III. Tangentni in kotangentni sveženj

Motivacija: Povedali smo, kaj je tangentni vektor $X \in T_p M$ v neki točki mnogoterosti. Spomnimo se sedaj, kaj je ODE prvega reda. Vsako ODE je podana z "vektorskim poljem". Rešitev ODE je krivulja, ki je tangentna na to vektorsko polje.

Natančneje rečeno: V $\mathbb{R}^n$ je vektorsko polje podano kar s funkcijo:

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Integralska krivulja takega polja je vsaka krivulja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t)) \, ; \qquad t \in [a,b]$$

Denimo, da bi radi reševali ODE na mnogoterostih, t.j. iskali integralske krivulje vektorskih polj.

Če želimo to početi, moramo najprej povedati, kaj je vektorsko polje na mnogoterosti M.

Smiselna poskusna definicija:

F je vektorsko polje na M, če je

$$F(m) \in T_m M$$

za $\forall m \in M$.

Torej: F je preslikava

$$F : M \to \text{nekaj},$$

tako da velja $F(m) \in T_m M$.

$$\text{Nekaj} = \coprod_{m \in M} T_m M$$

To bo tangentni sveženj. $$TM = \coprod_{m \in M} T_m M.$$

Objekt $\coprod_{m\in M} T_m M$ pa moramo sedaj opisati bolj pazljivo.

Vektorski svežnji

Definicija Vektorski sveženj E nad gladko mnogoterostjo B je gladka mnogoterost skupaj z gladko preslikavo

$$\pi : E \to B .$$

Poleg tega mora veljati še:

a) $\pi^{-1}(b) = V$ - n-dimenzionalen vektorski prostor. ($V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) za $\forall b \in B$.

b) Za vsak $b \in B$ obstaja okolica $b \in U \subset B$, tako da velja

$$\pi^{-1}(B) \overset{\text{difeo}}{\cong} U \times V$$

Natančneje: obstaja preslikava: $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times V$, ki je difeo. in $T_U : \pi^{-1}(b) \to b \times V$ linearni izomorfizem za $\forall b \in U$.

za katero velja:

a) $T(m) = (\pi(m), v(m))$

b) T je difeomorfizem.

Sledi: $T(\pi^{-1}(b)) : \pi^{-1}(b) \to b \times V$

je linearni izomorfizem

Velikokrat označimo

$$\pi^{-1}(U) = E/_U$$

Točka b) se imenuje lokalna trivialnost svežnja E.

Definicija: Preslikava

$$\tau_U : E/_U \xrightarrow{\text{difeo}} U \times V,$$

ki je oblike
$$\tau_U(m) = (\pi(m), v(m))$$

in za katero velja:

$$\tau_U : \pi^{-1}(b) \to \{b\} \times V$$

je linearna ~~preslikava~~ izomorfizem za $\forall b \in U$, se imenuje lokalna trivializacija.

Def: Sveženj E je trivializabilen, če obstaja globalna trivializacija

$$\tau : E \to B \times V$$

<u>Opozorilo:</u> Vsak sveženj $\pi : E \to B$ ni trivialen.

<u>Primer:</u> Neskončen Möbiusov trak.

$$E = \left([0, 2\pi] \times \mathbb{R} \right) / \sim$$

$$(0, x) \sim (2\pi, -x)$$

Torej: $\pi : E \to S^1$, toda $E \ncong S^1 \times \mathbb{R}$.

Lokalne trivializacije so osnovni pripomoček za delo s svežnji. Igrajo vlogo kart.

$$T_U : E|_U \to U \times \mathbb{F}^n$$

$$m \longmapsto (\pi(m), \underbrace{(v(m)_1, v(m)_2, \ldots v(m)_n)}_{\text{koordinate na vlaknu}})$$

Včasih delamo z dejanskimi kartami, ki so prirejene T_U

Naj bo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) ; \alpha \in A\}$ tak atlas na B, da je za vsak $\alpha \in A$ skrčitev E/U_α trivialna.

Tedaj je preslikava

$$(\varphi_\alpha \times id) \circ T_{U_\alpha} : E/U_\alpha \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$$

$p = \dim(B)$, $n = \dim(\pi^{-1}(b))$

karta za mnogoterost E.

$$((\varphi_\alpha \times id) \circ T_{U_\alpha})(m) = (x_1^\alpha(\pi(m)), x_2^\alpha(\pi(m)), \dots, x_p^\alpha(\pi(m)), v^\alpha(m)_1, \dots, v^\alpha(m)_2)$$

Trditev: Če je $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) ; \alpha \in A\}$ trivializirajoč atlas za B, je

$$\{(U_\alpha \times \mathbb{F}^n, (\varphi_\alpha \times id) \circ T_{U_\alpha}) ; \alpha \in A\}$$

atlas za mnogoterost E.

Večkrat delamo z lok. trivializacijami T_α, kot z dejanskimi kartami. Označili bomo

$$T_\alpha : E|U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{F}^n$$

Lokalna trivializacija nam da lokalne koordinate na vlaknu.

$$T_\alpha(m) = (\pi(m), v^\alpha(m)_1, v^\alpha(m)_2, \dots, v^\alpha(m)_n)$$

Naj bo U_β še ena karta, ki vsebuje m. Tedaj imamo:

$$T_\beta(m) = (\pi(m), v^\beta_1(m), v^\beta_2(m), \dots, v^\beta_n(m))$$

<u>Definicija</u> Prehodna preslikava med trivializacijama T_α in T_β je preslikava

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^n \to U_\beta \times \mathbb{F}^n.$$

Imamo:

$$(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})\left(\pi(m), v_1^\alpha(m), \dots, v_n^\alpha(m)\right) = \left(\pi(m), v_1^\beta(m), \dots, v_n^\beta(m)\right)$$

Predpis $\begin{pmatrix} v_1^\alpha(m) \\ \vdots \\ v_n^\alpha(m) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1^\beta(m) \\ \vdots \\ v_n^\beta(m) \end{pmatrix}$

je linearni izomorfizem $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Seveda je ta linearni izomorfizem splošnem pri vsakem $\pi(m)$ drugačen. Zapišemo takole:

$$(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(b, v) = \left(b, g_{\alpha\beta}(b)(v)\right)$$

Tu je

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^n) = GL(n; \mathbb{F})$$

$$b \longmapsto g_{\alpha\beta}(b)$$

Imamo:

$$(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})\left(\pi(m), v_1^\alpha(m), \ldots, v_n^\alpha(m)\right) = \left(\pi(m), v_1^\beta(m), \ldots, v_n^\beta(m)\right)$$

Preslikava $\begin{pmatrix} v_1^\alpha(m) \\ \vdots \\ v_n^\alpha(m) \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1^\beta(m) \\ \vdots \\ v_n^\beta(m) \end{pmatrix}$

je linearni izomorfizem $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. Seveda je ta linearni izomorfizem v splošnem pri vsakem $\pi(m)$ drugačen. Zapišemo lahko:

$$(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(b, v) = (b, g_{\alpha\beta}(b)(v))$$

Pri tem je

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{F}^n) = GL(n; \mathbb{F})$$

$$b \longmapsto g_{\alpha\beta}(b)$$

gladka preslikava iz $U_\alpha \cap U_\beta$ v mnogoterost $GL(n;\mathbb{F})$.

<u>Opomba</u>: Preslikava $b \mapsto g_{\alpha\beta}(b)$ je res gladka.

Vemo $(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(b, v) = (b, g_{\alpha\beta}(b)(v))$ je gladka, $\Rightarrow$ $(b,v) \mapsto (g_{\alpha\beta}(b), v) \mapsto g_{\alpha\beta}(b)(v)$ gladka. Če $b \mapsto g_{\alpha\beta}(b)$ ne bi bila gladka, tudi $(b,v) \mapsto g_{\alpha\beta}(b)(v)$ ne bi bila.

<u>Definicija</u>: Preslikavi

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{F}^n \to U_\beta \times \mathbb{F}^n$$

Velikokrat s tem se imenuje prehodna preslikava. izrazom označujemo preslikavi

$$b \longmapsto g_{\alpha\beta}(b)$$

$$U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n;\mathbb{F}).$$

Označimo: $T_\beta \circ T_\alpha^{-1} = T_{\beta\alpha}$. Takoj vidimo:

Za vsako trojico (α, β, γ), za katero je $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ neprazen, velja:

$$T_{\gamma\beta} \circ T_{\beta\alpha} = T_{\gamma\alpha}$$

oziroma:

$$T_{\gamma\beta} \circ T_{\beta\alpha} \circ T_{\gamma\alpha}^{-1} = id$$

Seveda imamo: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}^{-1}$. Torej

$$T_{\alpha\gamma}\, T_{\gamma\beta}\, T_{\beta\alpha} = id : (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{F}^n \circlearrowleft$$

Za vsako trojico indeksov imamo:

$$(T_{\alpha\beta}\, T_{\beta\gamma})(b, v) = T_{\alpha\beta}(b, g_{\beta\gamma}(v))$$

$$= (b, (g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma})(v))$$

Iz prehodnih preslikav torej velja:

$$g_{\alpha\gamma}(b)\cdot g_{\gamma\beta}(b)\cdot g_{\beta\alpha}(b) = id : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$

enota v $GL(n;\mathbb{F})$

in

$$g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1}.$$

<u>Definicija</u>: Naj bo B gladka mnogot. in $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,;\alpha\in A\}$ gladek atlas. $GL(n;\mathbb{F})$-kocikel na B je predpis, ki vsakemu paru $(\alpha,\beta)\in A\times A$: $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$, priredi preslikavo (gladko).

