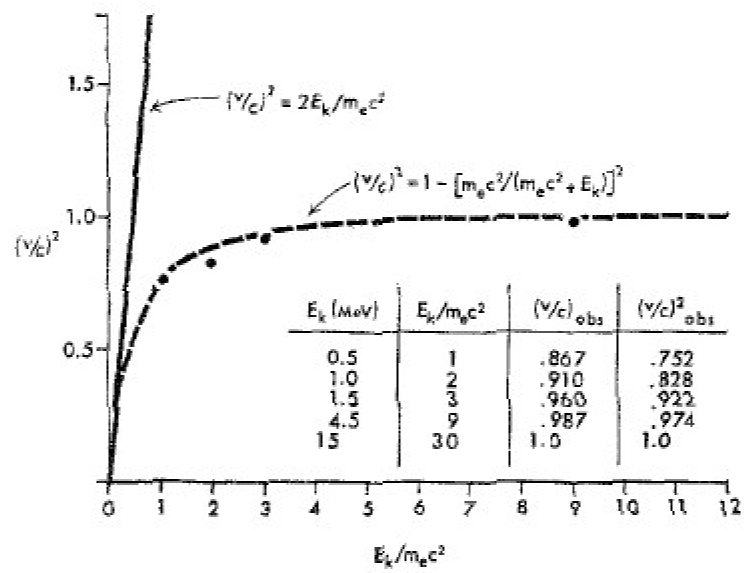
POSEBNA TEORIJA RELATIVNOSTI

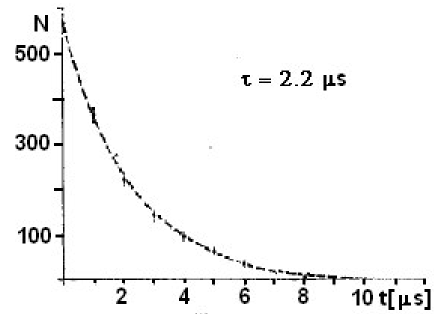
Nekaj značilnih meritev katerih rezultate klasična fizika ne pojasni

Zakoni klasične fizike dobro veljajo v »običajnem« svetu. Za opis atomov niso več dobri. Tam jih nadomestijo zakoni kvantne fizike. Odstopanja od zakonov klasične fizike opazimo tudi pri telesih, katerih hitrost ni majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Omenili smo že, da je treba pri kroženju delcev v pospeševalnikih upoštevati spreminjanje frekvence kroženja s hitrostjo. Zanimiv poskus je naredil Bertozzi (W. Bertozzi, Am. J. Phys. 32, 551 (1964)), ki je meril hitrost elektronov v odvisnosti od energije. Rezultate meritve kaže naslednja slika.



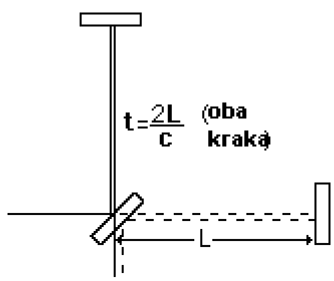
Strma premica ustreza klasičnim predvidevanjem, eksperimentalne točke pa ležijo na krivulji, ki kaže, da se hitrost elektronov pri naraščajoči energiji približuje hitrosti svetlobe v vakuumu, ki jo bomo tukaj označili s c. .

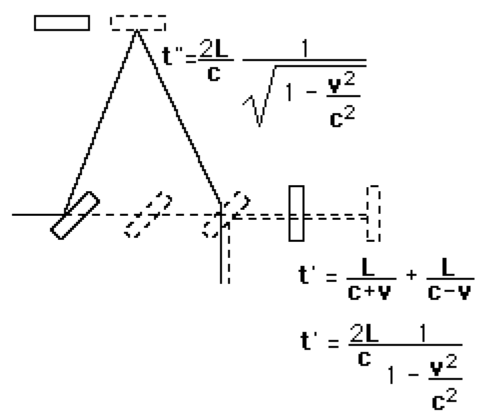
Pri hitrih delcih opazijo tudi podaljšanje časa. Omenimo eksperiment Frischa in Smitha (D. H. Frisch, J. H. Smith, Am. J. Phys. 31, 342 (1964)), ki sta opazovala razpadanje mionov, ki nastanejo visoko v zemeljski atmosferi in letijo z veliko hitrostjo proti zemlji. Razpadanje mionov je naključen proces. Če imamo v nekem trenutku N mionov, bo sprememba njihovega števila dN v času dt enaka $dN = -Ndt/\tau$. Pri tem je τ značilni čas za razpad mionov, ki mu pravimo tudi življenjska doba miona. Rešitev enačbe je $N = N_0e^{-t/\tau}$. Naslednja slika kaže število mirujočih mionov N v odvisnosti od časa.



