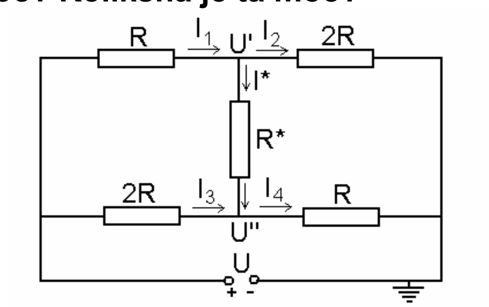
1. Po dveh vzporedno vezanih bakrenih vodnikih s presekoma S_1 = 0,2 mm^2 in S_2 = 0,4 mm^2 ter dolžino $l_1 = l_2$ = 2 m teče skupni električni tok I = 6 A. Izračunajmo, kolikšen električni tok teče skozi tanjši vodnik in moč, ki se troši na debelejšem vodniku. Specifični upor bakra je ζ = 1,76 10^{-8} Ωm.

Napetosti med koncema vodnikov sta enaki: $I_1R_1 = I_2R_2$. Ker je R = ζl/S, lahko prepišemo enačbo v obliki $I_1/S_1 = I_2/S_2$. Ker je hkrati $I_1 + I_2 = I$, dobimo $I_1 = I/3$ = 2 A on $I_2 = 2I/3$ = 4 A. Upor debelejšega vodnika je $R_2 = \zeta l_2/S_2$ = 88 mΩ. Na debelejšem uporniku se troši moč $P_2 = I_2^2R_2$ = 1,4 W.

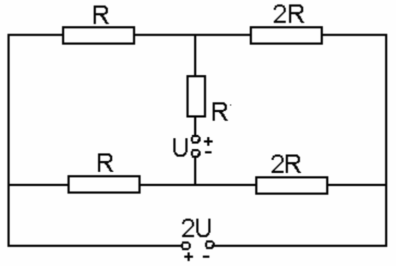
2. Kolikšen mora biti upor R* v mostičnem vezju na sliki, da se na njem troši največja moč? Kolikšna je ta moč?

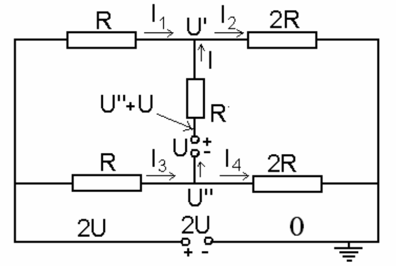


Da bo račun lažji, si mislimo, da je negativni pol generatorja ozemljen. Njegov električni potencial je nič. Električni potencial pozitivnega pola generatorja je U. Najprej izračunajmo spojiščna potenciala U' in U''. Tokove zapišimo s pomočjo potencialov: $I_1 = (U - U')/R$, $I_2 = U'/2R$, $I^* = (U' - U'')/R^*$, $I_3 = (U - U'')/2R$, $I_4 = U''/R$ in upoštevajmo prvi Kirchoffov izrek za vozlišči: $I_1 - I_2 - I^* = 0$, $I_3 + I^* - I_4 = 0$. Pri tem dobimo dve enačbi za potenciala U' in U'': $U'\left(\frac{3}{2R}+\frac{1}{R^*}\right)-\frac{U''}{R^*}=\frac{U}{R}$; $-\frac{U'}{R^*}+U''\left(\frac{3}{2R}+\frac{1}{R^*}\right)=\frac{U}{2R}$.

Rešitvi enačb sta $U'=U\frac{2R^*+2R}{3R^*+4R}$; $U''=U\frac{R^*+2R}{3R^*+4R}$. Moč na uporniku z uporom R* je enaka $P=\frac{(U'-U'')^2}{R^*}=U^2\frac{R^*}{(3R^*+4R)^2}$. Z odvajanjem ugotovimo, da je moč največja ko je R* = 4R/3. Enaka je $P_{max} = U^2/48R$.

