Univerzitetni študij Finančna matematika

# Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Anika Tkalec

**Rok za oddajo: 1. junij 2022 do $10^{00}$**

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 12\}$ in $B = \{(4, -1), (3, 2), (1, -4)\}$. Množica $C$ naj bo konveksna ogrinjača množice $B$. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & -4x & -20y & +9z & +13w & \\ & x & +11y & -11z & -12w & \leq -9 \\ & 11x & -9y & -7z & +11w & \leq -19 \\ & -7x & -2y & +14z & +4w & \leq -2 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 3x^2 - 58x + 18(x+3)\log(x+3) - 2$ konveksna. Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x + y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 5x + 4y - 5$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -x + 6y \leq -9, x - 8y \leq -5, 4x + 6y \leq 4\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 10y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9x \leq 3\}.$$