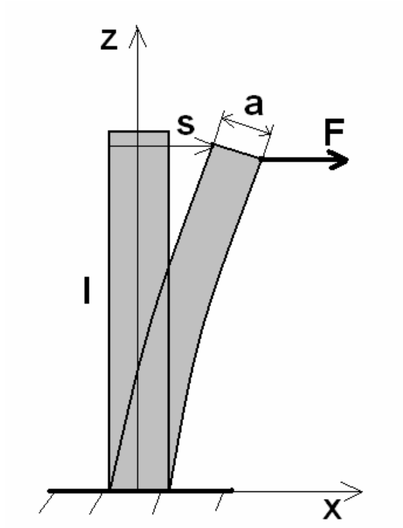
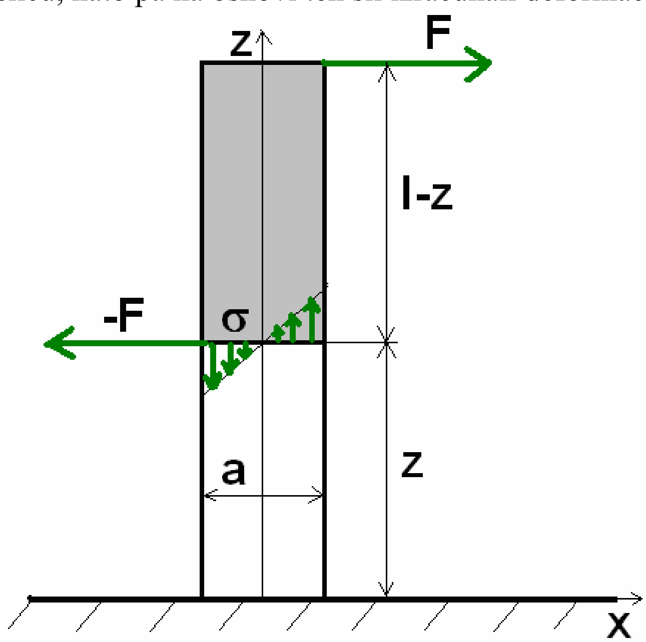
1. Vijačno vzmet s koeficientom k in dolžino l razrežemo na tri enake krajše vzmeti z dolžino l' = l/3. Kolikšen je koeficient k' krajše vzmeti?

Nerazrezano vzmet si lahko predstavljamo kot tri zaporedno zvezane krajše vzmeti. Pod vplivom sile F se daljša vzmet raztegne za $s = F/k$, vsaka od krajših vzmeti pa za $s' = F/k'$. Skupni raztezek vseh treh krajših vzmeti $3s'$ je seveda enak s, $3F/k' = F/k$, iz česar sledi $k' = 3k$.

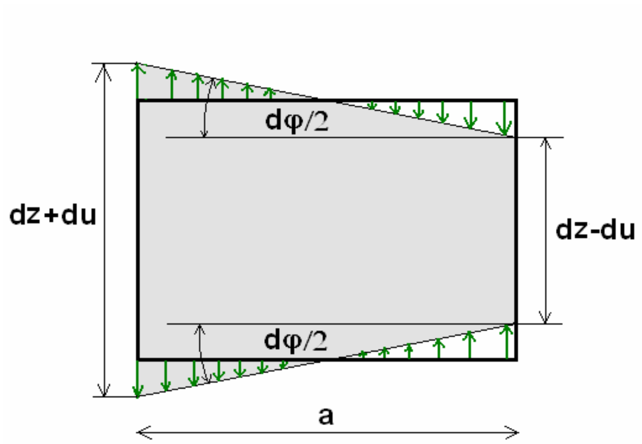
2. Prožen nosilec (na primer kovinski trak) ima pravokotni presek s stranicama a in b in dolžino l. Nosilec je vpet na eni strani. Na drugo stran deluje prečna sila F. Za koliko se upogne nosilec?



