II Mnogoterost – definicija in osnovni pojmi

Osnovna definicija "z najmanj strukture" je topološka definicija:

Def: Topološka mnogoterost dimenzije n je topološki prostor, ki ima naslednje lastnosti:

a) M je lokalno evklidski $\mathbb{R}^n$

b) M je T_2

c) M je 2-števen, t.j. M ima števno bazo topologije.

a) pomeni: Za vsako točko $m \in M$ obstaja okolica $m \in U \subset M$ in homeomorfizem

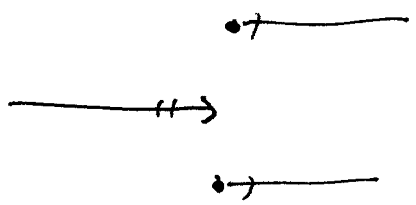
$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$$

Ker je odprt disk $D \subset \mathbb{R}^n$ homeo $\mathbb{R}^n$, lahko razmeno karte

$$\varphi : U \xrightarrow{\text{homeo}} D .$$

Premislite si, da a) implicira b), vendar ni tako:

Primer;



Iz definicije sledi nekaj lastnosti (topoloških)

<u>Trditev</u> Topološka mnog. je

a) lokalno povezana

b) lokalno kompaktna

c) števno kompaktna

d) normalna

e) metrizabilna

f) parakompaktna:

<u>Dokaz:</u> nekatere lastnosti (a),(b) so očitne, z drugimi se ne bomo ukvarjali.

Pomembno dejstvo:

<u>Izrek</u> (Brouwer (1911)) Če je $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfna $V \subset \mathbb{R}^m$, tedaj mora biti $n = m$.

Zato lahko dobro definiramo dimenzijo mnogoterosti.

Gladke mnogoterosti

<u>Definicija</u>: a) Atlas na topološki mnogoterosti M je množica $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) ; \alpha \in A\}$

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbb{R}^n \quad \text{homeomorfizem.}$$

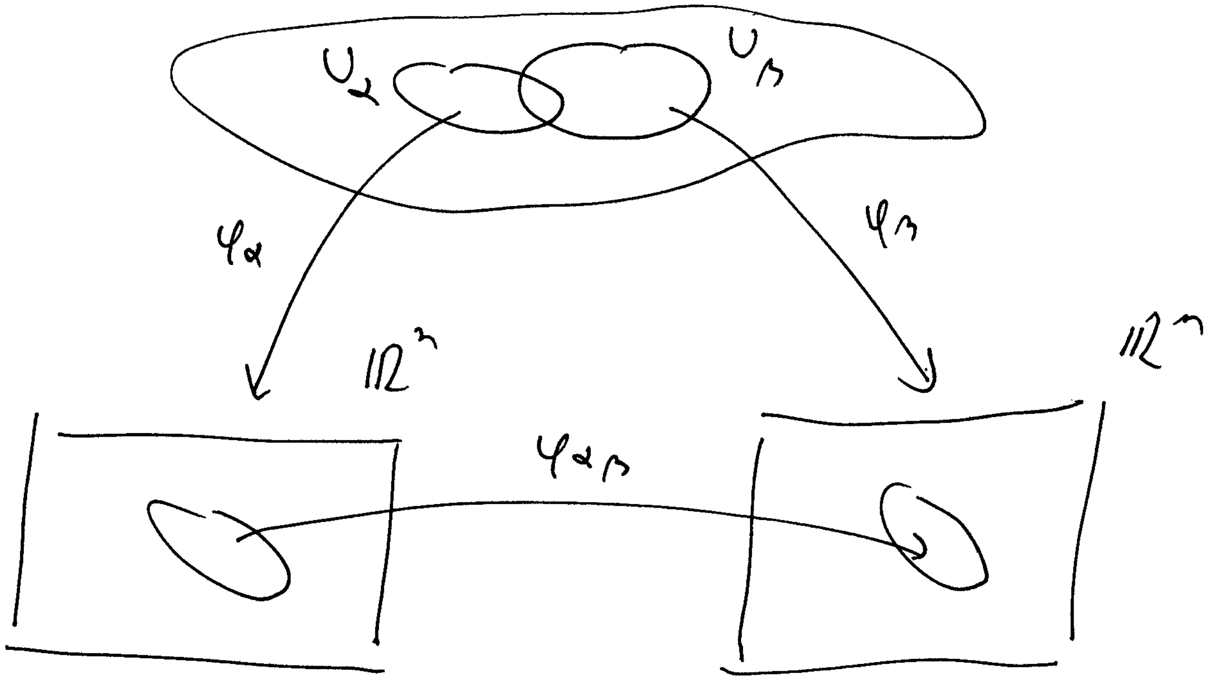
b) Atlas $\mathcal{U}$ je razreda C^r, če je za vsak par α, β, za katera $U_\alpha \cap U_\beta \neq \{\emptyset\}$ velja:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