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta \to GL(n;\mathbb{F}).$$

Torej:

$$(\alpha,\beta) \mapsto \left(g_{\alpha\beta} : U_\alpha\cap U_\beta \to GL(n;\mathbb{F})\right). \quad (*)$$

Iz predpisa (*) mora veljati:

a) $g_{\alpha\beta}(b) = g_{\beta\alpha}(b)^{-1} \quad \forall b\in U_\alpha\cap U_\beta$

b) Za vsako trojico (α,β,γ): $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \neq \emptyset$ velja

$$g_{\alpha\gamma}(b)\, g_{\gamma\beta}(b)\cdot g_{\beta\alpha}(b) \equiv e \in GL(n;\mathbb{F})$$

Zaključimo lahko tako:

Naj bo $\pi: E\to B$ vektorski sveženj z vlaknom $\mathbb{F}^n$. Tedaj vsak trivializacijski atlas $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha); \alpha\in A\}$ na B porodi kocikel z sveženja $\pi: E\to B$ vrednosti v $GL(n;\mathbb{F})$.

$$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to GL(n;\mathbb{F}) ; \alpha,\beta\in A\times A;\ U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset\}$$

Velja pa tudi obratno.

Naj bo $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha); \alpha\in A\}$ atlas na B.

in naj bo

$$\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta\to GL(n;\mathbb{F})\}$$

kocikel.

Tem lastnostim lahko priredimo vektorski sveženj:

$\pi : E \to B$ z vlaknom $\mathbb{F}^n$.

Vpeljimo v disjunktno unijo

$$\coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{F}^n)$$

relacijo $\sim$ takole:

$(b_1, v_1) \in (U_\alpha \times \mathbb{F}^n)$, $(b_2, v_2) \in (U_\beta \times \mathbb{F}^n)$

$$(b_1, v_1) \sim (b_2, v_2) \iff \begin{array}{l} \underline{(1) \quad b_1 = b_2} \\ \underline{(2) \quad g_{\beta\alpha}(b_1)(v_1) = v_2} \end{array}$$

Definiramo:

$$E = \Big(\coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{F}^n) \Big) \Big/ \sim$$

in

$$\pi : E \to B$$

$$\pi([b, v]) = b$$

D.N. Dokaži, da je E gladka mnt, da je $\pi : E \to B$ gladka preslikava in da je $\pi : E \to B$ sveženj z vlaknom $\mathbb{F}^n$.

Primer: Naj bo atlas za S^1 podan z:

$$S^1 = \{ e^{i\varphi} ; \ \varphi \in [0, 2\pi) \}$$

$$U_1 = \{ e^{i\varphi} ; \ \varphi \in (-\varepsilon, \pi + \varepsilon) \}$$

$$U_2 = \{ e^{i\varphi} ; \ \varphi \in (\pi - \varepsilon, \varepsilon) \}$$

$$U_1 \cap U_2 = \{ e^{i\varphi} ; \ \varphi \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon) \}$$

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^* = GL(1; \mathbb{R})$$

$$g_{21}(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 1 ; & \varphi \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ -1 ; & \varphi \in (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon) \end{cases}$$

<u>Primer:</u> Svežnji z vlaknom $\mathbb{C}$ nad sfero S^2.

Atlas: $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$

$$U_1 = \{(x,y,z);\quad z > -\varepsilon\}$$

$$U_2 = \{(x,y,z);\quad z < +\varepsilon\}$$

$$U_1 \cap U_2 = \{(x,y,z);\quad -\varepsilon < z < \varepsilon\} = \text{kolobar.}$$

$$GL(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$$

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{C}^*.$$

"Topološko" je g_{21} karakteriziran s stopnjo.

$$U_1 \cap U_2 \overset{\text{homtp}}{\approx} S^1$$

$$\mathbb{C}^* \overset{\text{homtp}}{\approx} S^1$$

V nadaljevanju bomo morda videli, da so izomorfnostni tipi za $\mathbb{C}$-svežnje nad S^2 karakterizirani natanko z $\deg(g_{21})$.

Prim: Tavtološki svežnji.

Naj bo $B = \mathbb{R}P^n$ ali $\mathbb{C}P^n$

$$E = \{ (b, v) \in \mathbb{F}P^n \times \mathbb{F}^n ;\ v \in b \}$$

$$\pi(b, v) = b$$ – sveženj premic

Naj bo $B = Gr_{k,n}(\mathbb{F}) = Gr_k(\mathbb{F}^n)$

$$E = \{ (b, v) \in Gr_k(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n ;\ v \in b \}$$

– sveženj z vlakni $\mathbb{F}^k$.

Definicija Naj bo $\pi : E \to B$ gladek sveženj. Gladek prerez svežnja E je preslikava (gladka)

$$s : B \to E,$$

za katero velja

$$\pi \circ s = id,$$

oziroma:

$$s(x) \in \pi^{-1}(x)$$

za $\forall x \in B$.

Lokalni prerez je prerez svežnja E/U.

Imejmo $n = rk(E)$ linearno neodvisnih prerezov svežnja E/U. To pomeni: za vsak $x \in U$ so vektorji

$$s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x) \in \pi^{-1}(x) \approx V = \mathbb{F}^n$$

linearno neodvisni.

Taki preseki določajo lokalno trivializacijo:

$$b : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{F}^n$$

$$b(m) = (\pi(m), a_1(m), a_2(m), \dots, a_n(m)),$$

kjer je

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \cdot s_i(\pi(m))$$

Tudi obratno je res. Imejmo neko trivializacijo (lokalno)

$$T : E|_U \longrightarrow U \times \mathbb{F}^n$$

podano z:

$$T(m) = (\pi(m), (v_1(m), v_2(m), \dots v_n(m)))$$

Definirajmo

$$s_i : U \longrightarrow E|_U$$

s predpisom:

$$s_i(x) = T^{-1}(x, (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)))$$

Ker je $T|_{\pi^{-1}(x)}$ linearni izomorfizem ~~za~~ $V \to \mathbb{F}^n$ za vsak x, so s_i res linearno neodvisni preseki.

<u>Trditev</u> Če ima sveženj $\pi : E \to B$ $n = rk(E)$ globalnih linearno neodvisnih prerezov $\{s_1, \dots, s_n\}$, je ta sveženj trivializabilen.

<u>Dokaz:</u> Očitno. Trivializacija je spet:

$$T : E \to B \times \mathbb{F}^n$$

$$m \longmapsto (\pi(m), (a_1(m), \dots, a_n(m)))$$

in

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i(m)\, s_i(\pi(m))$$

$\square$

Trivializacija $E|U$ s pomočjo $\{s_1, \dots, s_n\}$ prerezov lokalna umeritev (local gauge).

Prerezi $\{s_1, \dots, s_n\}$ porodijo v vsakem vlaknu $\pi^{-1}(x)$ bazo $\{s_1(x), \dots, s_n(x)\} \subset \pi^{-1}(x)$.

Vsak prerez $\alpha : U \to E|U$ lahko kadaj zapišemo v obliki:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, s_i(x)$$

ali na kratko: $\alpha(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$.

Tangentni sveženj

Naj bo M gladka mnogoterost. Napovedali smo že, da bo tangentni sveženj kot množica

$$E = TM = \coprod_{m \in M} T_m M$$

Množico TM moramo opremiti s strukturo gladke mnogoterosti. Poiskati moramo tudi gladek atlas na TM.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) ; \alpha \in A\}$ atlas na M, v katerem so vse U_α kontraktibilne. in povezane. (Privzemimo še, da so tudi vsi preseki $U_\alpha \cap U_\beta$ kontraktibilni.) Zlasti: Naj bo $U_\alpha \overset{\text{difeo}}{\approx} \mathbb{R}^n$.

Lokalna trivializacija: (Boljše: lokalna karta!)

$$TM|_{U_\alpha} = \coprod_{m \in U_\alpha} T_m M = \coprod_{m \in U_\alpha} T_m U_\alpha = TU_\alpha$$

Označimo: $v_m \in TM$

$$T_\alpha(v_m) = \left(\varphi_\alpha(m),\ (D\varphi_\alpha)_{(m)}(v_m)\right)$$

Pri tem je

$$(D\varphi_\alpha)_{(m)} : T_m M \to T_{\varphi_\alpha(m)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

odvod gladke preslikave

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$$

oziroma preslikava, ki smo jo definirali v prejšnjem razdelku. (Pisali smo kar $D\varphi_\alpha$.)

Definirajmo torej atlas $T\mathcal{U}$ za TM takole:

$$T\mathcal{U} = \{(TU_\alpha, T_\alpha)\ ;\ \alpha \in A\}$$

Spomnimo se: $TU_\alpha = TM|_{U_\alpha}$.

Preveriti se moramo še, da so prehodne preslikave gladke:

Naj bo torej $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Tedaj

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

$$(\varphi_\alpha(m), v) \longmapsto (\varphi_\beta(m), w)$$

in

$$w = (D\varphi_\beta)_m \, (D\varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(m)} (v) =$$

$$= D_{\varphi_\alpha(m)}(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}) \, (v)$$

Krajše:

$$T_\beta \circ T_\alpha^{-1} = (\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}, \; D(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}))$$

Natančneje:

$$(T_\beta \circ T_\alpha^{-1})(x, v) = ((\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1})(x), \; D_x(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1})(v))$$

Ta preslikava pa je gladka, saj je $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}$ gladka, ker je M gladka mnogoterost.

Prostor TM smo torej opremili z gladko strukturo.

Projekcija je definirana na naraven način:

$$\pi : TM \longrightarrow M$$
$$v_m \in T_m M \longmapsto m$$

Definicija TM s kocikli:

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$ atlas na M.

