1. Preko lahkega škripca sta z lahko vrvico zvezani uteži z masamama $m_1 = 1\ kg$ in $m_2 = 1{,}1\ kg$. Uteži držimo, da mirujeta. Uteži spustimo. V kolikšnem času ena utež napravi pot 0,5 m? Kolikšna je tedaj njena hitrost? S kolikšno silo je napeta vrvica?

Ko uteži spustimo, se sistem giblje pospešeno. Drugi Newtonov zakon lahko zapišemo za vsako utež posebej: $F_v - m_1g = m_1a$, $m_2g - F_v = m_2a$, ali pa za sistem kot celoto: $m_2g - m_1g = (m_1+m_2)a$. Tu je F_v sila, s katero je napeta vrvica, za katero predpostavljamo, da je na obeh staneh škripca enaka. Zadnjo enačbo dobimo tudi, ko seštejemo prvi dve. Pospešek uteži je enak $a=(m_2-m_1)g/(m_2+m_1) = 0{,}47\ m/s^2$, sila vrvice pa $F_v=m_1(g+a)=m_2(g-a)= 10{,}3\ N$. Čas, v katerem se utež premakne za $s = 0{,}5\ m$, je enak $t = \sqrt{2s/a} = 1{,}46s$, hitrost uteži pa je tedaj $v = at = 0{,}69\ m/s$.

2. Na gladki plošči, ki je proti vodoravni ravnini nagnjena za $\alpha = 15^0$, leži telo z maso $m = 1\ kg$. Telo je preko lahkega škripca na vrhu klanca povezano z utežjo z maso m*, ki prosto visi. Masa vrvice je zanemarljiva. Telo se giblje s pospeškom 1,5 m/s^2 po plošči navzdol. Kolikšna je masa uteži? S kolikšno silo je napeta vrv?

Zapišimo najprej drugi Newtonov zakon za telo: $mg\sin\alpha - F_v = ma$ in drugi Newtonov zakon za utež: $F_v - m^*g = m^*a$. Enačbi seštejemo, da se znebimo neznane sile F_v in iz dobljeme enačbe izračunamo m*: $m^* = m(g\sin\alpha-a)/(g+a) = 0{,}092\ kg$. Napetost vrvice izračunamo iz enačbe $Fv = m^*(g+a) = 1{,}04\ N$.
Sami lahko rešite nalogo z enakimi podatki za primer, ko se telo giblje po plošči navzgor. Rezultat je m = 0,46 kg in F_v = 3,8 N.

3. Kolesar pripelje do vznožja klanca s hitrostjo 36 km/h. Nagib klanca je $\alpha = 10^0$. Kolikšno pot napravi kolesar preden se ustavi, če med vožnjo po klancu ne poganja kolesa. Zračni upor zanemarimo.

Začetna hitrost kolesarja je $v_0 = 36\ km/h = 10\ m/s$. Pospešek kolesarja na klancu je $a = -g\sin\alpha = -1{,}7\ m/s^2$. Kolesar se ustavi po času $t = -v_0/a = 5{,}9\ s$. Pri tem napravi pot $s = \bar{v}t = 5m/s\,.\,5{,}9s = 29m$.

4. Na gladki vodoravni plošči kroži utež z maso $m = 0{,}1\ kg$. Utež je pritrjena na en konec vzmeti s koeficientom $k = 60\ N/m$, drug konec vzmeti pa je pritrjen na os vrtenja. Neraztegnjena vzmet je dolga $l_0 = 0{,}5\ m$, frekvenca kroženja uteži pa je 1,5 Hz. Kolikšen je polmer kroženja uteži r?

Sila vzmeti, $F = k(r - l_0)$, je centripetalna sila pri kroženju uteži: $k(r - l_0) = m\omega^2 r$. Iz te enačbe izračunamo polmer kroženja r: $r = l_0/(1 - m\omega^2/k) = 0{,}587\ m$. Vzmet je raztegnjena za 8,7 cm. Zanimivo je, da r divergira pri kotni hitrosti $\omega = \sqrt{k/m}$. Frekvenca kroženja je tedaj ravno enaka lastni frekvenci vzmetnega nihala, ki ga sestavljata vzmet s koeficientom k in utež z maso m.

5. Smučar z maso 70 kg zapelje v kotanjo. Na dnu kotanje je hitrost smučarja 15 m/s, krivinski polmer tira smučarja pa je 10 m. S kolikšno silo pritiska smučar na podlago?

Na dnu kotanje je vsota sil enaka centripetalni sili: $F_p - mg = mv^2/r$. Iz tega sledi $F_p = m(g + v^2/r) = 3{,}29mg = 2260\ N$. Sila, s katero smučar pritiska na podlago, je po tretjem Newtonovem zakonu enaka $-F_p$. Po velikosti je enaka teži telesa z maso 230 kg.

