Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Tilen Šlibar

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 7\}$ in $B = \{(1,2), (6,2), (2,6)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{aligned} \max \quad & -14x -14y +12z +10w \\ & -8x +11y -12z +10w \leq -2 \\ & -11x +15y +3z +12w \leq -19 \\ & 7x -9y +4z +8w \leq -20 \end{aligned}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 48x^2 - 1213x + 660(x+5)\log(x+5) - 4$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x+y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 9xy + y^2 - 3x - 5y - 8$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -8x + 9y \leq -4, -5x - 5y \leq -3, 6x + 6y \leq -8\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 10x + y^2 + 6y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 11x - 10y \leq 8\}.$$