Življenjska doba mirujočih mionov je 2.2 μs. Mioni, katerih hitrost je blizu svetlobne hitrost, napravijo v tem času pot 660 m. Frisch in Smith sta izmerila število mionov s hitrostjo 0.995c, ki jih ista naprava izmeri v enakem času na dveh višinah: na vrhu gore in ob morju. Višinska razlika merilnih mest je bila 1900 m. Pokazalo se je, da sta ob morju izmerila dosti več mionov, kot sta pričakovala na osnovi življenjske dobe. Število mionov je bilo tako, kot da bi bila življenjska doba približno devetkrat daljša. Ta poskus in še mnogi drugi so pokazali, da se gibajočim delcem življenjska doba za mirujočega opazovalca podaljša in, da je podaljšanje odvisno od njihove hitrosti.

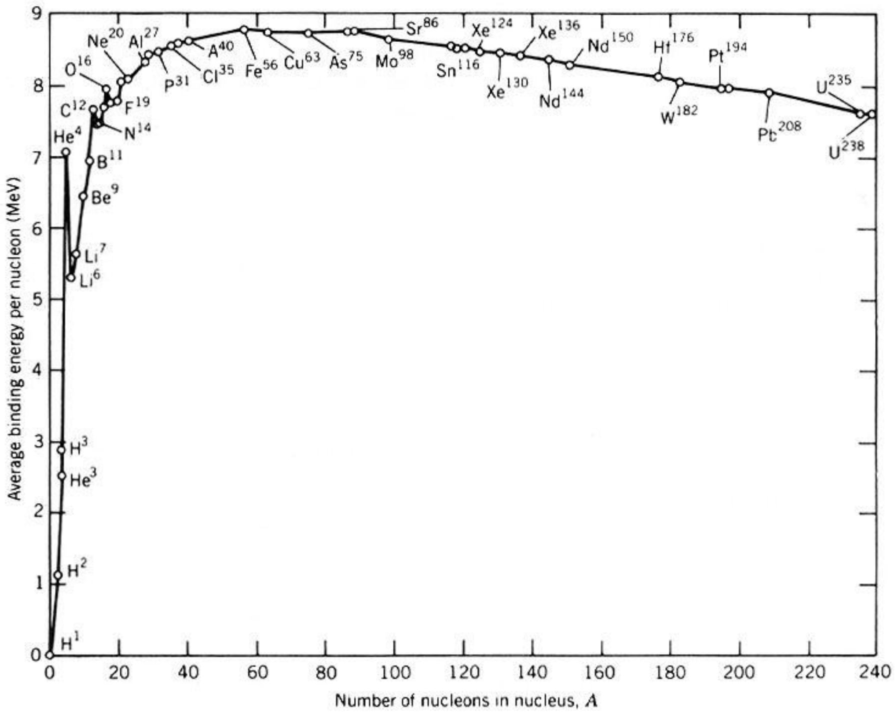
Michelson in Moreley sta pokazala, da za svetlobo ni odlikovanega sistema oziroma snovi (etra), po katerem bi se širila s hitrostjo c, pri gibanju glede na ta sistem pa bi zaznali drugačno hitrost. Merila sta z Michelsonovim interferometrom. Leva slika kaže situacijo, ko interferometer glede na odlikovani sistem miruje.Tedaj oba žarka potujeta enak čas t = 2L/c od polprepustne plošče do zrcala in nazaj.





Na desni je narisan primer, ko se interferometer giblje po »odlikovanem« sistemu v smeri proti desni. Tedaj čas t'', ki ga za pot potrebuje žarek, ki se odbije od gornjega zrcala, ni enak času t', ki ga potrebuje žarek, ki se odbije od desnega zrcala. Situacija je enaka, kot da bi eno od zrcal premaknili za c(t'-t''). Pri tem se premaknejo interferenčni krogi, ki jih vidi opazovalec. Gibanje z dovolj veliko hitrostjo, da bi opazili premik interferenčnih krogov je kroženje zemlje okrog sonca. Hitrost tega gibanja je približno 30 km/s. Pri kroženju se spreminja tudi smer gibanja. Michelson in Moreley sta predpostavila, da se »eter« ne giblje skupaj z zemljo. Njun poskus in tudi bolj izpopolnjeni novejši poskusi so pokazali, da premika interferenčnih krogov ni in da je kljub gibanju zemlje hitrost svetlobe za opazovalca na zemlji v vseh smereh enaka.