6. Vrv dolžine $l = 1m$ in mase m držimo na gladki vodoravni mizi tako, da del vrvi dolžine $d = 20\ cm$ visi z mize. Vrv spustimo. Izračunajmo, kako je hitrost vrvi odvisna od njenega premika s. Izračunajmo še čas, ki ga potrebuje vrv, da zdrsi z mize in njeno hitrost v tem trenutku.

Tu lahko uporabimo zakon o ohranitvi energije, ali pa v nekoliko spremenjeni obliki prepišemo diferencialni izraz za pospešek. Naloge se lotimo na drugi način. Velja $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dvds}{dtds} = \left(\frac{dv}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{vdv}{ds}$. Vrv pospešuje teža tistega dela, ki visi z mize. Dolžina tega dela vrvi je d+s, teža pa mg(d+s)/l. Drugi Newtonov zakon pove , da je mvdv/ds = mg(d+s)/l. Maso krajšamo in enačbo pomnožimo z ds, da ločimo spremenljivki. Pri tem dobimo enačbo $vdv = (g/l)(d+s)ds$. Enačbo integriramo po hitrosti od 0 do v, po premiku pa od 0 do s. Pri tem je hitrost v tista hitrost, ki jo ima vrv pri premiku s. Dobimo enačbo $v^2 = (g/l)(2ds + s^2)$. Enačno korenimo in prepišemo v malo spremenjeni obliki: $v = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{(d+s)^2 - d^2}$. Ko vsa vrv zdrsi z mize je $s = l-d$, hitrost vrvi pa je enaka 3,07 m/s. V naslednjem koraku iščemo zvezo med premikom in časom. Zvezo $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{(d+s)^2 - d^2}$ delimo z drugim korenom in množimo z dt, da ločimo spremenljivki:

$\frac{ds}{\sqrt{(d+s)^2 - d^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}dt = \lambda dt$. Integriramo po premiku od nič do s, po času pa od nič do t. Če integrala na levi ne znamo izračunati pogledamo v tabele nedoločenih integralov, kjer najdemo zvezo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$. Na koncu dobimo $\lambda t = \ln\left(\frac{d + s + \sqrt{(d+s)^2 - d^2}}{d}\right)$. Iz te zveze izračunamo čas, ki ga potrebuje vrv, da zdrsi z mize. Enak je 0,73 s.

Zadnjo zvezo lahko tudi obrnemo: $s = d(\mathrm{ch}\lambda t - 1)$.

7. V začetku opazovanja drsi telo po klancu navzgor s hitrostjo $v_1 = 2\ m/s$. Ko se čez nekaj časa telo vrača skozi začetno točko, je njegova hitrost $v_2 = 1\ m/s$. Kolikšen je koeficient trenja med telesom in klancem? Kako daleč od začetne točke se telo ustavi? Nagib klanca je 10^0.

Pri drsenju navzgor je pospešek telesa enak $a_1 = -g\sin\alpha - k_t g\cos\alpha$. Čas ustavljanja je enak $t = -v_1/a_1 = v_1/g(\sin\alpha + k_t\cos\alpha)$. Pri tem telo naredi pot $s = v_1 t/2 = v_1^2/2g(\sin\alpha + k_t\cos\alpha)$. Potem, ko se v zgornji točki smer gibanja telesu obrne, je njegov pospešek enak $a_2 = g\sin\alpha - k_t g\cos\alpha$, kvadrat hitrosti telesa v začetni točki pa je enak $v_2^2 = 2a_2 s = v_1^2(\sin\alpha - k_t\cos\alpha)/(\sin\alpha + k_t\cos\alpha)$. Iz te zveze izračunamo koeficient trenja, ki je enak $k_t = 0{,}106$. Sedaj lahko izračunamo tudi razdaljo s od začetne točke do točke, kjer se telo ustavi. Enaka je 0,73 m.

8. Koeficient lepenja med gumami avtomobila in cesto je 1,0. Pogonski kolesi pritiskata na podlago s silo, ki je enaka 75% teže avtomobila. V kolikšnem najkrajšem času lahko avtomobil doseže hitrost 100 km/h na vodoravni cesti?
Največja sila, s katero podlaga lahko deluje na avto v horizontalni smeri je $0{,}75k_l mg$. Zato je največji pospešek avtomobila enak $a = 0{,}75\ k_l g$. Najkrajši čas, v katerem avtomobil lahko doseže hitrost $v=100\ km/h$ je torej $t = v/a = 3{,}8\ s$.

9. Ovinek na cesti ima polmer 50 m. Koeficient lepenja med gumami in cesto je 1. S kolikšno največjo hitrostjo sme skozi ovinek peljati avto, da ne zdrsne? Kolikšna je največja hitrost, če je cesta v ovinku nagnjena za 20^0? S kolikšno hitrostjo smemo peljati po ovinku, če je po cesti polito olje?
Ko cesta ni nagnjena, je sila lepenja centripetalna sila. Največjo hitrost dobimo, ko upoštevamo največjo silo lepenja: $k_l mg = mv^2/r$. Iz te enačbe izračunamo hitrost $v = \sqrt{rk_l g} = 22{,}2 m/s = 80 km/h$.

