Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Alja Dostal

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 10\}$ in $B = \{(3,1), (1,4), (8,4)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{ll} \max & 16x + 17y \ \ + 7z - 20w \\ & 14x + 10y + 10z + 15w \leq 0 \\ & 14x + 15y - 12z - 13w \leq 19 \\ & 11x - 11y \ \ - 4z + 15w \leq -15 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 48x^2 - 1031x + 594(x+4)\log(x+4) + 5$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x+y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 7x - 8y - 4$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x + 7y \leq -1, -3x - 4y \leq -5, -3y \leq -2\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 2y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2y - 4x \leq -12\}.$$