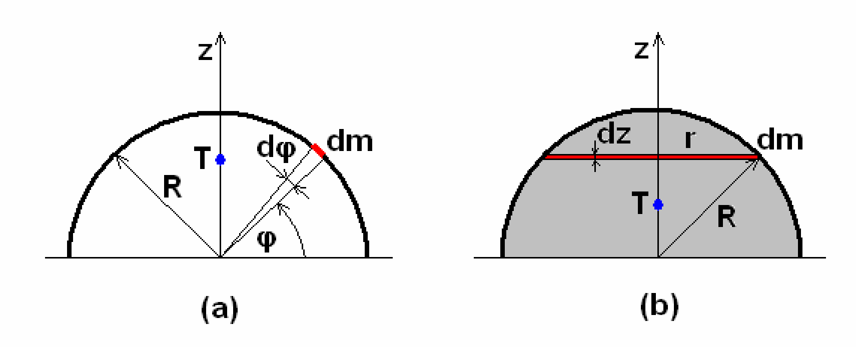
**1. Poiščimo težišče tanke žice zvite v polkrog (a) in homogene polkrogle (b).**




V obeh primerih nam simetrija telesa pove, da je težišče vzdolž osi z . V primeru (a) je os z dvoštevna os. Masa dm, ki ustreza kotu d$\varphi$, je enaka $dm = md\varphi/\pi$, pri čemer je m masa telesa. Oddaljenost mase dm od izhodišča vzdolž osi z je enaka R$\sin\varphi$. Oddaljenost težišča od izhodišča v smeri osi z ($z_T$) je enaka

$$z_T = \frac{1}{m}\int z dm = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{2R}{\pi}.$$

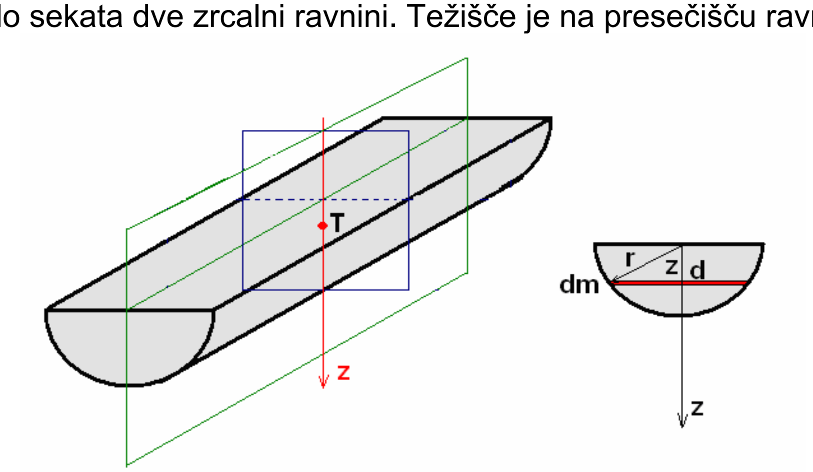
V primeru (b) je telo osno simetrično okrog osi z. Mislimo si, da je polkrogla sestavljena iz tankih rezin debeline dz. Vsaka rezina je tanka okrogla plošča s polmerom r, pri čemer velja $r^2 = R^2 - z^2$. Tu je z oddaljenast plošče od izhodišča vzdolž osi z. Masa plošče dm je enaka $dm = \rho\pi r^2 dz$, pri čemer je r gostota snovi, iz katere je narejena plošča. Koordinata težišča vzdolž osi z je enaka:

$$z_T = \frac{1}{m}\int z dm = \frac{\rho\pi}{m}\int_0^R z r^2 dz = \frac{3R}{8}.$$ Tu maso polkrogle, $m = \rho(2\pi R^3/3)$, poznamo,

ča želimo pa jo lahko tudi izračunamo kot $m = \int dm = \int_0^R \rho\pi r^2 dz$.

**2. Homogen valj z višino h, polmerom r in gostoto r prerežemo na pol v vzdolžni smeri. Kje ima dobljena polovica valja težišče?**

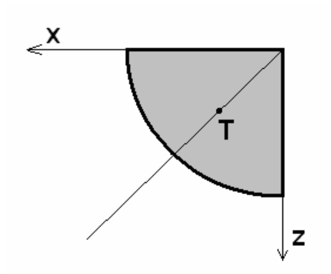
Telo sekata dve zrcalni ravnini. Težišče je na presečišču ravnin (os z).



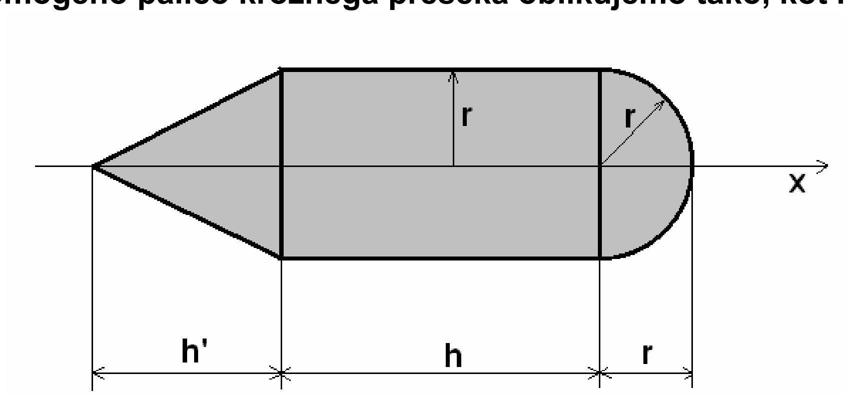
Poiščimo oddaljenost težišča od osi valja. Mislimo si, da je valj sestavljen iz tankih rezin debeline dz, ki so pravokotne na os z. Rezina ima dolžino h in širino d, pri čemer je $d^2 = 4(r^2 - z^2)$. Masa rezine dm je enaka $dm = \rho dhdz$, masa celega telesa pa je $m = \rho\pi r^2 h/2$. Oddaljenost težišča od osi valja je enaka

$$z_T = \frac{1}{m}\int z dm = \frac{4}{\pi r^2}\int_0^r z\sqrt{r^2 - z^2}dz = \frac{4r}{3\pi}.$$

*Z upoštevanjem simetrije in čim manj računanja poiščite težišče četrtine valja, ki jo dobite tako, da polovico valja prerežete na pol v vzdolžni smeri.
Rezultat: $x_T = z_T = 4r/3\pi$.