je C^r - gladka preslikava.

N.B. $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$



Preslikava $\varphi_{\alpha\beta}$ iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$ znamo odvajati.

c) Dva C^r-atlasa $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ sta ekvivalentna, če je $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet C^r-atlas. $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$

$\sim$ je ekvivalenčna relacija.

Ekvivalenčni razred $[\mathcal{V}]$ se imenuje gladka struktura. $[\mathcal{U}]$ lahko identificiramo z maksimalnim atlasom, ki je unija vseh atlasov v $[\mathcal{U}]$.

Zanimivo vprašanje: Ali je na vsaki top mnogoterosti vedno le ena C^r, C^∞, C^ω - gladka struktura?

Odgovor: Ne.

Prvi primeri, S. Smale, J. Milnor

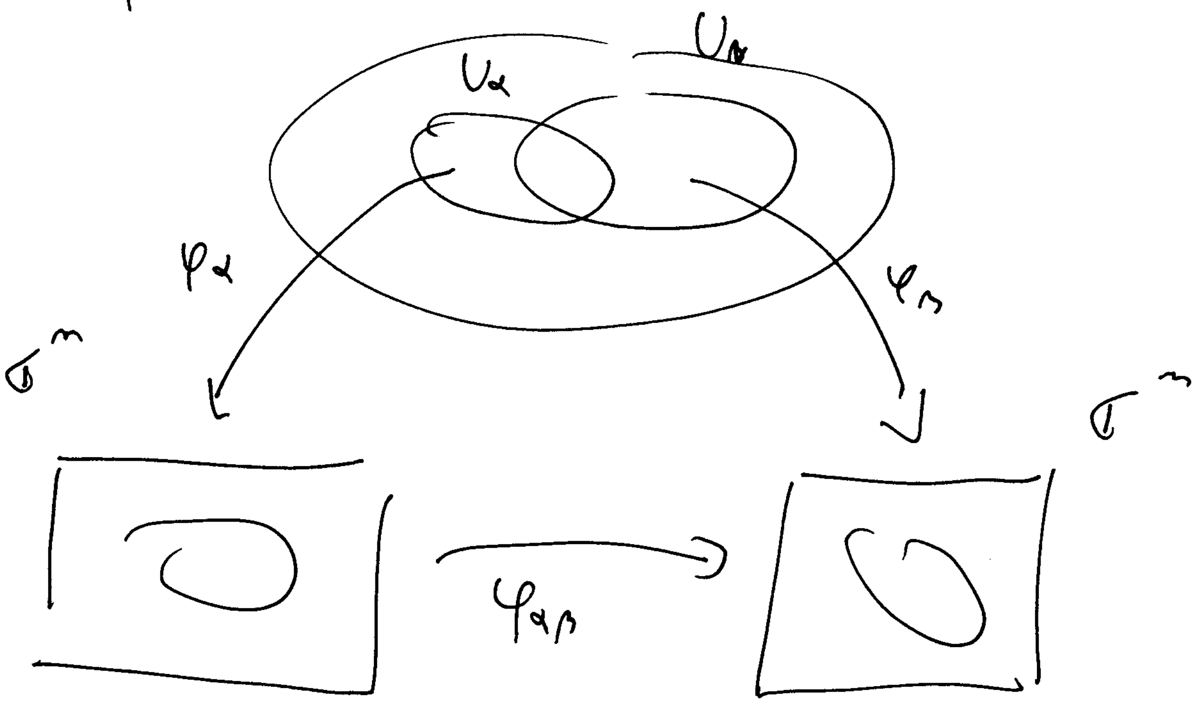
kompaktne mnog.