Atomska jedra so sestavljena iz protonov in nevtronov. Masa protona je 1.007276 u, masa nevtrona 1.008665u, masa elektrona pa 0.000549 u. Tu je u poenotena atomska masna enota, ki je enaka dvanajstini mase prostega atoma ^{12}C v mirovanju. Približno velja 1 u = 1.66054 10^{-27} kg. Masa devterijevega jedra, ki ga sestavljata proton in nevtron, je enaka 2.013553 u, kar je manj od mase protona in nevtrona $m_p + m_n$ = 2.015941 u. V splošnem je masa kateregakoli atomskega jedra manjša od vsote mas protonov in nevtronov, ki ga sestavljajo. Razlika v masi deljena s številom nukleonov (protonov in nevtronov) in pomnožena s c^2 je v enotah MeV predstavljena na naslednji sliki.



Pri nekaterih težjih jedrih desno od vrha lahko pride do cepitve. Če jedro ^{235}U ujame počasen nevtron postane nestabilno in razpade. Pri tem je masa produktov cepitve manjša od mase začetnega jedra. Razlika teh dveh mas pomnožena s c^2 je ravno enaka kinetični energiji produktov cepitve in energiji sevanja gama. Pri lahkih jedrih lahko pride do zlivanja. Pri tem se sprosti energija, ki je enaka razliki mas pomnoženi s kvadratom svetlobne hitrosti.

Posebna teorija relativnosti

Navedenih opažanj in rezultatev teh in mnogih drugih poskusov klasična fizika ne pojasni. Za njihovo razumevanje je potrebna posebna teorija relativnosti.

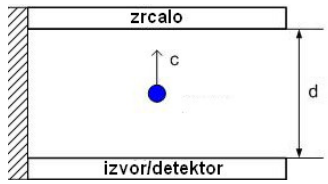
Posebna teorija relativnosti temelji na dveh Einsteinovih postulatih:

- Zakoni fizike so enaki v vseh inercialnih sistemih.
- Hitrost svetlobe v vakuumu je enaka v vseh inercialnih sistemih.

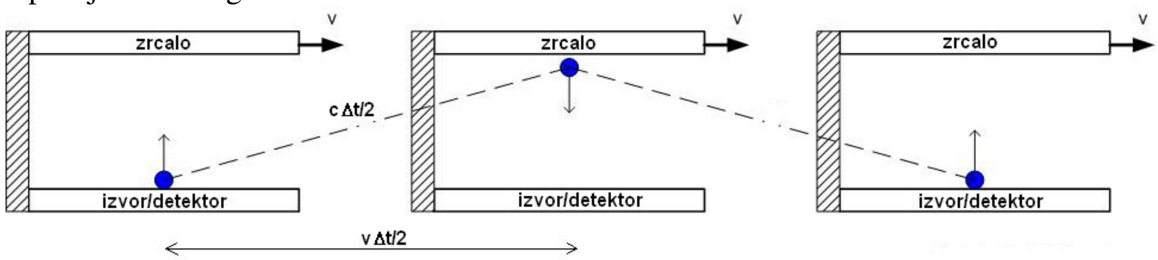
Zakoni fizike, na primer zakoni mehanike, zakoni elektrodinamike, ohranitveni zakoni itd. so enaki v vseh inercialnih sistiemih.

V poljubnem inercialnem sistemu opazovalec v katerikoli smeri izmeri enako hitrost svetobe v vakuumu. Ta hitrost je enaka v vseh inercialnih sistemih.

Posledici Einsteinovih postulatov sta relativnost časa in dolžine. Vzemimo dva inercialna sistema S in S'. Sistem S' naj se giblje glede na sistem S s hitrostjo v. V sistemu S' naj kratek sunek svetlobe potuje od izvora do zrcala in nazaj do detektorja. Za to pot potrebuje čas $\Delta t_0 = 2d/c$.



Opazujmo isti dogodek iz sistema S.