**3. Homogeno palico krožnega preseka oblikujemo tako, kot kaže slika**.




**Na levi se zaključi v stožec višine h', na desni pa v polkroglo s polmerom r. Kako daleč je težišče telesa od vrha stožca?**

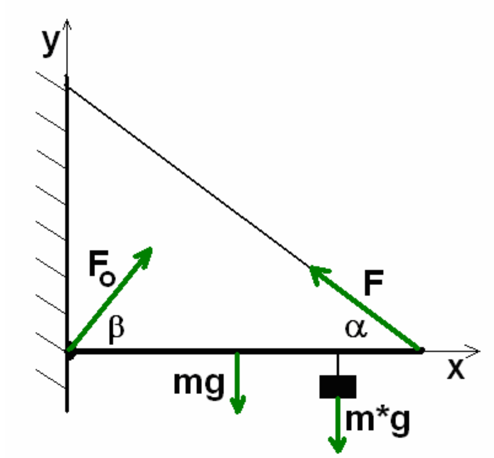
Telo je osno simetrično okrog osi x, zato je težišče na tej osi. Izhodišče postavimo v vrh stožca. Računamo težišče sestavljenega telesa. Masa stožca je $m_1 = \rho\pi r^2 h/3$, oddaljenost težišča od izhodišča pa $x_{T1} = 3h'/4$. Masa valjastega dela telesa je $m_2 = \rho\pi r^2 h$, oddaljenost težišča od izhodišča pa je $x_{T2} = h' + h/2$. Masa polkrogle je $m_3 = 2\rho\pi r^3/3$, oddaljenost težišča od izhodišča pa $x_{T3} = h+h'+3r/8$. Oddaljenost težišča telesa od izhodišča je enaka

$$x_T = \frac{m_1 x_{T1} + m_2 x_{T2} + m_3 x_{T3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3(h'^2 + 4hh' + 2h^2) + 8r(h + h') + 3r^2}{4(h' + 3h + 2r)}.$$

**4. Vrv z dolžino l in maso m je obešena preko lahkega (ali gladkega) škripca. V začetku jo držimo tako, da je višinska razlika koncev vrvi d. Vrv spustimo. Kako je hitrost vrvi odvisna od premika s?**

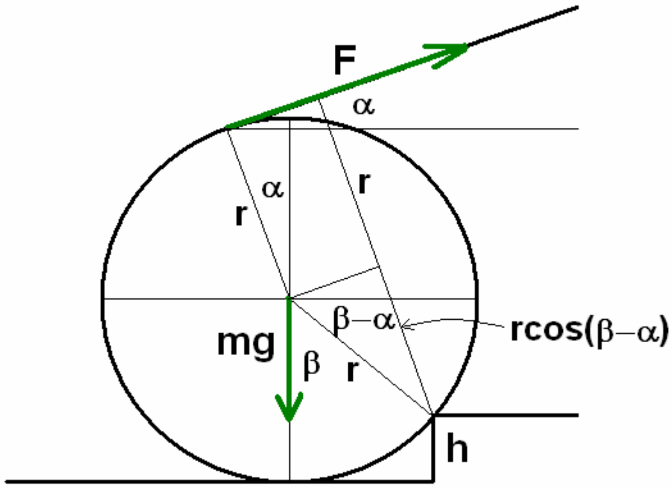
Podoben primer smo že obravnavali z neposredno uporabo drugega Newtonovega zakona. Tu bomo upoštevali, da se vsota kinetične in potencialne energije vrvi ohranja. V začetku je dolžina vrvi na eni strani škripca $l_1 = (l-d)/2$, masa tega dela vrvi pa je $m_1 = m(l-d)/2l$. Na drugi strani škripca je tedaj dolžina vrvi $l_2 = (l+d)/2$, masa vrvi pa $m_2 = m(l+d)/2l$. Kinetična energija vrvi je nič, potencialno energijo pa izračunamo tako, da seštejemo potencialno energijo obeh delov vrvi. Vzemimo, da merimo višino od škripca. Višina težišča prvega dela vrvi je $z_{T1} = -l_1/2$, višina drugega dela vrvi pa $z_{T2} = -l_2/2$. Začetna potencialna energija vrvi $W_{p1}$ je enaka $W_{p1} = m_1 g z_{T1} + m_2 g z_{T2} = -(mg/4l)(l^2 + d^2)$. Ko se vrv premakne za s, je njena hitrost v, kinetična energija pa $W_{k2} = mv^2/2$. Za izračun potencialne energije $W_{p2}$ uporabimo kar prejšnji rezultat. Tedaj je namreč višinska razlika koncev vrvi enaka d+2s. Potencialna energija je torej $W_{p2} = -(mg/4l)[l^2 + (d+2s)^2]$. Ker se mehanska energija ohranja, velja: $W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$. Iz te enačbe dobimo $v = \sqrt{\frac{2g}{l}(ds + s^2)}$.

**5. Drog z maso m in dolžino l je vrtljiv okrog vodoravne osi skozi eno krajišče. Drugo krajišče droga je z vrvjo privezano na steno. Vrv drži drog v vodoravni legi. Kot med vrvjo in drogom je α. Na drog v razdalji s od osi obesimo breme z maso m*. S kolikšno silo je napeta vrv? Kolikšna je sila v osi?**




Najprej izračunajmo silo vrvi F. Vsota navorov glede na os je enaka nič: $Fl\sin\alpha = mgl/2 + m^*gs$. Sila F je enaka $F = g(ml + 2m^*s)/2l\sin\alpha$. Nadalje izračunamo projekciji sile v osi $F_o$ na osi x in y. Ker je vsota projekcij sil na os x enaka nič, dobimo $F_{ox} = F\cos\alpha = g\,\mathrm{ctg}\alpha(ml+2m^*s)/2l$. Iz ravnovesja sil vzdolž osi y dobimo $F_{oy} = mg + m^*g - F\sin\alpha = mg/2 + m^*g(1-s/l)$. Sila $F_o$ je enaka $F_0 = \sqrt{F_{ox}^2 + F_{oy}^2}$, kot β, ki ga oklepa s smerjo droga pa je podan z enačbo $\mathrm{tg}\beta = F_{oy}/F_{ox}$.