3. Kolikšni so električni tokovi v vezju na sliki, ča je U = 21 V in R = 1 kΩ? Kolikšno moč troši vezje?





V vezju označimo tokove in vozliščne potenciale. Mislimo si, da je negativni pol generatorja z napetostjo 2U ozemljen in ima zato električni potencial nič. Tokove izrazimo s potenciali vozlišč: $I_1 = (2U - U')/R$, $I_2 = U'/2R$, $I_3 = (2U - U'')/R$, $I_4 = U''/*2R$, $I = (U'' + U - U')/R$. Uporabimo prvi Kirchoffov izrek: $I_1 + I – I_2 = 0$ in $I_3 – I – I_4 = 0$. Tokove izrazimo s potenciali in dobimo dve enačbi za potenciala U' in U'': $5U' – 2U'' = 6U$ in $5U'' – 2 U' = 2U$. Rešitvi sta $U' = 34U/21$ in $U'' = 22U/21$. Električni tokovi v vezju so: $I_1 = 8$ mA, $I_2 = 17$ mA, $I_3 = 20$ mA, $I_4 = 11$ mA in $I = 9$ mA. Vezje troši moč $P = (I_1^2 + I_3^2 + I^2)R + (I_2^2 + I_4^2)2R = 1{,}365$ W.

4. Avtomobilska žarnica troši električno moč $P_0 = 64$ W, ko jo priključimo na vir z napetostjo $U_0 = 12$ V. Pri tem se nitka žarnice segreje na temperaturo $T_0 = 2000\ ^0$C. Na kolikšno napetost moramo priključiti žarnico, da se nitka segreje na temperaturo $T = 1000\ ^0$C? Kolikšen toplotni tok pri tem oddaja nitka? Specifični upor nitke je pri 2000 ^{0}C enak $\zeta_0 = 66{,}9\ 10^{-8}\ \Omega$m, pri 1000K pa $\zeta = 34{,}1\ 10^{-8}\ \Omega$m. Emisivnost nitke (volframa) pri 2000 ^{0}C je $e_0 = 0{,}28$, pri 1000 ^{0}C pa $e = 0{,}15$.

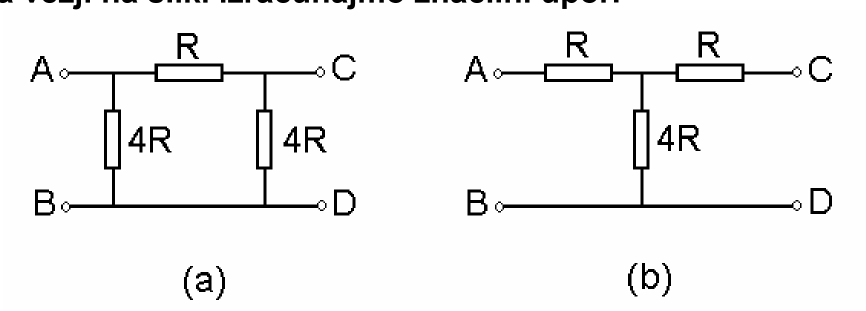
Predpostavimo, da nitka oddaja toplotni tok predvsem s sevanjem.Toplotni tok, ki ga nitka absorbira iz okolice seveda zanemarimo. Pri temperaturi T prejema nitka električno moč $P = U^2/R$ in oddaja enako velik toplotni tok $P = eS\sigma T^4$. Pri temperaturi T_0 prejema nitka električno moč $P_0 = U_0^2/R_0$ in oddaja toplotni tok $P_0 = e_0S\sigma T_0^4$. Razmerje P/P_0 je enako $\frac{P}{P_0} = \frac{U^2R_0}{U_0^2R} = \frac{eS\sigma T^4}{e_0S\sigma T_0^4} = 0{,}053$. Iz tega sledi $P = 0{,}053P_0 = 3{,}4$ W in $U = U_0\sqrt{\frac{0{,}053R}{R_0}} = U_0\sqrt{\frac{0{,}053\zeta}{\zeta_0}} = 2{,}0\,V$.

5. Ko na vir z napetostjo $U_0 = 220$ V priključimo prvo žarnico, troši električno moč $P_{10} = 100$ W. Ko na isti vir priključimo drugo žarnico, ta troši elektročno moč $P_{20} = 40$ W. Temperatura nitk obeh žarnic je $T_0 = 2273$ K. Žarnici zvežemo zaporedno in priključimo na isti vir napetosti. Ocenimo, kolikšni sta temperaturi nitk žarnic in kolikšen energijski tok sevata. Pri tem predpostavimo, da v obravnavanem temperaturnem območju približno velja $R(T) \approx R_0(T/T_0)$ in $e(T) \approx e_0(T/T_0)$. Tu je $R(T)$ upor nitke žarnice pri temperaturi T, R_0 pa upor nitke žarnice pri temperaturi T_0. Podobno je $e(T)$ emisivnost nitke žarnice pri temperaturi T, e_0 pa emisivnost nitke žarnice pri temperaturi T_0.