Presenetljiv primer: $\mathbb{R}^4$

Vsak $\mathbb{R}^n$ $n \neq 4$ ima natanko eno gladko strukturo. $\mathbb{R}^4$ pa jih ima kontinuum mnogo neekvivalentnih. (sledi iz dela S.K. Donaldsona in M. Freedmana v 80' letih)

Def: C^r-mnogoterost M je topološka mnogoterost M skupaj z izbiro C^r-strukture (oz. C^r-atlasa).

Kompleksna mnogoterost: Top. dimenzije $2n$ + holomorfni atlas



$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je biholomorfna preslikava

Primeri (gladkih) mnogoterosti:

1) Odprte množice v $\mathbb{R}^n$.

$M = V \overset{odp}{\subset} \mathbb{R}^n$.

Atlas: $\mathcal{U} = \{ (V, i) \}$

$i : V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ inkluzija

Npr. $V = \mathbb{R}^n$.

Poseben primer, ki sodi v ta razred:

$GL(n;\mathbb{R})$

$GL(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \setminus \{ \det^{-1}(0) \}$.

Ker je $\det : gl(n;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$

zvezna (gladka) preslikava, je $\det^{-1}(0)$ zaprta v $\mathbb{R}^n$...

$GL(n;\mathbb{R})$ – osnovni primer Liejeve grupe

mnt + grp.

2) Sfera:

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

- to je npr. primer "nivojnice določene preslikave"

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

$$F(x_0, \dots x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 1$$

$$S^n = F^{-1}(0).$$

Atlas na sferi:

$$\mathcal{U} = \{(U_j^\pm, \varphi_j^\pm)\}$$

$$U_j^+ = \{x \in S^n;\ x_j > 0\}$$

$$U_j^- = \{x \in S^n;\ x_j < 0\}$$

$$\varphi_j^{\pm} : U_j^{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, \dots x_j, \dots x_n) \longmapsto (x_0, \dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots x_n) = (x_0, \dots \hat{x}_j \dots x_n)$$

$$(\varphi_j^{\pm})^{-1} : B^n \longrightarrow U_j^{\pm}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_{j-1}, \pm\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, y_j, \dots, y_n)$$

Then, for $j \neq k$:

$$\varphi_k^{\pm} \circ (\varphi_j^{\pm})^{-1} = (y_1, \dots, \hat{y}_k, \dots, \sqrt{1-\sum y_i^2}, \dots, y_n)$$

The [illegible] C^∞-diffeomorphism B [illegible].

[illegible] condition, C^ω.

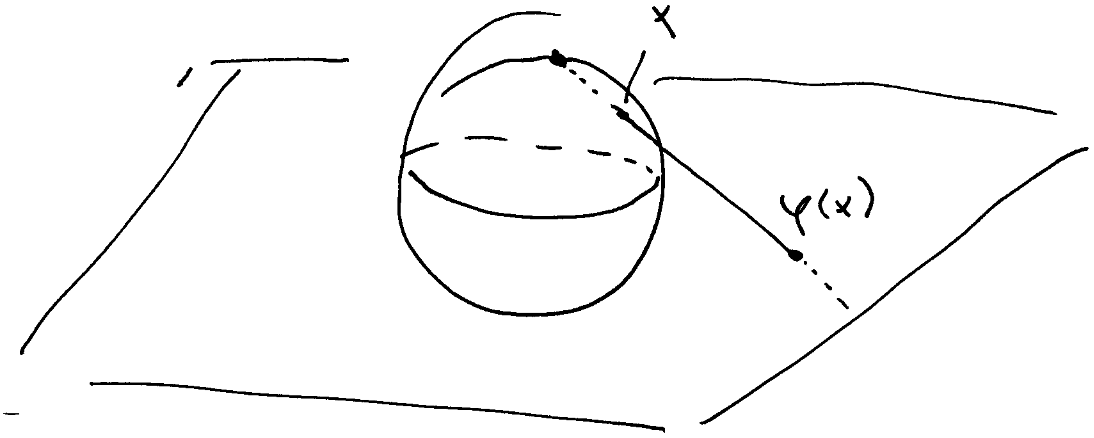
Boljši ekonomičen atlas:

$$\mathcal{U} = \{(U,\varphi),\ (V,\psi)\}$$

$U = S^n \setminus (0,\dots,0,+1)$ severni pol

$V = S^n \setminus (0,\dots,0,-1)$ južni pol.

