Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Aljaž Flus

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + 5)^2 + (y - 3)^2 \leq 7\}$ in $B = \{(-5, 5), (-2, 0), (-7, 4)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{aligned} \max \quad & -7x + 19y - 17z - 14w \\ & -15x + 4y + 15z + 11w \leq 1 \\ & -5x - 11y + 9z + 4w \leq 3 \\ & 13x + 8y + 15z - 2w \leq -20 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 + 6x^2 - 30x + 12(x + 5)\log(x + 5) + 5$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2 - 3x - 8y - 8$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 2y \leq 4, 7x + 5y \leq -9, -4x + y \leq -4\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 9y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -10x - 4y \leq -11\}.$$