a, s) = \gamma(a), \qquad \alpha(b, s) = \gamma(b).$$

Označimo s T in V vektorski polji vzdolž slike $Im(\alpha) \subset M$, podani s

$$\begin{aligned}
T(t, s) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \qquad -\textit{tangentna smer}, \\
V(t, s) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \qquad -\textit{smer variacije}.
\end{aligned}$$

Označimo:

$$\mathcal{L}(\alpha(t, s)) = \int_a^b \|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|\ dt = \int_a^b \Big[g(T, T)\Big]^{\frac{1}{2}}\ dt.$$

Tedaj imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t, s)) &= \int_a^b V\Big[g(T, T)\Big]^{\frac{1}{2}}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{g(T, T)}}\ V \cdot g(T, T)\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{g(T, T)}}\ \Big(g(\nabla_V T, T) + g(T, \nabla_V T)\Big)\ dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{g(T, T)}}\ g(\nabla_V T, T)\ dt.
\end{aligned}$$

V zadnji enakosti zgoraj smo uporabili lastnost *(a)*. Polji V in T sta pointegrirani z α, zato $[V,T]=0$. Uporabimo *(b)* in dobimo:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t,s))|_{s=0} = \int_a^b \frac{1}{g(T,T)^{\frac{1}{2}}} \; g(\nabla_T V, T)\; dt \quad |_{s=0}.$$

Naj bo krivulja $\gamma(t)$ naravno parametrizirana. To pomeni:

$$\|\dot\gamma(t)\| = \|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\| = l = konst.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t,s))|_{s=0} \quad &= \quad \frac{1}{l}\int_a^b g(\nabla_T V, T)\; dt \\ &\overset{po\ (a)}{=} \quad \frac{1}{l}\int_a^b \Big(T\cdot g(V,T) - g(V,\nabla_T T)\Big)\; dt.\end{aligned}$$

Ker je $T=\dot\gamma$, lahko prvi člen integriramo in dobimo

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t,s))|_{s=0} = \frac{1}{l} g(V,T)|_a^b - \frac{1}{l}\int_a^b g(\nabla_T T, V)\; dt.$$

Ker je $\alpha(a,s)\equiv\gamma(a)$ in $\alpha(b,s)\equiv\gamma(b)$, je $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(a,s) = V(a) = 0$ in prav tako $V(b)=0$. Zato

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t,s))|_{s=0} = -\frac{1}{l}\int_a^b g(V,\nabla_T T)\; dt.$$

Če je $\gamma(t)$ geodetka, pa velja

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\alpha(t,s))|_{s=0} = 0. \tag{34}$$

Tedaj mora biti tudi

$$\nabla_T T = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0. \tag{35}$$

Res, če bi imeli $(\nabla_T T)(t_1) = 0$ pri kakšnem $t_1\in[a,b]$, najdemo tak α, da je $g(\nabla_T T, V)(t_0) > 0$ in uporabimo standardni osnovni izrek variacijskega računa. Funkcija $g(V,\nabla_T T)(t)$ mora biti zaradi zveznosti pozitivna še v neki okolici točke t_0, torej bi integral (34) ne bil enak nič, to pa je protislovje.

Seveda velja tudi obratno. Če je krivulja γ taka, da velja (35), je kritična točka funkcionala L.

□

Naj bo sedaj (M, g) neka Riemannova mnogoterost in naj bo njena Levi-Citajeva povezava ploščata.

$$F_\nabla = 0.$$

Oglejmo si, kakšen je geometrijski pomen tega dejstva. Če je ∇ ploščata, tedaj obstaja ogrodje lokalnih prerezov tangentnega svežnja (t.j. vektorskih polj)

$$f_1, f_2, \ldots, f_n : U_\alpha \longrightarrow TM/U_\alpha = TU_\alpha,$$

ki so vsi kovariantno konstantni

$$\nabla f_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

oziroma, izraženo v lokalni umeritvi,

$$(d + \omega_\alpha) f_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Izberimo te prereze tako, da v neki izbrani točki na $m \in U_\alpha$ velja:

$$g_m(f_i(m), f_j(m)) = \delta_{ij}.$$

Baza $\{f_i(m)\}$ prostora $T_m M$ je torej glede na g ortonormirana. Zaradi kovariantne konstantnosti velja:

$$d(g(f_i, f_j)) = g(\nabla f_i, f_j) + g(f_i, \nabla f_j) = 0.$$

To pa pomeni, da je

$$\{f_1(m_1), \ldots, f_n(m_1)\}$$

ortonormirana baza tangentnega prostora $T_{m_1} M$ pri vsaki točki $m_1 \in U_\alpha \in M$. Breztorzijskost povezave ∇ nam pove tudi tole:

$$\nabla_{f_i} f_j - \nabla_{f_j} f_i = [f_i, f_j].$$

In ker so f_i kovariantno konstantni, dobimo od tod

$$[f_i, f_j] = 0, \qquad \textit{za vsak par } i, j = 1, ..., n.$$

Od tod pa sledi dvoje:

1. Integralske krivulje polj f_i lahko vzamemo za koordinatne krivulje na U_α.

2. Integralske krivulje $\gamma_i(t)$ polj f_i so geodetske krivulje, saj zanje velja

$$\nabla_{\dot\gamma} \cdot \gamma_i = \nabla_{f_i} f_i = 0.$$

Opišimo dobljeno situacijo še nekoliko drugače. Označimo s Φ_{t_i} tok vektorskega polja f_i in konstruirajmo preslikavo:

$$\begin{aligned} \Phi : \qquad \mathbb{R}^n \qquad &\longrightarrow \quad U_\alpha \subset M \\ (t_1, \ldots, t_n) \quad &\longmapsto \quad (\Phi_{t_n} \circ \ldots \circ \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1})(m_0). \end{aligned}$$

Ker velja $[f_i, f_j] = 0$, iz Frobeniusovega izreka sledi, da lahko v izrazu za Φ tokove poljubno premešamo in s tem preslikave Φ ne spremenimo. Naj bodo $\tau_i \in \mathbb{R}$ taka števila, da velja

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) = m.$$

Tedaj imamo

$$(D_\tau \Phi)(\frac{\partial}{\partial t_i}) = \frac{d}{dt_i}|_{t_i=\tau_i} \ \Phi_{t_i} \circ \Big(\Phi_{\tau_1} \circ \ldots \circ \Phi_{\tau_{i-1}} \circ \Phi_{\tau_{i+1}} \circ \ldots \circ \Phi_{\tau_n}\Big)(m_0) = f_i(m).$$

Naj bo

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial t_i} \ \in \ T_\tau \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

tangentni vektor. Tedaj je njegova slika po Φ tangentni vektor

$$(D_\tau \Phi)(V) = \sum_{i=1}^{n} v_i f_i \ \in \ T_{\Phi(\tau)} U_\alpha = T_{\Phi(\tau)} M.$$

Njegova norma glede na metriko g na M je tedaj

$$g\Big(D_\tau \Phi)(V), (D_\tau \Phi)(V)\Big) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \langle V, V \rangle,$$

kjer smo z $\langle V, V \rangle$ označili običajno evklidsko normo vektorja $V \in \mathbb{R}^n$. Zgoraj smo upoštevali, da so vektorska polja f_i ortonormirana glede na g povsod na U_α.

Preslikava Φ je torej izometrija med evklidskima prostoroma $\mathbb{R}^n$ in U_α. Dokazali smo tale izrek.

Izrek 13 *Naj bo (M, g) Riemannova mnogoterost dimenzije n, katere Levi-Civitajeva povezava ∇ je ploščata, $F_\nabla = 0$. Tedaj je mnogoterost M lokalno izometrična evklidskemu prostoru $\mathbb{R}^n$.*

7 Chernovi razredi

Naj bo M kompaktna, orientabilna sklenjena ploskev in g metrika na M. Ukrivljenost Levi-Civitajeve povezave na M je 2-forma. Z Gaussovo ukrivljenostjo, ki je funkcija $K\colon M \to \mathbb{R}$, se ukrivljenostna forma izraža takole

$$F_\nabla = K \cdot \omega,$$

kjer je ω volumska 2-forma na M. To pomeni, da velja

$$\omega_m(X_m, Y_m) = 1, \qquad \|X_m\|_g = \|Y_m\|_g = 1, \quad g(X_m, Y_m) = 0.$$

Bralec lahko za vajo preveri zgornjo trditev.

Morda najpomembnejši izrek dvodimenzionalne Riemannove geometrije je Gauss-Bonnetov izrek, še zlasti lokalna verzija, iz katere globalna hitro sledi. Globalna verzija se glasi

$$\int_M K\, dA = \frac{1}{2\pi}\,\chi(M).$$

V tem poglavju bomo dokazali daljnosežno posplošitev tega izreka. Izrek, ki ga bomo dokazali, bo imel enako fundamentalno strukturo kot globalni Gauss-Bonnetov izrek, in sicer

integral neke geometrijske informacije		topološka
	=	
dobljene iz ukrivljenosti		informacija.

Centralni objekt tega poglavja bo ukrivljenost povezave. Vendar se ne bomo omejili na ukrivljenost Levi-Civitajeve povezave, ki nastopa v Gauss-Bonnetovem izreku, ampak bomo govorili o poljubni povezavi na poljubnem vektorskem svežnju nad mnogoterostjo M. V nadaljevanju bo

$$\pi : E \longrightarrow M$$

kompleksen vektorski sveženj, $\pi^{-1}(m) = \mathbb{C}^n$. Najprej bomo navedli nekaj lastnosti multilinearnih form.

7.1 Multilinearne forme

Naj bo V poljuben n-dimenzionalen vektorski prostor.

Definicija 38 *Preslikava*

$$\widetilde{\varphi} : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{C}$$

je k-linearna forma, če je linearna v vsaki spremenljivki.