- $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ - stereografska proj. iz SP
  $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ - " - JP



Naloga: a) Poišči formuli za φ, ψ

b) Dokaži, da je atlas $\mathcal{U}$ ekvivalenten tistemu na prejšnji strani.

3) Produktne mnf:

Naj bosta M^m, N^n mnogoterosti (gladki)

Tedaj je $M^m \times N^n$ gladka mnogoterost

dimenzije $m+n$.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ atlas za M

– " – $\mathcal{V} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ atlas z N

Tedaj je

$$\mathcal{Z} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta); \alpha \in A, \beta \in B\}$$

atlas na $M \times N$.

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)^{-1} \circ (\varphi_{\alpha'} \times \psi_{\beta'})^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}, \psi_{\alpha'} \circ \psi_{\beta'}^{-1})$$

Primer: $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ torus

4. Kvocientne mnogoterosti

Naj bo X top. mnogoterost in $\sim$ ekv. relacija. Oznaka

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim$$
$$x \longmapsto [x] \text{ - ekv. razred}$$

$A \subset X$; $[A] = \{ y : y \sim x \text{ za kak } x \in A \}$

$[A]$ - saturacija množice A.

Def: Če je za $\forall A \overset{odp}{\subset} X$ saturacija $[A]$ tudi odprta, pravimo, da je relacija $\sim$ odprta.

Def: Kvocientna topologija na $X/\sim$ je najmočnejša topologija, za katero je

$$\pi : X \to X/\sim \text{ zvezna.}$$

Trditev: Množica $B \subset X/\sim$ je odprta $\iff \pi^{-1}(B) \subset X$ odprta

Trditev: Če je $\sim$ odprta relacija na X, potem je kvocientna projekcija odprta preslikava. Če je $\sim$ odprta in je X 2-števen, je tudi $X/\sim$ 2-števen

$B \subset X$ odp:

$[B] = \pi^{-1}(\pi(B))$

$\sim$ odprta $\Rightarrow [B]$ odp $\Rightarrow \pi(B)$ odp, ker $\sim$ top. identifikacija

Dokaz: Lahko sledi iz definicij.

Pomembno vprašanje: Kdaj je $X/\sim$ Hausdorffov. (Predpostavimo, da X je T_2)

Definicija: Relacija $\sim$ je zaprta, če je

$$R = \{(x,y) \in X \times X \,;\, x \sim y\} \subset X \times X$$

zaprta podmnožica v $X \times X$.

Trditev Naj bo $\sim$ odprta relacija na X, ki je Hausdorffov. Tedaj je $X/\sim$ Hausdorffov natanko tedaj, ko je $\sim$ zaprta relacija.

Dokaz: Naj bo R zaprta. Vzemimo različni $[x] \neq [y] \in X/\sim$. Tedaj $(x,y) \notin R$, saj $x \sim y \Leftrightarrow [x]=[y]$! Zato obstajata

$x \in U \overset{odp}{\subset} X$, $y \in V \overset{odp}{\subset} X$, tako da je

$$(U \times V) \cap R = \emptyset$$

To pa pomeni $x' \in U$, $y' \in V \Rightarrow (x',y') \notin R$, $x' \not\sim y'$

Od tod: $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ v $X/\sim$

odprta okolica $[x]$ — odprta okolica $[y]$

ker je $\sim$ odprta!