**6. Telo v obliko valja s polmerom r = 40 cm in maso m = 200 kg, ki ima težišče na osi, želimo zvaliti čez stopnico višine h = 10 cm. Na telo pritrdimo vrv in jo vlečemo pod kotom α, kot kaže slika. Kolikšna je najmanjša sila F, s katero moramo vleči vrv, da zvalimo telo čez stopnico?**

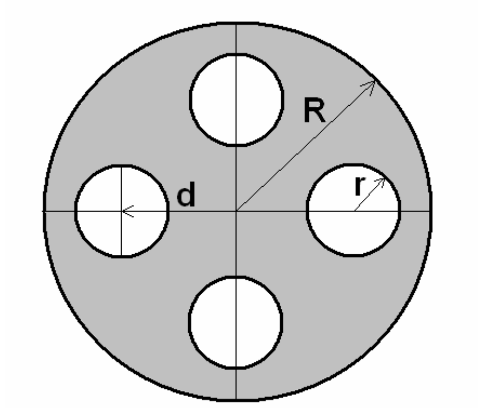



Telo se vrti okrog osi, ki jo predstavlja rob stopnice. Navor sile F mora biti najmanj enak navoru teže. Najpreprostejša je situacija, ko je kot a = 0. Vrv vlečemo v vodoravni smeri. Tedaj je navor sile F enak $M = F(2r - h)$, navor teže pa $M_g = mgr\sin\beta$, pri čemer je $\sin\beta = \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r}$. V tem primeru je sila F enaka

$$F = mg\frac{\sqrt{h(2r-h)}}{2r-h} = 740N.$$

Ko kot α ni nič, je pravokotna oddaljenost od osi do premice sile enaka $r(1+\cos(\beta-\alpha))$. Navor sile F je tedaj enak $M = F\,r(1+\cos(\beta-\alpha))$. Sila F, ki je potrebna, da zvalimo telo čez stopnico, je enaka $F = \frac{mg\sin\beta}{1+\cos(\beta-\alpha)}$. Sila F je najmanjša, ko je $\alpha = \beta$. Tedaj je namreč pravokotna oddaljenost od osi do premice sile enaka 2r. V našem primeru dobimo $F = mg\frac{\sqrt{h(2r-h)}}{2r} = 650N.$

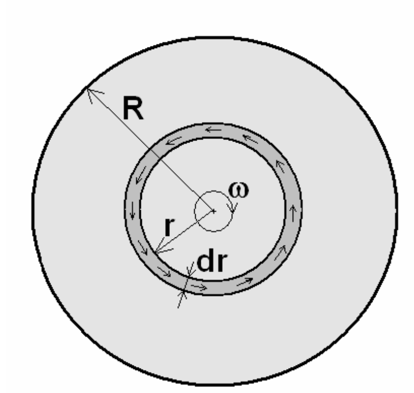
**7. V homogeno okroglo ploščo s polmerom R simetrično izvrtamo štiri okrogle odprtine s polmerom r. Središča odprtin so v razdalji d od središča plošče. Izračunajmo vztrajnostni moment plošče za vrtenje okrog pravokotne osi skozi središče.**




Označimo površinsko gostoto plošče (dm/dS) z $\mu$. Polna plošča brez izvrtin ima maso $m_0 = \mu\pi R^2$. Masa dela plošče, ki smo ga pri vrtanju ene izvrtine odstranili, je enaka $m' = \mu\pi r^2$. Masa plošče, katere vztrajnostni moment iščemo, je enaka $m = m_0 - 4m' = \mu\pi(R^2 - 4r^2)$. Vztrajnostni moment polne plošče je enak $J_0 = m_0R^2/2 = \mu\pi R^4/2$. Vztrajnostni moment dela plošče, ki smo ga pri eni izvrtini odstranili, je za vrtenje okrog iste osi enak $J' = m'r^2/2 + m'd^2 = \mu\pi r^2(r^2/2 + d^2)$. Pri izračunu vztrajnostnega momenta J plošče z izvrtinami upoštevamo aditivnost vztrajnostnega momenta: $J = J_0 - 4J' = \dfrac{m(R^4 - 4r^4 - 8r^2d^2)}{2(R^2 - 4r^2)}$.

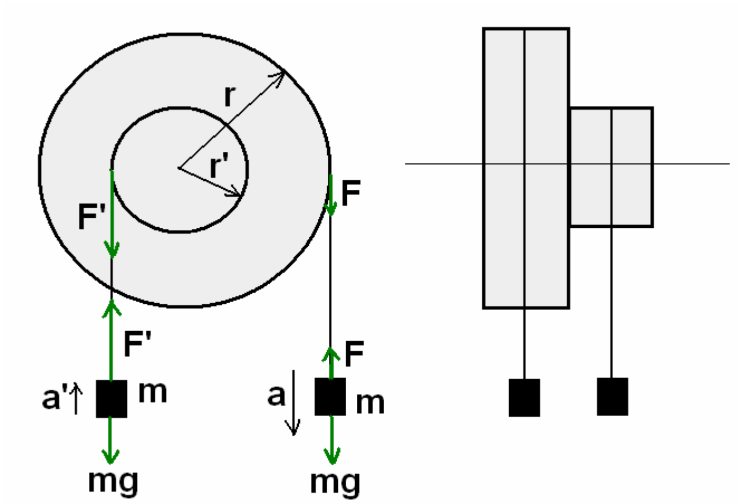
**8. Valj z maso m in polmerom R se vrti okrog svoje osi na hrapavi vodoravni podlagi. Os vrtenja je navpična, koeficient trenja med valjem in podlago je $k_t$, kotna hitrost v začetku opazovanja pa je enaka $\omega$. Čez koliko časa se vrtenje valja ustavi?**

Valj ustavlja navor trenja, Trenje je ploskovno porazdeljena sila.



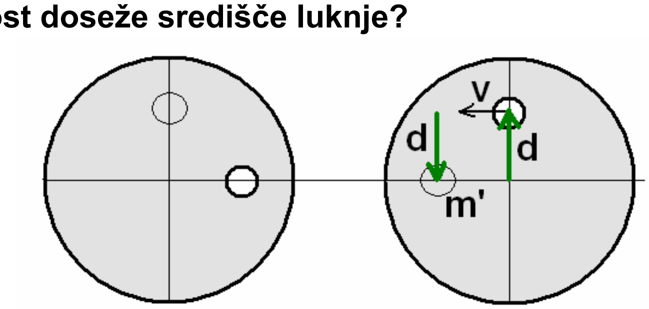

Navor trenja $dM_t$, ki prijemlje na označenem kolobarju z notranjim polmerom r in širino dr je kar enak produktu celotnega trenja $dF_t$, ki prijemlje na označenem kolobarju, $dF_t = k_t mg(2\pi r dr/\pi R^2)$ in polmera kolobarja r: $dM_t = (2k_t mg/R^2)r^2dr$. Z integracijo dobimo celotni navor trenja: $M_t = 2k_t mgR/3$. Iz enačbe $Mt = -J\alpha$ dobimo kotni pospešek $\alpha$: $\alpha = -4k_t g/3R$. Čas ustavljanja t je enak : $t = -\omega/\alpha = 3\omega R/4k_t g$.

