Univerzitetni študij Finančna matematika

Optimizacijske metode

4. domača naloga, 24. maj 2022

Nikita Žun

Rok za oddajo: 1. junij 2022 do 10^{00}

1. Dani sta dve množici, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-4)^2 + (y+5)^2 \leq 10\}$ in $B = \{(3, -6), (4, -7), (3, -1)\}$. Množica C naj bo konveksna ogrinjača množice B. Katere izmed teh treh množic so konveksne? Kaj pa $A \cap C$ in $A \cup C$, sta ti množici konveksni?

2. Uporabite Farkasevo lemo, da dokažete, da spodnji linearni program nima dopustne rešitve!

$$\begin{array}{rrrrl} \max & 6x & +7y & -11z & -19w \\ & 14x & -9y & & +4w \leq -12 \\ & 10x & +15y & +13z & +12w \leq 15 \\ & -12x & +3y & +14z & +9w \leq -18 \end{array}$$

$$x, y, z, w \geq 0$$

3. Določite območje, na katerem je funkcija $f(x) = x^3 - 42x^2 - 700x + 420(x+3)\log(x+3) - 4$ konveksna.
   Vemo, da je vsota dveh konveksnih funkcij tudi konveksna. Ali lahko funkciji, ki ni konveksna, njeno definicijsko območje pa je konveksno, prištejemo kakšno konveksno funkcijo, da bo vsota konveksna? Poskusite to narediti s svojo funkcijo $f(x)$.

4. Drži ali ne drži? Seveda utemeljite svojo izbiro.

   (a) Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja, da je $(x+y)/2 \in A$.

   (b) Zvezna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, je konveksna, če za poljubni točki $x, y \in A$ velja: $f(\frac{x+y}{2}) \leq (f(x) + f(y))/2$.

5. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2 + 8x + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 8x - 9y \leq -4, -2x - 7y \leq -5, -4x + 8y \leq -3\}.$$

   Pozor! Vaš problem je lahko tudi nedopusten! V tem primeru dokažite njegovo nedopustnost s pomočjo Farkaseve leme.

6. Z uporabo Karush-Kuhn-Tuckerjevih pogojev določite minimum funkcije

$$f(x, y) = x^2 + xy - x + y^2 - 9y + 2$$

   na območju

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2x \leq -4\}.$$