Za opazovalca v sistemu S prepotuje sunek svetlobe od izvora do zrcala pot $c\Delta t/2$. Pri tem se sistem S' premakne za $v\Delta t/2$. Tu je Δt čas trajanja dogodka, ki ga izmeri opazovalec v sistemu S. Predpostavimo, da je razdalja d za opazovalca v obeh sistemih enaka. Pri tem dobimo

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma \Delta t_0 .$$

Za opazovalca v sistemu S traja dogodek dlje, kot za opazovalca v sistemu S', ki izmeri lastni čas Δt_0. Razlika je velika, ko je hitrost v blizu svetlobne hitrosti c. To tudi pojasni podaljšanje življenjske dobe hitrih mionov za mirujočega opazovalca.

Mislimo si, da naredimo podoben poskus, le da se sistem S' giblje glede na sistem S s hitrostjo v v smeri od izvora proti zrcalu (na sliki navpično navzgor). Zanima nas, kakšno razdaljo Δl med izvorom in zrcalom izmeri opazovalec v sistemu S. Opazovalec v sistemu S' seveda izmeri razdaljo $\Delta l_0 = d$. Ugotovili smo že, da traja dogodek (let svetlobnega sunka od izvora do zrcala in nazaj do detektorja) za opazovalca v sistemu S' čas $\Delta t_0 = 2d/c$, za opazovalca v sistemu S pa $\Delta t = \gamma\Delta t_0$. Za opazovalca v sistemu S potuje svetlobni sunek od izvora do zrcala čas t_1:

$ct_1 = \Delta l + vt_1$.

Nazaj potuje sunek čas t_2:

$ct_2 = \Delta l - vt_2$.

Čas Δt je enak

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = t_1 + t_2 = \frac{2c\Delta l}{c^2 - v^2}.$$

Iz te enačbe izračunamo Δl in dobimo

$\Delta l = \Delta l_0/\gamma$.

Opazovalec v sistemu S vidi torej v smeri gibanja sistema S' krajšo razdaljo, kot jo izmeri opazovalec v sistemu S'.

Lorentzove transformacije

V klasični fiziki koordinate dogodka v dveh inercialnih sistemih povezujejo Galilejeve transformacije. Vzemimo inercialni sistem S, v katerega postavimo pravoktni koordinatni sistem x,y,z in inercialni sistem S', v katerega postavimo pravoktni koordinatni sistem x', y', z'. Ob času nič naj koordinatna sistema sovpadata. Sistem S' naj se za opazovalca v sistemu S giblje vzdolž osi x s hitrostjo v. V klasični fiziki je čas absoluten in enak v obeh sistemih: t = t'. Če ob času t opazovalec v sistemu S opazi dogodek na mestu s koordinatami x, y in z, bo opazovalec v sistemu S' opazil ob istem času isti dogodek na mestu s koorinatami

$x' = x-vt,\ y' = y,\ z' = z.$

Te transformacije koordinat imenujemo Galilejeve transformacije

Če uporabimo Galilejeve transformacije, Maxwellove enačbe spremene obliko, ko se preselimo v drug inercialni sistem. H. A. Lorentz je poiskal transformacije med inercialnimi sistemi, ki ne spremene oblike Maxwellovih enačb. Transformacije se po njem imenujejo Lorentzove transformacije. A. Einstein je ugotovil, da imajo Lorentzove transformacije globji pomen. Do Lorentzovih transformacij se da namreč priti tudi na osnovi Einsteinovih postulatov ob upoštevanju simetrije in homogenosti prostora in časa. To so transformacije, ki povezujejo dva inercialna sistema v posebni teoriji relativnosti podobno, kot povezujejo dva inercialna sistema v klasični fiziki Galilejeve transformacije. Zapišimo Lorentzove transformacije za prehod iz sistema S v sistem S' in za obraten prehod.

$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$x = z'$
$t' = \gamma(t-vx/c^2)$	$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$

V teh enačbah čas ni več absoluten. Ko je $v<<c$ je $\gamma \approx 1$ in Lorentzove transformacije preidejo v Galilejeve transformacije.

