Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Nejc Rudež

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 10\}$ in $B = \{(-1, -5), (0, 0), (6, -4)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrrl} \max & 13x & +8y & +8z & +w & \\ & -5x & +5y & -10z & +15w & \leq -14 \\ & 7x & +3y & +4z & +13w & \leq 12 \\ & 2x & -2y & -z & -12w & \leq -9 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 33x^2 - 75x + 144(x-1)\log(x-1) + 4$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 9y + 5$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2y \leq -4, 2x + 7y \leq -5, -5x - 6y \leq -7\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 10x + y^2 + 12y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9x + 8y \leq 9\}.$$