Vsaka k-linearna forma $\widetilde{\varphi}$ določa homogen polinom stopnje k na V

$$\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

s predpisom:

$$\varphi(a) = \widetilde{\varphi}(a, \ldots, a).$$

Tudi obratno je res. Vsak homogen polinom stopnje k na V določa multilinearno k-formo $\widetilde{\varphi}$. Naj bo

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|I|=k} a_I \vec{x}^I,$$

kjer so

$$\vec{x}^I = x_1^{d_1} x_2^{d_2} \ldots x_n^{d_n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i = k$$

monomi stopnje k. S simbolom I smo kot običajno označili multiindeks in z $|I|$ njegovo skupno stopnjo. Zapišimo naš homogen polinom na bolj brutalno ekspliciten način tako, da namesto potenc $x_i^{d_i}$ pišemo $x_i \ldots x_i$ - d_i- krat. Dobimo

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1,}^{n} b_{i_1 \ldots i_k} \; x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

zveza med koeficienti a_I in $b_{i_1 \ldots i_k}$ pa je

$$a_I = a_{d_1 \ldots d_n} = \alpha_{1 \ldots 1 \;\, 2 \ldots 2 \;\, n \ldots n} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} b_{\sigma(j_1)\sigma(j_2)\ldots\sigma(j_k)}.$$

Vzamemo seveda lahko

$$b_{\sigma(j_1) \ldots \sigma(j_k)} = b_{j_i \ldots j_k} = \frac{1}{k!} \; a_I.$$

Dobimo multilinearno formo

$$\widetilde{\varphi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} b_{i_1 i_2 \ldots i_k} \; x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

kjer $\vec{x}_i$ zasedajo različne vrednosti v prostoru V.

Nas bodo zanimale k-linearne forme m in ustrezni homogeni polinomi na prostoru kompleksnih matrik M_n dimenzije $n \times n$. Torej

$$\widetilde{\varphi} : \underbrace{M_n \times M_n \times \ldots \times M_n}_{k} \longrightarrow \mathbb{C}$$

in ustrezni homogeni polinomi

$$\varphi : M_m \longrightarrow \mathbb{C},$$

za katere zaradi homogenosti seveda velja

$$\varphi(c\ A) = c^k \varphi(A).$$

Definicija 39 *Naj bo $\widetilde{\varphi}$ k-linearna forma na M_n. Pravimo, da je $\widetilde{\varphi}$ Ad-invarianta, če velja:*

$$\widetilde{\varphi}(\mathrm{Ad}_g(A_1), \ldots, \mathrm{Ad}_g(A_k)) = \widetilde{\varphi}(A_1, \ldots, A_k)$$

za vsak element $g \in GL(n; \mathbb{C})$.

Za ustrezni k-homogeni polinom tedaj velja

$$\varphi(\mathrm{Ad}_g(A)) = \varphi(A).$$

Tak polinom se imenuje Ad-invariantni ali kar invariantni polinom.

Primer 4 *Naj bo $\varphi\colon M : n \to \mathbb{C}$ podan s predpisom*

$$\varphi(A) = \det(A).$$

Tedaj je φ očitno Ad-invarianten element v prostoru $I_m(M_n)$ homogenih polinomov reda n na M_n.

Splošneje, naj bodo preslikave $\varphi_k\colon M_n \to \mathbb{C}$ podane s predpisom

$$\det(A + zI) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(A) \cdot z^{n-k}.$$

Funkcije φ_k so seveda Ad-invariantne in so polinomi stopnje k.

Skrčitve preslikav φ_k na diagonalne matrike so natanko simetrični polinomi stopnje k z n spremenljivkami, ki jih dobimo iz Viettovih pravil.

7.2 Invariantne funkcije ukrivljenosti

Naj bo M mnogoterost in $\pi: E \to M$ vektorski sveženj z vlaknom $\mathbb{C}^n$ nad M. Imejmo na E povezavo, podano s kovariantnim odvodom $\nabla: \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$, in naj bo $F_\nabla \in \Omega^2(\mathrm{End}(E))$ ukrivljenost te povezave. V nadaljevanju bomo s pomočjo invariantnih funkcij pridobili iz ukrivljenosti globalno definirane $2k$-forme na M. Opozorimo na dejstvo, da F_∇ ni globalno definirana 2-forma na M z vrednostmi v matrikah, ampak prerez svežnja $\Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)$. Torej je 2-forma z vrednostmi v matrikah le lokalno.

Naj bo $\Omega^p(\mathrm{End}(E))$ prostor p-form z vrednostmi $\mathrm{End}(E)$ in naj bo τ_α lokalna trivializacija E/U_α. Kot smo že videli, τ_α podaja trivializacijo svežnja $EndE/U_\alpha$. Naj bo

$$\widetilde{\omega} \in \Omega^p(\mathrm{End}(E)/U_\alpha)$$

lokalni prerez. V lokalni trivializaciji τ_α pripada elementu $\widetilde{\omega}$ izrazitev:

$$\widetilde{\omega} \overset{\alpha}{=} \sum A^i \omega_i^\alpha,$$

kjer so $A^i: U_\alpha \to M_n$ funkcije z vrednostmi v matrikah in $\omega_i^\alpha \in \Omega^p(U_\alpha)$ običajne skalarne diferencialne p-forme.

Naj bo $U_\alpha \cap U_\alpha \neq 0$ in τ_β trivializacija E/U_β ter bo

$$\widetilde{\omega} \overset{\beta}{=} \sum B^i \omega_i^\beta$$

lokalna izrazitev glede na trivializacijo τ_β. Tedaj imamo

$$\omega_i^\alpha = \omega_i^\beta \quad na \quad U_\alpha \cap U_\beta$$

in zato po transformacijskem pravilu (24)

$$B^i(m) = \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}(m)} A^i(m) \quad za\ vsak \quad m \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

kjer je

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n;\mathbb{C})$$

prehodna preslikava med τ_α in τ_β.

