Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

1. domača naloga, 11. marec 2022

Jan Hrastnik

Rok za oddajo: 25. marec 2022 do 13^{15}

1. Na poplavnem območju namestimo tri črpalke za vodo. Vsaka med njimi ima določeno zmogljivost (koliko vode lahko prečrpa v eni uri), potrebno električno moč, stopnjo zvočnega onesnaževanja (hrupnost) ter stroške vzdrževanja. Podatki so v tabeli:

Črpalka	zmogljivost [m^3/h]	potrebna el. moč [kW]	hrup [dB]	stroški [EUR]
A	5	2	120	100
B	4	3	90	80
C	3	5	60	150

   Okoljevarstveni predpisi določajo, da je povprečna stopnja hrupa, ki jo lahko dosega črpalka, 20 dB (kadar črpalka ne obratuje, se šteje, da proizvaja hrup 0 dB).

   Zaradi konfiguracije terena mora črpalka A prečrpati vsaj 40 % vse vode.

   Če črpalka v enem mesecu porabi manj kot 100 kWh električne energije, je strošek za elektriko 10 evrov, če pa je porabi več, je cena vsake dodatno porabljene kWh elektrike enaka 0,1 evra.

   (a) Recimo, da je v enem mesecu treba prečrpati 1000 m^3 vode, želimo pa imeti čim manjše stroške. Zapišite matematični model opisanega optimizacijskega problema.

   (b) Prevedite optimizacijski problem iz a) v linearni program.

   (c) Če kakšne črpalke ne uporabljamo, jo lahko odklopimo in tako ne plačujemo niti stroškov vzdrževanja niti elektrike. Kako bi ugotovili, če se nam izplača odklopiti katero izmed črpalk?

2. Rešite naslednji linearni program!

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x - 13y + 3z \\ & 3x + 4y + 3z \leq 4 \\ & -9x - 5y + 10z \leq -4 \\ & 14x - 13y - 3z \leq 13 \end{aligned}$$

$$x, y, z \geq 0$$

3. Rešite naslednji linearni program!

$$\begin{aligned} \max \quad & -9x - 10y - 7w \\ & 14x + 10y - 9z + 14w \leq -12 \\ & -8x - 10y - z - 2w \leq 20 \\ & -14y + 12z - 9w \leq 5 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

   Zapišite še dualni linearni program in njegovo rešitev!

4. Dokažite, da je $x^* = 4$, $y^* = 0$, $z^* = 0$, $w^* = 1$ rešitev naslednjega linearnega programa:

$$\begin{aligned} \max \quad & 9x - 8y + 18z - 12w \\ & 3x + 15y + 7z - 6w \leq 6 \\ & x + 6y + z + 12w \leq 16 \\ & -15x + 2y - 13z - 8w \leq -11 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$