Univerzitetni študij Finančna matematika

# Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Larisa Pečar

**Rok za oddajo: 1. junij 2022 do $10^{00}$**

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2+(y+5)^2 \leq 14\}$ in $B = \{(-3, -5), (-4, -1), (1, -2)\}$. Množica $C$ naj bo konveksna ogrinjača množice $B$. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & 11x & +15y & -6z & -16w & \\ & 10x & -7y & +12z & +w & \leq 6 \\ & -2x & +2y & +15z & +13w & \leq -9 \\ & -4x & -9y & -11z & +10w & \leq 12 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 39x^2 - 637x + 378(x + 3)\log(x + 3) - 5$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 3y + 8$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - y \leq 0, -2x - y \leq -6, -7x + 7y \leq 8\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - xy - x + y^2 - y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x - 5y \leq -5\}.$$