Kotangentni sveženj in diferencialne forme

Najprej bomo opisali dualni objekt tangentnega svežnja in dualne objekte vektorskim poljem. Dualni objekt vektorja je funkcional. Opisali bomo tudi razširitev pojma funkcional, ki bo imel smisel za vektorska polja. Nato bomo nadaljevali in opisali objekte, ki so v istem smislu duali distribucijam.

Definicija: Naj bo $\pi : E \to M$ gladek vektorski sveženj. Dualni sveženj $\tilde{\pi} : E^* \to M$ svežnja E je sveženj, katerega vlakna so dualni prostori

$$\tilde{\pi}^{-1}(m) = \left(\pi^{-1}(m)\right)^* .$$

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha);\ \alpha \in A\}$ atlas za M in naj bo $\pi : E \to M$ podan s kocikli

$$\{ g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n; \mathbb{F})\}$$

$(n = \mathrm{rk}\, E)$. Tedaj je $\tilde{\pi} : E^* \to M$ podan s kocikli

$$\{ h_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{T})^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n; \mathbb{F}) \}.$$

<u>Definicija</u>: Naj bo M gladka mnogoterost in TM njen tangentni sveženj. Dualni sveženj $(TM)^*$ se imenuje kotangentni sveženj. Označimo ga s T^*M.

<u>Definicija:</u> Gladek prerez kotangentnega svežnja se imenuje diferencialna 1-forma.

Naj bo $\omega \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ diferencialna 1-forma in in $X \in \Gamma(TM)$ vektorsko polje.

Za vsak $m \in M$ imamo:

$$X(m) \in T_m M, \quad \omega(m) \in T_m^* M = (T_m M)^*.$$

Torej imamo pravilno priredbo:

$$\omega(m)(X(m)) \in \mathbb{R},$$

saj

$$\omega(m) : T_m M \to \mathbb{R}$$

je linearna funkcija.

Pravimo tudi, da je taka forma diferencial funkcije in pišemo

$$\omega = df$$

Torej:

$$X(f) = df(X)$$

Oglejmo si sedaj, kako se eksaktnost vede glede na zamenjavo trivializacije (t.j. lok. karte)

Naj bo $\omega \in \Omega^1(M)$ in naj v $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ velja

$$\omega = df$$

To pomeni: Na U_α (oz. bolj na $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$) imamo:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i^\alpha} dx_i^\alpha$$

kjer je $f^\alpha = f \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Naj bo sedaj polje X lokalno podano z

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$$

Tedaj

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i^\alpha} \cdot a_i$$

Zapišimo:

$$Df^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_n^\alpha} \end{pmatrix}^T \qquad X^\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Tedaj

$$\omega(X) = (Df^\alpha) \cdot X^\alpha$$

Naj bo sedaj (U_β, φ_β) druga karta istega atlasa mnogoterosti M. Oglejmo si, kako izgleda Df^β v povezavi z Df^α.

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1}$$

Imamo:

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) =$$

$$= f_\alpha \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = f^\alpha \circ g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Verižno pravilo za odvajanje nam da:

$$Df^\beta = Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1}$$

Spomnimo se:

$$X^\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = Dg_{\alpha\beta} \cdot X^\alpha$$

$$X^\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}$$

$\smile$

Uporabimo Df^β na X^β. Dobimo:

$$\underline{Df^\beta(X^\beta)} = Df^\alpha (Dg_{\alpha\beta})^{-1} \cdot Dg_{\alpha\beta} X^\alpha =$$

$$= Df^\alpha \cdot X^\alpha = \underline{Df^\alpha(X^\alpha)}$$

$\smile$

Pojasnimo, zakaj je kocikel svežnja T^*M podan z $\{(g_{\alpha\beta}^{-1})^T\}$. Odvodi Df^α so <u>vrstice</u>, torej so $(Df^\alpha)^T$ stolpci. Če hočemo, da bodo prehodne preslikave delovale z leve, morajo biti elementi $T^*_m M$ stolpci.

Dobimo:

$$\left(Df^{\beta} \right)^T = \left(Df^{\alpha} \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1} \right)^T =$$

$$= \underline{\underline{\left(Dg_{\alpha\beta}^{-1} \right)^T}} \cdot \left(Df^{\alpha} \right)^T$$

Če pa torej ω točna, da za vsakič $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i^{\alpha}$$

obstaja f^{α}, za katero velja

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i} = \alpha_i ,$$

Hkrati imamo za

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, dx_i^{\beta}$$

tudi funkcijo f^{β} z: $\dfrac{\partial f^{\beta}}{\partial x^i} = \beta_i$.

Velja:
$$f^{\beta} = f^{\alpha} \circ (g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Trenj: Odvod (diferencial) funkcije je primer 1-forme

PTO $\longrightarrow$

Ker je 1-forma objekt, ki je dualen vektorskemu polju, je dualen krivuljam 1-dimenzionalnim podmnogoterostim v M in sicer v temle smislu.

Naj bo
$$\gamma : [a,b] \to M$$
gladka krivulja v M. in $\omega \in \Omega^1(M)$ 1-forma na M.

Definicija Integral 1-forme ω vzdolž krivulje γ je podan s predpisom:
$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\dot{\gamma}(t))\, dt$$

Pomembno vprašanje:

Ali so vse 1-forme diferenciali funkcij?

Ne.

Videli bomo, da je to vprašanje zelo zanimivo.

Namreč: Tudi če je neka forma na vsaki karti diferencial neke funkcije, ni nujno, da obstaja globalna funkcija, da bi veljalo

$$\omega = df.$$

Ovire so <u>topološke</u>.

Še natančneje

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha^\beta \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\,dt \qquad (*)$$

<u>Trditev</u>: Integral (*) je neodvisen od izbire parametrizacije krivulje γ.

<u>Dokaz</u>: Naj bo $t(s)$ reparametrizacija γ.

$$\tilde\gamma(s) = \overbrace{\gamma(t(s))}^{\beta(s)} : [\alpha, \beta] \to M$$

Imamo:

$$\int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\,dt = \int_\alpha^\beta \omega_{\gamma(t(s))}(\dot\gamma(t))\,dt =$$

$$dt = t'\,ds$$

$$\gamma'(t(s)) = \dot\gamma \cdot t'$$

$$\dot\gamma = \frac{1}{t'}\gamma'(t(s)) = \frac{1}{t'}\beta'(s)$$

$$= \int_\alpha^\beta \omega_{\beta(s)}\left(\frac{1}{t'}\,\beta'(s)\right)\cdot t'\,ds \overset{\text{linearnost } \omega}{=}$$

$$= \int_\alpha^\beta \omega_{\beta(s)}(\beta'(s))\,ds \qquad \square$$

Zgornja definicija torej res podaja povezavo med 1-formami in 1-dimenzionalnimi podmnogoterostmi (– pa tudi krivuljami, ki niso podmnogoterosti.).

Poskusimo sedaj konstruirati objekte, ki bodo duali več-dimenzionalnim podmnogoterostim.

Ukvarjali se bomo z 2-dim objekti. Najprej jih moramo opisati infinitezimalno, t.j. na nivoju tangentnih prostorov.

<u>Definicija</u> Linearna 2-forma ω na $\mathbb{R}^n$ je predpis

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}_{(T_mM \times T_mM)} \to \mathbb{R},$$

za katerega velja:

$$\omega(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\, \omega(x_1, y) + \beta\, \omega(x_2, y)$$
$$\omega(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\, \omega(x, y_1) + \beta\, \omega(x, y_2)$$

in

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x)$$

<u>Primeri:</u> Naj bo ω v $\mathbb{R}^2$ podana s predpisom:

$$\omega(v_1, v_2) = \text{ploščina paralelograma, ki ga oklepata } v_1, v_2 \text{ — z orientacijo.}$$

Naj bo $\{e_1, e_2\}$ pozitivna baza v $\mathbb{R}^2$.

$$v_1 = v_{11} e_1 + v_{12} e_2$$

$$v_2 = v_{21} e_1 + v_{22} e_2$$

$$\omega(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

Naj bo sedaj naš prostor $\mathbb{R}^3$. Opišimo 2-formo, ki podaja pretok tekočine skozi enoto ploščine.

$$\omega_v(\xi_1, \xi_2) = \langle v, \xi_1 \times \xi_2 \rangle$$

Poglejmo sedaj, kaj so k-forme na $\mathbb{R}^n$.

<u>Definicija</u> Preslikava

$$\omega : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\approx T_m M \times T_m M \times \ldots \times T_m M)$$

je k-forma na $\mathbb{R}^n$, če velja:

$$\omega(\alpha v_1 + \beta w_1, v_2, \ldots, v_k) = \alpha\, \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n) + \beta\, \omega(w_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

kjer je σ poljubna permutacija k-elementov.

<u>Primer:</u> Naj bo ω n-forma na $\mathbb{R}^n$ podana s predpisom:

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

– volumska forma.