Naj bodo sedaj $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k \in \Omega^p(\mathrm{End}(E)/U_\alpha)$ razcepni elementi. To pomeni, da za vsakega velja

$$\widetilde{\omega}_i = \Psi_i \cdot \omega_i,$$

kjer so $\Psi_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{EndE}/U_\alpha)$ lokalne matrične funkcije in $\omega_i \in \Omega^p(U_\alpha)$ skalarne forme. Naj bo kar

$$\widetilde{\omega}_i = A_i \cdot \omega_i.$$

Definicija 40 *Naj bo*

$$\widetilde{\varphi} : \underbrace{M_n \times M_n \times \ldots \times M_n}_{k} \longrightarrow \mathbb{C}$$

invariantna k-linearna forma na matrikah. Inducirana k-linearna preslikava

$$\widetilde{\varphi}_{U_\alpha} : \underbrace{\Omega^p(\mathrm{End}(E)/U_\alpha) \times \ldots \times \Omega^p(\mathrm{End}(E)/U_\alpha)}_{k} \longrightarrow \mathbb{C}$$

je na razcepnih elementih podana s predpisom

$$\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k) = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \cdot \widetilde{\varphi}(A_1, ..., A_k).$$

Na ves prostor $\Omega^p(\mathrm{End}(E)/U_\alpha)$ *razširimo* $\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}$ *po linearnosti.*

Primerjajmo sedaj inducirani preslikavi $\widetilde{\varphi}_\alpha$ in $\widetilde{\varphi}_\beta$ za par trivializacij, pri katerih je $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$. Velja

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_{U_\beta}(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k) &= \omega_1 \wedge \ldots \omega_k \cdot \widetilde{\varphi}(B_1, \ldots, B_k) \\
&= \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \cdot \widetilde{\varphi}(\mathrm{Ad}_g(A_1), \ldots, \mathrm{Ad}_g(A_k)) \\
&= \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \cdot \widetilde{\varphi}(A_1, \ldots, A_k) \\
&= \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_k)
\end{aligned}$$

za vsak $m \in U_\alpha \cap U_\beta$. To enakost po linearnosti razširimo na ves prostor k-form $\Omega^p(\mathrm{End}/(U_\alpha \cap U_\beta)$. Torej na $U_\alpha \cap U_\beta$velja

$$\widetilde{\varphi}_{U_\alpha} = lel\varphi_{U_\beta}.$$

Ta enakost omogoča tole definicijo.

Definicija 41 *Preslikava*

$$\widetilde{\varphi}_M : \underbrace{\Omega^p(\mathrm{End}(E))\times, \ldots \times \Omega^p(\mathrm{End}E)}_{k} \longleftarrow \Omega^{pk}(M) \qquad (36)$$

je multilinearna preslikava, podana z lokalnimi predpisi

$$\widetilde{\varphi}_M/U_\alpha = \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}.$$

Če preslikavo (36) krčimo na diagonalo v $(\Omega^p(EndE))^k$*, dobimo preslikavo:*

$$\varphi_M : \Omega^p(\mathrm{End}(E)) \longleftarrow \Omega^{pk}(M).$$

Ta preslikava je "učinek" invariantnega homogenega polinoma φ *na p-forme z vrednostmi v* $\mathrm{End}(E)$*.*

Naj bo sedaj

$$\nabla : \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$$

kovariantni odvod in

$$F_\nabla \in \Omega^2(\mathrm{End}(E))$$

njegova ukrivljenost.

Izrek 14 *Weilov izrek. Naj bo $\widetilde{\varphi}$ poljubna invariantna k-linearna forma na prostoru matrik M_n in φ pripadajoči k-homogeni polinom. Tedaj velja:*

1. *$\varphi_M(F_\nabla)$ je zaprta, globalno definirana $2k$-forma na M.*
2. *Naj bosta ∇_1 in ∇_2 dva kovariantna odvoda na $\pi\colon E \to M$. Tedaj obstaja $(2k-1)$-forma α na M, tako da velja:*

   $$\varphi_M(F_{\nabla_1}) - \varphi_M(F_{\nabla_2}) = d\alpha.$$

   Z drugimi besedami, kohomološki razred $[\varphi_M(F_{\nabla_1})] \in H^{2k}_{DM}(M)$ je neodvisen od izbire povezave ∇.

Dokaz izreka nam bosta omogočili naslednji dve lemi.

Lema 2 Bianchijeva identiteta *Ukrivljenost F_∇ je kovariantna konstanta glede na kovariantni odvod ∇,*

$$\nabla(F_\nabla) \equiv 0.$$

V lokalni izrazitvi, kjer imamo

$$\nabla \sim d + \omega_\alpha$$

in

$$F_\nabla \sim F_\alpha,$$

se zgornja enakost glasi

$$dF_\alpha + [\omega_\alpha, F_\alpha] = 0.$$

Dokaz: Spomnimo se Cartanove formule:

$$F_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha.$$

Od tod:

$$\begin{aligned} dF_\alpha &= d^2\omega_\alpha + d\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha \\ &= d\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha. \end{aligned}$$