Na cesti, ki je nagnjena za kot α, kaže pravokotna sila podlage F_p pravokotno na cesto. Sile v navpični smeri so v ravnovesju: $mg + F_l\sin\alpha = F_p\cos\alpha$, vsota sil v vodoravni ravnini pa predstavlja centripetalno silo: $F_p\sin\alpha + F_l\cos\alpha = mv^2/r$. Tu je F_l sila lepenja, ki je vzporedna s podlago, njena največja vrednost pa je $k_l F_p$. V mejnem primeru dobimo $v^2 = rg(k_l + tg\alpha)/(1 - k_l tg\alpha)$. V našem primeru je največja hitrost 117 km/h.
Ko je po cesti polito olje je koeficient lepenja približno nič. Skozi nagnjen ovinek smemo peljati s hitrostjo $v = \sqrt{rgtg\alpha} = 48 km/h$.

10. Na vrvi dolžine l visi utež z maso m. Utež držimo v taki legi, da vrv oklepa z navpičnico kot φ_0. Utež spustimo. Kolikšno hitrost ima utež, ko vrv oklepa z navpičnico kot φ?
Nalogo najhitreje rešimo z uporabo zakona o ohranitvi energije. Ker razen teže nobena sila ne opravlja dela (zračni upor zanemarimo!), se ohranja vsota kinetične in potencialne energije. Vzemimo, da merimo višino od pritrdišča vrvi. V začetni legi je kinetična energija nič, potencialna pa $-mgl\cos\varphi_0$. Pri kotu φ je kinetična energija $mv^2/2$, potencialna pa $-mgl\cos\varphi$. Z upoštevanjem ohranitve energije dobimo $mv^2/2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0$, oziroma $v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$.

* Do enakega rezultata pridemo tudi po daljši poti. Ko je odklon vrvi φ, deluje v smeri gibanja uteži sila $mg\sin\varphi$. Pospešek uteži je enak $a = g\sin\varphi$. Ker se utež giblje po krožnici s polmerom l, je ta pospešek v resnici tangentni pospešek, ki je seveda enak $a = l\alpha$. Ko upoštevamo še smer tangentnega pospeška, dobimo zvezo $\alpha = -(g/l)\sin\varphi$. S to enačbo se bomo podrobneje ukvarjali pri nihanju. Zdaj

bomo drugače zapisali α: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega d\varphi}{dt d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}$. V prej zapisani zvezi ločimo spremenljivki: $\omega d\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi d\varphi$ in dobljeno enačbo integriramo:

$\int_0^\omega \omega d\omega = -\frac{g}{l}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sin\varphi d\varphi$. Pri tem dobimo naslednji rezultat: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$.

Hitrost uteži, v = ωl, je seveda enaka hitrosti, ki smo jo izračunali prej.

11. Gladek klanec ima obliko četrtine kroga s polmerom R. Nadaljuje se v hrapavo vodoravno podlago.

Telo spustimo na vrhu klanca. Kako daleč od vznožja klanca se ustavi, če je koeficient trenja med vodoravno podlago in telesom enak k_t?
Najprej obravnavajmo drsenje po klancu. Uporabili bomo izrek o kinetični energiji. Ker je klanec gladek ni trenja, zato se vsota kinetične in potencialne energije ohranja. Na vrhu klanca je kinetična energija nič, potencialna pa recimo mgR. Na dnu klanca je potencialna energija nič, kinetična pa $mv_0^2/2$. Velja torej $v_0^2 = 2gR$. Na vodoravni podlagi je sila trenja enaka $F_t = -mgk_t$, njeno delo do točke, kjer se telo ustavi, $A_t = -mgk_t s$, pa je enako spremembi kinetične energije $\Delta W_k = -mv_0^2/2$. Razdalja od vznožja klanca do točke, kjer se telo ustavi, je enaka $s = R/k_t$.

*Trenje na klancu smo zanemarili, saj njegova obravnava v tem primeru presega nivo matematike, ki jo uporabljamo pri Fiziki I. Omenimo samo, da pri neničelnem trenju na klancu velja enačba $v_0^2 = 2gR\left(\frac{1-2k_t^2}{1+4k_t^2} - \frac{3k_t}{1+4k_t^2}e^{-\pi k_t}\right)$. V primeru, ko je kt majhen, razvijemo enačbo v vrsto po potencah k_t. Upoštevajmo, da velja $1/(1+x) = 1-x+x^2-x^3+\ldots$ in $e^{-x} = 1-x+x^2/2!-x^3/3!+\ldots$ Pri tem dobimo $v_0^2 = 2gR[1-3k_t+3k_t^2(\pi-2)+\ldots]$.