Še en primer k-forme na $\mathbb{R}^n$.

Naj bodo vektorji $v_1, \dots, v_{n-k} \in \mathbb{R}^n$ fiksni:

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{n-k,1} & \xi_{11} & \dots & \xi_{n1} \\ v_{12} & \dots & v_{n-k,2} & \xi_{12} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ v_{1n} & \dots & v_{n-k,n} & \xi_{1n} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix}$$

Naš cilj je pojem k-forme globalizirati.

To bomo spet naredili tako, da bomo k-forme definirali kot prereze primernih vektorskih svežnjev.

Očitno je, da k-forme na $\mathbb{R}^n$ tvorijo vektorski prostor. Ta prostor bo ~~svežnj~~ vlakno novega svežnja.

Najprej moramo zato bolje razumeti strukturo vektorskega prostora k-form.

Vnanji produkt 1-form:

Definicija Naj bosta ω_1, ω_2 1-formi na $\mathbb{R}^n$. Vnanji produkt $\omega_1 \wedge \omega_2$ je 2-forma podana s predpisom:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{pmatrix}$$

Zgornji predpis res podaja 2-formo:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2, \eta) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2) & \omega_2(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \alpha \omega_1(\xi_1) + \beta \omega_1(\xi_2) & \alpha \omega_2(\xi_1) + \beta \omega_2(\xi_2) \\ \omega_1(\eta) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \alpha \omega_1(\xi_1) + \beta \omega_1(\xi_2) & \omega_1(\eta) \\ \alpha \omega_2(\xi_1) + \beta \omega_2(\xi_2) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\eta) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_2) & \omega_1(\eta) \\ \omega_2(\xi_2) & \omega_2(\eta) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \eta) + \beta(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_2, \eta).$$

Opazimo, da velja:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$$

<u>Definicija</u> k-kratni vnanji produkt 1-form na $\mathbb{R}^n$ je podan s predpisom:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) & & \omega_k(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \omega_2(\xi_k) & & \omega_k(\xi_k) \end{pmatrix}$$

Spet je lahko videti, da je $\omega_1 \wedge \omega_2 \dots \wedge \omega_k$ k-forma na $\mathbb{R}^n$. Lastnost, ki pa velja tudi:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) =$$

$$= \operatorname{sign}(\sigma)\, (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k).$$

Vnanji produkt nam bo pomagal razumeti strukturo vektorskega prostora k-form. Ta prostor bomo podali tudi v koordinatah.

<u>1-forme:</u> Izberemo bazo prostora $V = \mathbb{R}^n$. Naj bodo elementi $v \in \mathbb{R}^n$ v tej bazi pisani:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_1^n v_i e_i$$

Opremimo ~~Opremimo~~ prostor 1-form $W = V^*$ z dualno bazo $\{f_i\}$

Pomeni: $\langle f_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$\omega \in W$;

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_1^n \omega_i f_i$$

2-forme: 2-forme so bilinearni funkcionali, kateri so njihove komponente izrazite matrike:

kateri so $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ in naj bo

$$\omega_1 = (\omega^1_1, \omega^1_2, \dots \omega^1_n)$$

$$\omega_2 = (\omega^2_1, \omega^2_2 \dots \omega^2_n)$$

glede na bazo $\{f_i\}$ duale bazi $\{e_i\}$. Bilinearnost nam da:

$$\omega(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \quad \omega(e_i, e_j)$$

Izračunajmo $\omega(e_i, e_j) = (\omega_1 \wedge \omega_2)(e_i, e_j)$

Po naši definiciji:

$$\omega(e_i, e_j) = (\omega_1 \wedge \omega_2)(e_i, e_j) =$$

$$= \omega_1(e_i)\,\omega_2(e_j) - \omega_2(e_i)\,\omega_1(e_j) =$$

$$= \omega_i^1 \omega_j^2 - \omega_i^2 \omega_j^1$$

Poiščimo matriko $\Omega = (\omega_{ij})$, za katero bo veljalo: za vsak $i, j = 1, \dots, n$

$$e_i^T \, \Omega \cdot e_j = \omega(e_i, e_j)$$

Označimo:

$$\omega_1 \otimes \omega_2 = \omega_1^T \cdot \omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_1^1 \omega_1^2 & \omega_1^1 \omega_2^2 \dots & \omega_1^1 \omega_n^2 \\ \omega_2^1 \omega_1^2 & \omega_2^1 \omega_2^2 \dots & \omega_2^1 \omega_n^2 \\ \vdots & & \\ \omega_n^1 \omega_1^1 & \omega_n^2 \omega_1^2 \dots & \omega_n^1 \omega_n^1 \end{pmatrix}$$

Takoj se lahko prepričamo, da velja

$$\Omega = \omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1$$

Opazimo tudi: $\omega_2 \otimes \omega_1 = (\omega_1 \otimes \omega_2)^T$.

Naša konstrukcija nam da: (In seveda linearnost vseh postopkov)

$$\omega(v, w) = v^T \cdot \Omega \cdot \quad =$$

$$= v^T(\omega_1 \otimes \omega_2 - \omega_2 \otimes \omega_1) \cdot w \, .$$

Z $\otimes$ smo označili tenzorski produkt.

<u>Definicija</u> Naj bo V vektorski prostor in $v^1, v^2 \in V$. Tenzorski produkt elementov v^1, v^2 je bilinearna preslikava (forma)

$$v^1 \otimes v^2 : V^* \times V^* \to V$$

Podan s podpisom:

$$(v^1 \otimes v^2)(w_1, w_2) = v^1(w_1) \cdot v^2(w_2)$$

Naj bo $\{e_i\}$ baza V. Koordinatni izraz tenzorskega produkta $v^1 \otimes v^2$ glede na bazo $\{e_i\}$ je matrika

$$v^1 \otimes v^2 = v^1 \cdot (v^2)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_n^1 \end{pmatrix} (v_1^2 \dots v_n^2) = \begin{pmatrix} v_1^1 v_1^2 & \dots & v_1^1 v_n^2 \\ \vdots & & \\ v_n^1 v_1^2 & \dots & v_n^1 v_n^2 \end{pmatrix},$$

pri čemer je $v^i = \sum_{j=1}^{n} v_j^i \cdot e_j$.

Naj bo $\{f_i\}$ druga baza in naj bo prehodna preslikava g: $\quad g(e_i) = f_i$

koordinata tenzorja $v^1 \otimes v^2$ v bazi $\{f_i\}$ je

$$v^1 \otimes v^2 \leftrightarrow g(v^1)\cdot(g v^2)^T = g(v^1\cdot(v^2)^T)\cdot g^T,$$

pri čemer je $v^1\cdot(v^2)^T$ koord. tenzorja glede na $\{e_i\}$.

<u>Definicija</u> Tenzorski produkt vektorskih prostorov V in U je

$$V \otimes U = \operatorname{span}\{v \otimes u;\ v \in V,\ u \in U\} = \operatorname{span}\{e_i \otimes e_j'\},$$

$\{e_i\}$ baza za V, $\{e_j'\}$ baza za U.

D.N. Dokaži: Naj bosta V, U vektorska prostora:

$$V \otimes U^* = \mathrm{Hom}(U, V)$$

Naj bo $\alpha \in V \otimes U^*$; Tedaj

$$\alpha = \sum_{ij} v_i \otimes u_j^*$$

$$\alpha(u) = \sum_{ij} v_i \cdot u_j^*(u) = \sum_{ij} u_j^*(u)\, v_i$$

<u>Definicija</u> Vnanji produkt vektorjev $v^1, v^2 \in V$ je podan s predpisom:

$$v^1 \wedge v^2 = v^1 \otimes v^2 - v^2 \otimes v^1$$

Definicija: Vnanje potenca vektorskega prostora V je

$$\Lambda^2 V = \operatorname{span}\{v \wedge u;\ v, u \in V\} =$$

$$= \operatorname{span}\{e_i \wedge e_j\}, \quad \{e_i\} \text{ baza } V.$$

Očitno: $\quad V \wedge V \subset V \otimes V$

Glede na identifikacijo $V \otimes V \cong \operatorname{Hom}(V^*, V)$

so elementi $V \wedge V$ antisimetrični operatorji.

Torej: Infinitezimalno: Vsaka 2-forma ω na $\mathbb{R}^n$

je element prostora $\Lambda^2 (\mathbb{R}^n)^*$, oziroma

$$\omega_m \in (T_m M)^* \wedge (T_m M)^* =$$

$$= \Lambda^2 (T_m^* M)$$

Višji tenzorski produkti lahko definiramo induktivno.

Prostori $V^{\otimes k}$ so prostori k-dimenzionalnih "kubičnih" matrik. (k-linearne preslikave)

<u>Definicija</u> Naj bo V vekt. prostor, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorji:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Zunanja potenca (k-ta) $\Lambda^k V$ vektorski prostor je

$$\Lambda^k V = \mathrm{span}\{ v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \} =$$

$$= \mathrm{span}\{ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \ ; \ e_i \in \text{baza } V \}$$

Prostor $\Lambda^k V$ je podprostor v $V^{\otimes k}$.