Po drugi strani imamo

$$\begin{aligned}
[F_\alpha, \omega_\alpha] &= [d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha, \omega_\alpha] \\
&= d\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \\
&= d\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha - d\omega_\alpha \wedge d\omega_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Lema 3 *Naj bo $\widetilde{\varphi}$ invariantna k-linearna forma na M_n. Tedaj za vsako k-terico matrik $A_1, \ldots, A_k$ in vsak $B \in M_n$ velja*

$$\sum_{j=1}^{k} \widetilde{\varphi}(A_1, \ldots, [A_j, B], \ldots, A_k) = 0.$$

Dokaz: Naj bo $g(t) = \mathrm{Exp}(t \cdot B)$. Odvajajmo po t identiteto

$$\widetilde{\varphi}\Big(\mathrm{Ad}_{g(t)}(A_1), \ldots, \mathrm{Ad}_{g(t)}(A_k)\Big) = \widetilde{\varphi}(A_1, \ldots A_k)$$

in vstavimo vrednost $t = 0$. Zaradi multi-linearnosti $\widetilde{\varphi}$ je $D\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}$. Torej dobimo

$$\widetilde{\varphi}([B, A_1], \ldots, A_k) + \widetilde{\varphi}(A_1, [B, A_2], \ldots, A_k) + \ldots + \widetilde{\varphi}(A_1, \ldots, [B, A_k]) = 0,$$

to pa je že identiteta, ki smo jo hoteli dokazati.

□

Dokaz izreka: Dokažimo najprej prvo točko. Iz definicije množenja v stopničasti Liejevi algebri $\Omega^*(U_\alpha, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ in iz zgornje leme sledi

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{f(j)} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(A_1, \ldots, A_{i-1}, [A_j, B], A_{j+1}, \ldots, A_k) = 0,$$

za vse $A_j \in \Omega^{p_j}(U_\alpha; \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ in $\eta \in \Omega^q(U_\alpha; \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$. Zgoraj smo označili

$$f(j) = \deg(B) - \sum_{i \leq j} \deg(A_i).$$

Torej imamo v vsaki lokalni umeritvi τ_α na E/U_α:

$$\begin{aligned}
d\varphi_{U\alpha}(F) &= d\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha, \ldots, F_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha, ..., \overset{i}{dF_\alpha}, \ldots, F_\alpha, \ldots, F_\alpha) \\
\textit{po Bianchijevi identiteti} \quad &= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha, \ldots, \overset{i}{[F_\alpha \omega_\alpha]}, \ldots, F_\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Eksponent $f(i)$ je zgoraj celo sodo število.

Mimogrede opozorimo, da zgornja formula seveda velja globalno:

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{f(i)}\widetilde{\varphi}_M(A_1,\ldots,A_{j-1},[A_j,B],A_{j+1},\ldots,A_k)=0,$$

za vse $A_i\in\Omega^{P_i}(\mathrm{End}(E))$ in $B\in\Omega^q(\mathrm{End}(E))$.

V vsaki lokalni umeritvi T_α na E/U_α imamo torej

$$\begin{aligned}
d\varphi_{U_\alpha}(F_\nabla) &= d\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,F_\alpha)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}((F_\alpha,\ldots,F_\alpha,\overset{i}{dF_\alpha},F_\alpha,\ldots,F_\alpha)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}((F_\alpha,\ldots,\overset{i}{[F_\alpha,\omega_\alpha]},\ldots,F_\alpha)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{f(i)}\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}((F_\alpha,\ldots,\overset{i}{[F_\alpha,\omega_\alpha]},\ldots,F_\alpha)=0,
\end{aligned}$$

saj je $f(i)=1\cdot\sum_{j\leq i}2$ sodo število za vsak i. S tem smo prvo točko izreka dokazali.

Lotimo se sedaj druge točke. Dokazujemo:

$$\varphi_M(F_{\nabla_1})-\varphi_M(F_{\nabla_2})=d\alpha$$

za neko $(2k-1)$-formo $\alpha\in\Omega^{2k-1}(\mathrm{End}(E))$. V dokazu bomo formo α eksplicitno konstruirali, v ta namen pa je potrebno nekaj povedati o strukturi prostora $Con(E)$ povezavi na svežnju E. Dokažimo tole pomožno trditev.

Trditev 21 *Prostor $Con(E)$ je afin prostor, modeliran nad vektorskim prostorom $\Omega^1(\mathrm{End}(E))$.*

Dokaz trditve: Naj bosta $\nabla_1,\nabla_2\in Con(E)$ poljubni povezavi in $\omega_\alpha^1,\omega_\alpha^2$ njuni lokalni izrazitvi glede na T_α. Torej $\omega_\alpha^1,\omega_\alpha^2\in\Omega^1(U_\alpha,\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$. Lokalna izrazitev operatorja:

$$\nabla_1-\nabla_2:\Omega^0(E)\longrightarrow\Omega^1(E)$$

je tedaj

$$(d+\omega_\alpha^1)-(d+\omega_\alpha^2)=\omega_\alpha^1-\omega_\alpha^2.$$

Lokalna izrazitev $\nabla_1 - \nabla_2$ v T_β pa je $\omega_\beta^1 - \omega_\beta^2$, kjer je

$$\omega_\beta^i = -dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha^i), \qquad i = 1, 2.$$

Torej:

$$\begin{aligned} \omega_\beta^1 - \omega_\beta^2 &= -dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha^1) - (-dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha^2)) \\ &= \mathrm{Ad}_{g_{\alpha\beta}}(\omega_\alpha^1 - \omega_\alpha^2). \end{aligned}$$