Računali bomo za primer, ko je upogib s dosti manjši od dolžine l. Najprej bomo poiskali sile pri togem nosilcu, nato pa na osnovi teh sil izračunali deformacijo prožnega nosilca.



Osenčeni del nosilca miruje, zato je vsota sil in vsota navorov enaka nič. Nanj deluje neosenčeni del nosilca s prečno silo –F in z vzdolžno ploskovno prazdeljeno silo, ki jo opišemo s ploskovno gostoto sile $\sigma = dF/dS$. Navor dvojice sil F in –F, $M = F(l-z)$, kompenzira navor ploskovno porazdeljene sile: $M = \int \sigma\, x dS = \int_{-a/2}^{a/2} b\sigma\, x dx$. Za ploskovno porazdeljeno silo predpostavimo, da se linearno spreminja vzdolž osi x: $\sigma = \sigma_0(2x/a)$. Pri tem dobimo $M = ba^2\sigma_0/6$ in ob izenačitvi navorov $\sigma_0 = 6F(l-z)/ba^2$. Vzdolžna napetost σ_0 mejnih plasti pri $x = \pm a/2$ se spreminja vzdolž osi z. Največja je ob pritrdišču ($z = 0$), nič pa pri vrhu ($z = l$). V prožnem materialu vzdolžna napetost σ povzroči vzdolžno deformacijo: $\sigma = E\Delta l/l$. Vzemimo del nosilca dolžine dz. Ko ni deformacije sta mejni ploskvi vzporedni. Zaradi vzdolžne napetosti se leva stran kvadra podaljša za du, desna pa skrajša za du, pri čemer je $du = (\sigma_0/E)dz$. Kot med mejnima ploskvama postane enak $d\varphi = 2du/a$,

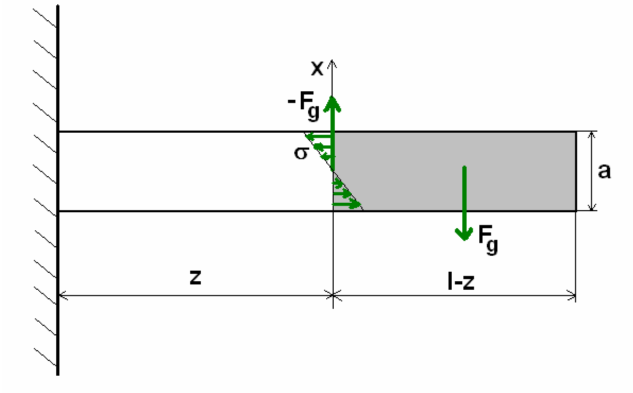


V razdalji z od pritrdišča je kot nagiba nosilca φ enak $\varphi = \int d\varphi = \int_0^z \frac{2\sigma_0}{aE} dz = \frac{6F}{Eba^3}\left[l^2 - (l-z)^2\right]$. V aproksimaciji majhnih kotov je prečni premik nosilca pri koordinati z, s(z), enak $s(z) = \int_0^l \varphi\, dz = \frac{2F}{Eba^3}(3lz^2 - z^3)$. Premik vrha nosilca $s = s(l)$ je enak $s = 4Fl^3/Eba^3$. Enačbo lahko prepišemo tudi v obliki $F = ks$, kjer jer prožnostna konstanta nosilca k enaka: $k = \frac{Eb}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^3$. Zanimivo je, da je konstanta k odvisna samo od razmerja a/l, ne pa od njunih velikosti.

*V mikroskopu na atomsko silo uporabljajo drobne silicijeve nosilce s tipično dolžino 100 μm, širino 10 μm in debelino nekaj μm. Brez težav merijo upogibe reda velikosti nm. Če upoštevamo, da je E okrog 5.10^{10} N/m^2, ustreza to sili reda velikosti nN.