**9.Okrog dvojnega kolesa, ki je vrtljivo okrog vodoravne osi, sta naviti dve lahki vrvici. Ena vrvica je navita okrog kolesa s polmerom r, druga pa okrog kolesa s polmerom r'. Na vrvici obesimo uteži z enako maso m. Dvojno kolo ima vztrajnostni moment J. S kakšnim pospeškom se gibljeta uteži, ko ju spustimo?**



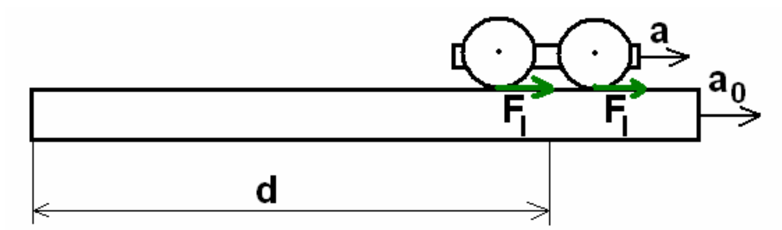

Za gibanje uteži zapišemo drugi Newtonov zakon: mg – F = ma in F' – mg = ma'. Analogno enačbo zapišemo za vrtenje kolesa: M – M' = Fr – F'r' = J$\alpha$. Pospeška uteži a in a' sta tangentna pospeška pri polmerih r in r': a = r$\alpha$, a' = r'$\alpha$. Iz zapisanih enačb izračunamo kotni pospešek $\alpha$, $\alpha = mg(r-r')/(J+mr^2+mr'^2)$ in pospeška uteži.

**10.V okroglo ploščo s polmerom R, ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi središče, izvrtamo luknjo s polmerom r v razdalji d od osi. Ploščo držimo v taki legi, da je središče luknje v višini osi, potem pa spustimo. Kolikšno največjo hitrost doseže središče luknje?**




Hitrost središča luknje je največja, ko je luknja navpično nad osjo torej, ko se plošča zasuka za $90^0$ iz začetne lege. Pri tem je sprememba potencialne energije plošče enaka $\Delta W_p$ = m'gd. Z m' smo označili maso dela plošče, ki smo ga odstranili pri vrtanju. Sprememba kinetične energije je pri tem $\Delta W_k = J\omega^2/2$. Označimo površinsko gostoto plošče z $\mu$, $\mu$ = dm/dS. Masa m' je enaka $m' = \mu\pi r^2$, vztrajnostni moment pa $J = (\mu\pi/2)(R^4 - 2r^2d^2 - r^4)$. Iz zakona o ohranitvi energije izračunamo $v = \omega d = \sqrt{\dfrac{4r^2d^3g}{R^4 - 2r^2d^2 - r^4}}$.

**11.Ravna plošča leži na vodoravni podlagi. Na plošči je voziček s štirimi enakimi kolesi. Celotna masa vozička je m = 1kg, vztrajnostni moment enega kolesa J = 2 $10^{-4}$ $kgm^2$, polmer kolesa pa r = 4cm. Ploščo začnemo vleči s pospeškom $a_0$ = 2,4 $m/s^2$ v smeri orientacije vozička. Kdaj in kje pade voziček s plošče, če je začetna oddaljenast vozička od roba plošče d = 0,5 m?**

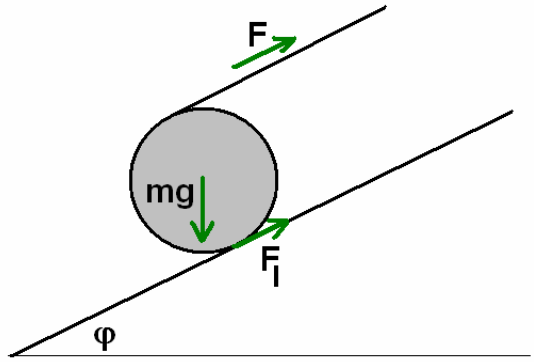



Na vsako od koles vozička deluje plošča s silo lepenja $F_l$, skupna sila je torej $4F_l$, kar je enako produktu mase in pospeška vozička a, ki ga izmeri zunanji opazovalec: $4F_l = ma$. Navor sile $F_l$ povzroči pospešeno vrtenje kolesa: $F_l r = J\alpha$. Povezati je treba še a in $\alpha$. Točka na kolesu, ki je v stiku s ploščo, miruje glede na ploščo. S stališča zunanjega opazovalca je hitrost plošče ob času t enaka $a_0$t. Hitrost težišča vozička je istočasno enaka at, kotna hitrost koles pa $\alpha$t. Kolesa se vrtijo nazaj glede na ploščo, zato ima obodna hitrost točke na kolesu, ki je v stiku s podlago,$v = r\alpha t$, isto smer kot hitrost težišča vozička. Za zunanjega opazovalca je hitrost te točke $v = at + r\alpha t$ in ta hitrost je seveda enaka $a_0$t. Velja torej $a_0 = a + r\alpha$. Če opazujemo voziček s plošče, se giblje nazaj s pospeškom $a_0 – a$. Ta pospešek pa je enak tangentnemu pospešku na obodu koles r$\alpha$. Zveza med pospeški je seveda enaka. Enačb je dovolj, da izračunamo pospešek vozička za zunanjega opazovalca: $a = a_0 \dfrac{4J}{4J + mr^2}$. V našem primeru je a = 0,8 $m/s^2$.

Voziček pade s plošče ob času t, ki je podan z enačbo $a_0t^2/2 – at^2/2 = d$. Tedaj je pot, ki jo opravi plošča, ravno za d večja od poti, ki jo opravi voziček. Čas t je enak $t = 0,79$ *s*. V tem času se plošča premakne za $s_0 = a_0t^2/2 = 0,75$ *m*, voziček pa za $s = at^2/2 = 0,25$ *m*.

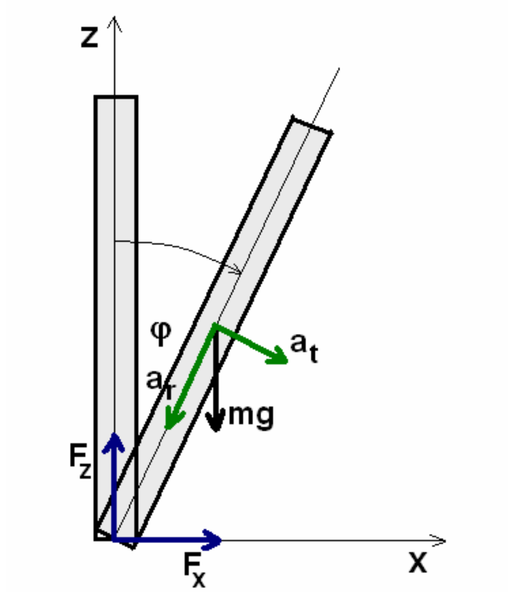
*Dobljeno enačbo za pospešek vozička lahko uporabimo za izračun pospeška drugačnih teles ali sistemov. V enačbi izraz 4J nadomestimo s celotnim vztrajnostnim momentom, m pa predstavlja celotno maso. Če je na plošči na primer homogena krogla, je njen vztrajnostni moment enak $2mr^2/5$, pospešek pa $a = 2a_0/7$.