Ko priključimo posamezno žarnico na vir napetosti, troši električno moč $P_{i0} = U_0^2/R_{i0} = e_0S_i\sigma T_0^4$ (i = 1,2). Ko ju zvežemo zaporedno in priključimo na vir napetosti, teče skoznju tok I. Zaradi tega se nitki žarnic segrejeta na tempareturi T_1 in T_2. Velja $IR_1(T_1) + IR_2(T_2) = IR_{10}(T_1/T_0) + IR_{20}(T_2/T_0) = U_0$. Upora pri temperaturi T_0 izrazimo z nominalno močjo žarnic ($R_{i0} = U_0^2/P_{i0}$) in dobimo $\frac{T_1}{P_{10}} + \frac{T_2}{P_{20}} = \frac{T_0}{IU_0}$. Izenačimo še električno moč in izsevani energijski tok: $I^2R_{10}\frac{T_1}{T_0} = e_0\frac{T_1}{T_0}S_1\sigma T_1^4 = P_{10}\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^5$. Iz te enačbe sledi $\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{\frac{IU_0}{P_{10}}}$ in podobno

$\frac{T_2}{T_0} = \sqrt{\frac{IU_0}{P_{20}}}$. Vstavimo slednja izraza v prejšnjo enačbo in dobimo enačbo za električni tok I: $\left(\frac{IU_0}{P_{10}}\right)^{3/2} + \left(\frac{IU_0}{P_{20}}\right)^{3/2} = 1$. Iz te enačbe izračunamo tok: I = 0,156 A.
Zdaj lahko izračunamo temperaturi nitk žarnic:
$T_1 = T_0\sqrt{\frac{IU_0}{P_{10}}} = 1330\,K$; $T_2 = T_0\sqrt{\frac{IU_0}{P_{20}}} = 2110\,K$. Izračunajmo še izsevan energijski tok: $P_1 = P_{10}\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^5 = 7W$; $P_2 = P_{20}\left(\frac{T_2}{T_0}\right)^5 = 28\,W$. Štiridesetvatna žarnica seva štirikrat večji energijski tok od stovatne. Razlika svetlobnih tokov v vidnem spektru, ki jo zazna oko, je zaradi različnih temperatur nitk še precej večja.

6. Za vezji na sliki izračunajmo značilni upor.



Značilni upor je tisti upor R_0, ki ga moramo priključiti na izhod vezja (četveropola) med točki C in D, da bo vhodni upor (med A in B) enak R_0. Oglejmo si najprej vezje (a). Potencial točk B in D naj bo nič, potencial točke A naj bo U, točke C pa U'. Med točkama C in D naj bo vezan upornik z uporom R_0. Zapišimo prvi Kirchoffov izrek za vozlišče v bližini točke C: (U – U')/R = U'/4R + U'/R_0. Iz tega sledi U' = 4R_0U/(5R_0 + 4R). Vhodni tok skozi točko A je enak
I = U/4R + (U – U')/R = U(9R_0 + 20R)/(20 RR_0 + 16R^2). Če je R_0 značilni upor, mora veljati I = U/R_0. Iz tega sledi R_0 = 4R/3.
V vezju (b) naj bo električni potencial v točkah B in D nič, v točki A U, v točki C U'', na spoju upornikov pa U'. Prvi Kirchoffov izrek za vozlišče, kjer so spojeni uporniki pove: (U – U')/R = U'/4R + (U' – U'')/R. Če je med točkama C in D vezan še upornik z uporom R_0, velja tudi (U' – U'')/R = U''/R_0. Iz teh enačb izračunamo U'', U'' = U'R_0/(R + R_0), in U' = U(4R + 4R_0)/(9R + 5R_0). Vhodni tok, (U – U')/R mora biti enak U/R_0. Iz tega sledi R_0 = 3R.

*V elektrotehniki računajo značilni upor četveropola na naslednji način. Najprej izračunajo vhodni upor (R_1) v primeru, ko sta točki C in D kratko sklenjeni. Nato izračunajo vhodni upor (R_2) v primeru, ko sta točki C in D razklenjeni. Značilni upor R_0 je podan kot $R_0 = \sqrt{R_1 R_2}$. Oglejmo si podrobneje primer (b). Upor R_1 je enak 9R/5, upor R_2 pa 5R. Značilni upor je enak 3R.