3. Desko iz smrekovega lesa vodoravno vpnemo na enem koncu, drug konec pa je prost. Dolžina deske je l = 3m, debelina pa a = 2 cm. Za koliko se zaradi lastne teže povesi prosti konec deske? Prožnostni modul za vzdolžne deformacije smrekovega

lesa je E= 10^{10} N/m^2, gostota smrekovega lesa pa 500 kg/m^3. Kako dolga sme biti deska, da se v pritrdišču ne zlomi, če je meja natezne trdnosti lesa 4 10^7 N/m^2?
Postopamo podobno kot prej. Najprej si oglejmo sile pri togem nosilcu.



Na osenčeni del nosilca deluje dvojica sil F_g in $-F_g$ ter vzdolžna ploskovno porazdeljena sila. Vsota sil je nič. Zopet predpostavimo, da se napetost σ vzdolž osi x spreminja kot $\sigma = (2x/a)\sigma_0$. Iz pogoja, da je vsota navorov enaka nič,

$F_g(l-z)/2 = \int x\sigma\, dS = \frac{2\sigma_0 b}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{\sigma_0 b a^2}{6}$, izračunamo odvisnost napetosti σ_0 na mejnih ploskvah od z: $\sigma_0 = \frac{3\rho g(l-z)^2}{a}$. Z b smo označili širino nosilca.

Vrnimo se k deski. Kot φ, za katerega je deska nagnjena proti vodoravni ravnini je pri koordinati z enak: $\varphi = \int d\varphi = \int_0^z \frac{2\sigma_0}{aE} dz = \frac{2\rho\, g}{Ea^2}\left[l^3 - (l-z)^3\right]$. Deska je pri koordinati z nižja od pritrdišča za $s = \int_0^z \varphi\, dz = \frac{\rho\, g}{2Ea^2}(4l^3 z + (l-z)^4 - l^4)$. Na koncu (z=l) je deska nižja za $s = \frac{3\rho g l^4}{2Ea^2} = 15cm.$

Največjo dolžino deske, ki se še ne zlomi, izračunamo tako, da pogledamo, pri kateri dolžini deske je σ_0 v pritrdišču enaka meji natezne trdnosti. S podatki iz naloge dobimo l = 7,3 m.

*Sami lahko izračunate, za koliko se na sredi povesi vodoraven nosilec, ki je podprt na obeh koncih in ga na sredi obremenimo s silo F. Izračunate lahko tudi, pri kolikšni sili F se nosilec zlomi.Primer takega nosilca je deska, ki jo položimo čez jarek in potem stopimo na sredino deske. Zaradi enostavnosti težo nosilca zanemarite. Rezultat je $s = \frac{Fl^3}{4Eba^3}$. Tu je l razdalja med podporama, b in a pa sta prečni dimenziji nosilca. Najbolj je obremenjen nosilec na sredi, kjer je σ_0 = 3Fl/2ba^2. Nosilec se zlomi, ko σ_0 preseže mejo natezne trdnosti.

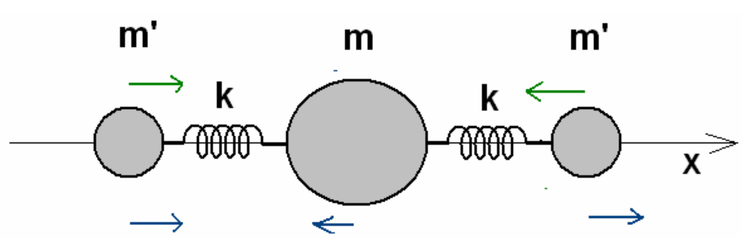
4. Ocenimo resonančno frekvenco osnovnega nihanja nosilca s pravokotnim presekom, ki je vpet na eni strani. Oznake so enake kot v zgledu 2. Gostota nosilca je enaka ρ.