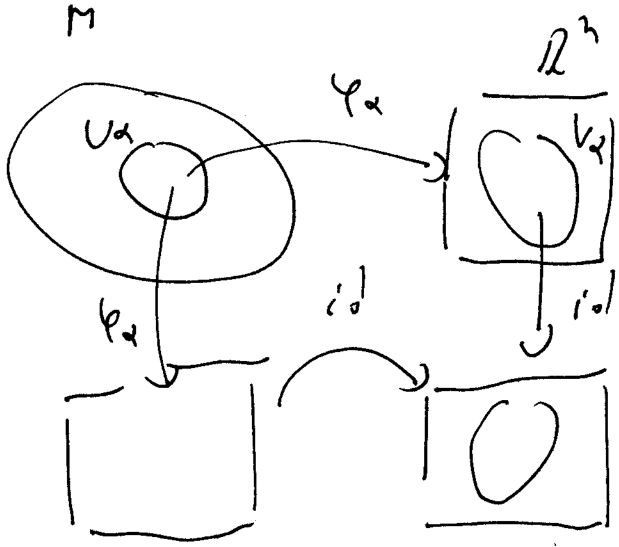
Tedaj je kocikel, ki definira TM podan s predpisom:

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \Big(x \longmapsto D_x(\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}) \Big)$$
$$U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n; \mathbb{F}) \Big) .$$

<u>Opomba:</u> Naj bo M gladka mnog. in $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha);\ \alpha \in A\}$ atlas. Preslikave

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

so difeomorfizmi. Res:



Po definiciji je $\varphi_\alpha : M \to N = \mathbb{R}^n$ gladka, če

$\underset{\text{id}}{\underset{\shortparallel}{\psi_\beta}} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = \text{id}$ je gladka, ta pa seveda je gladka.

Tako je seveda karta preslikava

$$(\varphi_\alpha, D\varphi_\alpha) : TM|_U \to V_\alpha \times \mathbb{F}^n$$

$$(\varphi_\alpha, D\varphi_\alpha)(m) = \left(\varphi_\alpha(\pi(m)), \left(D_{\varphi_\alpha(m)}\varphi_\alpha\right)(m)\right)$$

gladka preslikava.

(To poudarjam zato, ker se začenja s predpostavko, da je φ_α gladka – treba, da sploh ima smisel. Najprej govorimo le o gladkih preslikavah.)

<u>Naravna lokalna umeritev tangentnega svežnja</u>

Poiščimo za vsako karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ na M sistem $n = \operatorname{rang}(TM) = \dim(M)$ linearno neodvisnih prerezov svežnja $TM|_{U_\alpha} = TU_\alpha$ na čimbolj "naraven" način.

Označimo: $m \in U_\alpha \subset M$, $v_m \in T_m M = \pi^{-1}(m)$

in $\varphi_\alpha(m) = x$

$$\varphi_\alpha(m) = x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$$

Spomnimo se naravne trivializacije

$$\tau_\alpha : TU_\alpha \to V_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$\tau_\alpha(v_m) = (\varphi_\alpha(m), (D_m \varphi_\alpha)(v_m))$$

Definicija, lokalni:

$$s_i^\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(m), e_i)$$

$$s_i^\alpha(m) = \tau_\alpha^{-1}(x = \varphi_\alpha(m), e_i) =$$

$$= \tau_\alpha^{-1}(x, (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0))$$

Torej:

$$s_i^\alpha(m) = \left(D_m \varphi_\alpha^{-1}\right)(0,\dots,0,1,0,\dots 0)$$

$$D_m \varphi_\alpha : T_m M \to \mathbb{R}^n$$

Po definiciji odvoda: $\quad (m = \varphi_\alpha^{-1}(x))$

$$s_i^\alpha(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_\alpha^{-1}(x + t e_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \dots x_{i-1}^\alpha, x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha \dots, x_n^\alpha)$$

Oznaka:

$$s_i^\alpha(m) = \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(m)$$

Oglejmo si razlog za to oznako.

Spomnimo se, da so tangentni vektorji diferencialni operatorji. Oglejmo si

$$f : M \to \mathbb{R}$$

in

$$s_i^\alpha(m)\,(f)$$

Pot skozi m, katere tangenta v m je $s_i^\alpha(m)$ je

$$\gamma(t) = \varphi_\alpha^{-1}(x + te_i) = \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \dots, x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$$

Torej:

$$s_i^\alpha(m)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\big(\varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \dots x_i^\alpha + t, x_{i+1}^\alpha, \dots x_n^\alpha)\big)$$

$$= \frac{\partial (f\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i^\alpha}(x_1^\alpha \dots x_i^\alpha \dots x_n^\alpha)$$

Za vsako izbiro φ_α so koordinate neke točke m označene $(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha) \neq (x_1^\beta \dots x_n^\beta)$. Toda kartezični koordinatni sistem na $V_\alpha \cap V_\beta$ je isti ne glede na to ali smo v V_α ali v $V_\beta \subset \mathbb{R}^n$.

Torej lahko pišemo:

$$s_i^\alpha(m)(f) = \frac{\partial (f\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}(x_1^\alpha \dots x_n^\alpha)$$

Opomba: Vektorja $\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)_{(m)}$ in $\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\beta}\right)_{(m)}$ sta seveda v splošnem različna.

Naravna baza (umeritev) TM/U_α je torej sistem prerezov:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right)$$

Definicija: Vektorsko polje (gladko) na M je gladek prerez tangentnega svežnja TM

$$X : M \to TM$$

$$m \mapsto X(m) \in T_m M$$

Lokalno lahko vsako vektorsko polje zapišemo v obliki:

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^{\alpha}}(m)$$

velikokrat pišemo krajše:

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^{\alpha}}$$

Pri čemer so $a_i(m) : U_\alpha \subset M \to \mathbb{R}$ gladke funkcije.

Opazimo: Vsako vektorsko polje

$$X : M \to TM$$

nam podaja smerno odvajanje v vsaki točki $m \in M$.

Naj bo lokalno na U_α

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$$

Tedaj imamo operator

$$X : \mathcal{E}^r(M) \to \mathcal{E}^{r-1}(M)$$

podan lokalno s predpisom:

$$X(f)_{(m)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} (\varphi_\alpha(m))$$

$X(f)$ je res gladka funkcija, saj je $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ gladka.

po definiciji gladkosti f.

Kako primerjamo lokalne izraze vektorskih polj.

$$X_{(m)} = \sum a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} = \sum b_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}$$

Spomnimo se: V splošnem velja:

$$\Leftrightarrow \quad g_{\beta\alpha}(m) \begin{pmatrix} a_1(m) \\ \vdots \\ a_n(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(m) \\ \vdots \\ b_n(m) \end{pmatrix}$$

Torej v našem primeru:

$$\Leftrightarrow \quad D_{\varphi_\alpha(m)}\left(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \begin{pmatrix} a_1(m) \\ \vdots \\ a_n(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(m) \\ \vdots \\ b_n(m) \end{pmatrix}$$

Od tod sledi: (očitno je tako ali tako!)

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\beta} = D_m\left(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right)$$

Liejev odvod

V splošnem je Liejev odvod nekega gladkega objekta (tenzorja) na mnt. M vzdolž vektorskega polja $X \in \Gamma(M)$ smerni odvod tega objekta (tenzorja) v smeri X.

Osnovni primer: Smerni odvod funkcije

$$f : M \to \mathbb{R}$$

$$X : \mathcal{E}^0(M) \to \mathcal{E}^0(M)$$

$$\mathcal{E}^r(M) \to \mathcal{E}^{r-1}(M)$$

$$f \mapsto X(f)$$

in, kot smo že definirali:

$$X(f)_{(m)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)),$$

kjer je $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ poljubna krivulja,

za katero velja:

$$\gamma(0) = m$$

$$[\gamma] = X \in T_m X.$$

Videli smo: Če je $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta, ki vsebuje

m, velja:

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$$

od tod sledi

$$X(p) = \sum_{i=1}^{m} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(p)$$

in

$$(X(f))_{(m)} = \sum_{i=1}^{m} a_i(m) \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} (\varphi_\alpha(m))$$

Naslednji objekt, ki bi ga radi znali obravnavati, je vektorsko polje. Najprej pa potrebujemo pojem toka vektorskega polja.

<u>Definicija</u>: Naj bo $X \in \Gamma(M)$ vektorsko polje in $X(m) \neq 0$ v $T_m M$. Krivulja

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

je integralska krivulja X skozi m, če velja

$$\gamma(0) = m$$

in

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} M$$

za $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Označili smo: $\dot\gamma(t) = [\gamma]_{\gamma(t)}$.

<u>Izrek:</u> Integralska krivulja gladkega polja obstaja v bližini vsake točke m, za katero je $X(m) \neq 0$.

<u>Dokaz:</u> Naj bo $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ karta, ki vsebuje m.

Tedaj imamo:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(p) \quad ; \; p \in U_\alpha$$

Za vsak $p \in U_\alpha$ velja:

$$X(p) = (D\varphi_\alpha)^{-1}_{\varphi_\alpha(p)} \begin{pmatrix} a_1(p) \\ a_2(p) \\ \vdots \\ a_n(p) \end{pmatrix}$$

Označimo: $\tilde{a}_i(x) = a_i(\varphi_\alpha^{-1}(x))$.