Vzemimo dogodek, ki se v sistemu S' prične ob času t' pri koordinati x' in konča ob času $t'+\Delta t'$ pri koordinati $x'+\Delta x'$. Vprašajmo se, koliko časa traja ta dogodek za opazovalca v sistemu S. Zadnja enačba v desnem stolpcu pove, da je

$\Delta t = \gamma(\Delta t' + (v/c^2)\Delta x').$

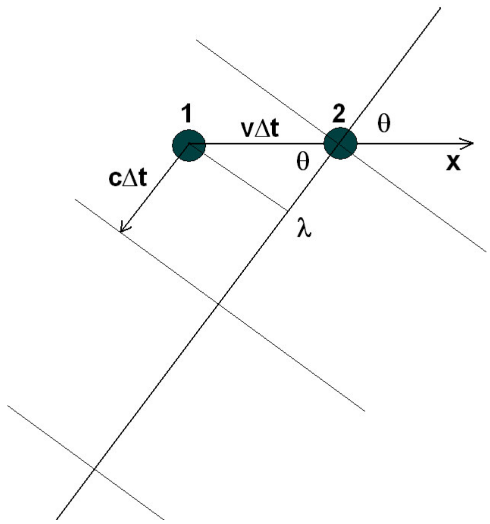
V primeru, ko se dogodek zgodi v sistemu S' na istem mestu je $\Delta x' = 0$ in $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Tak primer je razpad miona, če je sistem S sistem mirujočega opazovalca, sistem S' pa sistem, v katerem mion miruje.

Oglejmo si še skrajšanje dolžin. Vzemimo predmet, ki ima v sistemu S' v smeri osi x' dolžino l_0. Opazovalca v sistemu S zanima dolžina tega predmeta vzdolž osi x v nekem trenutku (torej $\Delta t=0$!). Če je $\Delta t = 0$, sledi iz zadnje enačbe v desnem stolpcu $\Delta t' = -(v/c^2)\Delta x' = -(v/c^2)\, l_0$. Dolžino predmeta $l = \Delta x$ dobimo iz prve enačbe v desnem stolpcu:

$l = \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') = \gamma(l_0 - (v^2/c^2)l_0 = l_0/\gamma.$

Z uporabo Lorentzovih transformacij lahko obravnavamo Dopplerjev pojav pri svetlobi. Vzemimo izvor svetlobe, ki v lastnem sistemu (S') oddaja svetlobo s frekvenco

ν_0. Za opazovalca v sistemu S se izvor svetlobe giblje vzdolž osi x s hitrostjo v in s periodo Δt »oddaja« valovne ploskve. Zaradi gibanja izvora se razdalja λ med zaporednima valovnima ploskvama razlikuje od $c\Delta t$.



Vzemimo, da valovna ploskev zapusti izvor v točki 1, naslednja pa v točki 2. Razdalja λ med zaporednima valovnima ploskvama v smeri detektorja je enaka
$\lambda = c\Delta t + v\Delta t\cos\theta$,
pri čemer je θ kot med krajevnim vektorjem izvora in smerjo gibanja izvora. Frekvenca svetlobe ν, ki jo izmeri opazovalec v sistemu S je enaka $\nu = c/\lambda$. Povezati moramo še periodo Δt, ki jo izmeri opazovalec v sistemu S in lastno periodo izvora $t_0 = 1/\nu_0$. Dogodka, ki ju opazujemo, to je »oddaja« dveh zaporednih valovnih ploskev, se za opazovalca v sistemu S zgodita v časovnem razmiku Δt na mestih, ki sta vzdolž smeri gibanja izvora razmaknjeni za $\Delta x = v\Delta t$. Za opazovalca v sistemu S' (izvor) je za ista dogodka $\Delta x' = 0$, časovni razmik pa je enak $\Delta t' = t_0$. Uporabimo Lorentzovo transformacijo za čas:

$$\Delta t' = t_0 = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = \gamma\Delta t\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \Delta t/\gamma.$$

Tega računa pravzaprav ne bi bilo treba narediti, saj smo podaljšanje časa pri prehodu med inercialnimi sistemi že obravnavali.

Frekvenca svetlobe ν, ki jo izmeri opazovalec v sistemu S, je torej enaka

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \nu_0 \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+(v/c)\cos\theta}.$$

Pri majhnih hitrostih v v primerjavi s c lahko kvadratični člen $(v/c)^2$ v števcu zanemarimo in upoštevamo samo linearni člen $(v/c)\cos\theta$ v imenovalcu. Pri velikih hitrostih kvadratični člen v števcu ni več zanemarljiv. Zanimivo je, da dobimo premik frekvence tudi, ko se izvor giblje pravokotno na zveznico med izvorom in detektorjem svetlobe. To je seveda posledica relatvističnega podaljšanja časa.