Do zadnje enačbe pridemo tudi drugače. Na naše telo delujejo tri sile: teža F_g, trenje F_t in pravokotna sila podlage F_p. Ker se telo giblje po krožnici, je vsota sil v smeri proti središču kroga enaka centripetalni sili: $F_p - F_g\sin\alpha = mv^2/R$. Sila trenja je enaka $F_t = k_t F_p = k_t(F_g\sin\alpha + mv^2/R)$. Trenja in njegovo delo sta odvisna od hitrosti telesa, hitrost pa seveda od trenja. Predpostavili bomo, da je trenje majhno in računali na naslednji način. Najprej bomo predpostavili, da trenja ni in izračunali hitrost telesa v odvisnosti od α. S to hitrostjo bomo izračunali delo trenja v odvisnosti od α. V drugem koraku bomo upoštevali dobljeno delo trenja in izračunali spremenjeno hitrost. S to hitrostjo bomo izračunali delo trenja in z upoštevanjem tega dela izračunali hitrost telesa. Proceduro lahko nadaljujemo, izračunana hitrost telesa pa se pri tem približuje pravi hitrosti.

Če trenja ni dobimo s pomočjo zakona o ohranitvi energije zvezo med hitrostjo in kotom:

$\boldsymbol{v^2 = 2gR\sin\alpha}$.

Pravokotna sila podlage je enaka $F_p = 3mg\sin\alpha$, sila trenja pa $F_t = 3k_t mg\sin\alpha$. Pri izračunu dela trenja A_t upoštevamo, da je trenje nasprotno usmerjeno kot premik in da je majhen premik po krožnici enak $ds=Rd\alpha$. Pri tem dobimo $A_t = -\int_0^\alpha F_t ds = -\int_0^\alpha 3k_t mgR\sin\alpha d\alpha = -3k_t mgR(1-\cos\alpha)$. Z upoštevanjem izračunanega dela trenja dobimo iz izreka o kinetični energiji

$\boldsymbol{v^2 = 2gR\sin\alpha - 6k_t gR(1-\cos\alpha)}$.

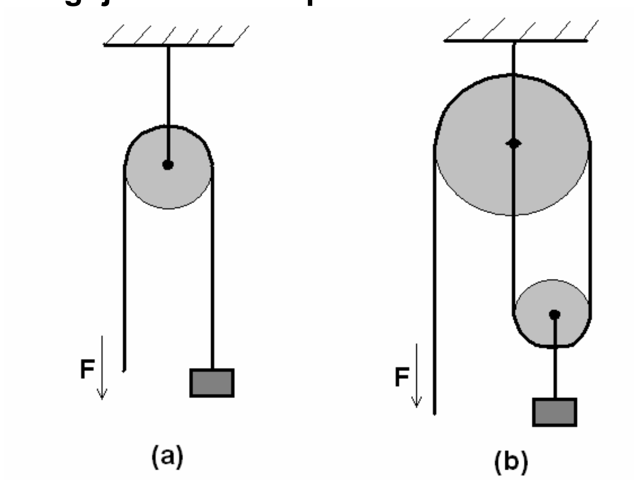
V naslednjem koraku upoštevamo pri izračunu dela trenja prej izračunano hitrost. Sila trenja je zdaj enaka $F_t = 3k_t mg\sin\alpha - 6k_t^2 mg(1-\cos\alpha)$, delo trenja pa $A_t = -3k_t mgR(1-\cos\alpha) + 6k_t^2 mgR(\alpha - \sin\alpha)$. Kvadrat hitrosti je zdaj enak

$\boldsymbol{v^2 = 2gR\sin\alpha - 6k_t gR(1-\cos\alpha) + 12k_t^2 gR(\alpha - \sin\alpha)}$.

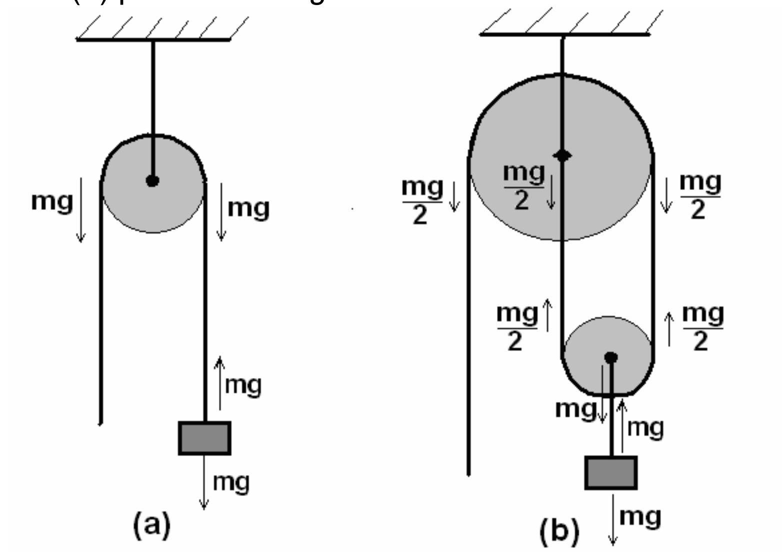
Če v tem izrazu vstavimo $\alpha = \pi/2$, dobimo prej zapisani izraz za v_0^2.