<u>Definicija:</u> Naj bosta $g: V \to V$ in $h: U \to U$ linearni preslikavi. Njun tenzorski produkt je definiran s predpisom:

$$g \otimes h : V \otimes U \to V \otimes U$$

$$(g \otimes h)\left(\sum_{ij} v_i \otimes u_j\right) = \sum_{ij} g(v_i) \otimes h(u_j)$$

<u>Definicija:</u> Naj bosta $\pi_E: E \to M$ in $\pi_F: F \to M$ vektorski svežnji nad isto bazo. Tenzorski produkt svežnjev E in F je sveženj $\pi: E \otimes F \to M$, katerega vlakno je:

$$\pi^{-1}(m) = \pi_E^{-1}(m) \otimes \pi_F^{-1}(m).$$

Naj bo E podan s kocikli $\{g_{\alpha\beta}\}$ in F s kocikli $\{h_{\alpha\beta}\}$. Tedaj je $E \otimes F$ podan s kocikli

$$\{ g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta} \}.$$

<u>Definicija</u>: Naj bo $\pi : E \to M$ vektorski sveženj podan s kocikli $\{g_{\alpha\beta}\}$. Tedaj je sveženj $\tilde{\pi} : \Lambda^k E \to M$, katerega vlakna je:

$$\tilde{\pi}^{-1}(m) = \Lambda^k \pi^{-1}(m)$$

podan s kocikli:

$$\{ \Lambda^k g_{\alpha\beta} \} = \{ \overbrace{g_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} \otimes \dots \otimes g_{\alpha\beta}}^{k} : \Lambda^k \pi^{-1}(m) \to \Lambda^k \pi^{-1}(m) \}$$

Sveženj $\Lambda^k E$ se imenuje k-ti zunanji produkt svežnja E.

<u>Definicija</u>. Diferencialna k-forma na mnogoterosti M je gladek prerez svežnja $\Lambda^k(T^*M)$.

Videli smo tudi: Diferencialna k-forma je gladek prerez svežnja $\Lambda^k(T^*M)$.

Spomnimo se: Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) ; \alpha \in A\}$ atlas na M in $g_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ družina prehodnih preslikav. Tedaj je tangentni sveženj TM podan s kocikli prehodnih preslikav

$$\{ D g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}^{\dim M}) \}$$

$$(D g_{\alpha\beta})(m) = D_{\varphi_\alpha(m)} g_{\alpha\beta}$$

Tedaj je T^*M podan s kociklom

$$\{ (D g_{\alpha\beta}{}^T)^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}^{\dim M}) \}$$

in $\Lambda^k(T^*M)$ s kociklom

$$\{ [(D g_{\alpha\beta}{}^T)^{-1}]^{\Lambda k} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{R}^{\binom{\dim M}{k}}) \}$$

V vsaki točki $m \in M$ lahko neko k-formo ω evaluiramo na k vektorskih poljih.

$$\omega_m\left(X_1(m), X_2(m), \dots, X_k(m)\right)$$

Trdi: Za vsako k-terico vekt. polj $X_1, \dots, X_k$ je

$$m \longmapsto \omega_m\left(X_1(m), \dots, X_k(m)\right)$$

gladka funkcija na M.

<u>Naloga</u>: Pokaži, da je k-forma ω definirana na prostoru $\Lambda^k \mathbb{R}^k$:

$$\omega : \Lambda^k \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

To je sicer očitno:

$$\omega \in \Lambda^k (\mathbb{R}^n)^* = \left(\Lambda^k \mathbb{R}^n \right)^*.$$

Lokalni izrazitev k-forme na M

Naj bo $V = \mathbb{R}^n$ vektorski prostor z bazo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Ugotovimo najprej, kaj je baza za $\Lambda^k \mathbb{R}^n$.

Očitno je prostor $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ razpet na vse elemente oblike

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

Po definiciji k-tega vnanjega produkta pa vemo

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = (-1)^{|\sigma|} e_{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(i_k)} \, ,$$

za vsako permutacijo σ na k elementih.

Zato $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = 0 \iff i_\ell = i_m$ za kak $\ell, m \in 1, \dots, k$

Torej: za vsako podmnožico $\{i_1, i_2 \dots i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$
lahko izberemo bazni vektor

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$$

in sicer tako, da so $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Naloga: a) $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$

linearno neodvisna.

b) Če so podmnožice $I_\ell = \{i_1^\ell, i_2^\ell, \dots, i_k^\ell\}$
med seboj različne, so vektorji

$$e_{I_\ell} = e_{i_1^\ell} \wedge \dots \wedge e_{i_k^\ell}$$

med seboj linearno neodvisni.

Od tod:

$$\dim \Lambda^k \mathbb{R}^n = \binom{n}{k}$$

$\{ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \dots \wedge e_{i_k} ; i_1 < i_2 < \dots < i_k \}$ baza.

Od tod vidimo: lokalna izražava k-forme ω:

Naj bo $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ lokalna baza TM in

$\{ dx_1, \dots, dx_n \}$ lok. baza (ustrezna) T^*M.

Tedaj je lokalna baza $\Lambda^k(T^*M)$

$\{ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots dx_{i_k} ; \ i_1 < i_2 < \dots < i_k \}$

Zato:

$$\omega(m) = \sum f_{i_1, \dots i_k}(m) \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

oz. bolje

$$\omega(x_1 \dots x_n) = \sum f_{i_1, \dots i_k}(x_1 \dots x_n) \, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Naj bodo $X_1, \dots X_k$ vektorska polja in

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

njihove lokalne izražave.

Evalvacija se tedaj glasi:

$$\omega(X_1, X_2, \dots, X_k) = \left(\sum f_{i_1 i_2 \dots i_k}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum f_{i_1 i_2 \dots i_k} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1 i_1} & a_{2 i_1} & \dots & a_{k i_1} \\ a_{1 i_2} & a_{2 i_2} & \dots & a_{k i_2} \\ \vdots & & & \\ a_{1 i_k} & a_{2 i_k} & \dots & a_{k i_k} \end{pmatrix}$$

Videli smo namreč, kako delujejo k-forme na k vektorjih.

Oglejmo si sedaj še transformacijsko pravilo za k-forme.

Naj bo umeritvena transformacija izražena tako, da bo

$$dy_j = \sum_i g_{ij}\, dx_i$$

Tedaj velja med baznimi elementi $\Omega^k(M)$ (lokalnimi) naslednja relacija:

$$dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \dots \wedge dy_{j_k} = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} g^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Pri tem je $g^{j_1 j_2 \dots j_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ minor, ki ga dobimo tako, da vzamemo elemente na križiščih vrstic $j_1 \dots j_k$ in stolpcev $i_1 \dots i_k$ v matriki (g_{ij}).

Naloga: dokaži zgornjo formulo.

Oglejmo si še, od kod pride transformacija $g = (g_{ij})$.

Spomnimo se: Naj bosta φ_α in φ_β dve karti, ki pokrivata isto območje na M.

Naj bo

$$f: M \to \mathbb{R}$$

funkcija. Tedaj je df 1-forma na M.

Lokalno izražavo df je odvod preslikave

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ ali } f \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Velja:

$$f^\beta = f \circ \varphi_\beta^{-1} = f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}),$$

$$= f^\alpha \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = f^\alpha \circ g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Verižno pravilo:

$$Df^\beta = Df^\alpha \cdot (Dg_{\alpha\beta})^{-1}$$

Torej, če forme pišemo kot stolpce (glede na baze $\{dx_i\}$, $\{dy_i\}$) imamo:

$$Df^\beta = (Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T \, Df^\alpha$$

oz.

$$df^\beta = (Dg_{\alpha\beta}^{-1})^T \, df^\alpha$$

Torej velja:

$$dy_i = Dg_{\alpha\beta}^T \, dx_i$$

(Res: Naj bo
$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{j=1}^n b_j f_j \qquad \{e_i\}, \{f_j\} \text{ bazi}$$

Naj bo $g \cdot e_j = f_j$ - prehodna preslikava

Torej $\begin{pmatrix} & g & \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{nj} \end{pmatrix}$; $f_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} e_i$

Torej: $\sum_{j=1}^n b_j f_j = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n g_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_{ij} b_j \right) e_i$

$$(a) = (g)(b) \Rightarrow (b) = g^{-1}(a)$$

Pull-back diferencialne forme

Imejmo dve mnogoterosti M in N, ter gladko preslikavo

$$f: M \to N$$

med njima. Naj bo $\omega \in \Omega^k(N)$ gladka k-forma na N.