Naj bo $x_0 = \varphi_\alpha(m)$. Po eksistenčnem izreku o NDE obstaja natanko ena rešitev

$$\tilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

Začetni problem:

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\gamma}}_1(t) \\ \dot{\tilde{\gamma}}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\tilde{\gamma}}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1(\tilde{\gamma}_1(t), \ldots, \tilde{\gamma}_n(t)) \\ \tilde{a}_2(\tilde{\gamma}_1(t), \ldots, \tilde{\gamma}_n(t)) \\ \vdots \\ \tilde{a}_n(\tilde{\gamma}_1(t), \ldots, \tilde{\gamma}_n(t)) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}(0) = x_0$$

Po konstrukciji imamo tudi:

Naj bo
$$\gamma(t) = \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{\gamma}(t)) \qquad (1)$$

Trdimo:

$$\dot{\gamma}(t) = (D\varphi_\alpha^{-1})_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) =$$

$$= (D\varphi_\alpha^{-1})_{\tilde{\gamma}(t)}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i(\tilde{\gamma}(t)) \cdot e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i(\tilde{\gamma}(t)) \cdot (D\varphi_\alpha^{-1})_{(\tilde{\gamma}(t))}(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) = X(\gamma(t))$$

Torej

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

$$\gamma(0) = m,$$

če je $\gamma(t)$ podana z (1) $\square$

Integralske krivulje lahko združimo v tok vektorskega polja. Označimo:

$$\gamma_p(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

je integralska krivulja X skozi p:

$$\gamma_p(0) = p.$$

Naj bo $U \subset M$ podmnožica, za katero velja $X(p) \neq 0$ za $\forall p \in U$.

Definicija: Tok polja X na podmnožici $U \subset M$ je enoparametrična družina preslikav

$$\Phi_t : U \to \Phi_t(U)$$

podanih s predpisom:

$$\Phi_t(p) = \gamma_p(t)$$

Trditev: Za dovolj majhne vrednosti t je preslikava

$$\Phi_t : U \to \Phi_t(U)$$

difeomorfizem.

Dokaz: Trditev je posledica dejstva, da je rešitev začetnega ODE problema gladko odvisna od začetnega pogoja.

Opazimo tudi:

$$\Phi_0(p) = \gamma_p(0) = p$$

torej

$$\Phi_0 = id.$$

Zato

$$\det(\mathrm{Jac}\,\Phi_0)_{(p)} = 1$$

Situacijo smo izrazili v lokalni karti $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

Zaradi zveznosti velja: obstaja $\varepsilon > 0$

$$\det(\mathrm{Jac}\,\Phi_t)_{(p)} \neq 0 \qquad |t| < \varepsilon$$

Po izreku o inverzni preslikavi je $\Phi(t)$ difeomorfizem v neki okolici p, če je le $|t| < \varepsilon$. □

Če je Φ_t tok polja X, včasih pravimo, da je X hitrostno polje toka Φ_t (tekočine.)

<u>Trditev:</u> Za tok polja velja mikrogrupna lastnost.

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s \,, \quad |t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$$

<u>Dokaz:</u> Krivulja

$$\alpha(s) = \Phi_s(\Phi_t(p))$$

je integralska krivulja X skozi:

$$\alpha(0) = \Phi_t(p)$$

Krivulja $\beta(s) = \Phi_{s+t}(p)$ je prav tako integralska krivulja X z začetno vrednostjo

$$\beta(0) = \Phi_t(p)$$

Iz edinosti v eksistenčnem izreka za ODE sledi

$$\Phi_s\left(\Phi_t(p)\right) = \Phi_{s+t}(p)$$

□

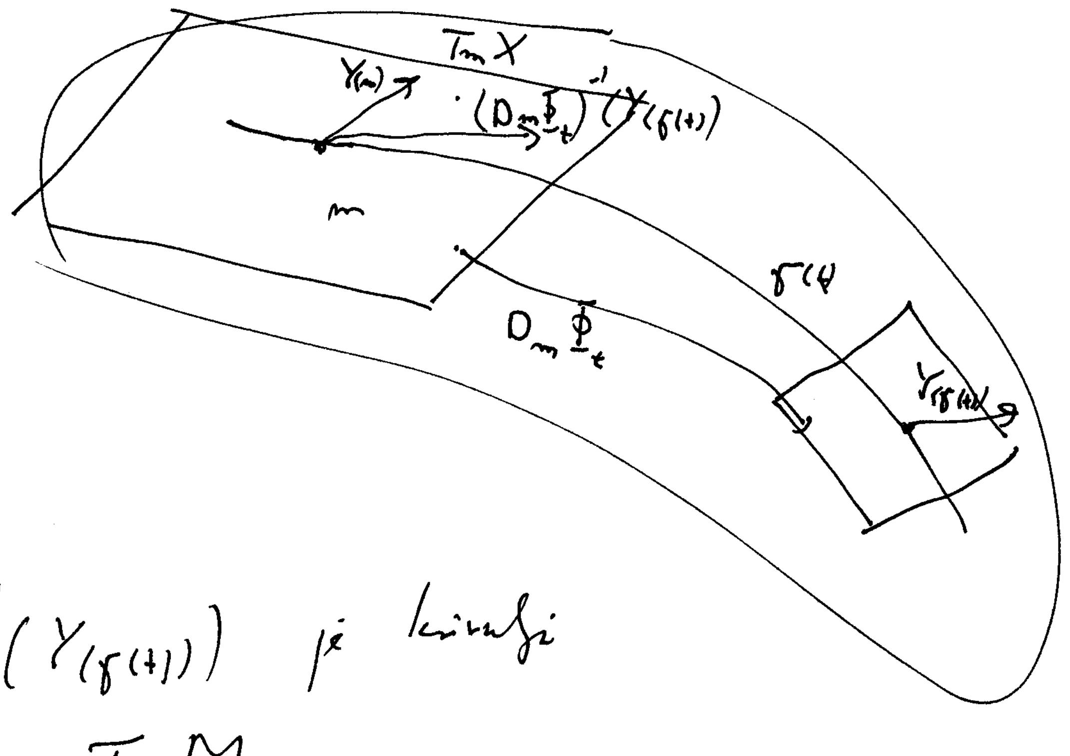
S pomočjo toka polja X bomo sedaj primerjali vrednosti nekega drugega polja Y v različnih točkah. Naš cilj je odvajati polje Y v smeri polja X. Pri odvajanju je vedno treba primerjati vrednosti nekega tenzorja pri različnih vrednostih neodvisne spremenljivke. Torej: Če je $\gamma(t)$ npr. integralska krivulja X. Kako lahko primerjamo $Y(\gamma(t_1))$ in $Y(\gamma(t_2))$? To sta vektorja v različnih prostorih $T_{\gamma(t_1)}M$ in $T_{\gamma(t_2)}M$!

Rešitev: S tokom polja X bomo $Y(\gamma(t_2))$ prenesli v $T_{\gamma(t_1)}M$.

<u>Definicija</u> Liejev odvod polja Y vzdolž polja X (v točki m) je podan s predpisom:

$$\left(\mathcal{L}_X(Y)\right)(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(D_m \Phi_t\right)^{-1}\left(Y(\gamma(t))\right),$$

kjer je Φ_t tok X in $\gamma(t)$ integralska krivulja X skozi m. ($\gamma(0) = m$)



Opomba:

$\beta(t) = (D_m \Phi_t)^{-1}(Y(\gamma(t)))$ je krivulja v prostoru $T_m M$.

Tangenta $\dot\beta(0)$ na to krivuljo je spet element v $T_m M$.

Torej: $(\mathcal{L}_X Y)(m) \in T_m M$

Poiščimo izraz za $\mathcal{L}_X Y$ v lokalnih koordinatah.

Naj bo glede na karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$:

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(p)$$

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}(p)$$

Torej:

$$X(p) = \begin{pmatrix} X_1(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \end{pmatrix}, \quad Y(p) = \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ \vdots \\ Y_n(p) \end{pmatrix}$$

Integralska krivulja:

$$\gamma(t) \simeq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \qquad \leftarrow = \varphi_\alpha(\gamma(t))$$

velja

$$\dot{x}_i(t) = X_i(\gamma(t))$$

Izberimo $m \in M$. Imamo $x_0 = \varphi_\alpha(m)$. Označimo:

$$\underline{\Phi}_t = \varphi_\alpha \circ \Phi_t \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

V loka koordinatah: $\Phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi_t^1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_t^n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Po definiciji imamo:

$$\left(\mathcal{L}_X Y\right)_{(m)} \overset{D_m \varphi_\alpha}{\hat{=}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}(\Phi_t)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} Y_1(\gamma(t)) \\ Y_2(\gamma(t)) \\ \vdots \\ Y_n(\gamma(t)) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Odvajati bomo morali po Leibnitzevem pravilu:

Označimo: $\mathrm{Jac}_{x_0}(\Phi_t) = A(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Gl(n; \mathbb{R})$

Ker je $\Phi_0 = id$, imamo tudi $A(0) = id$

Iščemo: $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A^{-1}(t)$.

Ismert:

$$A^{-1}(t)\,A(t) = id \qquad \Big/ \; \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$\left(\dot{A^{-1}}\right)(0)\cdot A(0) + A^{-1}(0)\,\dot{A}(0) = 0$$

$$\left(\dot{A^{-1}}\right)(0) = -\dot{A}(0)$$

Így:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}\Phi_t\right)^{-1} = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Jac}_{x_0}(\Phi_t)$$

In

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\mathrm{Jac}_{\vec{x}_0}\Phi_t\right)^{-1} = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_t^n}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

ker ij Φ_t tok X

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}=\vec{x}_0}$$

Drugi sumand v Leibnitzovem izrazu za (*):

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\gamma(t))$$

V koordinatah:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \begin{pmatrix} Y_1(\gamma(t)) \\ \vdots \\ Y_n(\gamma(t)) \end{pmatrix}$$

Vsaka od komponent je funkcija, ki jo smemo odvajati: Torej:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_1}{\partial x_j} \cdot X_j \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_2}{\partial x_j} X_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_n}{\partial x_j} \cdot X_j \end{pmatrix}$$

Ko spravimo vse skupaj, dobimo:

$$\left(\mathcal{L}_X Y\right)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j .$$

To je izražava vektorskega polja $\mathcal{L}_X Y$ v koordinatah.