**12. Okrog valjastega predmeta z maso m, polmerom r in vztrajnostnim momentom J, ki ima težišče na osi, navijemo vrv in ga vlečemo s silo F navzgor po klancu z nagibom $\varphi$, kot kaže slika. Telo se po klancu kotali in ne spodrsava. Kolikšen je pospešek telesa? Kolikšna je sila lepenja? Izračunajmo še najmanjšo silo F, ki je potrebna, da kotalimo predmet po klancu navzgor.**




Zapišimo najprej izrek o gibanju težišča: $F + F_l - mg\sin\varphi = ma$. Nato še enačbo za vretnje okrog osi skozi težišče: $Fr - F_l r = J\alpha$. Ker se telo kotali brez spodrsavanja velja še $a = r\alpha$. Enačb je dovolj za izračun pospeška in sile lepenja. Rezultata sta: $a = \dfrac{r^2(2F - mg\sin\varphi)}{mr^2 + J}$, $\quad F_l = \dfrac{(mr^2 - J)F + Jmg\sin\varphi}{mr^2 + J}$. Najmanjša sila, ki je potrebna, da kotalimo predmet po klancu navzgor, je sila, ki ustreza $a = 0$, to je $F = (mg/2)\sin\varphi$.

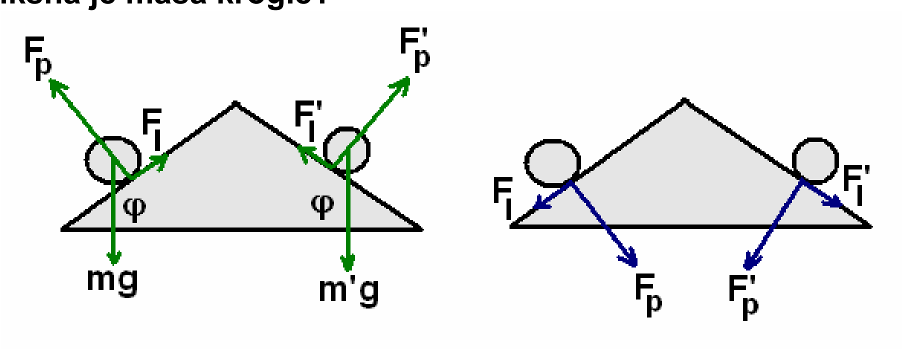
**13. Palica z dolžino l in maso m je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi eno krajišče. Palico držimo v navpični legi nad osjo, potem pa spustimo. Kako je sila osi na palico odvisna od zasuka palice φ iz začetne lege? Kolikšna je sila osi na palico, ko je palica vodoravna?**




Ko se palica zasuka za kot $\varphi$, se ji potencialna energija zmanjša za $\Delta W_p = mg(l/2)(1-\cos\varphi)$, kinetična energija pa zraste na vrednost $J\omega^2/2 = (ml^2/3)\omega^2/2 = mg(l/2)(1-\cos\varphi)$, iz česar sledi: $\omega^2 = (3g/l)(1-\cos\varphi)$. Radialni pospešek težišča je tedaj enak $a_r = \omega^2 l/2 = (3g/2)(1-\cos\varphi)$. Pri istem zasuku je navor na palico $M = mg(l/2)\sin\varphi = J\alpha = (ml^2/3)\alpha$. Tangenti pospešek težišča $a_t$ je enak $a_t = (l/2)\alpha =$

(3g/4)sin$\varphi$. Projekcija pospeška težišča palice na vodoravno os x je enaka $a_x$ = $a_t\cos\varphi - a_r\sin\varphi$ = (3g/4)sin$\varphi$(3cos$\varphi$ –2). Projekcija pospeška težišča na navpično os z je enaka $a_z = -a_t\sin\varphi - a_r\cos\varphi = -(3g/4)(1 + 2\cos\varphi - 3\cos^2\varphi)$. Silo osi na palico zapišemo s pomočjo projekcij $F_x$ in $F_y$ in uporabimo izrek o gibanju težišča: $F_x = ma_x$= (3mg/4)sin$\varphi$(3cos$\varphi$-2). V navpični smeri velja $F_z - mg = ma_z$ in iz tega $F_z = \frac{mg}{4}(1-3\cos\varphi)^2$. Ko je palica vodoravna, je $\varphi = \pi/2$, projekciji sile pa sta enaki $F_x = -3mg/2$ in $F_z = mg/4$.

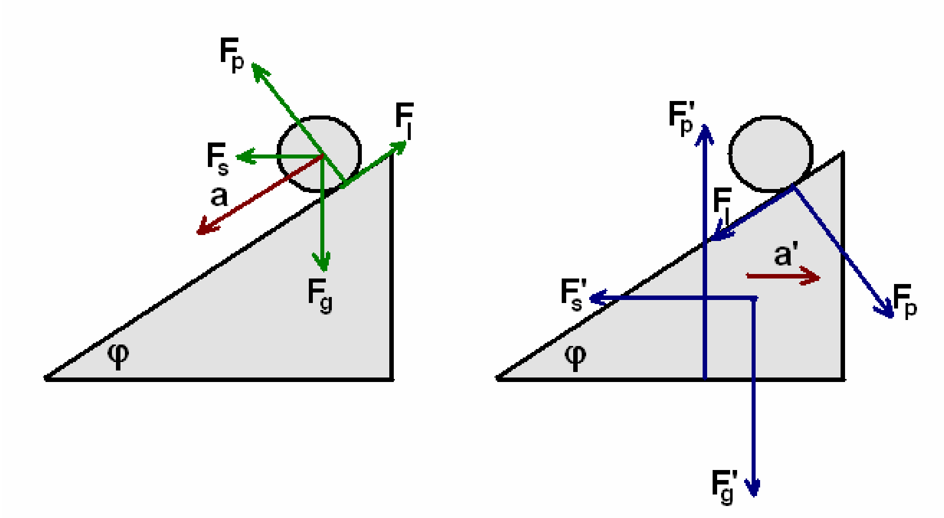
**14. Simetričen dvojni klanec z nagibom $\varphi$ leži na vodoravni gladki podlagi. Nanj hkrati položimo na eno stran valj z maso m, na drugo stran pa kroglo z maso m'. Ko se telesi zakotalita po klancu navzdol, klanec obmiruje. Kolikšna je masa krogle?**




Klanec obmiruje, če je vsota sil, ki delujejo nanj v vodoravni smeri, enaka nič. Zapišimo najprej enačbi gibanja za valj, mgsin$\varphi$ – $F_l$ = ma; $F_l r = J\alpha$ in zvezo, ki velja pri kotaljenju: a = r$\alpha$. Iz enačb izračunamo silo lepenja:
$F_l = \frac{J}{J+mr^2}mg\sin\varphi = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$. Iz ravnovesja sil pravokotno na klanec dobimo $F_p$ = mgcos$\varphi$. Podoben račun naredimo še za kroglo in dobimo $F_p'$ = m'gcos$\varphi$ ter $F_l' = \frac{J'}{J'+m'r'^2}m'g\sin\varphi = \frac{2}{7}m'g\sin\varphi$. Sile obeh teles, ki delujejo na klanec so narisane na desni sliki. Vsota sil v vodoravni smeri je nič: $F_p\sin\varphi - F_l\cos\varphi - F_p'\sin\varphi + F_l'\cos\varphi = 0$. Vstavimo prej zapisane izraze za $F_p$, $F_p'$, $F_l$ in $F_l'$ pa dobimo m' = 14m/15.