<u>Definicija</u> Pull-back (vzvrat) k-forme $\omega \in \Omega^k(N)$ je k-forma $f^*(\omega) \in \Omega^k(M)$, ki je podana s predpisom:

za vsako k-terico vektorskih polj $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(M)$ velja:

$$f^*(\omega)(X_1, X_2, \dots, X_k) = \omega(Df(X_1), Df(X_2), \dots, Df(X_k))$$

Trditev:

~~Torej~~, pull-back eksaktne forme je eksaktna forma.

Dokaz: Imamo:

$$f^*(dg)(X) = dg(Df(X)) \overset{\text{verižno pravilo}}{=}$$

$$= D(g\circ f)(X)$$

Torej $f^*(dg)$ je 1-forma dobljena s smerimi odvodom funkcije $g\circ f : M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.

$$f^*(dg) = d(g\circ f)$$

$\square$

Trditev Naj bosta $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^*(N)$. Tedaj velja:

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$$

Preden dokažemo trditev, najprej še definirajmo splošni vnanji produkt.

V eni točki: $\omega_1 = v_{11} \wedge v_{12} \wedge \dots v_{1k}$

$$\omega_2 = v_{21} \wedge v_{22} \wedge \dots \wedge v_{2l}$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = v_{11} \wedge v_{12} \wedge \dots \wedge v_{1k} \wedge v_{21} \wedge \dots \wedge v_{2l} .$$

<u>Naloga:</u> Preveri, da ima zgornja definicija smisel tudi globalno.

<u>Dokaz trditve:</u> Za vnanji produkt velja (to je tudi običajna globalna definicija)

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (X_1, \dots X_{l+k}) = \sum_{I} \pm \omega_1 (X_{i_1}, \dots X_{i_k}) \cdot \omega_2 (X_{j_1}, \dots, X_{j_l})$$

I teče po vseh podmnožicah $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots k, \dots k+l\}$,

$$\{j_1, \dots, j_l\} = \{1, 2, \dots, k+l\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

Imamo torej:

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \dots, X_{k+l}) =$$

$$= \omega_1 \wedge \omega_2 (Df(X_1), \dots, Df(X_{k+l})) =$$

$$= \sum_I \pm \, \omega_1 (Df(X_{i_1}) \dots Df(X_{i_k})) \cdot \omega_2 (Df(X_{j_1}) \dots Df(X_{j_l}))$$

$$= \sum_I \pm (f^*\omega_1)(X_{i_1}, X_{i_2} \dots, X_{i_k}) (f^*\omega_2)(X_{j_1}, \dots, X_{j_l})$$

$$= (f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2)(X_1, X_2 \dots X_{k+l}) \qquad \square$$

Pomembna posledica te trditve nam pove, kako se pull-back izraža lokalno (v lokalni koordinati.) Zaradi zgornje trditve je namreč dovolj videti, kaj se dogaja z 1-formami.

Naj bo najprej

$$f : M \to N$$

$$f^*(\omega) \in \Omega^1(M) \qquad \omega \in \Omega^1(N)$$

Lokális koord. v N $\quad (y_1, y_2, \dots, y_n)$

v M $\quad (x_1, x_2 \dots x_m)$

Leképezés f v két koord..

$$f(m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ f_2(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m) \end{pmatrix}$$

Lokális izzsibőv ω:

$$\cancel{\omega(y) = \sum \alpha_i(y) dy_i} \dots$$

$$\omega(y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(y)\, dy_j$$

Tehát:

$$\left\langle \omega, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = \alpha_j$$

Oglejmo si $\quad (f^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$

Imamo: $\quad (f^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \omega\left(Df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)$

$$= \omega\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, dy_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \alpha_j$$

Torej:

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \alpha_k\right) dx_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \overset{dx_i}{\cancel{\frac{\partial}{\partial x_i}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, df_k$$

Vzemimo:

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, dy_k \quad ; \quad \omega_{(y)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(y) \, dy_k$$

Tedaj je:

$$(f^* \omega)(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(f(x)) \cdot df_k$$

Iz prejšnje točke sledi:

Za poljubno k-formo $\omega \in \Omega^k(N)$ velja:

$$\omega(y) = \sum_{I} \alpha_I(y) \, dy_{i_1} \wedge dy_{i_2} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

in

$$(f^* \omega)(x) = \sum_{I} \alpha_I(f(x)) \, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

$\square$

Poglejmo si poseben primer, ko je $f: M \to N$ difeo in je ω $n = \dim M$ - forma:

Tedaj dobimo: $\omega_{(x)} = a(x)\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots dy_n$ lokalno

$$(f^* \omega)(x) = a(f(x))\, df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \dots \wedge df_n(x)$$

$$= a(f(x)) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} dx_i \right)$$

$$= a(f(x)) \left(\sum_{\sigma \in S^n} (-1)^{|\sigma|} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= a(f(x)) \cdot \operatorname{Jac}(f(x))\; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Če je ω - k-forma in $f: M \to N$ poljubna preslikava med prostoroma iste dimenzije, je situacija precej podobna

$$\omega = \sum_I a_I\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$$

Dovolj je (zaradi linearnosti f^*) opazovati le en sumand.

Vzemimo kar $\omega_{(x)} = a(x)\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_k$

(če je potrebno prej preuredimo vrstni red koordinat)

Spet:

$$(f^*\omega)_{(x)} = a(f(x))\, df_1(x) \wedge df_2(x) \wedge \dots \wedge df_k(x)$$

$$= a(f(x)) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \wedge \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i \wedge \dots \wedge \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_i} dx_i \right)$$

$$= a(f(x)) \sum_{I} \operatorname{Jac}\left(\frac{\partial (f_1, f_2 \dots f_k)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

I teče po vseh multiindeksih $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} = I$.

<u>Domača naloga</u> Primerjaj zgornjo dobljeno formulo z že prej narejenim primerom za transformacijo izraza k-forme iz enih koordinat v druge.

<u>Opomba:</u> Operacija pull-back je vedno dobro definirana na kontravariantnih tenzorskih poljih, na kovariantnih pa ne. Hitro vidimo, da push-forward vektorskega polja v večini primerov ni dobro definiran.

Če f ni surjektivna ($f: M \to N$), dobimo iz $V \in \Gamma(M)$ le polje vektorjev $f(M) \subset N$ in ne vektorjev N.

Če f ni injektivna, smo seveda spet v težavah, razen v posebnih primerih.

Npr. G - deluje na M; $N = M/G$ mnogoterost.

Naj bo polje V G-invariantno. Tedaj obstaja smiselno definiran push-forward polja V na M/G.

Vnanji odvod

Označimo z $\Omega^*(M)$ stopničasto vnanjo algebro diferencialnih form na mnogoterosti M. Nekoliko kasneje bomo definirali integral k-forme vzdolž k-dimenzionalnih podmnogoterosti. Naj bo sedaj $N \subset M$ $(k+1)$-dimenzionalna podmnogoterost in $\omega \in \Omega^k(M)$ k-forma. Naš cilj bo konstruirati operator

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M),$$

za katerega bo veljalo

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega$$

Poseben primer zgornje formule je

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f\Big|_{\partial\gamma} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

kjer je $f: M\to\mathbb{R}$ funkcija, $\gamma:[a,b]\to M$ pa krivulja.

Tu že vemo, kaj je

$$d:\Omega^0(M)\to\Omega^1(M)$$

– običajni odvod funkcije.

V splošnem je operator $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ opredeljen z naslednjim izrekom:

<u>Izrek</u>: Obstaja natanko en $\mathbb{R}$-linearen operator

$$d:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$$

stopnje 1, ki zadošča naslednjim lastnostim:

1) d je gledan na $\wedge$ anti-derivacija

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

2) $f \in \Omega^0(M)$: df je običajen odvod (diferencial) funkcije: $df_{(x)}(V(x)) = V(f)(x)$ ← smerni odvod

3) $$d \circ d = 0$$

Operator, ki je določen z zgornjimi lastnostmi
Ima tudi tole lastnost:

4) $$d_M(f^*\alpha) = f^*(d_N \alpha)$$

$$f: M \to N \quad \text{in} \quad \alpha \in \Omega^*(N$$

Dokaz: Najprej bomo definirali d na odprtih množicah v $\mathbb{R}^n$. Opremimo U s koordinatami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Naj bo

$$\alpha(x) = \sum_{\underline{I}} \alpha_{\underline{I}}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Poskusimo z naslednjo definicijo:

$$d\alpha(x) = \sum_{\underline{I}} d\alpha_{\underline{I}}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Preverimo lastnosti:

1) $d\left([\alpha\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}] \wedge [\beta\, dx_{j_1} \wedge \ldots\, dx_{j_l}]\right) =$

$= d\left(\alpha \cdot \beta\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}\right) =$

$= \beta \cdot \overbrace{d\alpha \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}}^{d(\alpha . dx_{i_1} \ldots dx_{i_k})} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l} +$

$+ \alpha\, d\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots\, dx_{j_1} \wedge dx_{j_l}$

$= \beta\, d(\alpha . dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) + (-1)^k \alpha\, dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge d(\beta\, dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_l})$