Oglejmo si sedaj še abstrakten pogled na $\mathcal{L}_X Y$.
Spomnimo se, da je tangentni vektor $X_p \in T_pM$ operator odvajanja na $C_p^\infty X$, vektorsko polje X pa diferencialni operator 1. reda

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X(f).$$

Primerjajmo sedaj diferencialna operatorja drugega reda

$$X \circ Y,\ Y \circ X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

Definicija

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Trditev: $[X,Y]$ je diferencialni operator I. reda.

Dokaz: Izračunajmo za v lokalnih koordinatah:

– Torej f nadomestimo z $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ itd...

$$X(Y(f)) = X\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} Y_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot Y_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} X(Y_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot X_j + \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \cdot X_j \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} X_j Y_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \cdot X_j \right)$$

Od tod:

$$[X,Y](f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j \right) \qquad \square$$

Diferencialni operator I. reda $[X,Y]$ je torej podan z vektorskim poljem $\mathcal{L}_X Y$

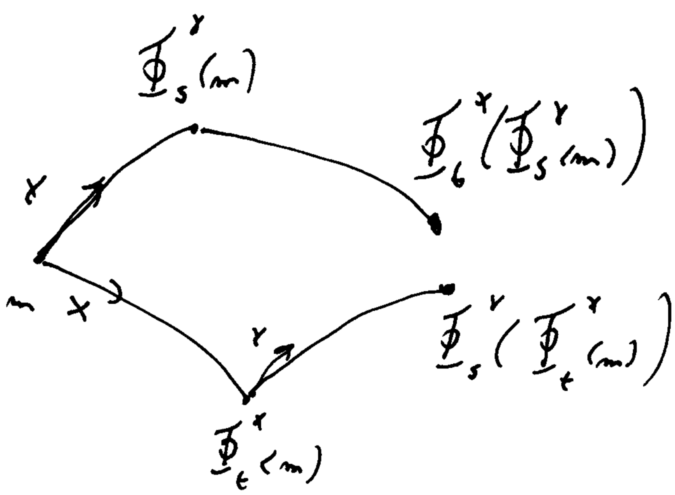
$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$$

Opišimo $\mathcal{L}_X Y$ še na en (geometrijski) način.

Naj bosta Φ_t^X in Φ_s^Y toka polj X oz. Y.

Postavimo se v točko $m \in M$ in primerjajmo točki

$$\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)) \quad \text{in} \quad \Phi_t^X(\Phi_s^Y(m))$$



Ker smo na mnogoterosti teh dveh točk ne moremo primerjati direktno. Ne moremo pa na primer odšteti, ker nista elementa vektorskega prostora. Lahko pa njuno "razliko" izmerimo s funkcijami:

Naj bo torej $f \in C^\infty(M)$. Oglejmo si:

$$f(\Phi^Y_s(\Phi^X_t(m))) - f(\Phi^X_t(\Phi^Y_s(m)))$$

Zanimala nas bo "infinitezimalna" razlika.

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s}\Big|_{t,s=0} \Big(f(\Phi^Y_s(\Phi^X_t(m))) - f(\Phi^X_t(\Phi^Y_s(m))) \Big) =$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (Xf)(\Phi^Y_s(m)) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Yf)(\Phi^X_t(m)) =$$

$$= Y(X(f))(m) - X(Y(f))(m) =$$

$$= [Y, X](f)(m).$$

Torej: Tokovi nekomutativnih polj ne komutirajo med seboj. S pomočjo nekomutirajočih polj ne moremo koordinatizirati mnogoterosti.

Lastnosti Liejevega odvoda oz. oklepaja:

Trditev: Velja Leibnitzevo pravilo:

$$\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z] \quad (*)$$

Dok.: Domača nalog.

Trditev: Velja:

$$\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$$

Dok.:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

Formulo (*) lahko zapišemo tudi v obliki:

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$$

Jacobijeva identiteta.

<u>Definicija</u> Vektorski prostor V, v katerem je definirana operacija

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V$$
$$(X,Y) \longmapsto [X,Y],$$

za katero velja

1) $[X,Y] = -[Y,X]$

2) Jacobijeva identiteta

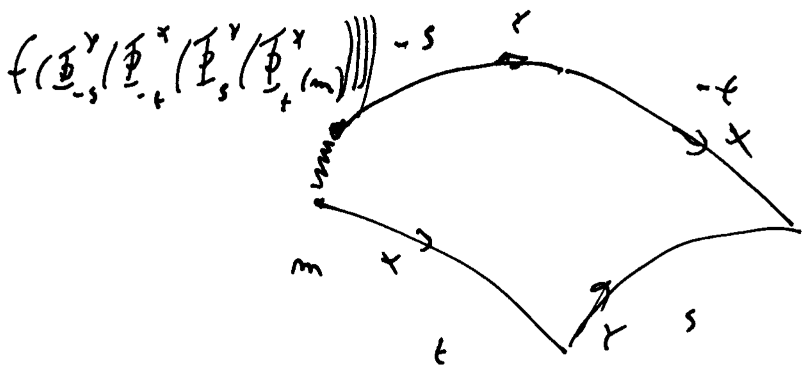
in je seveda bilinearna, se imenuje Liejeva algebra.

<u>Torej</u>: Vektorski prostor gladkih vektorskih polj $\Gamma(X)$ na M je Liejeva algebra.

Domača naloga

Naj bosta X in Y gladki polji na M in Φ_t^X, Φ_s^Y njuna toka. Dokaži, da za vsako funkcijo $f: M \to \mathbb{R}$ velja

$$(\mathcal{L}_X Y)(f)(m) = \frac{d^2}{dt\,ds}\Big|_{t,s=0} \Big(f(m) - f(\Phi_{-s}^Y(\Phi_{-t}^X(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m))))) \Big)$$



Primer: Naj bo $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$ lokalna karta na M.

Tedaj velja

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}\right] = 0$$

Taylorjev razvoj toka vektorskega polja

Naj bo X gladko vektorsko polje na M in Φ_t^X tok tega polja. Naj bo $m \in M$ in $f: M \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Tvorimo funkcijo

$$t \longmapsto f(\Phi_t^X(m))$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Razvijmo jo v Taylorjevo vrsto v okolici $t=0$.

$$g(t) = f(\Phi_t^X(m))$$

$$g(0) = f(\Phi_0^X(m)) = f(m)$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = \left(D_{\Phi_t^X(m)} f\right)\left(X(\Phi_t^X(m))\right) =$$

$$= X(f)\left(\Phi_t^X(m)\right)$$

tzn.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(t) = X(f)(m)$$

Następnie:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(X(f)\left(\Phi_t^X(m)\right)\right) =$$

$$= X(X(f))\left(\Phi_t^X(m)\right)$$

Oznaczmy:
$$X(X(f)) = X^2(f)$$

Ogólnie:
$$X(X^{k-1}(f)) = X^k(f)$$

Dobimo torej:

$$f(\Phi_t^X(m)) = f(m) + t\, X(f)(m) + \frac{t^2}{2!} X^2(f)(m) + \dots \qquad (1)$$

$$+ \dots \frac{t^n}{n!} X^n(f)(m) + \dots$$

To velja za vsako $f: M \to \mathbb{R}$.

$$X^k(f) : \mathcal{E}^0(M) \to \mathcal{E}^0(M)$$

$$\mathcal{E}^r(M) \to \mathcal{E}^{r-k}(M)$$

diferencialni operator reda k.

Preselimo se sedaj v koordinatno karto in uporabimo zapis vektorjev na koordinatnih funkcijah

$$x_i : M \to \mathbb{R}$$

$$m \overset{\varphi_\alpha}{=} (x_1, x_2 \dots, x_n) = x$$

Vrsta (1) postane:

$$x_i(\Phi_t^X(m)) = (\Phi_t^X(m))_i = x_i(m) + t\,(X(x_i)(m)) + \frac{t^2}{2} X(X(x_i))(m) + \dots$$

$$= x_i + t\,X_i(x) + \frac{t^2}{2} X(X_i)(x) + \dots$$

Če to naredimo za vsak i, dobimo:

Res: $X(x_i) = \langle X, \operatorname{grad} x_i \rangle = \langle X, (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)\rangle = X_i$

$$\Phi_t^X(m) = m + t\,X(m) + \frac{t^2}{2} X^2(m) + \dots + \frac{t^n}{n!} X^n(m)$$

Pri tem moramo zgornji zapis razumeti takole:

$$X(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$X(a_i)(m) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j(m) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \Big(a_j(m) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(m) \Big).$$

Zato:

$$X^2(m) \overset{\mathrm{def}}{=} X(X)(m) = X\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)(m) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j(m) \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(m) \Big) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

V lokalni karti so v $\mathbb{R}^n$ bi imeli kar:

$$X(m) = \begin{pmatrix} a_1(m) \\ \vdots \\ a_n(m) \end{pmatrix} \qquad X^2(m) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial a_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

Seveda definiramo:

$$X^n(m) = X(X^{n-1})(m).$$

<u>Še nekaj terminologije:</u>

Def.: Vektorsko polje X na M je kompletno, če obstaja $\Phi_t^X : M \to M$ za $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Tako polje porodi delovanje grupe $\mathbb{R}$ na M. To pomeni, da imamo homomorfizem

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$$

$$g(t) = \Phi_t^X$$

Enoparametrična grupa $\Phi_t^X \subset \mathrm{Diff}(M)$ velikokrat imenujemo dinamični sistem na M.

