Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Vanja Kalaković

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2+(y+2)^2 \leq 14\}$ in $B = \{(-1, -2), (-4, -1), (4, -6)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x +10y +8z -13w \\ & 3x +13y +5z +11w \leq 4 \\ & 3x -10y -2z +15w \leq -7 \\ & 4x \ -6y +6z +12w \leq -13 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 27x^2 - 200x + 144(x + 1)\log(x + 1) + 1$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 9y - 7$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 4y \leq -2, 5y \leq -2, -5x - 3y \leq -8\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 10y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -8y \leq 8\}.$$