Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Lovro Brulec

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + (y-5)^2 \leq 6\}$ in $B = \{(1, 5), (-2, 6), (-3, 7)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrl} \max & 17x & -y & -8z & \\ & x & +6y & +14z & +11w \leq 20 \\ & 9x & +8y & +6z & +5w \leq 5 \\ & -8x & +12y & +8z & -3w \leq -9 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 15x^2 - 248x + 84(x+4)\log(x+4) + 7$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x+y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 7y + 3$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 7y \leq -7, -5x - 6y \leq 2, 9x - 3y \leq -5\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 12x + y^2 + 6y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -y \leq -1\}.$$