Predpostavimo, da prosti konec nosilca harmonično niha z amplitudo s_0 in frekvenco ν. Za ostale dele nosilca predpostavimo, da pri osnovnem načinu nihanja nosilca nihajo z amplitudo $s_0(z)$, $s_0(z) = s_0(3lz^2 - z^3)/2l^3$ in frekvenco ν. Zvezo za $s_0(z)$ smo zapisali ob predpostavki, da je s(z) tudi pri nihanju enak kot v statičnem primeru (zgled 2). V skrajni legi je prožnostna energija nosilca enaka $W_{pr} = ks_0^2/2 = Eba^3s_0^2/8l^3$. V mirovni legi, ko je nosilec raven, je prožnostna energija nič. Tedaj je kinetična energija največja. Uporabimo zvezo $v_0 = s_0\omega$, ki velja pri harmoničnem nihanju in jo prepišimo v obliki $v_0(z) = s_0(z)\omega = s_0\omega(3lz^2-z^3)/2l^3$. Kinetična energija nosilca v mirovni legi je enaka $W_k = \int_0^l \frac{\rho v_0(z)^2}{2} ab dz = \frac{33\rho abls_0^2\omega^2}{280}$. Izenačimo največjo kinetično in največjo prožnostno energijo. Pri tem dobimo $\nu = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{35}{33}}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{a}{l^2} = 0{,}164\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{a}{l^2}$.

Pravi rezultat se od dobljenega zelo malo razlikuje, le številski faktor je enak 0,162.

* Ocenimo resonančno frekvenco silicijevega nosilca v mikroskopu na atomsko silo, ki je dolg 100 μm in debel 2 μm. Prožnostni modul silicija je $5\ 10^{10}$ N/m^2, gostota pa 2,3 kg/dm^3. S temi podatki dobimo ν ≈ 150 kHz.

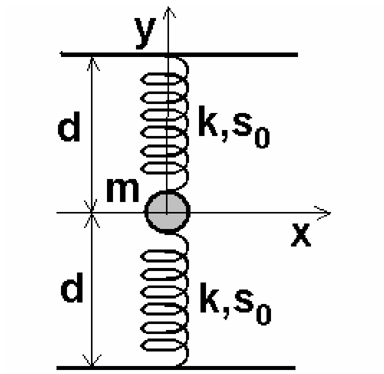
5. Izračunajmo frekvenci vzdolžnih lastnih nihanj sistema treh teles na sliki.



Sistem ima dve vzdolžni lastni nihanji, ki ju opazujemo iz težiščnega sistema. Pri prvem lastnem nihanju srednje telo miruje, krajni telesi pa se mu hkrati približujeta,ali pa se hkrati oddaljujeta od njega. S stališča enega krajnega telesa je situacija enaka, kot da bi bilo preko vzmeti pritrjeno na fiksno steno. V tem primeru je frekvenca enaka $\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}}$. Pri drugem lastnem nihanju se krajni telesi hkrati premakneta za s' v eni smeri, srednje telo pa za s v nasprotni smeri. Ker se lega težišča ohranja, velja 2m's' = ms. Zapišimo drugi Newtonov zakon za vsa tri telesa. Levo telo: $m'd^2s'/dt^2 = -k(s'+s)$. Desno telo: $m'd^2s'/dt^2 = -k(s'+s)$. Srednje telo: $md^2s/dt^2 = -2k(s'+s)$. Prvi dve enačbi sta enaki. Eno od prvih dveh

