Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Žan Luka Kolarič

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+5)^2+(y+1)^2 \leq 8\}$ in $B = \{(-4, -1), (-4, -3), (-5, -5)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x +16y +20z +15w \\ & -3x +11y \quad -z \quad +9w \leq -19 \\ & -12x -13y \quad -2z -13w \leq -7 \\ & 6x \quad +9y \quad +4z -15w \leq 8 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 18x^2 - 426x + 168(x + 5)\log(x + 5) + 6$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + y^2 + 3x + 4y - 7$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -9y \leq -5, -x + 4y \leq 8, x + 3y \leq -8\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -9x - 2y \leq -11\}.$$