$\pi(U)$, $\pi(V)$ disjunktni odp. $X/\sim$ je T_2

<u>Obratno:</u> Denimo: $X/\sim$ je Hausdorffov:

$(x,y) \notin R$ pogledamo točki: Potem $[x] \neq [y]$

obstajata $\tilde{U}, \tilde{V} \subset X/\sim$; $[x] \in \tilde{U}$, $[y] \in \tilde{V}$

in $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$

Naj bo $U = \pi^{-1}(\tilde{U})$, $V = \pi^{-1}(\tilde{V})$

U, V sta odprti v X. in

$$(U \times V) \cap R = \emptyset.$$

Če bi obstajal $(x',y') \in (U \times V) \cap R$, bi veljalo

$[x'] = [y']$ in $[x'] \in \tilde{U}$, $[y'] \in \tilde{V}$ $\quad \tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ protislovje.

Torej je R res zaprta.

<u>Opomba:</u> V obratu nismo potrebovali odprtosti $\sim$

Torej ($X/\sim$ Hausdorffov $\Rightarrow$ $\sim$ zaprta)

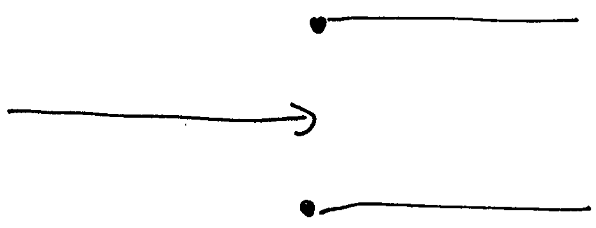
Če $\sim$ ni zaprta, se lahko zgodi, da je $X/\sim$ lokalno evklidski in 2-števen, ne pa T_2.

<u>Primer:</u> $X = \mathbb{R}^{(1)} \sqcup \mathbb{R}^{(2)}$

$\sim$: $t \in \mathbb{R}^{(1)}$; $t \geq 0$ ekvivalenten le sebi

$s \in \mathbb{R}^{(2)}$; $s \geq 0$ — " —

$t \in \mathbb{R}^{(1)}$; $t < 0$ ekvivalenten $t \in \mathbb{R}^{(2)}$



Relacije, ki niso zaprte se rade pojavijo pri delovanjih <u>nekompaktnih</u> grup na mnogoterostih.

Delovanje $\mathbb{R}$ na T^2 racionalno ok

iracionalno ni ok

Delovanje $\mathbb{R}$ na T^2

$$T^2 = \{ (e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \ ; \ \varphi, \psi \in [0, 2\pi) \}$$

$$\rho(t)(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = \left(e^{i(\varphi + lt)}, e^{i(\psi + kt)} \right)$$

Dokaži: Relacija $\sim$ podana z definicijo

$$x \sim y \iff y = \rho(t) \cdot x \quad \text{za neki } t \in \mathbb{R}$$

je zaprta natanko tedaj, ko velja

$$\frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$$

Projektivni prostori

Projektivni prostor $\mathbb{RP}^n$ je prostor vseh premic skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n+1}$.

Točneje: Naj bo

$$X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

in relacija v X naj bo podana z

$$x \sim y \iff x = ty \quad \text{za neki } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Ta relacija je odprta.

Res: Naj bo $\varphi_t(x) = tx$

Za vsak t je $\varphi_t : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

difeomorfizem. $\varphi_t^{-1} = \varphi_{\frac{1}{t}}$!

Naj bo $U \subset X$ odprta. Tedaj je

$$[U] = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^*} \varphi_t(U) = \text{unija odprtih množic } \varphi_t(U)$$

torej odprta.

Domača naloga: Dokažite, da je $\sim$ tudi zaprta.

Torej

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$$

je Hausdorffov in 2-števen prostor.

Je tudi kompakten. To najlažje vidimo takole:

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \{[x]\ ;\ x \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\}$$

Oglejmo si $[x]$. Naj bo $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enotska sfera: Tedaj je

$$[x] \cap S^n = \left\{\frac{x}{\|x\|}, -\frac{x}{\|x\|}\right\}$$

Torej vsak razred $[x]$ lahko upodobimo na S^n. Slika razreda $[x]$ na S^n je par antipodnih točk

$\frac{x}{\|x\|}$ in $-\frac{x}{\|x\|}$.