Proceduro lahko nadaljujemo. V naslednjem koraku dobimo v izrazu za kvadrat hitrosti popravek reda velikosti k_t^3, nato popravek reda velikosti k_t^4 itd. Če je k_t majhen, zadošča linearni popravek, ki smo ga dobili v prvem koraku. Če je večji, upoštevamo še kvadratični popravek, ki smo ga dobili v drugem koraku, dlje pa ponavadi ne gremo. Opisani način obravnave, pri katerem »motnje« najprej ne upoštevamo, potem pa jo upoštevamo v prvem, drugem, ali celo višjih redih, je v fiziki pogost posebej, če je natančen račun zelo zapleten.

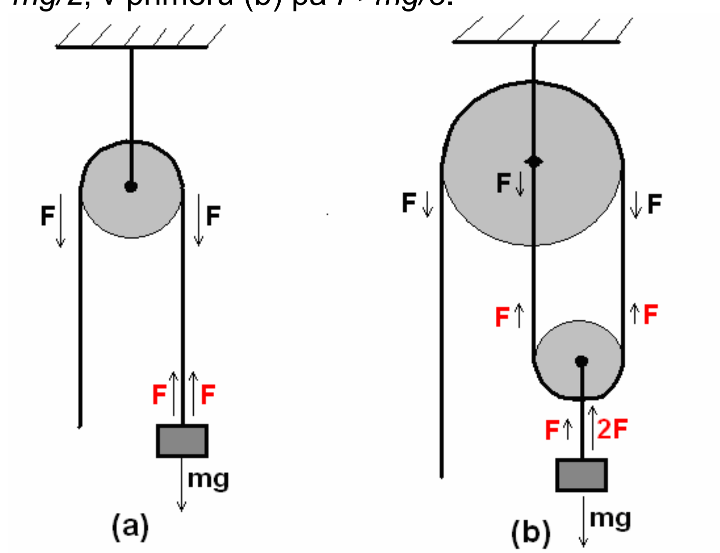
12. Na sliki sta narisana škripec (a) in sistem dveh škripcev (b). S kolikšno silo moramo vleči za vrv, če hočemo dvigniti breme z maso m? Kolikšna je sila v pritrdišču škripca? Vzemimo, da je namesto bremena lahek sedež, na katerem sedi človek. S kolikšno silo mora človek vleči za vrv, da se enakomerno dviguje? Maso škripcev zanemarimo.



Vzemimo najprej, da je breme telo z maso m. V primeru (a) moramo vleči s silo *F=mg*, v primeru (b) pa s silo *F=mg/2*.



Sila v pritrdišču je v primeru (a) enaka 2mg, v primeru (b) pa je sila v pritrdišču večjega škripca 3mg/2, v pritrdišču manjšega škripca pa mg.
Če je breme človek na sedežu, ki drži nasprotni konec vrvi in ga vleče navzdol s silo F, deluje nanj po tretjem Newtonovem zakonu navzgor enako velika sila F. Poleg tega deluje navzgor še sila vrvi, ki je v primeru (a) enaka F, v primeru (b) pa 2F. Človek se prične dvigati, ko je skupna sila navzgor večja od mg. V primeru (a) mora biti *F>mg/2*, v primeru (b) pa *F>mg/3*.



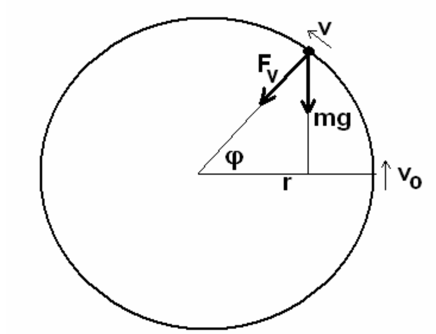
Do enakega rezultata pridemo tudi z zakonom o ohranitvi energije. V našem primeru je delo sile F enako spremembi potencialne energije. Ko se človek dvigne proti zemlji za h, se nasprotni konec vrvi premakne proti njemu za *s = 2h* v primeru (a) oziroma *s = 3h* v primeru (b). Z upoštevanjem zveze *Fs = mgh* pridemo do enakega rezultata, kot smo prišli prej.

13. V dvigalu za menjavo koles pri avtomobilu je vijak, ki ga vrtimo z ročko. Polmer ročke je $r = 20\ cm$, pri enem zasuku ročke pa se vijak premakne za $h = 5\ mm$. Pri dvigovanju pritiska avtomobil na dvigalo s silo $F_0 = 5\ kN$. S kolikšno silo F pritiskamo na ročko?