* V splošnem primeru, ko je na levi simetrično telo z maso m, polmerom r in vztrajnostnim momentom J, na desni pa simetrično telo z maso m', polmerom r' in vztrajnostnim momentom J' , dobimo zvezo: $m - m' = \frac{J}{J+mr^2}m - \frac{J'}{J'+m'r'^2}m'$.

**15. Na vodoravni gladki podlagi miruje klanec z nagibom $\varphi$ in maso M. Z vrha klanca spustimo valj z maso m. Dolžina klanca je s. V kolikšnem času pride valj do konca klanca? Za koliko se v tem času premakne klanec?**

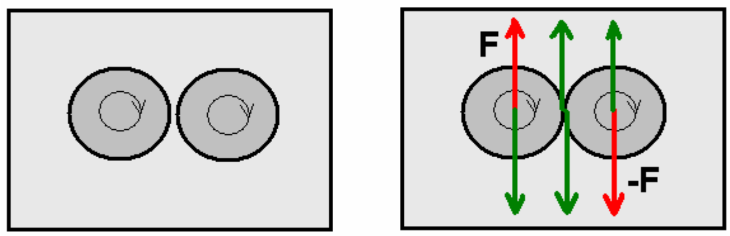



Gibanje opazujemo v sistemu (neinercialnem!) , v katerem klanec miruje. Na levi sliki so narisane sile, ki delujejo na valj, na desni sliki pa sile, ki delujejo na klanec. Z indeksom s sta označeni sistemski sili.

Najprej si oglejmo klanec. V izbranem opazovalnem sistemu klanec miruje, zato je vsota sil, ki so narisane na desni sliki, vključno s sistemsko enaka nič. Ker je klanec na gladki podlagi, nas sile v navpični smeri ne zanimajo. Vsota sil v vodoravni smeri je enaka nič: $F_p\sin\varphi - F_l\cos\varphi - F_s' = 0$. Tu je sistemska sila Fs' po velikosti enaka $F_s' = Ma'$, pri čemer je a' pospešek klanca za mirujočega opazovalca. Za valj zapišemo najprej izrek o gibanju težišča: $F_s\cos\varphi + F_g\sin\varphi - F_l = ma$. Tu je sistemska sila $F_s$ po velikosti enaka $F_s = ma'$. Sledi enačba za vrtenje okrog osi skozi težišče: $F_l r = J\alpha$ in pogoj za ravnovesje sil v smeri , ki je pravokotna na klanec: $F_p + F_s\sin\varphi - F_g\cos\varphi = 0$. Ker valj ob klancu ne spodrsava, velja še $a = r\alpha$. Iz zapisanih enačb izračunamo pospešek valja v sistemu, v katerem klanec miruje: $a = \dfrac{g\sin\varphi}{1+(J/mr^2)-[m/(M+m)]\cos^2\varphi}$ in pospešek klanca za mirujočega opazovalca $a' = \left(\dfrac{m}{M+m}\right)\dfrac{g\sin\varphi\cos\varphi}{1+(J/mr^2)-[m/(M+m)]\cos^2\varphi}$. Iz dobljenih pospeškov izračunamo čas t, v katerem pride valj do vznožja klanca: $t = \sqrt{2s/a}$ in premik klanca s' v tem času: $s' = a't^2/2 = sa'/a$.

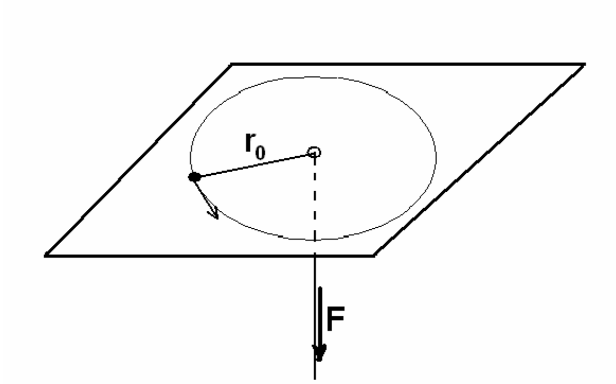
* Za zaključek zapišimo še pospešek valja za mirujočega opazovalca. V vodoravi smeri, imenujmo jo x, je enak $a_x = a\cos\varphi - a' = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\dfrac{g\sin\varphi\cos\varphi}{1+(J/mr^2)-[m/(M+m)]\cos^2\varphi}$. Projekcija pospeška valja na os y, ki kaže navpično navzdol, je enaka $a_y = a\sin\varphi$, kot $\vartheta$ med smerjo gibanja valja in vodoravno ravnino pa podaja enačba $\mathrm{tg}\vartheta = a_y/a_x = (M+m)\mathrm{tg}\varphi/M$.

**16. Na gladki vodoravni površini je plošča, na keteri se z enako kotno hitrostjo $\omega_0$ okrog svojih osi vrtita dva enaka, malo razmaknjena valja s polmerom r in maso m. Osi vrtenja sta navpični. Osi vrtenja približamo. Valja se stakneta in na stiku pride do medsebojnega trenja. Pri tem se vrtenje valjev okrog svojih osi ustavi. Vzemimo, da se valja stakneta nad težiščem plošče. S kakšno kotno hitrostjo se vrti plošča potem, ko se vrtenje valjev ustavi? Vztrajnostni moment plošče naj bo J.**