OK ✓

3) $d(d(\alpha\, dx_I)) = d(d\alpha \wedge dx_I) =$

$$= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I\right) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I$$

$$= \sum_{k<j} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_k \partial x_j}\right) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I = 0$$

Dokažimo, da za naš operator velja točka 4)

Naj bo $f: U_{\subset \mathbb{R}^n} \to V_{\subset \mathbb{R}^m}$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

$\alpha \in \Omega^k(V)$: $\alpha(y) = a(y)\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$

$$d(f^*\alpha) = d(f^*(a\, dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}))$$

$$= d((a \circ f)\, df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots\, df_{i_k})$$

$$= \left(\ker (d \circ d) f_{i_j} \right) \quad d(a \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

$$= f^*(da) \wedge f^*(dy_{i_1}) \wedge \dots \wedge f^*(dy_{i_k})$$

$$= f^*(da \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) = f^*(d\alpha)$$

<u>Opazimo:</u> Edini operator na $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$, ki ustreza lastnostim (1) - (3) je na dekompozibilnih elementih podan z našim zgornjim predpisom.

$$d\left(a(x) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) =$$

$$= da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

To bi lahko dokazali z indukcijo: $a(x)\, dx_{i_1} \dots$

Z gornjo definicijo operatorja $d : \Omega^*(\mathbb{R}^n) \to \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ bomo skoraj prenesli na $\Omega^*(M)$.

Najprej opazimo, da je operator d lokalen:
To pomeni, da za vsako odp. mn. $V \subset \mathbb{R}^n$ velja

$$(d\omega)\big|_V \text{ je forma, odvisna le od } \omega|_V.$$

<u>Def:</u> Naj bo M mnf in (U,φ) karta na M.

$$(d_M \omega)\big|_U \overset{\text{def}}{=} \varphi^*\left(d_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega\right)$$

za $\omega \in \Omega^*(M)$.

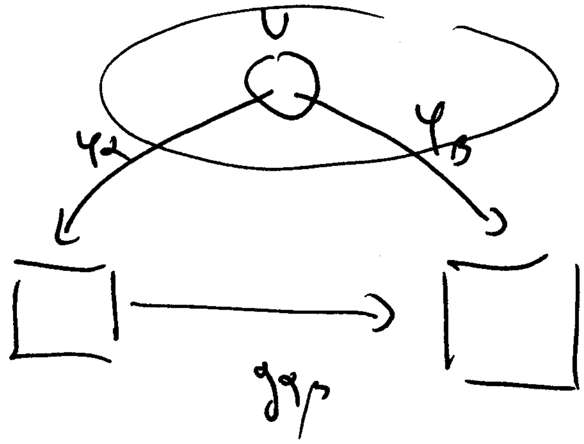
Preveriti moramo, ali je zgornja definicija neodvisna od izbire karte.

Naj bosta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) karti na M in naj bo kar $U_\alpha = U_\beta$. Prepričati se moramo, da sta formi

$$(d_M \omega)\big|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^* \left(d_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \right) \quad \text{in}$$

$$(d_M \omega)\big|_{U_\beta} = \varphi_\beta^* \left(d_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\beta^{-1})^* \omega \right)$$

enaki.



Torej:

$$\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\beta$$

in zato:

$$d_{\mathbb{R}^n} \left((\varphi_\alpha^{-1})^* \omega \right) = d_{\mathbb{R}^n} \left(\left[(g_{\alpha\beta}^{-1} \circ \varphi_\beta)^{-1} \right]^* \omega \right)$$

$$= d_{\mathbb{R}^n} \left(\left[\varphi_\beta^{-1} \circ g_{\alpha\beta} \right]^* \omega \right) =$$

$$d_{\mathbb{R}^n}\left(g_{\alpha\beta}^*\,(\varphi_\beta^{-1})^*\omega\right) \overset{\text{lastnost 4}}{=}$$

$$= g_{\alpha\beta}^*\, d_{\mathbb{R}^n}\left((\varphi_\beta^{-1})^*\omega\right)$$

Potegnimo enakost te forme z φ_α^* na M.

Dobimo ($\varphi_\alpha = g_{\alpha\beta}^{-1}\circ\varphi_\beta$!)

$$\underline{\varphi_\alpha^*\left(d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\alpha^{-1})^*\omega\right)} = \varphi_\alpha^*\left[g_{\alpha\beta}^*\, d_{\mathbb{R}^n}(\varphi_\beta^{-1})^*\omega\right]$$

$$= \left(\varphi_\beta^*\circ(g_{\alpha\beta}^{-1})^*\circ g_{\alpha\beta}^*\right)\left(d_{\mathbb{R}^n}\left((\varphi_\beta^{-1})^*\omega\right)\right) =$$

$$= \underline{\varphi_\beta^*\left(d_{\mathbb{R}^n}\left((\varphi_\beta^{-1})^*\omega\right)\right)}.$$

Operator d_M je torej dobro definiran. Lastnosti (1) - (4) sledijo iz lastnosti (1) - (4) za $d_{\mathbb{R}^n}$ $\square$

Z gornjo definicijo operator je res edini operator na $\Omega^*(M)$, ki ustreza lastnostim (1) - (3)

Dokaz: Najprej dokažimo, da velja: $U \subset M$

$$\omega|_U = 0 \Rightarrow d'_M \omega|_U = 0.$$

za vsak operator d'_M, ki ustreza lastnostim (1), (2), (3).

Naj bo $\chi : M \to \mathbb{R}$ funkcija z lastnostmi:

$$\chi|_V = 0 \quad \text{za nek } V \subset U$$

$$\chi|_{M \setminus U} = 1$$

Tedaj velja na V: $\omega = \chi \cdot \omega$. Zato:

$$d'_M(\omega) = d'_M(\chi \cdot \omega) = d'_M \chi \wedge \omega + \chi \cdot d'_M \omega$$

Toda $d'_M \chi = d\chi = 0$ na V, zato

$$d'_M(\omega) = 0 \text{ na } V \text{ za } \forall V \subset U. \Rightarrow d'_M \omega = 0 \text{ na } U$$

Naj bo karta $(U, \varphi) \subset M$; $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ karta na M. Naj bo $\chi : M \to \mathbb{R}$ funkcija za katero velja

$$\chi|_{U'} \equiv 1 \quad \text{za neko } U' \subset U$$

in $\chi|_{M \setminus U} = 0$

Dokaz:

$$d'_M(\omega) = d'_M(\chi\omega + (1-\chi)\omega) \overset{\text{linearnost}}{=}$$

$$= d'_M(\chi\omega) + d'_M((1-\chi)\omega)$$

Na U' je $1 - \chi = 0$, zato na U': (iz zgornjega sledi $d'_M((1-\chi)\omega) = 0$ na U')

$$d'_M(\omega) = d'_M(\chi\omega)$$

Forma $\chi\omega$ je forma z nosilcem v lokalni karti (U, φ). Zaradi enoličnosti d na $\mathbb{R}^n$ za take forme velja $d'_M(\chi\omega) = d_M(\chi\omega)$ □

<u>Definicija:</u> Forma $\omega \in \Omega^k(M)$ je sklenjena, če velja

$$d\omega = 0.$$

Forma $\omega \in \Omega^k(M)$ je eksaktna, če velja: obstaja forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, tako da imamo:

$$d\alpha = \omega.$$

Oznake:

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \,;\, d\omega = 0\}$$

$$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \,;\, \omega = d\alpha \text{ za nek. } \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\}$$

Ker velja
$$d^2 = d(d\omega) = 0,$$

imamo
$$B^k(M) \subset Z^k(M)$$

Opomba: $\Omega^k(M)$, $B^k(M)$, $Z^k(M)$ so vektorski prostori (torej Abelove grupe za $+$).

Definicija: k-ta DeRhamova kohomološka grupa $H^k_{DR}(M)$ je kvocientni vektorski prostor
$$H^k_{DR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

Pravimo: Formi ω_1 in ω_2 sta kohomologni, če velja:
$$\omega_1 - \omega_2 = d\alpha \quad \text{za neki } \alpha.$$

<u>Izrek</u> $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ za $\forall k > 0$.

$H^0(\mathbb{R}^n) = \{$ konstantne funkcije $\} =$ 1-dim vekt. prostor.

Zgornji izrek se običajno imenuje Poincaréjeva lema. Eksplicitno pravi:

$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

$$d\omega = 0 \Rightarrow \omega = d\alpha$$

sklenjena forma je vedno eksaktna.

Oglejmo si najprej najenostavnejši primer zgornjega izreka, namreč trditev pri $k = 1$.