Torej res:

$$\nabla_1 - \nabla_2 \in \Omega^1(\mathrm{End}(E)).$$

□

Vrnimo se k dokazu izreka. Naj bo

$$\begin{aligned} \nabla_t : \quad [a,b] &\longrightarrow \Omega^1(\mathrm{End}(E)) \\ t &\longmapsto \nabla_t \in Con(E). \end{aligned}$$

Pri vsakem t_0 je tangentni vektor

$$\dot{\nabla}_{t_0} = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \nabla_t \in \Omega^1(\mathrm{End}(E)).$$

Primer:

$$t \longmapsto t\nabla_2 + (1-t)\nabla_1 = \nabla_t.$$

V tem primeru je $\dot{\nabla}_t = \nabla_1 - \nabla_2 \in \Omega^1 \mathrm{End}(E))$ za vsak $t \in [0,1]$.

Vsaki poti ∇_t pripada pot

$$\begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \Omega^2(\mathrm{End}(E)) \\ t &\longmapsto F_{\nabla_t} = F_t. \end{aligned}$$

Pri tem je $F_t = F_{\nabla_t}$ ukrivljenost ∇_t.

Naj bo sedaj $\varphi \in I^k(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ invariantni polinom stopnje k, $t \to \nabla_t$ pot v $Con(E)$ in $t \to F_t$ ustrezna pot v $\Omega^2(\mathrm{End}(E))$, definirana na $[a,b]$.

Trditev 22 *Za funkcijo φ_M velja*

$$\varphi_M(F_a) - \varphi_M(F_b) = d\int_a^b \overline{\varphi}_M(F_t; \dot{\nabla}_t)\ dt),$$

pri čemer je:

$$\overline{\varphi}_M(\xi;\eta) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\varphi}_M(\xi,\ldots,\xi,\overset{i}{\eta},\xi,\ldots,\xi)$$

za vsak par $\xi,\eta \in \Omega^*(\mathrm{End}(E))$.

Dokaz: Polinom φ priredi poti F_t pot

$$\begin{aligned} \varphi_M(F_t): \quad [a,b] &\longrightarrow \Omega^{2k}(M) \\ t &\longmapsto \varphi_M(F_t) \end{aligned}$$

v prostoru $2k$-form na M. Označimo:

$$\dot{\varphi}_M(F_t) = \frac{d}{dt}\varphi_M(F_t) \in \Omega^{2k}(M).$$

Seveda velja:

$$\varphi_M(F_b) - \varphi_M(F_a) = \int_a^b \dot{\varphi}_M(F_t)\ dt.$$

Dokazati moramo torej:

$$\dot{\varphi}_M(F_t) = d\overline{\varphi}_M(F_t,\dot{\nabla}_t).$$

Ker je φ_M definiran po lokalnih kosih, moramo dokazati

$$\dot{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha(t)) = d\overline{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha(t);\dot{\omega}_\alpha(t)). \tag{37}$$

Zgoraj je

$$t \longmapsto F_\alpha(t)$$

pot v $\Omega^2(U_\alpha;\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$, ki jo dobimo z lokalno trivializacijo poti $F_{\nabla_t} = F_t$. Poti $t \mapsto \nabla_t$ v trivializaciji T_α pripada pot

$$t \longmapsto d + \omega_\alpha(t).$$

Odvajanje nam da

$$\frac{d}{dt}(d+\omega_\alpha(t)) = \dot{\omega}_\alpha(t),$$

torej drugi argument v izrazu na desni strani (37).

Upoštevajmo rezultata obeh zgoraj dokazanih lem in enačbi

$$\begin{aligned} F_\alpha &= d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha \\ \dot{F}_\alpha &= d\dot{\omega}_\alpha + [\dot{\omega}_\alpha,\omega_\alpha]. \end{aligned}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(F_\alpha(t)) &= \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}(F_\alpha(t)...F_\alpha(t)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\varphi}(F_\alpha(t),\ldots,\overset{i}{\dot{F}_\alpha}(t),\ldots,F_\alpha(t) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\varphi}(F_\alpha \ldots d\dot{\omega}_\alpha + \overset{i}{[}\dot{\omega}_\alpha,\omega_\alpha],\ldots,F_\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\varphi}(F_\alpha,\ldots,d\overset{i}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,F_\alpha) + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\varphi}(F_\alpha,\ldots,F_\alpha,[\dot{\omega}_\alpha,\overset{i}{}\omega_\alpha],F_\alpha,\ldots,F_\alpha).
\end{aligned}$$