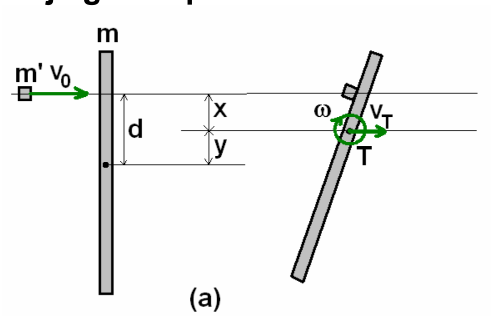

Kaj se zgodi, je prikazano na desni sliki. Zeleno so narisane sile na valja, rdeče pa sili valjev na osi F in -F. Dvojica sil, s katero delujeta valja na osi, povzroči vrtenje plošče in valjev na njej okrog navpične osi skozi težišče. Opazovani sistem naj predstavlja plošča skupaj z valjema. Nas ta sistem ne deluje noben zunanji navor, zato se vrtilna količina ohranja. Vrtilno količino valjev prevzame plošča z valjema, ki mirujeta glede na ploščo. Pred stikom valjev je bila vrtilna količina sistema $\Gamma = mr^2\omega_0$. Ko se vrtenje valjev okrog lastnih osi ustavi, je vrtilna količina sistema, ki se vrti okrog osi skozi težišče s kotno hitrostjo $\omega$, enaka $\Gamma = (J + 3mr^2)\omega$. Zaradi ohranitve vrtilne količine velja $\omega = \omega_0 \dfrac{mr^2}{J + 3mr^2}$. Ko je vztrajnostni moment plošče zanemarljiv v primerjavi z $mr^2$ dobimo $\omega = \omega_0/3$. V primeru, ko je vztrajnostni moment plošče velik v primerjavi z $mr^2$ je kotna hitrost vrtenja sistema na koncu majhna in pri ne dovolj tehtnem premisleku lahko pridemo do napačnega sklepa, da se vrtilna količina ne ohranja.

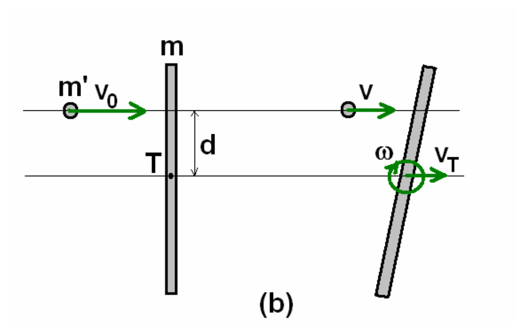
**17. Na vrvico pritrjena utež kroži s kotno hitrostjo $\omega_0$ na vodoravni gladki plošči. Polmer kroženja je enak $r_0$. Vrvica je napeljana skozi luknjico v plošči. Vrvico počasi vlečemo in pri tem zmanjšamo polmer kroženja na r. S kolikšno kotno hitrostjo $\omega$ kroži utež? Kolikšno delo pri tem opravimo?**




Na utež ne deluje noben zunanji navor, zato se vrtilna količina ohranja: $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$. Kotna hitrost je enaka $\omega = \omega_0(r_0/r)^2$. Pri tem se spremeni tudi kinetična energija uteži. V začetku je enaka $W_0 = mr_0^2\omega_0^2/2$, na koncu pa $W = mr^2\omega^2/2 = W_0(r_0/r)^2$. Opravljeno delo je enako $A = W - W_0 = W_0[(r_0/r)^2 - 1]$.

**18. Na vodoravni gladki plošči leži palica z dolžino l in maso m. V palico v razdalji d od težišča pravokotno trči majhno telo z maso m', ki se giblje s hitrostjo $v_0$. Obravnavali boma (a) neprožni trk, pri katerem se telo zlepi s palico in (b) idealno prožni trk, po katerem se telo giblje po isti premici, kot se je gibalo pred trkom.**




Oglejmo si najprej primer (a). Sistem predstavljata obe telesi skupaj. Vsota zunanjih sil in navorov, ki delujejo na sistem je nič, zato se ohranjata gibalna in vrtilna količina. Gibalna količina pred trkom je $G = m'v_0$, po trku pa $G = (m+m')v_T$, pri čemer je $v_T$ hitrost gibanja težišča sistema enaka $v_T = m'v_0/(m+m')$. Vrtilno količino bomo računali glede na točko na premici, po kateri se giblje težišče sistema. Pred trkom je vrtilna količina enaka $\Gamma = m'v_0x$, pri čemer je $x = md/(m+m')$. Po trku je vrtilna količina enaka $\Gamma = J\omega$, pri čemer je $J = m'x^2+my^2+J_0$. Tu sta $y = m'd/(m+m')$ in $J_0 = ml^2/12$. Če smo zelo natančni, moramo k vztrajnostnemu momentu prišteti še vztrajnostni moment J' pri vrtenju majhnega telesa okrog osi skozi njegovo težišče, ki smo ga tu zanemarili. Kotna hitrost vrtenja sistema okrog težišča je enaka $\omega = \dfrac{mm'd}{J_0(m+m')+mm'd^2}v_0$. V mejnem primeru, ko je $m'<<m$ (z zračno puško ustrelimo v desko na ledu), približno velja $v_T =(m'/m)v_0$ in $\omega = (m'd/J_0)v_0$. V nasprotnem primeru, ko je m'>>m (skočimo na lahko desko na ledu), dobimo iz gornjih enačb $v_T = v_0$ in $\omega = mdv_0/(J_0+md^2)$.

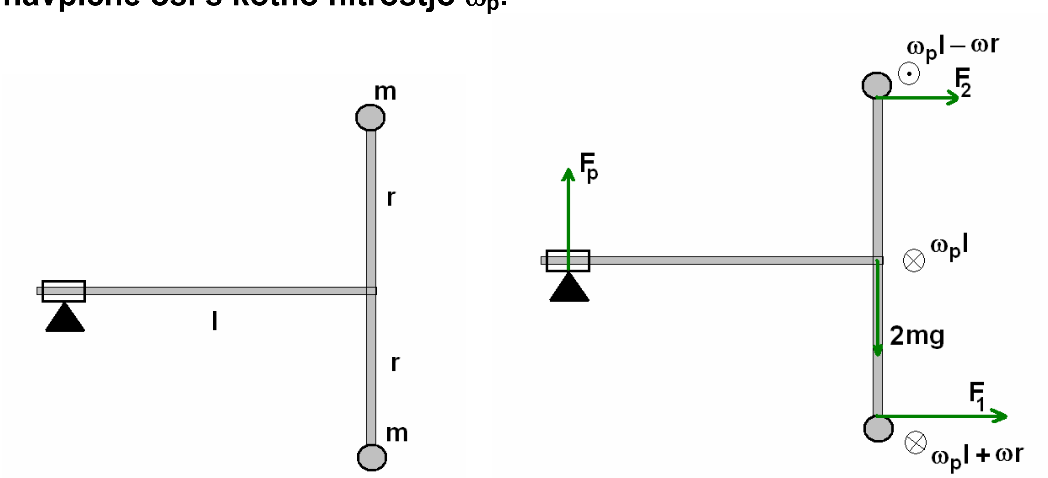
Zadnji rezultat je napačen, saj bi še pri zelo majhni masi m dobili znatno kotno hitrost vrtenja, ki ga v začetku ni bilo. V tem mejnem primeru dimenzij telesa z maso m' in z njimi povezanega vztrajnostnega momenta J' ne smemo zanemariti.