Def: Kritična točka (ali ničla) vektorskega polja $X \in \Gamma(TM)$ je taka točka $m \in M$, da velja

$$X(m) = 0 \in T_m M.$$

Očitno velja $\Phi_t^X(m) = m$ za $\forall t$

– m je fiksna točka toka.

Nekaj primerov tokov:

1) $X = \frac{\partial}{\partial x}$; $M = \mathbb{R}$

Tok:

$$\dot{x}(t) = 1$$

$$x(0) = x_0$$

kompleten

Torej $x(t) = x_0 + t$

Tok: $\Phi_t^X(x) = x + t$

2) $X_{(x)} = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}$; $M = \mathbb{R}$

$$\dot{x} = x$$

Tok: $\Phi_t^X(x) = e^t \cdot x$ kompleten

3) $X_{(x)} = x^{n+1} \frac{\partial}{\partial x}$; $M = \mathbb{R}$

$$\dot{x} = x^{n+1}$$

Tok: $\Phi_t^X(x) = \frac{x}{\sqrt[n]{1 - n x t}}$ Ni kompleten!

Pri $n=1$ dobimo:

$$\Phi_t(x) = \frac{x}{1-xt}$$

Torej: V času $t = \frac{1}{x}$ smo že v neskončnosti.

4.) $X(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ $M = \mathbb{R}^n$

$\Phi_t^X(x) = (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$ translacija

5.) $X(x) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$; $M = \mathbb{R}^2$

$\Phi_t^X(x,y) = (e^t x, e^t y) = e^t(x,y)$

6.) $X(x) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$; $M = \mathbb{R}^2$ PTO →

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Torej $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ od tod: $\Phi_t^X(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= R_t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Rotacijski tok

Vektorska polja na sferi S^2.

$$S^2 = \{(\varphi, \vartheta) ;\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \vartheta \in [0, \pi]\}$$

Kaj sta polji $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ in $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$.

$\frac{\partial}{\partial \varphi}$ je dobro definirano polje – rotacija sfere

okoli z-osi?

$\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ pa ni dobro definirano. Težave v polih.

V polih moramo množiti z ničlo.

$$a(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad ; \quad a(0) = a(\pi) = 0$$

To polje je dobro definirano.

7.) $X(x) = A\cdot x \quad ; M = \mathbb{R}^n$

Tak:
$$\Phi_t^X(x) = \exp(t\cdot A)\cdot x =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\right)\cdot x$$

8.) Hamiltonska vektorska polja

Naj bo $H: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gladka funkcija

Naj bo
$$J = -\begin{pmatrix} 0 & -I \\ +I & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

Označimo $\vec{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. Definicija:
$= (\vec{q}, \vec{p})$

$$X_H(\vec{q}, \vec{p}) = J\cdot \mathrm{grad}(H)(\vec{p}, \vec{q})$$

Torej:
$$X_H(\vec{q}, \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Trditev: Naj bo Φ_t^H tok vektorskega polja X_H. Tedaj velja za $\forall\, (\vec{q}_0, \vec{p}_0) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$H\left(\Phi_t^H(\vec{q}_0, \vec{p}_0)\right) = H(\vec{q}_0, \vec{p}_0)$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt} H\left(\Phi_t^H(\vec{q}_0, \vec{p}_0)\right) = X_H(H)\underbrace{(\vec{p}, \vec{q})}_{}\quad \overset{\Phi_t(\vec{p}_0,\vec{q}_0)}{\text{''}}$$

$$= \Big(\underbrace{D_{\Phi_t(\vec{q}_0, \vec{p}_0)} H}_{\text{grad } H}\Big)\left(X^H\left(\Phi_t^H(\vec{q}_0, \vec{p}_0)\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

$\square$

Vrnimo se sedaj k splošnim ugotovitvam.

Izračunali smo Taylorjevo vrsto toka Φ_t^X vektorskega polja X. Imejmo sedaj dve polji X in Y na M.

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad Y = \sum b \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)) = \Phi_t^X(m) + s\, Y(\Phi_t^X(m)) + \frac{s^2}{2} Y^2(\Phi_t^X(m)) + \ldots$$

$$= \left(m + t X(m) + \frac{t^2}{2} X^2(m) + \ldots \right) +$$

$$+ s\left(Y(m) + t\, Y(X)(m) + \frac{t^2}{2} Y(X^2)(m) + \ldots \right) +$$

$$+ \frac{s^2}{2}\left(Y^2(m) + t\, Y^2(X)(m) + \frac{t^2}{2} Y^2(X^2)(m) + \ldots \right) + \ldots$$

$$= m + \left(t X(m) + s Y(m) \right) + \left(\frac{t^2}{2} X^2(m) + st\, Y(X)(m) + \frac{s^2}{2} Y^2(m) \right) + \ldots$$

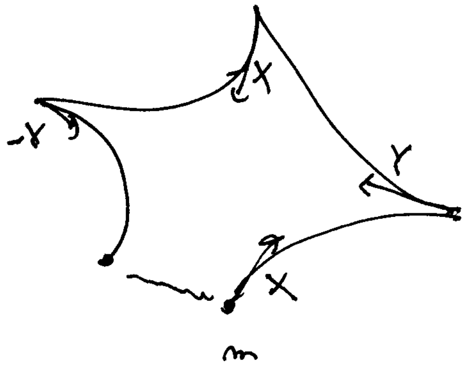
Postavimo $t = s$: dobimo:

$$\Phi^Y_t\left(\Phi^X_t(m)\right) = m + t\left(X(m) + Y(m)\right) + \frac{t^2}{2}\left(X^2(m) + 2Y(X)(m) + Y^2(m)\right) + \mathcal{O}(t^3) \ldots \quad (*)$$

S pomočjo zgornjega izraza hitro dokažemo tole trditev:

<u>Trditev</u> Za poljubni gladki vektorski polji X, Y na M velja:

$$[X,Y](m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi^Y_{-\sqrt{t}}\left(\Phi^X_{-\sqrt{t}}\left(\Phi^Y_{\sqrt{t}}\left(\Phi^X_{\sqrt{t}}(m)\right)\right)\right)$$



Dokaz: Označimo:

$$\theta_t(m) = \left(\Phi^Y_{-t} \circ \Phi^X_{-t} \circ \Phi^Y_t \circ \Phi^X_t\right)(m)$$

Torej:

$$\theta_t(m) = \left(\Phi^Y_{-t} \circ \Phi^X_{-t}\right)\left(\left(\Phi^Y_t \circ \Phi^X_t(m)\right)\right).$$

Upoštevajmo (*) in dobimo:

$$\theta_t(m) = \left(\Phi^Y_{-t} \circ \Phi^X_{-t}\right)\Big(m + t\left(X(m) + Y(m)\right) + \frac{t^2}{2}\left(X^2(m) + 2\,Y(X)(m) + Y^2(m)\right) + \dots\Big)$$

Opomba: $\Phi^Y_{-t} \circ \Phi^X_{-t}$ pa je prav tak kot $\Phi^Y_t \circ \Phi^X_t$, le da je namesto $(t) \to (-t)$.

Uporabimo ~~upoštevajmo~~ sedaj (*) še enkrat – na vsakem členu vrste (*), in upoštevajmo – [illegible] pred t.

Torej:

$$\theta_{t}(m) = \Big(m - t\big(X(m) + Y(m)\big) + \frac{t^2}{2}\big(X^2(m) + 2Y(X)(m) + Y^2(m)\big) + \dots\Big)$$

$$+ \Big(t\big(X(m) + Y(m)\big) - t^2\big(X^2(m) + X(Y)(m) + Y(X)(m) + Y^2(m)\big) + \dots\Big) +$$

$$+ \frac{t^2}{2}\big(X^2(m) + 2Y(X)(m) + Y^2(m)\big) + \dots$$

$$= m + t^2\big(Y(X)(m) - X(Y)(m)\big) + O(t^3)$$

Od tod:

$$\theta_{r_t}(m) = m + t\big(Y(X)(m) - X(Y)(m)\big) + O(t^{\frac{3}{2}})$$

in zato

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \theta_{r_t}(m) = Y(X)(m) - X(Y)(m)$$

Po definiciji $Y(X)(m)$ velja: $Y(X)$ je vektorsko polje, za katero:

$$Y(X)(f) = Y(X(f)).$$

$\square$

<u>Izrek</u> Naj bosta $X, Y \in \Gamma(TM)$ gladki polji in Φ_t^X, Φ_s^Y njuna toka. Tedaj sta ekvivalentni naslednji trditvi

1) $[X, Y] \equiv 0$

2) $\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)) = \Phi_t^X(\Phi_s^Y(m))$ za vsak $m \in M$ in vse t, s.

<u>Dokaz:</u> $(2) \Rightarrow (1)$ očitno:

Dokazali smo:

$$[X,Y](m) = \frac{d^2}{ds\,dt}\Big|_{s,t=0} \left(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m)) - \Phi_t^X(\Phi_s^Y(m)) \right)$$

oz. natančneje

$$[X,Y](f) = \frac{d^2}{ds\,dt}\Big|_{s,t=0} \left(f(\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m))) - f(\Phi_t^X(\Phi_s^Y(m))) \right)$$

Če sta točki $\Phi_s^Y(\Phi_t^X(m))$ in $\Phi_t^X(\Phi_s^Y(m))$ vedno enaki, je izraz na desni vedno identično enak 0.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Izberimo takole koordinatne okolice na tak, da bo veljalo:

$\varphi_\alpha(m) = (x_1(m), \dots, x_n(m)) = (0, \dots, 0)$.

In $X = \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}$.