Z Lorentzovimi enačbami izračunajmo, kako se pri prehodu med sistemoma S in S' transformirajo hitrosti. Z drugimi besedami nas zanima, kolikšno hitrost nekega objekta izmeri opazovalec v sistemu S', če opazovalec v sistemu S izmeri, da ima ta objekt hitrost $\vec{u}$. Zanima nas tudi obratna transformacija. Opazovalec v sistemu S' izmeri hitrot objekta $\vec{u}'$. Kakšno hitrost izmeri opazovalec v sistemu S? Da ne bo zmede pri pisanju bomo za hitrost objekta uporabili črko u. S črko v bomo še naprej označevali hitrost sistema S' glede na sistem S.

Hitrost v sistemu S definiramo kot $\vec{u} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (u_x, u_y, u_z)$. V sistemu S' je hitrost $\vec{u}' = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt') = (u_x', u_y', u_z')$. Lorentzove transformacije diferenciramo in delimo diferenciale. Pri tem dobimo

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \qquad u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)} \qquad u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2} \qquad u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)} \qquad u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + u_x' v/c^2)}.$$

Oglejmo si preprost primer. Vzemimo, da delec, ki ima za mirujočega opazovalca hitrost 0.8 c razpade na dva delca. Eden izmed teh delcev naj odleti v smeri gibanja prvotnega delca s hitrostjo 0.9c glede na prvotni delec. Izračunajmo hitrost tega delca, ki jo izmeri mirujoči opazovalec.

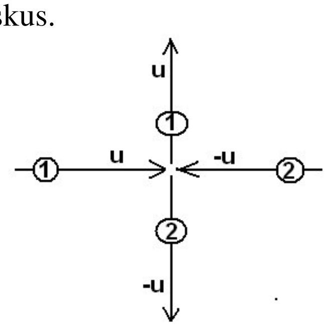
V smeri gibanja prvotnega in novonastalega delca izberimo osi x in x'. Sistem S naj bo sistem mirujočega opazovalca, sistem S' pa sistem, glede na katerega je prvotni delec miroval. Hitrost v je enaka 0.8c, hitrost u_x' pa 0.9c. Komponenti hitrosti u_y in u_z sta seveda nič, hitrost v smeri osi x pa je enaka

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2} = 0.988c.$$

Hitrost novonastalega delca je seveda manjša od c in ni enaka 1.7c, kot bi izračunali v klasični kinematiki.

Gibalna količina

V klasični mehaniki je gibalna količina točkastega telesa enaka $\vec{G} = m\vec{v}$. Ugotovili smo tudi, da se gibalna količina sistema točkastih teles ohranja, če ni zunanjih sil. Zakon o ohranitvi gibalne količine mora veljati vseh inercialnih sistemih. Da bi ugotovili, kolikšna je gibalna količina točkastega telesa v posebni teoriji relativnosti, analizirajmo preprost poskus.



V sistemu S' se dve enaki telesi z maso m gibljeta drugo proti drugemu s hitrostjo u vzdolž osi x. Po prožnem trku prvo telo odleti s hitrostjo u v smeri osi y, drugo telo pa z enako veliko hitrostjo v nasprotni smeri. Gibalna količina se seveda ohrani. Začetna je nič in končna prav tako.

Oglejmo si trk iz sistema S, glede na katerega se sistem S' giblje v smeri osi x s hitrostjo v. Posebej nas zanima ohranitev gibalne količine v smeri osi x. V sistemu S je hitrost prvega telesa v smeri osi x pred trkom enaka $u_{1x} = (v+u)/(1+vu/c^2)$. Hitrost drugega telesa v smeri osi x pa je enaka $u_{2x} = (v-u)/(1-vu/c^2)$. Po trku je hitrost obeh teles v smeri osi x enaka v, v smeri osi y pa $\pm u/\gamma$. Če definiramo gibalno količino kot produkt mase in hitrosti, se njena projekcija na os x v sistemu S pri trku ne ohranja. To pa ni v skladu z Einsteinovim postulatom. Izkaže se, da se gibalna količina ohranja, če jo definiramo kot

$$\vec{G} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Pri tej definiciji je v našem primeru projekcija gibalne količine obeh teles na os x pred trkom enaka

$$G_x = G_{1x} + G_{2x} = \frac{m(v+u)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}} + \frac{m(v-u)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}} = \frac{2mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Po trku je projekcija hitrosti obeh teles na os x enaka v: $u_{1x} = u_{2x} = v$, kvadrat hitrosti obeh teles pa je enak $u_1^2 = u_2^2 = v^2 + (u/\gamma)^2$. Upoštevajmo gornjo definicijo gibalne količine pa dobimo

$$G_{1x} = G_{2x} = \frac{mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Skupna gibalna količina obeh teles je po trku enaka kot pred trkom.