7. Med elektrodama valjastega kondenzatorja s polmeroma a in b (a<b) ter dolžino h je prevodna snov s specifično prevodnostjo σ. Med elektrodama je napetost U. Kolikšen električni tok teče med elektrodama?

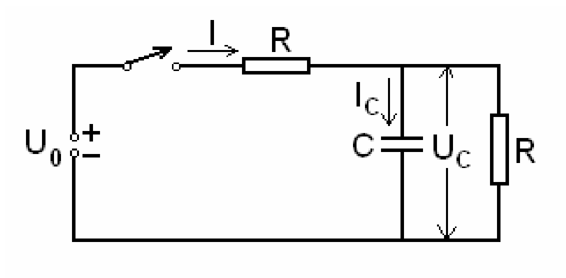
V električnem polju z jakostjo E je gostota električnega toka j = σE. Zaradi valjaste simetrije kondenzatorja je v razdalji r od osi gostota električnega toka povsod enaka. Skozi ploskev, ki je v tem primeru plašč valja s polmerom r in dolžino h, teče električni tok I = σE2πrh. V stacionarnih razmerah je električni tok I neodvisen od r, saj velja za električni tok kontinuitetna enačba. Drugače povedano električni naboj, ki v času Δt priteče v del prostora je enak električnemu naboju, ki v času Δt iz tega dela prostora odteče. Ker je električni tok neodvisen od r, je od r odvisna električna poljska jakost: E = I/(2πσhr). Iz tega izraza izračunamo napetost med elektrodama: $U = \int_a^b E dr = \frac{I}{2\pi\sigma h}\ln(b/a)$. Iz te zveze izračunamo električni tok $I = \frac{2\pi\sigma h}{\ln(b/a)}U$.

8. Med elektrodama valjastega kondenzatorja s polmeroma a in b (a<b) ter dolžino h je neidealen dielektrik z dielektričnostjo ε in električno prevodnostjo σ. Kondenzator nabijemo na napetost U_0, potem pa vir napetosti odključimo. Po kolikšnem času pade napetost na kondenzatorju na desetino začetne vrednosti?

Za električni naboj na elektrodah kondenzatorja velja zveza I = -de/dt, pri čemer je I = U/R in $R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma h}$. Hkrati velja e = CU, pri čemer je $C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln(b/a)}$. Zvezo I = -de/dt prepišemo v obliki U/R = -CdU/dt, oziroma dU/dt + U/RC = 0. Rešitev enačbe je $U = U_0e^{-t/\tau}$, kjer je $\tau = RC = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma$. Čas, v katerem pade napetost na kondenzatorju na desetino začetne vrednosti izračunasmo iz enačbe $U_0/10 = U_0e^{-t/\tau}$. Enak je $t = \tau\ln(10)$.

* načilni čas τ je odvisen samo od lastnosti snovi (ε, σ), ni pa odvisen od geometrije kondenzatorja. Sami lahko preverite, da dobimo enak značilni čas pri ploščatem kondenzatorju.

9. V vezju na sliki ob času t=0 sklenemo stikalo. Kako se s časom spreminjata tok generatorja in napetost na kondenzatorju? Kaj se zgodi, ko stikalo ponovno razklenemo?