Če zanemarimo delo trenja, je delo sile, s katero pritiskamo na ročko, enako delu sile, s katero deluje dvigalo na avtomobil. Pri enem zasuku ročke torej velja $F2\pi r = F_0h$. Iz te enačbe izračunamo silo F: $F = F_0h/2\pi r = 20\ N$.

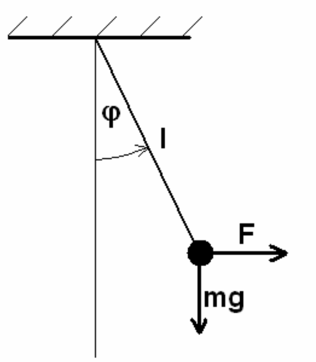
14. Utež na vrvi kroži v vertikalni ravnini. Masa uteži je $m = 0{,}1\ kg$, dolžina vrvi pa $r = 0{,}5\ m$. Ko je utež v višini pritrdišča vrvi, je njena hitrost $v_0 = 4\ m/s$. Izračunajmo največjo in najmanjšo silo, s katero je napeta vrv.

Izračunajmo, kako je napetost vrvi odvisna od kota φ.



Pri kotu φ je skupna sila proti središču kroženja (centripetalna sila) enaka $mv^2/r = F_v + mg\sin\varphi$. Pri izračunu hitrosti upoštevamo zakon o ohranitvi energije, $mv^2/2 = mv_0^2/2 - mgr\sin\varphi$ in dobimo $F_v = mv_0^2/r - 3mg\sin\varphi$. Najmanj je napeta vrv v najvišji točki ($\varphi = \pi/2$, $F_v = 0{,}2\ N$), najbolj pa v najnižji točki ($\varphi = 3\pi/2$, $F_v = 6{,}2$ N). Razlika med največjo in najmanjšo napetostjo vrvi je 6mg.

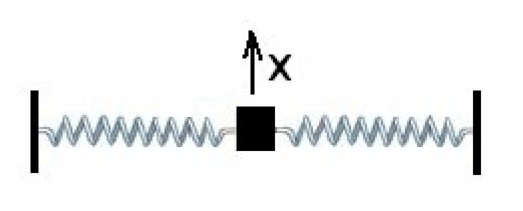
15. Krogla z maso m visi na vrvi dolžine l in miruje. Vanjo usmerimo curek zraka, ki povzroči stalno vodoravno silo F. Za kolikšen največji kot φ_0 se odkloni vrv od navpičnice? Kolikšen je kot, ko krogla obmiruje?



Za izračun največjega kota uporabimo izrek o kinetični energiji. V začeti točki (navpično pod pritrdiščem) je kinetična energija krogle nič. Vzemimo, da je v tej točki tudi potencialna energija krogle nič. Ko se krogla najbolj odkloni iz začetne lege, je njena kinetična energija zopet nič, potencialna pa $W_p = mgl(1 - \cos\varphi_0)$. Pri tem je delo sile F enako produktu sile in premika krogle v smeri sile A =

$Flsin\varphi_0$. Delo sile F je enako spremembi potencialne energije, iz česar sledi $tg\varphi_0 = 2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$. Z ε smo označili razmerje F/mg. Ko čez nekaj časa krogla obmiruje, oklepa vrv z navpičnico kot φ, ki je podan z enačbo $tg\varphi = \varepsilon$.

16. Na gladki vodoravni podlagi niha majhna utež z maso m, ki je pritrjena na dve enaki vzmeti.



Vsaka vzmet ima koeficient k. Dolžina neraztegnjene vzmeti je l. Ko je utež v mirovni legi, na sredi med pritrdiščema, vzmeti nista deformirani. Največji odmik uteži iz mirovne lege je x. Kolikšna je največja hitrost uteži?

Pri odmiku x iz mirovne lege je dolžina vzmeti enaka $\sqrt{l^2+x^2}$, raztezek vzmeti s pa je enak $s=\sqrt{l^2+x^2}-l=\dfrac{x^2}{\sqrt{l^2+x^2}+l}$. Tedaj je skupna prožnostna energija obeh vzmeti enaka $W_{pr} = ks^2$. Kinetična energija uteži je v tej legi nič. Utež ima največjo hitrost v mirovni legi, kjer je prožnostna energija nič. Mehanska energija se ohranja. Velja $mv^2/2 = ks^2$. Hitrost uteži v mirovni legi je torej enaka

$$v=\sqrt{\frac{2k}{m}}s=\sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{x^2}{\sqrt{l^2+x^2}+l}.$$

* Na hitro lahko ocenimo nihajni čas t_0 tega nihala. Približno velja $v(t_0/4) \approx x$.