Oglejmo si preslikavo

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n \qquad \text{zvezna}$$

$$\vec{x} \longmapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Za to preslikavo velja: $\sim$ relacija v $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\approx$ " v S^n

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff f(\vec{x}) \approx f(\vec{y})$$

Torej je $f : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/_{\sim} \to S^n/_{\approx}$

homeomorfizem.

Zato:
$$\mathbb{R}P^n = S^n/\sim \qquad x \sim y \iff x = -y.$$

Iz konstrukcije je še lažje dokazati, da je odprta in zaprta.

$$\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^2 = S^n/\sim$$

je zvezna preslikava
$$\pi(x) = [x] = \{x, -x\}$$

Zvezna slika kompaktnega prostora je kompaktna.

Opremimo lahko $\mathbb{R}P^n$ s strukturo gladke mnogoterosti. (strukturo, ki jo bomo dobili, bo celo analitična)

Oznaka:
$$\pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = [x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n$$

homogene koordinate točke (x)

N.B.

$$[t x_0, t x_1 \dots t x_n] = [x_0, x_1, \dots, x_n] \qquad t \in \mathbb{R}^*$$

in vsaj mora biti vsaj en x_i različen od 0!

Atlas na $\mathbb{RP}^n$: $\quad \mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j),\ j = 0, \dots, n\}$

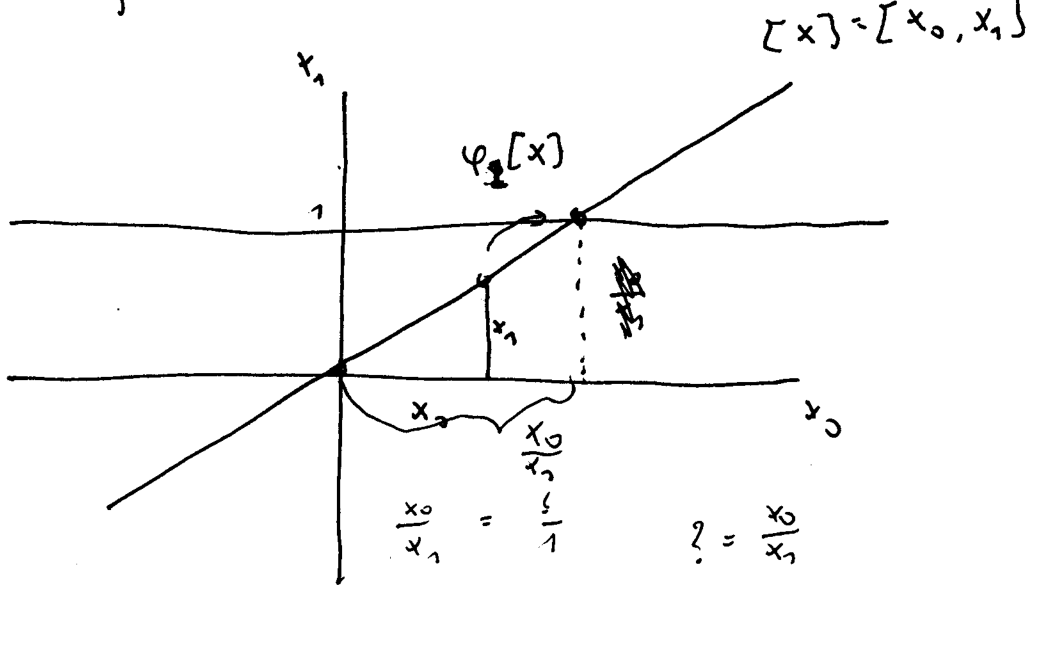
$$U_j = \{[x] \in \mathbb{RP}^n;\quad x_j \neq 0\} = \pi(\tilde{U}_j)$$

in $\tilde{U}_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\};\ x_j \neq 0\}$

$$\varphi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_j([x_0, \dots, x_j, \dots x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots \frac{x_n}{x_j}\right)$$

Afina karta.



$$\varphi_j^{-1}(t_1,\dots,t_n) = [t_1,\dots,t_j,1,t_{j+1},\dots,t_n]$$

Predstavnik z $x_j = 1$.

