Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Jure Hribar

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 15\}$ in $B = \{(1, -9), (-2, 0), (-3, -2)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & -19x & +15y & +11z & -13w & \\ & -10x & +11y & -6z & +11w & \leq -14 \\ & 14x & -10y & +2z & -2w & \leq -14 \\ & -7x & +7y & & +13w & \leq 20 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 27x^2 - 103x + 108x \log(x) + 7$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 9xy + y^2 - 5x + 5y$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x - 4y \leq -4, -8x + 9y \leq -6, -2x - 9y \leq 9\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 10x + y^2 + y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 10x + 9y \leq 8\}.$$