Naj bo $\omega = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, dx_k$ in naj velja $d\omega = 0$. To nam da:

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} df_k(x) \wedge dx_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\, dx_j \Big) \wedge dx_j =$$

$$= \sum_{k<j} \Big(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \Big) dx_j \wedge dx_k = 0$$

torej:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \forall\, j,k = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Iščemo funkcijo $F : M \to \mathbb{R}$, za katero bo veljalo:

$$dF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\, dx_j = \sum_{j=1}^{n} f_j\, dx_j$$

<u>Rešitev:</u>

$$F(\vec{x}) = \int_{p}^{\vec{x}} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) \right) dt, \quad (*)$$

kjer je $p \in \mathbb{R}^n$ poljubna točka,

$$\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

pa krivulja za katero velja:

$$\gamma(a) = p \quad \text{i} \quad \gamma(b) = \vec{x}$$

Torej, točnejši zapis $(*)$:

$$F(\vec{x}) = \int_{a}^{b} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) \right) dt$$

Videli bomo: $F(\vec{x})$ je neodvisna od izbire poti $\iff$ $d\omega = d\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i\right) = 0$.

Na kratko lahko zgornjo formulo zapišemo:

$$F(\vec{x}) = \int_{\gamma} \omega$$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = \vec{x}$.

Neodvisnost od izbire poti je verzija

stokesovega izreka:

γ_1, γ_2 dve poti in $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ njuna konkatenacija.

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^n$ ploskev "ploskev" v $\mathbb{R}^n$,

za katero velja

$$\partial S = \gamma_1 * \gamma_2^{-1}$$

Tedaj:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \omega = \int_S d\omega = 0$$

$$\parallel$$

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

Preverimo še: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(F(x_1, \dots, x_i + h, \dots x_n) - F(x_1 \dots x_i, \dots x_n) \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left(\sum_{j=1}^n f_i(x_1, \dots, x_i + t, \dots x_n) \cdot \dot{\gamma}_j(t) \right) dt \,,$$

kjer smo za $\gamma(t)$ vzeli:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Torej $\dot{\gamma}_i(t) \equiv 1$ in $\dot{\gamma}_j(t) \equiv 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f_i(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) \, dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{G(\vec{x} + h) - G(\vec{x})}{h} = f_i(\vec{x})$$

$G(\vec{x})$ - primitivna funkcija $f_i(x_1 \dots x_i + t, \dots x_n) = g(t)$.

V splošnem je ideja podobna.

Naj bo $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ sklenjena: $d\omega = 0$.

Trdimo, da obstaja $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, za katero velja:

$$d\alpha = \omega .$$

Takoj opazimo, da rešitev zgornje enačbe ni enolična. Naj bo $\tilde{\alpha} = \alpha + d\beta$ in $\beta \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

Tedaj velja:

$$d\tilde{\alpha} = d\alpha + d^2\beta = \omega$$

Rešitve se torej lahko razlikujejo za eksaktne člene.

Konstrukcija rešitve – možno.

Naj bo K_0 neka sklenjena $(k-1)$-dimenzionalna podmnogot. v $\mathbb{R}^n$, K pa poljubna druga sklenjena podmnogot. $\dim = (k-1)$. Naj bosta kobordantni

Naj bosta K_0 in K kar dve sferi, K_0 fiksna, K pa poljubna. Naj bo L k-dimenzionalna podmnogoterost, ta kaže velja:

$$\partial L = K \cup K_0$$

pozitivna   negativna   orientacija

Tedaj lahko definiramo: $(k-1)$-forma α je podana s predpisom:

$$\int_K \alpha = \int_L \omega$$

Potrebno smo predpostaviti, da α poznamo, če poznamo $\int_K \alpha$ za vsako sfero $K \subset \mathbb{R}^n$.

Ali je zgornja definicija smiselna: Naj bosta L in $\tilde{L}$ dve mnogoterosti, za kateri velja

$$\partial L = \partial \tilde{L} = K \cup K_0$$

Torej je $L \cup \tilde{L}$ sklenjena "mnogoterost" in velja

$$\int_L \omega - \int_{\tilde{L}} \omega = \int_{L\cup\tilde{L}} \omega = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = 0$$

Torej $\int_L \omega = \int_{\tilde{L}} \omega$.

Zgoraj smo uporabili: V $\mathbb{R}^n$ je vsaka sklenjena k-mnogoterost rob neke $(k+1)$-mnogoterosti.

Zgornja konstrukcija za njene z dejstvom, da je v resnici rešitev enačbe

$$d\alpha = \omega$$

več: Velja namreč:

$$\int_K \tilde{\alpha} = \int_K \alpha + d\beta = \int_K \alpha + \int_K d\beta = \int_K \alpha + \underbrace{\int_{\partial K} \beta}_{=0}$$

Vidimo tudi: Poznavanje vseh $\int_K \alpha$ nam ne pove forme α. Pove nam jo kvečjemu v homološkem smislu, t.j. do vseh eksaktnih členov natančno.

Dokaz Poincaréjeve leme

Zapišimo najprej neko formo ω takole:

$$\omega(x) = \sum_{\# I = k-1} a_I(x)\, dx_I \wedge dx_n + \omega'(x)$$

(I-multiindeks brez tistih i_k, ki so n)

člen brez dx_n

Definirajmo:

$$\beta(x) = (-1)^{k-1} \sum_I \int^{x_n} a_I(x', t)\, dt \cdot dx_I + \ldots$$

Velja

$$d\beta = (-1)^{k-1} \sum_I a_I(x', x_n)\, dx_n \wedge dx_I + \dots$$

$$= \sum_I a_I(x)\, dx_I \wedge dx_n \quad + \text{ členi brez } dx_n$$

Naj bo sedaj:

$$\omega_1 = \omega - d\beta = \sum_J b_J(x)\, dx_J\,,$$

J multiindeks s k členi, ki ne vsebuje n.

Imamo:

$$d\omega_1 = d\omega - dd\beta = 0\,,$$

torej mora veljati:

$$\frac{\partial b_J}{\partial x_n} = 0 \quad \text{za } \forall J.$$

ker v dx_J ni dx_n in so členi $dx_J \wedge dx_n$ različni od 0. $\frac{\partial b_J}{\partial x_n} dx_J \wedge dx_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial b_J}{\partial x_n} = 0$

Forma ω_1 je torej neodvisna od x_n.

Nadaljujemo: dobimo β_1, za katero velja

$$\omega_1 - d\beta_1 = \omega_2$$

in ω_2 je forma neodvisna od x_n, x_{n-1}.

Tako nadaljujemo, dokler ne pridemo do

$$\omega_l - d\beta_l = \omega_{l+1} = 0$$

Nato "splezamo" nazaj:

$$\omega_l = d\beta_l$$

$$\omega_{l-1} - d\beta_{l-1} = \omega_l = d\beta_l$$

$$\omega_{l-1} = d(\beta_l + \beta_{l-1})$$

$$\vdots$$

$$\omega = d(\beta_l + \beta_{l-1} + \dots + \beta_1 + \beta)$$

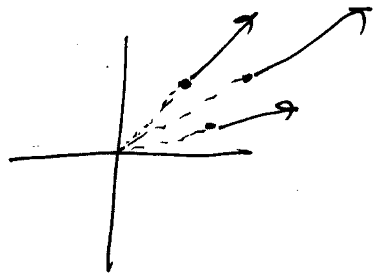
$\square$

<u>Primeri:</u> Oglejmo si n-formo na $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ki ni eksaktna, čeprav je sklenjena.

Naj bo $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$ običajna volumska forma na $\mathbb{R}^{n+1}$ in označimo z

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

"radialno" vektorsko polje na $\mathbb{R}^{n+1}$.



Naj bo $\alpha \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ definirana s predpisom

$$\alpha_{(x)}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \omega_{(x)}(V(x), X_1, X_2, \dots, X_n)$$

za $X_1, X_2, \dots, X_n \in T_x\mathbb{R}^{n+1}$

Zgornji izraz običajno na kratko označujemo

$$\alpha = i(V)\,\omega \qquad \text{(kontrakcija)}$$

Naj bo $inc: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ naravna inkluzija.

in si oglejmo formo:

$$\tilde{\alpha} = (inc)^*(\alpha)$$

Ker je v vsaki točki $x \in S^n$ $V(x) \perp T_x S^n$,

je $\tilde{\alpha}$ volumska forma na S^n.

Iz

$$\alpha = i(V)\,\omega$$

dobimo:

$$\alpha_{(x_1 \dots x_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

V $\mathbb{R}^{n+1}$ velja: $\quad d\alpha = (n+1)\,\omega$

Na S^n pa velja $\quad d\tilde{\alpha} = 0$

že iz dimenzijskih razlogov.

Seveda pa $\tilde{\alpha}$ ni eksaktna. Če bi bila, bi imeli:

$$\int_{S^n} \tilde{\alpha} = \int_{S^n} d\beta = \int_{\partial S^n} \beta = 0 \quad ,$$

toda $\int_{S^n} \tilde{\alpha} = Vol(S^n) > 0$.