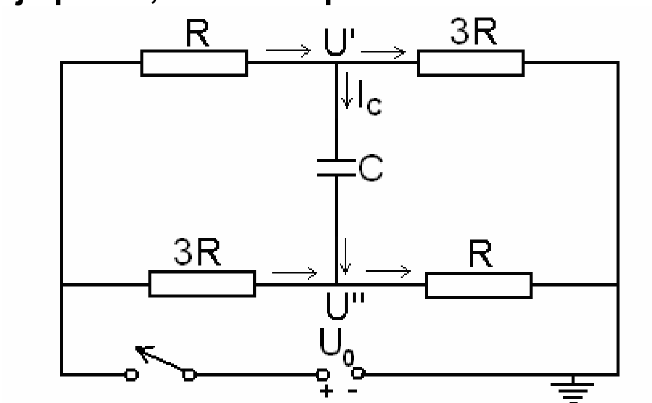


Najprej ugotovimo, kolikšne so napetosti in tokovi ob času nič (takoj po sklenitvi stikala) in po zelo dolgem času. Ob času nič je kondenzator prazen, zato je napetost na kondenzatorju $U_C(0) = 0$. Tudi na vzporednem uporniku je napetost nič. Na zaporednem uporniku je padec napetosti U_0, zato je začetni tok generatorja $I(0) = U_0/R$. Po dolgem času teče po vezju stalen tok $I(\infty) = U_0/2R$, napetost na kondenzatorju pa je enaka $U_C(\infty)=U_0/2$. Ko se naboj na elektrodah kondenzatorja ne spreminja več, določata razmere v vezju upornika.

Oglejmo si situacijo ob poljubnem času. Zapišimo prvi Kirchoffov izrek za vozlišče, kjer se stikajo vsi trije elementi: $(U_0 – U_C)/R = U_C/R + I_C$. Tu je I_C tok na elektrodi kondenzatorja, ki je enak časovnemu odvodu naboja e na elektrodah: $I_C = de/dt$. Upoštevajmo še zvezo $e = CU_C$ pa dobimo enačbo $\frac{dU_C}{dt} + \frac{2}{RC}U_C = \frac{1}{RC}U_0$. Partikularna rešitev enačbe je $U_C = U_0/2$, splošna rešitev homogenega dela pa $U_C = Ae^{-t/\tau}$, pri čemer je A poljubna konstanta, značilni čas τ pa je enak $\tau = RC/2$. Splošna rešitev enačbe je torej $U_C = U_0/2 + Ae^{-t/\tau}$. Konstanto A določimo iz začetnega pogoja $U_C(0) = 0$. Enaka je $A = -U_0/2$. Napetost Uc je torej enaka $U_C = U_0(1 - e^{-t/\tau})/2$. Padec napetosti na zaporednem uporniku je $U = U_0 – U_C = U_0(1 + e^{-t/\tau})/2$. Tok generatorja je enak $I = U/R = U_0(1 + e^{-t/\tau})/2R$.

Ko stikalo ponovno razklenemo, se začne kondenzator prazniti skozi vzporedni upornik. Časovna konstanta praznjenja je RC.

10. V vezju na sliki ob času t=0 sklenemo stikalo. Kako se s časom spreminja napetost na kondenzatorju? Kakšen je časovni potek napetosti na kondenzatorju potem, ko stikalo ponovno razklenemo?



Najprej poglejmo situacijo ob času nič. Kondenzator je prazen, zato je U' = U''. Tok po vezju je tak, kot da bi imeli namesto kondenzatorja kratek stik. V tem primeru imamo opraviti z zaporedno vezavo dveh parov vzporedno vezanih upornikov z uporoma R in 3R. Nadomestni upor obeh parov je enak, zato je $U'(0) = U''(0) = U_0/2$. Električni tok na elektrodi kondenzatorja je enak razliki med tokom skozi manjši upornik in tokom skozi večji upornik: $I_C(0) = U_0/2R – U_0/6R = U_0/3R$.

Po dolgem času teče tok samo po dveh vzporednih vejah, kondenzator pa ne igra nobene vloge. Potencial U' je enak $U'(\infty) = 3U_0/4$, potencial U'' pa $U''(\infty) = U_0/4$. Napetost na kondenzatorju je enaka $U_C(\infty) = U_0/2$.
Mimogrede lahko ocenimo značilni čas za polnjenje kondenzatorja. Produkt začetnega toka in značilnega časa, $I_C(0)\tau$, je enak končnemu naboju na ploščah kondenzatorja $CU_0/2$. Iz tega dobimo $\tau = 3RC/2$.