Tudi v primeru (b) se gibalna količina in vrtilna količina ohranjata. Gibalna količina pred trkom je $G = m'v_0$, po trku pa $G = m'v + mv_T$. Tu je $v_T$ hitrost gibanja težišča palice. Vrtilno količino računamo glede na točko na premici, po kateri se giblje težišče palice. Pred trkom je vrtilna količina enaka $\Gamma = m'v_0 d$, po trku pa $\Gamma = m'vd + J_0\omega$. Ohranja se še kinetična energija: $m'v_0^2/2 = m'v^2/2 + mv_T^2/2 + J_0\omega^2/2$.

Iz zapisanih enačb dobimo: $v = \dfrac{mm'd^2 - J_0(m - m')}{mm'd^2 + J_0(m + m')}v_0$,

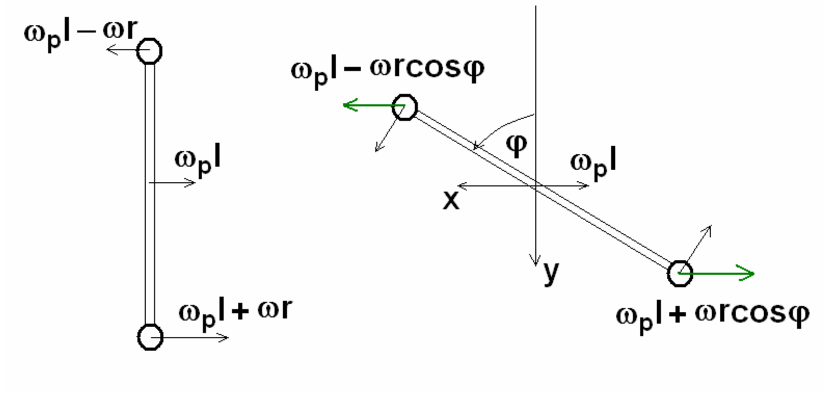
$v_T = \dfrac{2m'J_0}{mm'd^2 + J_0(m + m')}v_0$ in $\omega = \dfrac{2mm'd}{mm'd^2 + J_0(m + m')}v_0$. Kot zanimivost lahko izračunamo še, kolikšna mora biti masa m', da se telo po prožnem trku s palico ustavi (v = 0). Velja $m' = \dfrac{J_0}{J_0 + md^2}m$. Pri trku v sredino palice (d = 0) se telo ustavi, ko je m' = m, podobno kot pri trku »točkastih« teles. Z naraščajpčo oddaljenostjo od sredine d se masa m' manjša.

**19. Precesijo vrtavke ponavadi opišemo z enačbo $\vec{M} = d\vec{\Gamma}/dt$, o podrobnostih navora, ki uravnoteži navor teže pa se ne sprašujemo. Ogledali si bomo preprosto vrtavko, ki jo sestavljata dve enaki majhni telesi z maso m na ogrodju zanemarljive mase, ki se vrtita okrog simetrijske osi v vodoravni ravnini s kotno hitrostjo ω, hkrati pa se celo telo vrti okrog navpične osi s kotno hitrostjo $\omega_p$.**




Oglejmo si telo v trenutku, ko je zveznica mas navpična, kot je prikazano na sliki. Točka na sredi med telesoma se giblje po krožnici s polmerom l s hitrostjo $\omega_p l$. Spodnje telo se giblje v isti smeri s hitrostjo $\omega r + \omega_p l$, zgornje telo pa v nasprotni smeri s hitrostjo, ki je po velikosti enaka $\omega r - \omega_p l$. Na desni sliki so narisane sile, ki delujejo na ogrodje vrtavke. Sila $F_1$ je enaka $F_1 = m(\omega r + \omega_p l)^2/l$, sila $F_2$ pa $F_2$ =

$m(\omega r - \omega_p l)^2/l$. Vsota navorov glede na podporo je enaka $M = 2mgl + F_2 r - F_1 r = 2mgl - 4m\omega\omega_p r^2$. Oglejmo si še splošno orientacijo vrtavke.




Leva slika kaže prej opisano situacijo, če gledamo vrtavko vzdolž osi. Desna slika kaže situacijo, ko se vrtavka zasuka za kot $\varphi$. Pri tem se spremenita obodni hitrosti obeh teles pri kroženju okrog podpore in s tem sili $F_1$ in $F_2$. Njun navor je po velikosti enak $4m\omega\omega_p r^2\cos\varphi$, ne kaže pa več v smeri osi x, ampak oklepa z osjo x kot $\varphi$. Projekcija navorov vseh sil, vključno s težo, na os x je enaka $M_x = 4m\omega\omega_p r^2\cos^2\varphi - 2mgl$, projekcija navorov vseh sil na os y pa je enaka $M_y = 4m\omega\omega_p r^2\sin\varphi\cos\varphi$. Upoštevajmo še, da je kotna hitrost $\omega$ velika in se zato $\varphi = \omega t$ hitro spreminja s časom. Zato računamo s povprečnimi navori. V časovnem povprečju je $\cos^2\varphi$ enak ½, $\sin\varphi\cos\varphi$ pa nič. Projekcija navora $M_x$ je v časovnem povprečju enaka $M_x = 2m\omega\omega_p r^2 - 2mgl$, projekcija $M_y$ pa nič. Kotna hitrost precesije $\omega_p$, pri kateri je $Mx=0$ in os vrtavke ostaja vodoravna, je enaka $\omega_p = gl/\omega r^2$. Zapišimo to v bolj znani obliki. Vrtilna količina vrtavke je $\Gamma = 2mr^2\omega$, navor teže pa $M_g = 2mgl$. Kotna hitrost precesije je torej enaka $\omega_p = M_g/\Gamma$.
*S časovnim povprečjem ni treba delati, če vzamemo vrtavko bolj simetrične oblike. Zadoščajo že štiri majhna telesa z enakimi masami m v ogliščih kvadrata, os vrtavke pa poteka v pravokotni smeri skozi središče kvadrata. Telo lahko obravnavamo kot dve prej obravnavani telese, ki sta drugo proti drugemu zasukani za kot $\pi/2$. Ko je veznica enega para teles zasukana proti navpičnici za kot $\varphi$, je veznica drugega para zasukana proti navpičnici za kot $\varphi+\pi/2$. Projekcija navora $M_x$ je enaka: $M_x = 4m\omega\omega_p r^2\cos^2\varphi + 4m\omega\omega_p r^2\sin^2\varphi - 4mgl = 4m\omega\omega_p r^2 - 4mgl$, projekcija navora $M_y$ pa je enaka nič neodvisno od orientacije vrtavke.