To naredimo takole: Naj bo φ_α naša poljubna karta. V tej karti ima X izražavo

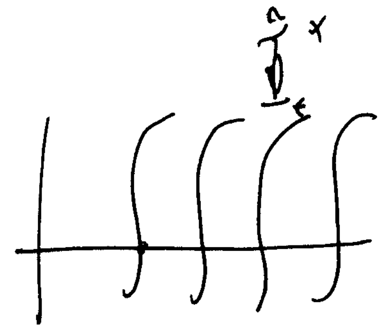
$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Glejmo na X, kot na polje na $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$.

V $\mathbb{R}^n$ lahko z zasukom popravimo koordinatni sistem tako, da bo hiperprostor $\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\} \subset \mathbb{R}^n$

oz $\mathbb{R}^{n-1} = \{(0, x_2, x_3, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$

sekal tirnice X transverzalno (vsaj v neki okolici).

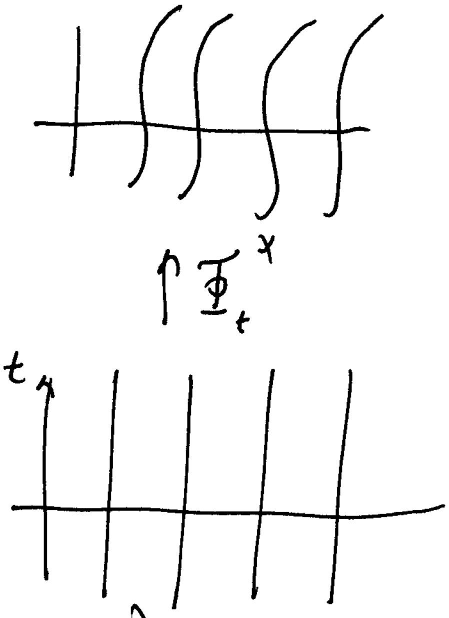


$\tilde{\Phi}_t^X$ je lokalni difeomorfizem. Točke na $\mathbb{R}^n$ lahko koordinatiziramo s: $x = (t, x_2, x_3, \dots, x_n)$, pri čemer je $x = \Phi_t^X(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Torej: Našo prvotno karto $\tilde{\varphi}_\alpha$ bomo nadomestili z

$$\varphi_\alpha^{-1} = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\left(\Phi_{-t}^X\right) = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\left(\Phi_t^X\right)^{-1},$$ oziroma:

$$\varphi_\alpha = \Phi_t^X(\tilde{\varphi}_\alpha).$$



Še boljši zapis:

$$\varphi_\alpha^{-1} = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\left(\Phi_{-x_1}^X\right)$$

$$\underline{\varphi_\alpha^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\left(\Phi_{-x_1}^X(0, x_1, x_2, \dots, x_n)\right).}$$

Imamo torej: $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$

in zato v φ_α - koordinatah;

$$\Phi_t^X(m) = \Phi_t^X(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$$

Naj bo v naših koordinatah:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ker velja $[X, Y] = 0$, imamo

$$[X, Y] = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

Torej: $Y_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y_j(x_2, x_3, \dots x_n)$

To pa pomeni, da je polje Y translacijsko invariantno glede na funkcijo $(x_1, \dots x_n) \mapsto (x_1+t, x_2, \dots, x_n)$. Zato so seveda translacijsko premaknjene krivulje integralske krivulje tega polja:

Naj bo $m = (x_1, x_2 \dots x_n)$. in

$\gamma(s)$ tokovnica Y skozi m.

$$\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$$

Tedaj je tudi

$$\tilde{\gamma}(s) = (x_1(s)+t, x_2(s), \dots, x_n(s)).$$

tokovnica Y.

$$\gamma(s)\big|_{s=0} = x \qquad \tilde{\gamma}(s)\big|_{s=0} = \vec{x} + (t, 0 \dots 0) = \Phi_t^X(\vec{x})$$

Torej:
$$\Phi_s^Y(\Phi_t^X(\vec{x})) = \Phi_t^X(\Phi_s^Y(x)) = \Phi_t^X(\gamma(s)) = \gamma(s) + (t, 0, \dots, 0)$$

$\square$

Frobeniusov izrek

Oglejmo si najprej klasično formulacijo vprašanja, na katerega daje odgovor Frobeniusov izrek.

Imejmo r vektorskih funkcij

$$F_i(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad i = 1, \dots, r < n$$

$$F_i(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1^i(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n^i(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Iščemo funkcijo

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,,$$

ki rešijo tale sistem diferencialnih enačb. (PDE)

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{i}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_2^{i}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (*)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_r^{i}(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

<u>Vprašanje:</u> Pri kakšnih pogojih lahko pričakujemo $n-r$ funkcionalno neodvisnih rešitev?

Hitro vidimo: Če imamo eno tako rešitev, je rešitev avtomatično neskončno. Vendar se izkaže, da v nekem naravnem smislu vse različne rešitve podajajo isto informacijo.

Zapišimo $(*)$ nekoliko drugače. Označimo:

$$F_i(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_i^1 \\ \vdots \\ f_i^n \end{pmatrix}(\vec{x}).$$

Sistem (*) lahko zapišemo v obliki:

$$\langle F_1(\vec{x}), \nabla u(\vec{x}) \rangle = 0$$
$$\langle F_2(\vec{x}), \nabla u(\vec{x}) \rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$\langle F_n(\vec{x}), \nabla u(\vec{x}) \rangle = 0$$

Iščemo take funkcije u, katerih gradient ∇u je pravokoten na $F_1, \dots, F_n$. Vektorske funkcije $F_i(\vec{x})$ lahko razumemo kot vektorska polja na $\mathbb{R}^n$. Naj bo

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

rešitev (*). Naj bo

$$K = u^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$$

nivojska ploskev u. Tedaj $\nabla u \perp K$. Torej:

Polji $F_1, \dots, F_n$ so tangentna na K.

To velja za vsako rešitev u sistema (*). Denimo, da imamo $n-r$ rešitev u_j, $j=1,\dots,n-r$. Naj bo

$$K_j = u_j^{-1}(c_j)$$

in

$$K = \bigcap_{j=1}^{n-r} K_j$$

tj.:

$$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\quad u_j(\vec{x}) = c_j,\ j=1,\dots,n-r\}$$

Denimo še, da velja za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla u_1(\vec{x}),\ \nabla u_2(\vec{x}), \dots\ \nabla u_{n-r}(\vec{x})$$

so linearno neodvisni. Tedaj je $K \subset \mathbb{R}^n$ mnogoterost dimenzije r v $\mathbb{R}^n$ in za vsak $\vec{x} \in K$ velja

$$F_i(\vec{x}) \in T_{\vec{x}} K \qquad i=1,\dots,r$$

Rešitve sistema (*) so torej te integralske mnogoterosti vektorskih polj $F_1(\vec{x}),\dots, F_r(\vec{x})$.

Bolje: dobimo strukturo (folijacijo) $\mathbb{R}^2$ z integralskimi mnogoterostmi $K_{c(c_1,\dots,c_{n-r})}$.

Rešitev $(u_1,\dots,u_{n-r})$ je res neskončno mnogo, toda vse podajajo isto folijacijo. Različne rešitve ustrezajo na različne načine parametrizacije liste folijacije.

Prepišimo naš problem v jezik vektorskih svežnjev in ga še nekoliko posplošimo.

<u>Definicija:</u> Naj bo $\pi_E : E \to M$ vektorski sveženj. Podmnogoterost $F \subset E$ je vektorski podsveženj svežnja E, če je F vektorski sveženj $\pi_F : F \to M$ in velja:

$$\pi_F^{-1}(m) \overset{\text{podprostor}}{\subset} \pi_E^{-1}(m) \qquad m \in M$$

in $\pi_F = \pi_E / F$.

<u>Definicija</u> Vektorski podsvežnj D tangentnega svežnja TM se imenuje distribucija.

Naj bo $U \subset M$ okolica neke točke, da sta TM in D tam trivialna svežnja. Vemo, da lahko TM trivializiramo s pomočjo lokalnih prerezov, t.j. s pomočjo vektorskih polj definiranih na U.

Naj bo $\operatorname{rk} D = n$. in naj bodo $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM/U)$ vektorska polja, za katera velja:

$$\operatorname{span}\{X_1(m), \dots, X_n(m)\} = D(m)$$

$D(m) = \pi_D^{-1}(m)$ in $\pi_D : D \to M$ svežnjska projekcija.

Distribucija D je torej lokalno generirana z vektorskimi polji $X_1, \dots, X_r$.

<u>Vprašanje</u>: Pod kakšnimi pogoji obstajajo integralske mnogoterosti distribucije D?

Integralska podmnogoterost distribucije D je taka podmnogoterost

$$N_r \subset U \subset M,$$

da velja

$$T_m N_r = \pi_D^{-1}(m) \subset T_m M$$

za vsak $m \in N_r$.

Odgovor daje Frobeniusov izrek.

<u>Frobeniusov izrek (Clebsch, Deahna)</u> Distribucija $D \subset TM$ ima integralske mnogoterosti natanko tedaj, ko za vsak lokalni sistem generirajočih vektorskih polj

$$X_1, X_2, \ldots, X_r \in \Gamma(TM/U)$$

velja:

$$[X_i, X_j](m) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}(m)\, X_k(m) \qquad (*)$$

za neke gladke funkcije

$$c_{ij}^{k} : U \to \mathbb{R}.$$

<u>Opomba:</u> Pogoj $(*)$ se imenuje involutivnost.

Ta pogoj pomeni: $\{X_1, \dots, X_r\}$ razpenjajo Liejevo podalgebro v Liejevi algebri $\Gamma(TM|U)$.