V resnici drugi Newtonov zakon velja tudi v posebni teoriji relativnosti, če ga prepišemo v obliki

$$\vec{F} = d\vec{G}/dt,$$

pri čemer je $\vec{G}$ relativistična gibalna količina.

Oglejmo si preprost primer, ko na telo, ki sprva miruje, začne ob času t=0 delovati stalna sila F. Izračunajmo časovni potek hitrosti in premika telesa. Ker je sila stalna, je gibalna količina telesa enaka G = Ft. Iz tega dobimo

$$v = c\frac{Ft}{\sqrt{(mc)^2 + (Ft)^2}}.$$

Pri kratkih časih (Ft<<mc) dobimo znan nerelativističen časovni potek v = Ft/m. Po dolgem času (Ft>>mc) pa velja $v \approx c$.

Premik telesa je enak

$$s = \int_0^t v dt = \frac{cFt^2}{\sqrt{(mc)^2 + (Ft)^2} + mc}.$$

Zopet dobimo pri kratkih časih nerelativističen časovni potek $s = (F/m)t^2/2$, po dolgem času pa velja $s \approx ct$.

Energija

Oglejmo si prej opisani prožni trk dveh teles še z energijskega stališča. Opazujmo trk v sistemu S. Pri prožnem trku se ohranja skupna kinetična energija teles. Če uporabimo nerelativistično definicijo kinetične energije, hitro ugotovimo, da kinetična energija pred trkom ($W_k = m(u_{1x}^2+u_{2x}^2)/2$) ni enaka kinetični energiji po trku

($W_k = m(v^2+(u/\gamma)^2)$). Če hočemo, da poleg zakona o ohranitvi gibalne količine velja tudi zakon o ohranitvi energije, moramo v posebni teoriji relativnosti energijo telesa definirati drugače, kot v nerelativistični mehaniki. V posebni teoriji relativnosti definiramo energijo telesa kot

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Tu je m masa telesa, u pa njegova hitrost. Tako definirana energija je za mirujoče telo (u=0) enaka $W = mc^2$. Kinetična energija telesa je enaka

$$W_k = W - mc^2.$$

Pri majhnih hitrostih (u<<c) je prvi neničelni člen v razvoju W_k v potenčno vrsto po potencah u/c ravno nerelativistična kinetična energija $mu^2/2$.

Pokažimo, da se energija pri prožnem trku dveh teles zares ohranja. Pred trkom je energija obeh teles, ki ju opazujemo iz sistema S, enaka W:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{mc^2(1+vu/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}} + \frac{mc^2(1-vu/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Po trku imata telesi enako energijo in sicer

$$W_1 = W_2 = W/2 = \frac{mc^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Energija teles se pri prožnem trku ohranja.

Opazujmo sedaj iz opazovalnih sistemov S in S' popolnoma neprožen trk dveh enakih teles z maso m. V sistemu S' se telesi gibljeta drugo proti drugemu vzdolž osi x s hitrostma u in –u. Po trku telesi obmirujeta. Vzemimo, da se opazovalni sistem S' giblje proti opazovalnemu sistemu S vzdolž osi x s hitrostjo v. Opazujmo trk iz opazovalnega sistema S. Za opazovalca v sistemu S je gibalna količina obeh teles pred trkom enaka, kot v primeru prej obravnavanega prožnega trka dveh teles:

$$G_x = \frac{2mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}.$$

Po trku je hitrost obeh teles za opazovalca v sistemu S enaka v in je usmerjena vzdolž osi x. Gibalna količina sistema je torej enaka

$$G_x = \frac{2mv}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}.$$

Izraza se ne ujemata. Če hočemo, da velja zakon o ohranitvi gibalne količine tudi pri neprožnem trku, se mora masa teles pred trkom razlikovati od mase teles po trku. Če označimo maso teles po trku z m* mora veljati

$$m^* = \frac{m}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

Tu pridemo do zveze med maso in energijo, ki smo jo že omenili v zvezi s cepitvijo in zlivanjem atomskih jeder. Telesoma se je pri trku povečala notranja energija. Posledica tega je povečanje mase. Pred trkom je bila energija obeh teles skupaj za opazovalca v sistemu S' enaka $W = 2mc^2/\sqrt{1-(u/c)^2}$. Po trku je energija obeh mirujočih teles skupaj enaka $W=2m^*c^2$. Iz zakona o ohranitvi energije sledi prej zapisana zveza med masama m in m*.

