Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Erik Hauzer

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+3)^2+(y+3)^2 \leq 13\}$ in $B = \{(2, -3), (-3, -5), (-4, -1)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x \; -7y \; +9z -10w \\ & -10x \; +2y +15z +15w \leq -20 \\ & 5x +10y +10z +13w \leq 0 \\ & 9x +15y \; +5z \; -8w \leq -14 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 21x^2 - 35x + 36x \log(x) + 7$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 3y - 5$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x \leq 0, -7x \leq -8, x \leq 0\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 11x + y^2 - 2y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9y \leq -9\}.$$