Po drugi strani izračunamo:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha;\dot{\omega}_\alpha) &= && d(\textstyle\sum_{j=1}^{k} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,F_\alpha)) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{k} && \Big(\textstyle\sum_{i<j} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,\overset{i}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots F_\alpha)+ \\
& && + \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,d\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,F_\alpha)- \\
& && - \textstyle\sum_{i>j} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,d\overset{i}{F}_\alpha,\ldots,F_\alpha)\Big) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{k} && \Big(\widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,d\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,F_\alpha)+ \\
& && + \textstyle\sum_{i<j} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,[F_\alpha,\overset{i}{}\omega_\alpha],\ldots,\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,F_\alpha)- \\
& && - \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,[\dot{\omega}_\alpha,\overset{j}{}\omega_\alpha],\ldots,F_\alpha)- \\
& && - \textstyle\sum_{i>j} \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,\ldots,[F_\alpha,\overset{i}{}\omega_\alpha],\ldots,F_\alpha)+ \\
& && \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,[\dot{\omega}_\alpha,\overset{j}{}\omega_\alpha],\ldots,F_\alpha)\Big) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{k} && \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,d\overset{j}{\dot{\omega}}_\alpha,F_\alpha,\ldots,F_\alpha) \\
& && + \widetilde{\varphi}_{U_\alpha}(F_\alpha,\ldots,[\dot{\omega}_\alpha,\overset{j}{}\omega_\alpha],F_\alpha,\ldots,F_\alpha) \\
&= \dot{\varphi}(F_\alpha(t)).
\end{aligned}$$

Ker je $Con(E)$ konveksen prostor, lahko poljubni povezavi $\nabla_1,\nabla_2 \in Con(E)$ povežemo kar z linearno potjo:

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & Con(E) \\ t & \longmapsto & t\nabla_2 + (1-t)\nabla_1 = \nabla_t. \end{array}$$

Po zgornji trditvi torej velja:

$$\varphi_M(F\nabla_2) - \varphi_M(F\nabla_1) = d\alpha,$$

kjer je

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \displaystyle\int_0^1 \overline{\varphi}_M(F_{\nabla_t}; \nabla_2 - \nabla_1)\ dt \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \overline{\varphi}_M(F(t); \nabla_2 - \nabla_1)\ dt. \end{array}$$

7.3 Chernovi razredi

Zbrali smo vsa potrebna sredstva za definicijo Chernovih razredov. Naj bodo invariantni polinomi $\Phi_k \in I^k(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ podani s predpisom

$$\det(A + zI) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(A) \cdot z^{n-k}.$$

Stopnje teh polinomov so podane z $\deg(\Phi_k) = k$.

Definicija 42 *Naj bo $\pi\colon E \to M$ vektorski sveženj z vlaknom $\mathbb{C}^n$. Naj bo*

$$\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$$

poljubna povezava na E. Tedaj je k-ta Chernova forma $c_k(E,\nabla)$ svežnja E glede na povezavo ∇ definirana s predpisom

$$c_k(E,\nabla) = (\Phi_k)_M(\frac{i}{2\pi}F_\nabla) \quad \in \quad \Omega^{2k}(M).$$

Totalna Chernova forma je

$$c(E,\nabla) = \sum_{k=1}^{n} c_k(E,\nabla),$$

kjer je $n = rang(E)$.

Točka 2. Weilovega izreka (14) nam omogoča zapisati tole definicijo.

Definicija 43 *Naj bo spet $\pi\colon E \to M$ kompleksen vektorsski sveženj kakor zgoraj. Tedaj je k-ti Chernov razred tega svežnja podan s predpisom*

$$c_k(E) = [c_k(E, \nabla)] \;\in\; H^{2k}_{DR}(M; \mathbb{C}),$$

pri čemer je $\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ poljubna povezava na E, s $[c_k(E; \nabla)]$ pa smo označili de Rhamov kohomološki razred forme $c_k(E; \nabla)$.

Izrek 15 *Chernovi razredi so realni. Natančneje:*

$$c_k(E) \in H^{2k}(M, \mathbb{R}) \subset H^{2k}(M, \mathbb{C}).$$

Dokaz: Opremimo sveženj $\pi\colon E \longrightarrow M$ s hermitsko metriko $H \in \Omega^0(S(E^* \oplus E^*))$ (Metrika H opremi vsako vlakno E_m s *hermitskim* produktom.)

Naj bo povezava $\nabla\colon \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$ usklajena s H. Velja naj

$$d\, H(s_1, s_2) = H(\nabla(s_1), s_2) + H(s_1, \nabla(s_2)).$$

Taki povezavi pravimo tudi hermitska povezava za metriko H. Lahko je videti, da taka povezava res obstaja. Celo več jih je.

Izberimo nad $U_\alpha \in M$ ogrodje lokalne skrčitve E/U_α, ki je glede na H ortonormirano. Za lokalne prereze

$$\{s_1, \ldots, s_n\} : U_\alpha \longrightarrow E/U_\alpha$$

naj torej velja:

$$H_m(s_i(m), s_j(m)) = \delta_{ij}, \qquad \text{za vsak } m \in U_\alpha.$$

Naj bo ω_α lokalna izrazitev povezave ∇ glede na trivializacijo, podano z $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Poljuben prerez $F\colon U_\alpha \to E/U_\alpha$ izrazimo v tem ogrodju:

$$f(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) s_i(m) \;\in\; \Omega^0(E/U_\alpha)$$

in si oglejmo njegov kovariantni odvod glede na hermitsko povezavo ∇. Imamo

$$\nabla f = \begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \\ \vdots \\ da_n \end{pmatrix} \;+\; \omega_\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Vrinimo v dokaz izreka tole trditev.