Nihajni čas je torej približno $t_0 \approx \dfrac{4x}{v}=\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\dfrac{4(\sqrt{l^2+x^2}+l)}{x}$. Pri majhnih amplitudah (x<<l) je t_0 sorazmeren 1/x. Pri velikih amplitudah (x>>l) postane t_0 neodvisen od amplitude, podobno kot pri vzdolžnem nihanju vzmetnega nihala.

17. Breme z maso 300 kg želimo dvigati navpično navzgor s hitrostjo 1 m/s. Kako močan motor potrebujemo?

Velja $P = Fv = mgv = 3\ kW$. Potrebujemo torej motor z močjo najmanj 3 kW.

18. Tovornjak z maso 10 t pelje navzgor po klancu z nagibom $\theta = 6^0$ s hitrostjo 36 km/h. S kolikšno močjo dela motor? Trenje zanemarimo.

Velja $P = mgv\sin\theta = 100\ kW$.

19. Avto, ki pospešuje na ravni cesti, ima v začetku opazovanja hitrost $v_0 = 54\ km/h$. Motor deluje s stalno močjo 45 kW. Kolikšna je hitrost avtomobila čez tri sekunde? Masa avtomobila je 1000 kg. Trenje zanemarimo.

V času t prejme avto delo Pt. Prejeto delo je enako spremembi kinetične energije: $mv^2/2 - mv_0^2/2 = Pt$. Iz te enačbe izračunamo v: $v=\sqrt{v_0^2+2Pt/m}=80 km/h$.

20. Na vodoravni hrapavi podlagi sta dve telesi z masama $m_1 = 0{,}1\ kg$ in $m_2 = 0{,}2\ kg$ zvezani z vrvico. Med njima je stisnjena kratka lahka vzmet. Koeficient vzmeti je $k = 100\ N/m$, skrček pa $s = 5\ cm$. Koeficient trenja med telesoma in podlago je $k_t = 0{,}05$. Vrvico prežgemo. Kako daleč narazen telesi obmirujeta?

Problem bomo reševali v dveh korakih. Najprej bomo izračunali hitrosti teles v trenutku, ko se odmakneta od vzmeti. Nato bomo izračunali, kje se telesi zaradi trenja ustavita. V prvem koraku trenja ne bomo upoštevali. Upoštevanje trenja v tem koraku bi namreč reševanje problema močno zapletlo. Če je končna razdalja med telesoma dosti večja od razdalje s, je ta predpostavka upravičena. Če trenja ne upoštevamo, se ohranja gibalna količina in energija sistema. Vzemimo, da imata telesi v trenutku, ko razdalja med njima naraste za s hitrosti v_1 in v_2. Tedaj velja $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$ in $m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 = ks^2/2$. Iz teh enačb izračunamo hitrosti: $v_1 = 1{,}29\ m/s$ in $v_2 = -0{,}65\ m/s$. Pozitivno smer smo izbrali v smeri gibanja prvega telesa, zato je hitrost gibanja drugega telesa negativna. Pot s, ki jo telo z začetno hitrostjo v napravi na hrapavi podlagi, je enaka $s = v^2/2gk_t$. V našem primeru dobimo $s_1 = 1{,}67\ m$ in $s_2 = 0{,}42\ m$. Končna razdalja med telesoma d je enaka $d = s_1 + s_2 = 2{,}09\ m$. Ta razdalja je bistveno večja od $s = 5\ cm$, zato je približek, ki smo ga uporabili v prvem koraku kar dober. Zavedati pa se moramo, da je relativna napaka, ki smo jo naredili pri izračunu d, reda velikosti $s/d \approx 2\ \%$.

21. Dve telesi se gibljeta po isti premici. Prvo telo z maso m_1 se giblje s hitrostjo v_{10} in prožno trči v drugo telo z maso m_2, ki se giblje s hitrostjo v_{20}. Kolikšni sta hitrosti teles v_1 in v_2 po trku?

Ohranja se gibalna količina in energija: $m_1v_{10} + m_2v_{20} = m_1v_1 + m_2v_2$ in $m_1v_{10}^2/2 + m_2v_{20}^2/2 = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2$. Iz teh dveh enačb sicer lahko izračunamo hitrosti v_1 in v_2, a mnogo preprosteje je, če opazujemo trk v opazovalnem sistemu S', v katerem je skupna gibalna količina sistema nič. Imenujemo ga težiščni opazovalni sistem. Ta sistem se glede na mirujoči opazovalni sistem S giblje s hitrostjo v. Hitrosti v mirujočem opazovalnem sistemu v_i in hitrosti v težiščnem opazovalnem sistemu v_i' so povezane na naslednji način: $v_{10}' = v_{10} - v$, $v_{20}' = v_{20} - v$, $v_1' = v_1 - v$ in $v_2' = v_2 - v$. Nadalje predpostavimo, da sta opazovalna sistema S in S' inercialna in seveda, da so fizikalni zakoni enaki v vseh inercialnih sistemih. Hitrost težiščnega sistema poiščemo tako, da ugotovimo, pri kateri hitrosti v je gibalna količina sistema pred trkom nič: $m_1(v_{10} - v) + m_2(v_{20} - v) = 0$. Iz tega sledi $v = (m_1v_{10} + m_2v_{20})/(m_1+m_2)$, $v_{10}' = m_2(v_{10}-v_{20})/(m_1+m_2)$ in $v_{20}' = -m_1(v_{10}-v_{20})/(m_1+m_2)$. Upoštevamo zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi energije in dobimo: $v_1' = -m_2(v_{10}-v_{20})/(m_1+m_2)$, $v_2' = m_1(v_{10}-v_{20})/(m_1+m_2)$. Znaka hitrosti smo zapisali tako, da smo upoštevali, da se po trku v težiščnem sistemu smeri hitrosti obrneta. Zdaj se preselimo nazaj v mirujoči opazovalni sistem S. Tu velja