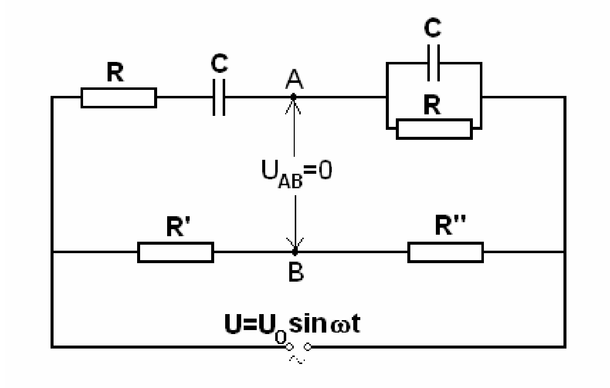
Lotimo se računa. Najprej zapišimo prvi Kirchoffov izrek za označeni vozlišči: $\frac{U_0 - U'}{R} - \frac{U'}{3R} - I_C = 0$ $\quad \frac{U_0 - U''}{3R} - \frac{U''}{R} + I_C = 0.$ Iz enačb izločimo I_C. Pri tem dobimo zvezo $U_0 = U' + U''$. Naboj na elektrodah kondenzatorja je enak $e = C(U' - U'') = C(2U' - U_0)$. Z odvajanjem dobimo tok I_C: $I_C = de/dt = 2CdU'/dt$. Ta izraz vstavimo v prvo enačbo, ki smo jo dobili z uporabo Kirchoffovega izreka in dobimo enačbo $\frac{dU'}{dt} + \frac{2}{3RC}U' = \frac{U_0}{2RC}$. Z upoštevanjem začetnih pogojev je rešitev te enačbe $U' = \frac{3U_0}{4} - \frac{U_0}{4}e^{-t/\tau}$, pri čemer je značilni čas $\tau = 3RC/2$ enak, kot smo ga prej ocenili. Potencial U'' je enak $U'' = U_0 - U' = \frac{U_0}{4} + \frac{U_0}{4}e^{-t/\tau}$.
Napetost na kondenzatorju je enaka $U_C = U' - U'' = U_0(1 - e^{-t/\tau})/2$.

Ko po daljšem času stikalo ponovno razklenemo, požene kondenzator električni tok po dveh vzporedno vezanih vejah. Upor vsake veje je 4R, nadomestni upor obeh vej skupaj pa 2R. Napetost na kondenzatorju pada eksponentno proti nič z značilnim časom 2RC.

11. Generator izmenične napetosti z amplitudo U_0 in krožno frekvenco ω ima notranji upor R_0. Nanj priključimo zaporedno vezana upornik z uporom R in kondenzator s kapaciteto C. Kolikšen mora biti upor upornika, da se bo na njem trošila največja moč?

Računamo s kompleksnimi impedancami. Impedanca vezja je $Z = R + R_0 + 1/i\omega C = Z_0 e^{-i\phi}$. Tu je $Z_0 = \sqrt{(R_0 + R)^2 + (1/\omega C)^2}$ in $tg\phi = \frac{1}{\omega C(R + R_0)}$. Amplituda toka je enaka $I_0 = U_0/Z_0$, povprečna moč na uporniku pa
$\overline{P} = \frac{1}{2}I_0^2 R = \frac{U_0^2 R}{2\left[(R_0 + R)^2 + (1/\omega C)^2\right]}$. Vrednost upora R, pri kateri je moč največja dobimo z odvajanjem in sicer velja $R = \sqrt{R_0^2 + (1/\omega C)^2}$.

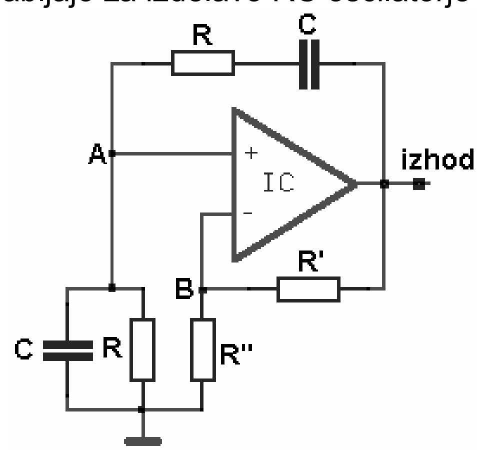
12. Pri kateri krožni frekvenci ω in pri katerem razmerju R'/R" je v Wienovem mostu napetost med točkama A in B nič?



Imperanca zaporedne vezave kondenzatorja in upornika levo od točke A je enaka $Z_1 = R\left(1 - \frac{i}{\omega RC}\right) = |Z_1|\, e^{-i\varphi_1}$, $tg\varphi_1 = \frac{1}{\omega RC}$. Impedanca vzporedne vezave upornika in kondenzatorja je $Z_2 = \frac{R}{1+(\omega RC)^2}(1 - i\omega RC) = |Z_2|\, e^{-i\varphi_2}$, $tg\varphi_2 = \omega RC$.