V primeru $n=1$ dobimo:

$$\tilde{\alpha} = x\,dy - y\,dx$$

Parametrizirajmo enotsko sfero $\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array}$.

$$\tilde{\alpha} = \cos(t)\cos(t)\,dt - \sin(t)(-\sin t)\,dt = dt$$

Seveda $d(dt) = 0$, toda pa $\tilde{\alpha}$ ni eksaktna na S^1.

V splošnem: Forma

$$\gamma_{(t)} \left(\overset{\shortparallel}{=} f(t)\,dt \right)^{\shortparallel}$$

na krožnici $(\cos(t), \sin(t))$. Kdaj bo eksaktna:

Naj bo $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ krovna preslikava

$t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$

Tedaj je za $\forall$ 1-formo $\gamma \in \Omega^1(S^1)$:

$$\pi^*(\gamma) = f(t)\,dt$$

za neki $f(t)$. Zgornja forma je na $\mathbb{R}$ seveda eksaktna; Naj bo

$$g(t) = \int_0^t f(t)\,dt \quad (+\, g(0))$$

Tedaj:

$$d g_{(t)} = f(t)\,dt$$

Torej funkcija $g(t)$ je pull-back 0-forme na S^1 po π natanko tedaj, ko velja:

$$g(0) = g(2\pi) = 0$$

Torej, ~~natanko~~ je γ eksaktna na S^1 natanko tedaj, ko velja:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dt = g(2\pi) - g(0) = 0,$$

sicer pa ne.

Zapis volumske forme na $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\alpha_x(v_1, v_2) = \langle x, v_1 \times v_2 \rangle \qquad v_1, v_2 \in T_x S^2$$

Domača naloga: Seveda $\alpha \in \Omega^2(S^2)$ ni eksaktna.

Velja pa naslednje: Naj bo

$$\pi : S^3 \to S^2$$

Hopfova fibracija. Tedaj je forma $\pi^*(\alpha) \in \Omega^2(S^3)$ eksaktna. Dokaži!

Liejev odvod diferencialne forme in Cartanova magična formula

Liejev odvod tenzorja je vedno odvod vzdolž vektorskega polja oz. vzdolž njegovega toka.

Vemo že, da za 0-formo $f \in \Omega^0(M)$ in za vektorsko polje $V \in \Gamma(TM)$ velja

$$\mathcal{L}_V(f)_{(x)} = V(f)_{(x)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi_t(x)),$$

kjer je $\varphi_t : U \subset M \to \tilde{U} \subset M$ tok vektorskega polja V; $\varphi_0 = id$.

Zgornjo definicijo lahko zapišemo s pull-backom:

$$\mathcal{L}_v(f)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(f)(x)$$

To pa ima jasno posplošitev na k-forme:

<u>Definicija</u>

$$\mathcal{L}_v(\omega)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(\omega)(x)$$

S pomočjo φ_t^* dobimo krivuljo

$$t \longmapsto \varphi_t^*(\omega)(x)$$

v $\Lambda^k(T_x^*M)$. Liejev odvod je tangenta na to krivuljo v času $t=0$.

En ~~pull~~ Lie-afgeleide ondanks volgen weinig logische formule.

Toelichting

$$\mathcal{L}_V(df) = d(V(f)) = d(\mathcal{L}_V(f))$$

Bewijs:

$$\mathcal{L}_V(df)_{(x)} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(df)_{(x)}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*\left(df_{(\varphi_t(x))}\right)$$

keer d in pull-back commuteert

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(f \circ \varphi_t)_{(x)}$$

$$= d\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(f(\varphi_t(x)\right)\right)$$

$$= d(V(f)) \qquad \square$$

Za $\mathcal{L}_v$ velja tudi Leibnitzevo pravilo glede na $\wedge$.

$$\mathcal{L}_v(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_v(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_v(\beta))$$

<u>Reš:</u> $\mathcal{L}_v(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\varphi_t^*(\alpha) \wedge \varphi_t^*(\beta) \right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(\alpha) \wedge \underbrace{\beta}_{=\varphi_0^*(\beta)} + \underbrace{\alpha}_{=\varphi_0^*(\alpha)} \wedge \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_t^*(\beta)$$

$$= \mathcal{L}_v(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_v(\beta) \qquad \square$$

In po pričakovanjih velja tudi:

$$\mathcal{L}_V(d\alpha) = d(\mathcal{L}_V(\alpha))$$

Dok.:

$$\mathcal{L}_V(d\alpha) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\varphi_t^*(d\alpha)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(d(\varphi_t^*\alpha)\right) = d(\mathcal{L}_V(\alpha))$$

□

Spomnimo se oznake $i(V)\alpha$ za kontrakcijo.

Izrek (Cartanova čarobna formula)

$$\underline{\mathcal{L}_V(\alpha) = i(V)\,d\alpha + d(i(V)\alpha)}$$

Ta formula je v bistvu Leibnitzevo pravilo za odvod produkta $i(V)\alpha$

$$d\, i(V)\alpha = \mathcal{L}_V(\alpha) - i(V)\,d\alpha$$

Dokaz Cartanove formule: Lahko bi dokazali direktno v lokalnih koordinatah - bistveni del računa je Leibnitzevo pravilo.

Dokaz si lahko olajšamo in poenostavimo z indukcijo.

– indukcija na stopnjo k forme α.

$k=0$: $\mathcal{L}_V(f) = i(V)\,df + 0$ ker $i(V)f$ ni nič

$k \to k+1$

$$\alpha = \sum_i df_i \wedge \omega_i \quad , \quad \omega_i \text{ } k\text{-forme, } f_i \text{ funkcije}$$

Na levi strani dobimo:

$$\mathcal{L}_V(df \wedge \omega) = \mathcal{L}_V(df) \wedge \omega + df \wedge \mathcal{L}_V(\omega) \, ,$$

na desni pa:

$$i(V)\,d(df \wedge \omega) + d\big(i(V)(df \wedge \omega)\big) =$$

$$= -\,i(V)(df \wedge d\omega) + d\big(i(V)df \cdot \omega - df \wedge i(V)\omega\big)$$

$$= -\,i(V)df \cdot d\omega + df \wedge i(V)\omega \; +$$

$$+\; d(i(V)df) \wedge \omega + i(V)df \cdot d\omega + df \wedge d(i(V)\omega)$$

$$= d(i(V)df) \wedge \omega + df \wedge (i(V)d\omega + d(i(V)\omega))$$

po indukcijski predpostavki

$$= \mathcal{L}_V(df) \wedge \omega + df \wedge \mathcal{L}_V(\omega)$$

Leva in desna stran sta torej res enaki □

Za Liejev odvod velja tudi tole:

$$\underline{\mathcal{L}_{f\cdot V}\alpha = f\mathcal{L}_V\alpha + df \wedge i(V)\alpha}$$

<u>Dokaz</u> Po Cartanovi formuli velja:

$$\mathcal{L}_{fV}\alpha = i(fV)d\alpha + d(i(fV)\alpha) =$$

$$= f\, i(V)d\alpha + d(f \cdot i(V)\alpha) =$$

$$= f\, i(V)d\alpha + f d(i(V)\alpha) + df \wedge i(V)\alpha =$$

$$= f \cdot \mathcal{L}_V(\alpha) + df \wedge i(V)\alpha .$$

□

Tudi ta formula je ena oblika Leibnizovega pravila.

<u>Trditev</u> Naj bo $f: M \to N$ difeomorfizem, $\omega \in \Omega^k(N)$ in $V \in \Gamma(TN)$. Tedaj velja

$$f^*(\mathcal{L}_V \omega) = \mathcal{L}_{f^*(V)}(f^*\omega)$$

<u>Opomba:</u> Zgornja trditev ima nek smisel le, če je f difeo. Drugače namreč ne moremo potegniti polja V nazaj na M.

<u>Dokaz:</u>
$$f^*(\mathcal{L}_V \omega) = f^*(i(V)d\omega + d(i(V)\omega)) =$$
$$= i(f^*V)\, f^*(d\omega) + d(f^*(i(V)\omega))$$
$$= i(f^*V)\, d(f^*\omega) + d(i(f^*(V))\, f^*(\omega))$$
$$= \mathcal{L}_{f^*(V)}(f^*\omega)$$
□

Zgoraj smo uporabili enakost: $f^*(i(V)\alpha) = i(f^*(V))\, f^*(\alpha)$, ki pa je očitna. Res.

$$f^*(i(V)\alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(V, Df(X_1), \dots, Df(X_{k-1})).$$
$$= \alpha(Df(Df^{-1}(V)), Df(X_1) \dots Df(X_{k-1}))$$ Po drugi strani

$$i(f^*(V))\, f^*(\alpha)(X_1, \dots, X_{k-1}) = i(f^*(V))\, \alpha(-, Df(X_1) \dots Df(X_{k-1})) = \alpha(V, Df(X_1) \dots Df(X_{k-1}))$$

<u>Trditev</u> Naj bo V vektorsko polje na M in φ_t tok tega polja. Za $\omega \in \Omega^k(M)$ velja:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} (\varphi_t^* \omega) = \varphi_s^* (\mathcal{L}_V \omega)$$

<u>Dokaz:</u> Za $s = 0$ je to definicija $\mathcal{L}_V \omega$, saj $\varphi_0 = id$.