$$v_1 = v_1' + v = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2}, \quad v_2 = v_2' + v = \frac{-(m_1 - m_2)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2}.$$

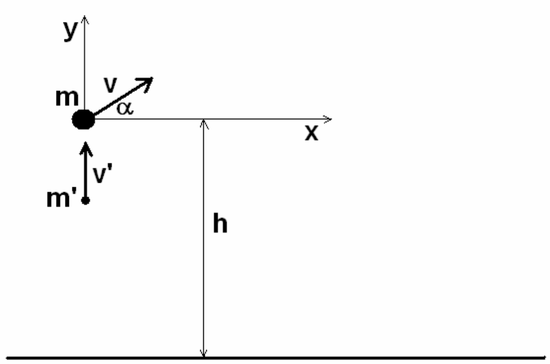
Pravilnost enačb lahko preverimo na primeru, ki ga že poznamo na primer, ko je $v_{20} = 0$. Zanimiv je tudi primer, ko sta masi enaki. Tedaj je $v_1 = v_{20}$ in $v_2 = v_{10}$.

22. V voziček z maso $m = 10\ kg$, ki miruje na ravni podlagi, pravokotno usmerimo curek vode. Hitrost vode je $v_0 = 5\ m/s$, presek curka je $S = 5\ cm^2$, gostota vode pa je $\rho = 10^3\ kg/m^3$. Voda spolzi ob steni vozička na tla. Izračunajmo, kolikšna je hitrost vozička po dveh sekundah in kolikšno pot napravi v tem času.

Masni tok vode, ki zadeva voziček, je enak $\Phi_m = \rho S(v_0 - v)$, sprememba hitrosti vode v smeri gibanja vozička pa $\Delta v = v_0 - v$. Sila, s katero deluje voda na voziček je enaka $F = \Phi_m \Delta v = \rho S(v_0 - v)^2$. Zapišimo drugi Newtonov zakon in ločimo spremenljivki pa dobimo: $\frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \frac{\rho S}{m} dt$. Enačbo integriramo po času od nič do t, po hitrosti pa od nič do v. Tu predstavlja v hitrost ob času t. Pri tem dobimo $v = v_0 \frac{\alpha t}{1 + \alpha t}$. Tu je $\alpha = \rho S v_0 / m = 0,25\ s^{-1}$. Po dveh sekundah je hitrost vozička enaka $v = v_0/3 = 1,7\ m/s$. Izračunajmo še pot: $s = \int_0^t v dt = \frac{v_0}{\alpha}\left[\alpha t - \ln(1 + \alpha t)\right]$. Po dveh sekundah se voziček premakne za $s = 1,9\ m$.

23. Telo z maso $m = 2kg$ leti s hitrostjo $v = 20\ m/s$ na višini $h = 10\ m$ poševno navzgor pod kotom $\alpha = 30^0$. Telo zadene izstrelek z maso $m' = 10g$, ki prileti s hitrostjo $v' = 200\ m/s$ navpično navzgor. Izstrelek se zapiči v telo in v njem obmiruje. Za koliko se zaradi izstrelka premakne točka, v kateri prileti telo na tla?

Izberimo osi koordinatnega sistema x in y, kot kaže slika.



Pri poševnem metu z višine h je čas leta $t = (v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh})/g$, domet pa $s = v_{0x}t$. Tu sta v_{0x} in v_{0y} projekciji začetne hitrosti na osi x in y. Če ni izstrelka je $v_{0x} = v\cos\alpha$, $v_{0y} = v\sin\alpha$, čas leta je enak $t = 2,77\ s$, domet pa $s = 48,0\ m$. Ko zadene telo izstrelek, se pri neprožnem trku ohrani gibalna količina: $mv\cos\alpha = (m+m')v_{0x}$, $mv\sin\alpha + m'v' = (m+m')v_{0y}$. Z novima vrednostima v_{0x} in v_{0y} dobimo čas leta $t = 2,93\ s$ in domet $s = 50,5\ m$. Točka, v kateri prileti telo na tla se torej premakne za 2,5 m.