<u>Dokaz izreka:</u> Če je D integrabilna distribucija so vektorska polja na D sečna v involuciji - jasno:

Obratno: Imejmo r vektorskih polj, za katera velja:

$$[X_i, X_j](m) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}(m)\, X_k(m)$$

Naj bo $X_1 = \sum_{j=1}^{n} a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Reparametriziramo U tako, da bo v novih koordinatah

$$X_1 = \tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Težji korak s posrednimi (permutacijskimi) reparametrizacijami in z "Gaussovo triangulacijo" dosežemo:

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tilde{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j=r+1}^{m} a_j^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \\
\tilde{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial x_3} + \sum_{j=r+1}^{m} a_j^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&\vdots \\
\tilde{X}_r &= \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum_{j=r+1}^{m} a_j^r \frac{\partial}{\partial x_j}
\end{aligned}
$$

Za poljubna i, j velja:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \sum_{k=r+1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Po drugi strani mora veljati:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=r+1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^{r} \tilde{c}_{ij}^{l} \tilde{X}_l \\
&= \sum_{l=1}^{r} \tilde{c}_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=r+1}^{m} (\quad) \frac{\partial}{\partial x_l}
\end{aligned}
$$

To pa pomeni $\tilde{c}_{ij}^{l} = 0$ za $\forall i, j, l$.

Torej: za vsak i, j:

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0.$$

Konstruirajmo integralsko ploskev:
Izberimo točko $\vec{x}_0 \in U \subset M$.

Naj bodo $\Phi^i_t : (a_i, b_i) \to U$, $i = 1, \dots, r$
$\quad t$

tokovi vektorskih polj $\tilde{X}_i$. Ker polja komutirajo, vemo, da komutirajo tudi tokovi. Preslikava

$$R : \prod_{i=1}^{r} (a_i, b_i) \to U \subset M$$

naj bo podana s predpisom:

$$R(t_1, t_2, \dots, t_r) = \left(\Phi^r_{t_r} \circ \Phi^{r-1}_{t_{r-1}} \circ \dots \circ \Phi^2_{t_2} \circ \Phi^1_{t_1}\right)(\vec{x}_0)$$

Trdimo, da je mnogoterost

$$N = \mathrm{Im}(R)$$

integralska mnogoterost vektorskih polj X_i.

Ker so polja $\check{X}_i$ linearne kombinacije polj X_i je

zadoščeno $\Leftrightarrow$ N je integralska ploskev polj $\tilde{X}_i$.

Izberimo poljubno točko $R(t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0)$ v N.

Za vsak i velja:

$$\frac{d}{dt_i}\Big|_{t_i = t_i^0} R(t_1^0, t_2^0, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_N^0) =$$

$$= \frac{d}{dt_i}\Big|_{t_i = t_i^0} \left(\Phi^1_{t_1^0} \circ \dots \circ \Phi^{i-1}_{t_{i-1}^0} \circ \Phi^i_{t_i} \circ \Phi^{i+1}_{t_{i+1}^0} \circ \dots \circ \Phi^1_{t_1^0} \right)(\vec{x}_0)$$

(*)

$$= \frac{d}{dt_i}\Big|_{t_i = t_i^0} \Phi^i_{t_i} \left(\Phi^1_{t_1^0} \circ \dots \circ \Phi^{i-1}_{t_{i-1}^0} \circ \Phi^{i+1}_{t_{i+1}^0} \circ \dots \circ \Phi^1_{t_1^0} \right)(\vec{x}_0) =$$

$$= \tilde{X}_i \left(R(t_1^0, \dots, t_n^0) \right)$$

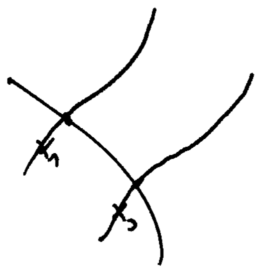
Torej $T_{R(t_r^0,\dots,t_1^0)} N = \text{span}\{\tilde{X}_i\}$

Pri enoličnosti (*) smo na bistven način uporabili komutiranje tokov Φ^i!

□

Opomba: a) Preslikava $R(t_1, t_2, \dots, t_r)$ je parametrizacija integralske ploskve. Torej so $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ lokalne koordinate na N.

b) Za različne izbire začetne točke $\vec{x}_0$ dobimo v splošnem različne $N_{\vec{x}_0}$. – Foliacija.



Klasična oblika Frobeniusovega izreka torej zahteva obstoj funkcij

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

za katere velja:

1) $\nabla u_i \quad i=1,\dots,n-r$ so linearno neodvisni.

2) $\langle F_i , \nabla u_j \rangle = 0 \qquad i=1,\dots,r, \quad j=1,\dots,n-r$

Z drugimi besedami: Obstaja preslikava

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$$

$$g(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), \dots, u_{n-r}(\vec{x})),$$

za katero velja: Podmnogoterost $g^{-1}(\vec{c}) : \vec{c} \in \mathbb{R}^{n-r}$ je r-dimenzionalna podmnogoterost v $\mathbb{R}^n$, tangentna na vektorska polja F_i; še več, vektorska polja $F_i(\vec{x})$ razpenjajo $T_{\vec{x}}(g^{-1}(\vec{c}))$

Obstoj take preslikave bo treba dokazati za domačo nalogo.

Spomnimo se še na obratni izrek.

Naj bosta M in N mnogoterosti, $\dim(M) = m$ in $\dim(N) = n$. Naj bo preslikava

$$f : M \to N$$

gladka.

Definicija. Rang preslikave $f : M \to N$ v točki $m \in M$ je rang njene linearne preslikave

$$D_m f : T_m M \to T_{f(m)} N.$$

Torej: $\mathrm{rk}(f)_{(m)} = \dim \mathrm{Im}(D_m f)$

Izrek Naj bo rang $f: M \to N$ konstanten v neki odprti okolici vlakna $f^{-1}(c) \subset M$, $c \in N$. Tedaj je $f^{-1}(c) \subset M$ podmnogoterost.

Dokaz: Biti podmnogoterost je lokalna lastnost. Izberimo tedaj karto (V_β, ψ_β) okoli $c \in N$ in karto $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ okoli izbrane točke $m \in f^{-1}(c)$ in namesto f opazujmo $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Torej:
$$\tilde{f} = \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Naj bo $\varphi_\alpha(c) = 0$, $\tilde{f}^{-1}(0) = 0$. Preimenujmo koordinate v $\mathbb{R}^n$ tako, da bo

$$\mathrm{Im}(D_m \tilde{f}) = \mathrm{Im}(D_0 \tilde{f}) = \mathrm{span}\{(y_1, \dots, y_{m-r}, 0, \dots, 0)\}$$

Preimenujmo koordinate na $\mathbb{R}^m$ $(= T_0\mathbb{R}^m)$ tako,

da bo
$$\mathbb{R}^m = \underset{(x_1 \dots x_r)}{\mathbb{R}^r} \times \underset{(x_{r+1}, \dots, x_m)}{\mathbb{R}^{m-r}}$$

in:
$$\ker(D_0 f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0)\} = \mathbb{R}^r \times \{0\}^{m-r}$$

Vemo, da je $\ker(D_0 f)$ res r-dimenzionalen, saj
$$\dim(\operatorname{Im}(D_0 f)) + \dim(\ker D_0 f) = m$$

in $\dim(\operatorname{Im}(D_0 f)) = n-r$

Iz zgornjega vidimo, da velja:
$$(D_0 f)\big|_{0^r \times \mathbb{R}^{m-r}} : 0^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^n$$

<u>nima jedra</u>.

zato po izreku o implicitni preslikavi obstaja preslikava

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{m-r},$$

za katero velja:

$$\text{a)} \quad g(0) = 0$$

$$\text{b)} \quad f(\vec{x}, \vec{g}(\vec{x})) \equiv c$$

na takšni majhni okolici O v $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$.

Par $(V, \mathrm{Graf}(g(\vec{x})))$; $V \subset \mathbb{R}^r$ je podmnožica

karta za $f^{-1}(c)$. $\square$

<u>Posledica</u>: Naj bo $f : M \to N$ gladka in naj bo $c \in N$ tak, da velja:

za vsak $m \in f^{-1}(c)$ je $\mathrm{rk}_m(f) = n$.

(Torej $m \geq n$). Tedaj je $f^{-1}(c)$ gladka podmnogoterost v M.

$$\dim f^{-1}(c) = \dim M - \dim N.$$

Def: Naj bo $f: M \to N$ $\mathcal{C}^r$ preslikava. Točka $c \in N$ je regularna vrednost preslikave f, če je za vsako $m \in f^{-1}(c)$ $rk(D_m f) = \dim N$.

Če vrednost ni regularna, je kritična. Naj bo kritična vrednost. Točka $m \in M$, za katero

Def: $rk(D_m f) < \dim N$ je kritična točka.

Množice z mero 0 v mnogoterostih:

Množica $Z \subset M$ ima mero 0, če za vsako $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ določeno karto na M velja:

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap Z) \subset \mathbb{R}^m \text{ ima mero } 0$$

v običajnem Lebesguevem smislu.

Števna unija množic z mero 0 ima mero 0.

Difeomorfizmi ohranjajo mero 0.

<u>Sardov izrek</u> Naj bo $f: M \to N$ C^r-preslikava. Če je $r \geq \max\{0, m-n\}+1$, potem ima množica kritičnih vrednosti preslikave f mero 0 v N.

<u>Opomba:</u> (a) $N = \mathbb{R}$: $r \geq m$ (funkcije)

(b) $m < n$: Vse vrednosti $c \in f(M)$ so kritične, druge pa so regularne, ker je def. pogoj na prazno izpolnjen.

Torej: $f(M)$ ima mero 0 v N.