Naj bo $t = u + s$; Podgrupna lastnost φ_t

$$\varphi_t = \varphi_u \circ \varphi_s$$

Imamo:
$$\varphi_t^* \omega = (\varphi_u \circ \varphi_s)^* \omega = \varphi_s^* (\varphi_u^* \omega)$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} (\varphi_t^* \omega) = \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \varphi_s^* (\varphi_u^* \omega) =$$

$$= \varphi_s^* \left(\frac{d}{du}\Big|_{u=0} \varphi_u^* (\omega)\right) = \varphi_s^* (\mathcal{L}_V (\omega))$$

$\square$

Od tod sledi pomembno dejstvo

<u>Izrek</u> Naj bosta $V \in \Gamma(TM)$ in $\omega \in \Omega^k(M)$. Tedaj velja:

$$\mathcal{L}_V \omega = 0 \iff \varphi_t^* \omega = \omega,$$

kjer je φ_t tok V.

Seveda je smer $\Leftarrow$ očitna, smer $\Rightarrow$ pa sledi iz prejšnje trditve.

<u>Primer:</u>

<u>Simplektične mnogoterosti in hamiltonski tokovi</u>

<u>Definicija</u> Naj bo M $2n$-dimenzionalna ~~forma~~ mnogoterost in $\omega \in \Omega^2(M)$ forma z lastnostmi:

1) $d\omega = 0$ sklenjenost
2) $\overbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}^{n} \neq 0$ pp. neizrojenost

Tedaj se ω imenuje simplektična forma. Par (M, ω) se imenuje simplektična mnogoterost.

<u>Primeri</u>: 1) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$; $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)\}$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

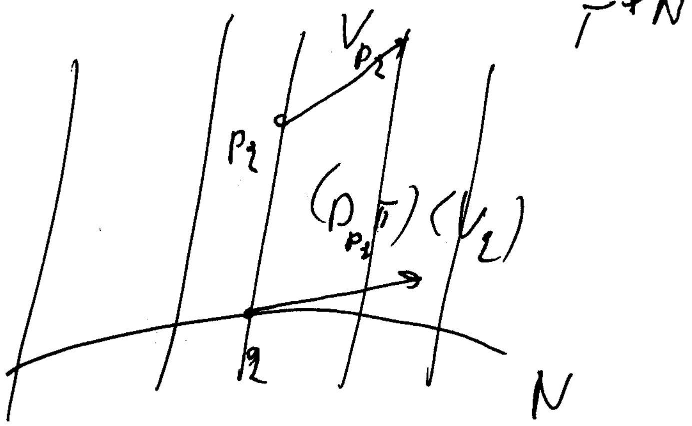
2) Naj bo N poljubna n-dimenzionalna mnogoterost. Tavtološka forma na T^*N je podana s predpisom. $\vartheta \in \Omega^1(T^*N)$

$$\vartheta_{(q, p_q)}(V_{p_q}) = -p_q\left(D\pi_{p_q}(V_{p_q})\right),$$

kjer je $\pi : T^*N \to N$

naravna projekcija.

Torej



Namreč: $p_q \in T_q^* N$ in ga lahko evaluiramo na elementih $T_q N$.

Kanonična (kotangentna) simplektična forma na T^*N je torej podana s predpisom

$$\omega_c = d\vartheta$$

Pokažimo, da ω_c lokalno izgleda kot zgoraj omenjena forma $\sum dq_i \wedge dp_i$.

Naj bo U okolica v M homeomorfna disku in $(q_1, \dots, q_n)$ koordinate na U. Torej (U, φ) je karta, $\varphi(m) = (q_1 \dots, q_n)$ ← koordinate točke m.

V vsaki točki $m \in U$ tvorijo $dq_1, \dots, dq_n$ bazo $T_m U$

Vsako točko $a \in T^*M|_U$ lahko torej zapišemo s koordinatami:

$$a \mapsto (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

Pri čemer je $\pi(a) = (q_1, \dots, q_n)$ in

$$a = \sum_{k=1}^{n} dq_k(a) \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \, dq_k(a)$$

Oglejmo si, kako se v lokalnih koordinatah izraža tavtološka forma θ.

Naj bo $p_z = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$

in $V_{p_z} \in T_{p_z}(T^*N) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{\partial}{\partial p_k}$

Spomnimo se:

$$\theta_{p_z}(V_{p_z}) = -p_z(\pi_* V_{p_z}) = -p_z\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial q_k}\right) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \alpha_k$$

Tedaj
$$\vartheta = -\sum_{k=1}^{n} p_k \, dq_k$$

Od tod takoj sledi:
$$\omega_c = d\vartheta = -\sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k$$

Velja

Izrek (Darboux): Naj bo (M^{2n}, ω) poljubna simplektična mnogoterost in $p \in M^{2n}$ poljubna točka. Tedaj obstaja okolica $p \in U \subset M^{2n}$, in lokalne koordinate $(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$ na U, tako da velja:
$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dp_k \wedge dq_k$$

3) Naj bo S^2 dvodimenzionalna sfera in ω volumska forma na S^2. Tedaj je (S^2, ω) simplektična mnogoterost. Splošneje, vsaka orientabilna ploskev

je skupaj s svojo volumsko formo simplektična mnogoterost.

<u>Definicija</u>: Difeomorfizem $f : M \to M$ je simplektomorfizem simplektične mnt (M, ω), če velja

$$f^*(\omega) = \omega.$$

<u>Definicija</u> Naj bo (M, ω) simplektična mnogoterost in $V \in \Gamma(TM)$ vektorsko polje. Vektorsko polje V je simplektično, če tok φ_t polja V ohranja ω. Torej, za vsak t je φ_t simplektomorfizem.

Vemo, da tedaj velja: $\mathcal{L}_V(\omega) = 0$.

V simplektični geometriji so posebno pomembna hamiltonska vektorska polja.

Naj bo (M, ω) simplektična mnogoterost in

$$H : M \to \mathbb{R}$$

funkcija na M. Vektorsko polje X_H je hamiltonsko polje funkcije H, če velja:

$$dH = i(X_H)\,\omega$$

Trojica (M, ω, H) je Hamiltonski sistem.
Rešitev hamiltonskega sistema je vsaka krivulja

$$\gamma : I \to M,$$

za katero velja

$$\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$$

Primer: $M = T^*\mathbb{R}^3$, $\omega = \sum_{k=1}^{3} dp_k \wedge dq_k$ in

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(q)$$

$p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$

Torej:

$$dH = \frac{\partial V}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3} dq_3 + p_1 dp_1 + p_2 dp_2 + p_3 dp_3$$

Poiščimo hamiltonsko vektorsko polje X_H.

$$X_{H(q,p)} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(q,p) \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{3} \beta_i(q,p) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$i(X_H)\omega = i\Big(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{3} dp_j \wedge dq_j\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} -\beta_i dq_i + \alpha_i dp_i$$

Veljati mora: $i(X_H)\omega = dH$

$$\sum_{i=1}^{3} -\beta_i dq_i + \alpha_i dp_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i + p_i dp_i$$

Dobimo:

$$X_H = \sum_{i=1}^{3} + p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

Iz krivulje

$$\gamma(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t))$$

imamo:

$$\dot\gamma = (\dot q(t), \dot p(t)) .$$

Tedaj mora $\dot\gamma(t) = X_H(\gamma(t))$ da sistem ODE:

smo že!!

(popravit moramo predznak pri ω ; $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$)

$$\dot q_i = p_i$$

$$\dot p_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Dobimo

$$\ddot q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

Enačbe gibanja delca v polju sil s potencialom V.

<u>Trditev</u> Vsako hamiltonsko polje je simplektično.

<u>Dokaz:</u> Naj bo X_H hamiltonsko polje funkcije H.

Trdimo:

$$\mathcal{L}_{X_H}(\omega) = 0.$$

<u>Res:</u> Cartanova formula nam da

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = \underbrace{i(X_H)\,d\omega}_{\substack{\| \\ 0 \text{ ker } \omega \text{ simplektična.}}} + d(i(X_H)\omega)$$

$$i(X_H)\omega = dH \quad \text{po def h-polja:}$$

Torej:

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = ddH = 0$$

$\square$

Ali je res tudi obratno: Ali je simplektično polje nujno hamiltonsko. Lahko da

Naj velja $\mathcal{L}_X(\omega) = 0$.

Tedaj
$$\underbrace{i(X)d\omega}_{=0} + d(i(X)\omega) = 0$$

$i(X)\omega$ je 1-forma. Lokalno je sklenjena 1-forma eksaktna $\Rightarrow$ obstaja H $\ni$:

$$i(X)\omega = dH$$

Tudi globalno je to res, če velja:

$$H^1_{DR}(M) = 0$$