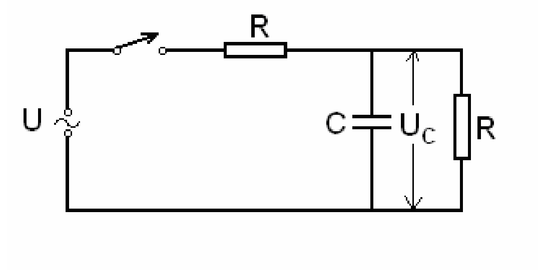
Napetost med točkama A in B je enaka razliki med padcem napetosti na impedanci Z_2 in padcem napetosti na uporniku R". Ko je $U_{AB} = 0$, se padca napetosti ujemata v amplitudi in fazi. Padec napetosti na uporniku R" je v fazi z napetostjo vira. Padec napetosti na impedanci Z_2 je v fazi z napetostjo vira in s tem tudi s padcem napetosti na uporniku R", če je $\varphi_1 = \varphi_2$. Fazi sta enaki, ko je $\omega RC = 1/\omega RC = 1$. V tem primeru je $|Z_1| = R\sqrt{2}$ in $|Z_2| = R/\sqrt{2}$. Amplituda padca napetosti na uporniku R" je enaka $U_0R''/(R' + R'')$, amplituda padca napetosti na impedanci Z_2 pa je enaka $U_0|Z_2|/(|Z_1| + |Z_2|)$. Amplitudi padcev napetosti sta enaki, ko je $R'/R'' = |Z_1|/|Z_2| = 2$. Napetost med točkama A in B je nič, ko sta izpolnjena pogoja $\omega RC = 1$ in $R'/R'' = 2$.

* Wienov most uporabljajo za izdelavo RC oscilatorjev.



Krožna frekvenca ocilatorja na sliki je ω = 1/RC.

13. Napetost generatorja je $U = U_0 \cos\omega t$. Ob času t=0 sklenemo stikalo. Kako se s časom spreminja napetost na kondenzatorju, če je bila v začetku napetost na kondenzatorju nič?



Za vozlišče, kjer se stikajo upornika in kondenzator zapišemo prvi Kirchoffov izrek: $(U - U_C)/R = de_C/dt + U_C/R$. Tu je e_C naboj na elektrodah kondenzatorja. Ker velja zveza $e_C = CU_C$, lahko zapišemo enačbo za U_C:

$RC\dfrac{dU_C}{dt} + 2U_C = U_0 \cos\omega t$. Rešitev enačbe je vsota splošne rešitve homogenega dela $RC\dfrac{dU'_C}{dt} + 2U'_C = 0$ in katerekoli rešitve cele enačbe U''_C. Splošna rešitev homogenega dela enačbe je $U'_C = Ae^{-t/\tau}$, pri čemer je A poljubna konstanta, značilni čas τ pa je enak $\tau = RC/2$. Partikularno rešitev U''_C poiščemo tako, da izračunamo napetost na kondenzatorju potem, ko so razmere v vezju stacionarne, to je po nekaj značilnih časih τ, ko pade U'_C (prehodni pojav) na zanemarljivo majhno vrednost. Računamo v kompleksnem. Za napetost vzamemo $\widetilde{U} = U_0 e^{i\omega t}$. Impedanca vzporedne vezave kondenzatorja in upornika je $Z = \dfrac{R}{1 + i\omega RC}$, napetost na kondenzatorju pa $\widetilde{U}_C = \widetilde{U}\dfrac{Z}{Z+R} = \dfrac{U_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$, pri čemer je $\mathrm{tg}\varphi = \omega RC/2$. Ker je prava napetost $U = U_0\cos\omega t$, kar je realni del $\widetilde{U}$, je tudi napetost na kondenzatorju U''_C enaka realnemu delu $\widetilde{U}_C$:

$U''_C = \dfrac{U_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$. Splošna rešitev enačbe za napetost na kondenzatorju je torej $U_C = Ae^{-t/\tau} + \dfrac{U_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$. Konstanto A določimo iz začetnega pogoja $U_C(t=0) = 0$. Dobimo $A = -\dfrac{U_0 \cos(\varphi)}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$ in $U_C = \dfrac{U_0\left[\cos(\omega t - \varphi) - \cos(\varphi) e^{-t/\tau}\right]}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$.