Imejmo telo z maso m, ki v začetku miruje in se začne gibati pod vplivom sile F. Zanima nas, kako je hitrost telesa odvisna od dela sile $A = \int F ds$. Velja

dA = Fds = (dG/dt)ds = dG(ds/dt) = udG = d(uG) – Gdu.

Hitrost telesa smo ounačili z u. Z integracijo enačbe dobimo

$$A = uG - \int_0^u G du = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - mc^2.$$

Člen na desni je ravno kinetična energija telesa.

Med energijo W in gibalno količino G velja naslednja zveza:

$$W = \sqrt{c^2G^2 + m^2c^4}.$$

Mirovna energija mc^2 protona je 938 MeV, nevtrona 940 MeV, elektrona pa 0.51 MeV. Pri delcih z veliko gibalno količino v primerjavi z mc, ali veliko kinetično energijo v primerjavi z mirovno energijo, lahko v izrazu za energijo kvadrat mirovne energije pod korenom zanemarimo in dobimo zvezo W = Gc. Ta zveza velja tudi za kvante elektromagnetnega valovanja, fotone.

Zveza med maso in mirovno energijo tudi pojasni, zakaj je masa devterijevega jedra manjša od vsote mas protona in nevtrona. Proton in nevtron sta v jedru vezana, zato je njuna vezavna energija W_{vez} negativna. Da bi ju spravili narazen je potrebno dovesti delo, ki je po velikosti enako vezavni energiji. Zmanjšanje mase je enako $|W_{vez}|/c^2$. Da je to res potrjuje tudi cepitev in zlivanje jeder. Nekatera težja jedra lahko razpadejo v lažja jedra, v katerih je razlika v masi na nukleon večja. Po drugi strani se nekatera lažja jedra pri zelo visoki temperaturi zlivajo v težja jedra, ki imajo večjo razliko v masi na nukleon kot lažja jedra.

Obravnavajmo naslednji zgled. Nevtralni kaon z mirovno energijo m_kc^2 = 498 MeV in kinetično energijo 500 MeV razpade v dva piona z mirovno energijo 140 MeV. V sistemu S', v katerem kaon miruje, odletita piona v pravokotni smeri glede na smer gibanja kaona. Izračunajmo, kolikšna je hitrost pionov za mirujočega opazovalca in kolikšen je kot ϕ med smerjo gibanja kaona in smerjo, v kateri odleti pion .

Izberimo os x mirujočega opazovalnega sistema S v smeri gibanja kaona. V sistemu S' naj po razpadu kaona piona odletita v smereh y' in –y' z enakima hitrostma.

Najprej izračunajmo, kolikšna je hitrost kaona za mirujočega opazovalca. Najlaže jo izračunamo iz celotne energije W:

$$W = \frac{m_kc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = m_kc^2 + W_k = 998 MeV.$$

Kot rezultat dobimo u = 0.867c in γ = 2.004.

Opazujmo razpad kaona v sistemu S'. Ker se energija ohranja velja

$$m_kc^2 = 2\sqrt{G_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4}.$$

Pred razpadom kaona je bila energija v sistemu S' kar mirovna energija kaona. Po razpadu kaona je to vsota energij obeh pionov, ki sta seveda enaki. En pion namreč odleti s hitrostjo u_y' vzdolž osi y', drugi pa z enako veliko hitrostjo v nasprotni smeri, da se gibalna količina ohrani. Ker je

$$G_\pi = \frac{m_\pi u_y'}{\sqrt{1-(u_y'/c)^2}},$$

dobimo $u_y' = 0.827c$.

Transformirajmo hitrosti v sistem mirujoči S:

$u_x = v = 0.867c$

$u_y = u_y'/\gamma = 0.413c$

$u_z = 0$.

Hitrost piona za mirujočega opazovalca je enaka

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 0.960c,$$

kot ϕ pa je enak

$\phi = \mathrm{arctg}(u_y/u_x) = 25.5^0$.

Preverimo, da se tudi v sistemu S energija ohranja. Pred razpadom kaona je bila enaka 998 MeV. Po razpadu je energija enega piona enaka

$$W_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = 499\,MeV.$$

Energija obeh pionov $2W_\pi = 998$ MeV je res enaka energiji kaona pred razpadom.