Prehodne preslikave:

$i<j$

$$(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(t) = \left(\frac{t_1}{t_i},\dots,\widehat{\frac{t_i}{t_i}},\dots,\frac{t_j}{t_i},1,\frac{t_{j+1}}{t_i},\dots,\frac{t_n}{t_i}\right)$$

To je obrnljiva C^ω-preslikava.

Torej je $\mathcal{U}$ C^ω-atlas na $\mathbb{RP}^n$.

Primer: $\mathbb{RP}^1 = S^1$

$\mathbb{RP}^2 = S^2/_{x\sim -x}$ neorientabilna ploskev

Če nadomestimo $\mathbb{R}$ z $\mathbb{C}$ in naredimo analogno konstrukcijo, dobimo kompleksne projektivne prostore.

Kakšen je model $\mathbb{C}P^n$ s sfero.

$$\mathbb{C}P^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim$$

$$\sim \qquad \vec{z} \sim \vec{w} \iff \vec{w} = \alpha \cdot \vec{z} \qquad \alpha \in \mathbb{C}^*$$

Presek $\{\alpha \cdot \vec{z}\}$ s sfero $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$:

Lahko privzamemo, da je $\|\vec{z}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1$.

Tedaj:

$$\{\alpha \cdot \vec{z}\} \cap S^{2n+1} = \{\alpha \cdot \vec{z} \,;\; |\alpha| = 1\}$$

$$= \{e^{i\varphi} \vec{z} \,;\; \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Presek je tedaj krožnica.

$\mathbb{C}P^n$ lahko tudi predstavimo takole:

Na $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ je definirano delovanje grupe krožnice $U(1)$:

$$\rho : U(1) \times S^{2n+1} \to S^{2n+1}$$

$$S^{2n+1} = \left\{ (z_1, z_2, \dots z_n, z_{n+1}) ; \ \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1 \right\}$$

$$(e^{i\varphi}, \vec{z}) \mapsto (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2, \dots, e^{i\varphi} z_{n+1})$$

Na množici S^{2n+1} vpeljemo relacijo $\sim$ takole:

$$\vec{z} \sim \vec{w} \iff \vec{z} = e^{i\varphi} \vec{w}, \quad \text{i. } \vec{z}, \vec{w} \text{ sta}$$

v isti orbiti delovanja grupe ρ.

D.N. Dokaži: Relacija $\sim$ je odprta in zaprta.

Torej: $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/\sim$.

Poseben primer, ki ga bolj opišemo tudi nekoliko drugače:

Oglejmo si matrično grupo $SU(2)$.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ; \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Kot mnogoterost je $SU(2)$ torej $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

$$\underset{\in S^3 \subset \mathbb{C}^2}{(a, b)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Delovanje grupe $U(1)$ na $SU(2)$:

$$U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} ; \ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}$$

Matrično množenje

$$\tilde{\rho} : U(1) \times SU(2) \longrightarrow SU(2)$$

$$\left(\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$$

Poiščimo tako preslikavo

$$\pi : SU(2) \longrightarrow \mathrm{Mat}^{\mathbb{C}}_{2\times 2} ,$$

ki bo veljalo:

$$\pi(g_1) = \pi(g_2) \iff g_1, g_2 \text{ sta v isti orbiti } \tilde{\rho}.$$

$$g_2 = h g_1$$

torej: $\pi(g_1) = \pi(g_2) \iff \cancel{g_2 = g_1 h}$ za

nekih $h = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$.

Označimo

$$b = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Za $\forall\ h \in U(1)$ velja:

$$h b = b h\,, \qquad (\alpha)$$

oziroma

$$h b h^{-1} = b \qquad (\beta)$$

Dokaži: (α) in (β) velja za <u>natanko tiste</u> $g \in SU(2)$, ki so $g = h \in U(1) \subset SU(2)$.