Trditev 23 *Matrika 1-forme ω_α je sebi-adjungirana: Natančneje, naj bo*

$$\omega_\alpha = \sum A_i \omega_i.$$

Tedaj je

$$\omega_\alpha^* = \sum A_i^* \omega_i = \sum (-A_i)\ \omega_i$$

oziroma

$$\omega_\alpha^* = -\omega_\alpha.$$

Dokaz Za $\{s_1, ..., s_n\}$ velja:

$$dH(s_i, s_j) = d\delta ij = 0.$$

Po drugi strani

$$\begin{aligned} dH(s_i, s_j) &= H(\nabla s_i, s_j) + H(s_i, \nabla s_j) \\ &= H(\omega_\alpha(e_i), e_j) + H(e_i, \omega_\alpha(e_j)) \\ &= (\omega_\alpha)_{ij} + \overline{(\omega_\alpha)}_{ji} = 0. \end{aligned}$$

Torej res:

$$\omega_\alpha = -\omega_\alpha^*.$$

□

Zgornjo ugotovitev lahko izrazimo tudi z zapisom $\omega_\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{u}(n))$.

Spomnimo se Cartanove enačbe v izvirni obliki:

$$F_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha].$$

Ker je $\mathfrak{u}(n)$ Liejeva algebra, velja:

$$F_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{u}(n)),$$

oziroma

$$F_\alpha^* = -F_\alpha^*.$$

Zgornji izraz je seveda treba razumeti glede na unitarno umeritev E/U_α.

Vrnimo se k dokazu izreka o realnosti Chernovih form. Chernova forma reda K je glede na našo povezavo ∇ tedaj lokalno podana s predpisom

$$c_k(E; \nabla)|_{U_\alpha} = (\Phi_k)_{U_\alpha}(\frac{i}{2\pi} F_\alpha).$$

Toda če velja: $F_\alpha^* = -F_\alpha^*$, velja

$$(\frac{i}{2\pi}F_\alpha)^* = \frac{i}{2\pi}F_\alpha.$$

Za hermitsko simetrične matrike $A \in i\mathfrak{u}(n)$ pa velja

$$\det(A + zI) = \overline{\det(A^* + zI)}$$

oziroma

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(A) z^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(A^*) z^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(A) z^{n-k} \end{aligned}$$

za vsak $z \in \mathbb{C}$. Torej imamo

$$\Phi_k(A) = \Phi_k(A), \qquad \textit{za vsak } k = 1 \ldots, n$$

in od tod

$$c_k(E;\nabla)|U_\alpha = \overline{c_k(E;\nabla)|U_\alpha}.$$

Zgornji rezultat je neodvisen od dejstva, da smo pri dokazovanju izbrali unitarno umeritev, saj so Chernove forme $c_k(E;\nabla)$ neodvisne od izbire umeritve, so pač globalne skalarne diferencialne forme. Torej res velja:

$$[c_k(E;\nabla)] = c_k(E) \ \in \ H^{2k}(M;\mathbb{R}),$$

kar smo želeli dokazati.

Trditev 24 *Naj bo T_α poljubna (ne nujno unitarna) umeritev E/U_α. Tedaj se glede na to umeritev H lahko izraža s ∇.*

$$H_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \textit{hermitsko simetrične matrike.}$$

Naj bo kovariantni odvod ∇ usklajen s H in ω_α njegova lokalna izrazitev. Tedaj velja:

$$\omega_\alpha = H^{-1}dH - \mathrm{Ad}_{H^{-1}}(\omega^*).$$

Dokaz: Naj bo naša trivializacija podana s prerezi $\{s_1, ..., s_j\}$. Tedaj velja

$$H_m(s_i(m), s_j(m)) = (H_m)_{ij}, \qquad \textit{za vsak par } i, j,$$

saj

$$H_m(s_i(m), s_j(m)) = (e_i)^T \cdot H(m)e_j,$$

kjer smo z $\{e_1, \ldots, e_n\}$ spet označili kanonično bazo prostora $\mathbb{C}^n$. Iz

$$dH(s_i, s_j) = H(\nabla s_i, s_j) + H(s_i, \nabla s_j)$$

in iz

$$\nabla s_i = (d + \omega_\alpha)e_i = \omega_\alpha(e_i)$$

dobimo

$$\begin{aligned} d(H)_{ij} &= H(\omega_\alpha(e_i), e_j) + H(e_i, \omega(e_j)) \\ &= (\omega_\alpha(e_i))^* \cdot H \cdot e_j + e_i^* \cdot H \cdot \omega e_j \qquad (38) \\ &= e_i^* \cdot (\omega_\alpha^* \cdot H + H \cdot \omega) \cdot e_j. \end{aligned}$$

Po drugi strani imamo

$$d(H)_{ij} = d(s_i^* H s_j) = s_i dH s, \qquad (39)$$

ker $ds_k = 0$. Iz enačb (38) in (39) sledi, da za vsak par s_i, s_j velja

$$s_i^*(-dH + \omega^* H + H\omega)sj = 0.$$

Od tod res sledi

$$\omega_\alpha = H^{-1}dH - \mathrm{Ad}_H(\omega^*).$$

□

Posledica 2 *Za lokalno izrazitev ukrivljenosti glede na poljubno, ne nujno unitarno umeritev, velja*

$$F_\alpha = -\mathrm{Ad}_H F_\alpha^*.$$

Dokaz: Zgornja zveza sledi neposredno iz prejšnje trditve in iz Cartanove enačbe.

□

References

[1] Adams, F., Introduction to Lie groups.