Iskana preslikava π je taka:

$$\pi(g) = g^{-1} \cdot b \cdot g^{*}$$

Res

$$\pi(g \cdot h) = g^{-1} h^{-1} b\, h^{*} g^{*} = g^{-1} b\, g^{*} = \pi(g)$$

Oglejmo si, kaj je slika π:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\bar{a} & -ib \\ -i\bar{b} & -ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(|a|^2 - |b|^2) \,, & -i\, 2ab \\ i\, 2ab \,, & -i(|a|^2 - |b|^2) \end{pmatrix}$$

Preselimo nazaj v običajne koordinate $\mathbb{C}$:

$$(z_1, z_2) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

Preslikava Π porodi preslikavo

$$\tilde{\Pi}((z_1, z_2)) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, \ 2 z_1 z_2)$$

$$\in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^3$$

Trdimo: Slika $\tilde{\Pi}$ je enotska sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Res:

$$(|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + 4|z_1|^2|z_2|^2 =$$

$$= |z_1|^4 + |z_2|^4 - 2|z_1|^2|z_2|^2 + 4|z_1|^2|z_2|^2 =$$

$$= |z_1|^4 + 2|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

$$= 1^2 = \underline{\underline{1}}$$

Ugotovili smo tole:

$\mathbb{C}P^1$ je topološko gladka sfera S^2.

Homogene koordinate na $\mathbb{C}P^1$:

$$\mathbb{C}P^1 = U \cup V$$

$$U = \{[z,w] ;\ z \neq 0\} ; \quad \varphi([z,w]) = \frac{w}{z} = \xi \in \mathbb{C}$$

$$V = \{[z,w] ;\ w \neq 0\} ; \quad \psi([z,w]) = \frac{z}{w} = \frac{1}{\xi}$$

$$\varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$$

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$

Namreč posplošitev projektivnih prostorov so Grassmannove mnogoterosti.

$$G_{k,n}(\mathbb{R}) = \{ k\text{-dimenzionalni podprostori v } \mathbb{R}^n \}$$

$$G_{k,n}(\mathbb{C}) = \{ \qquad \text{"} \qquad \text{v } \mathbb{C}^n \}$$

Označimo z $V_{k,n}$ prostor k-ogrodij v $\mathbb{R}^n$:

$$V_{k,n} = \{ x = (x^1, \dots, x^k) \; ; \; x^j \in \mathbb{R}^n, \; j = 1, \dots, k, \; \text{rang } x = k \}$$

Torej vsak element iz $V_{k,n}$ razpenja nek k-dim podprostor v $\mathbb{R}^n$. Vendar lahko različni elementi razpenjajo isti prostor.

$$V_{k,n} \overset{\text{odprta}}{\subset} \mathbb{R}^{n * k}$$

Opazimo, da grupa $GL_k(\mathbb{R})$ deluje na $V_{k,n}$.

Naj $x \in V_{k,n}$, $\alpha \in GL_k(\mathbb{R})$

Trditev: $x \cdot \alpha \in V_{k,n}$

Relacija v $V_{k,n}$:

$$x \sim y \iff x = y \cdot \alpha \quad \text{za neki } \alpha \in GL_k(\mathbb{R}).$$

Izkaže se, da je ta relacija zaprta in odprta.

- odprtost dokažemo enako kot v primeru $\mathbb{R}P^n$.

$$\varphi_\alpha : V_{k,n} \to V_{k,n}$$

$$X \mapsto X \cdot \alpha$$

$$\varphi_\alpha^{-1}(X) = X \cdot \alpha^{-1} \implies \varphi_\alpha = \text{difeo}$$

Saturacija odprte množice $U \subset V_{k,n}$

$$[U] = \bigcup_{\alpha \in GL_k(\mathbb{R})} \varphi_\alpha(U)$$

<u>Def:</u> $Gr_{k,n}(\mathbb{R}) = V_{k,n}/\sim$

Pišemo tudi...

$$Gr_{k,n}(\mathbb{R}) = V_{k,n}/GL_k(\mathbb{R})$$

Oglejmo si lokalne karte:

Naj bo $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ multiindeks. Naj bo

$$U_I = \{x \in V_{k,n} \; ; \; \det x_I \neq 0\}$$

x_I je $k \times k$ matrika: njene vrstice so i_k-te vrstice X.

$$\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$$

$$X \longmapsto [X \cdot x_I^{-1}]_c$$

Oznaka $[X \cdot x_I^{-1}]_c$ pomeni: Vzamemo $k \times n$ matriko $x \cdot x_I^{-1}$, nato pa njene vrstice iz $I^c = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ zapišemo drugo poleg druge.