enačb in tretjo enačbo preuredimo in dobimo: $d^2(s'+s)/dt^2 = -(k/m' + 2k/m)(s'+s)$.
Dobili smo enačbo nihanja. Frekvenca tega nihanja je enaka $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, pri čemer velja $1/m = 1/m' + 2/m$. S to frekvenco nihata tudi s in s'
*Problem smo rešili z upoštevanjem simetrije sistema teles. Gibanje teles pri lastnih nihanjih smo uganili. Do enakega rezultata pridemo tudi po daljši poti. Označimo odmik desnega telesa iz mirovne lege z x_1. Odmik srednjega telesa iz mirovne lege označimo z x_2, odmik levega telesa iz mirovne lege pa z x_3. Pospeške teles označimo z a_1, a_2 in a_3. Zapišimo drugi Newtonov zakon za vsa tri telesa:
$m'a_1 = -k(x_1 - x_2)$
$ma_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3)$
$m'a_3 = k(x_2 - x_3)$.
Ker na desni strani enačb nastopata samo razliki $X = x_1 - x_2$ in $Y = x_2 - x_3$, zapišemo enačbi za X in Y:
$a_1 - a_2 = d^2X/dt^2 = -(k/m'+k/m)X + k/mY$
$a_2 - a_3 = d^2Y/dt^2 = k/mX -(k/m'+k/m)Y$.
Enačbi seštejemo oziroma odštejemo. Pri tem dobimo:
$d^2(X+Y)/dt^2 = -(k/m')(X+Y)$
$d^2(X-Y)/dt^2 = -(k/m'+2k/m)(X-Y)$.
Dobili smo dve enačbi nihanja in dve frekvenci, ki smo ju prej označili z ν_1 in ν_2. Poglejmo, kaj nam prestavlja samo rešitev prve enačbe: $X+Y = x_1 - x_3 = A\sin(\Omega_1 t+\delta_1)$. Če drugega nihanja ni, je $X - Y = x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$. Ker opazujemo sistem teles iz težiščnega opazovalnega sistema velja $m'x_1 + m'x_3 + mx_2 = 0$, saj v tem opazovalnem sistemu težišče miruje. Rešitev zadnjih dveh enačb je $x_2 = 0$ in $x_1 + x_3 = 0$. Velja torej $x_1 = -x_3 = (A/2)\sin(\Omega_1 t+\delta_1)$. Prvo in tretje telo nihata drugo proti drugemu s frekvenco ν_1, kar smo prej opisali kot prvo lastno nihanje. Sami lahko preverite, da samo rešitev druge enačbe nihanja ($X+Y=0$, $X-Y\neq0$) skupaj s pogojem, da težišče miruje, predstavlja drugo lastno nihanje, ki smo ga prej opisali.
*V resnici smo tudi tu upoštevali simetrijo sistema teles. V splošnem primeru (različne mase, različna koeficienta vzmeti) je reševanje sistema diferencialnih enačb bolj zapleteno in presega nivo Fizike I.

6. Telo z maso m leži na gladki vodoravni podlagi in je pritrjeno na dve enaki vzmeti s koeficientom k. Ko je telo v mirovni legi, je vsaka vzmet že raztegnjena za s_0. Izračunajmo frekvenco vzdolžnih in majhnih prečnih nihanj. Razdalja od telesa do pritrdišča vzmeti je d.

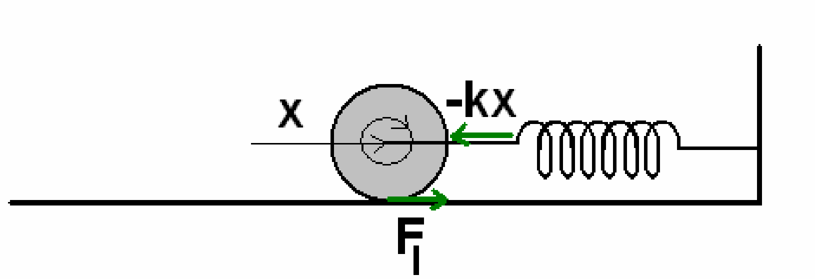


Oglejmo si najprej vzdolžna nihanja. Ko je telo izmaknjeno iz mirovne lege za y, je sila gornje vzmeti na sliki enaka $k(s_0 - y)$, sila spodnje vzmeti na sliki pa $-k(s_0 + y)$. Skupna sila je enaka -2ky. Enačba nihanja je torej $md^2y/dt^2 = -2ky$. Frekvenca vzdolžnega nihanja je $\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{2k}}$ in ni odvisna od amplitude.

Ko je telo izmaknjeno iz mirovne lege v prečni smeri za x, se vsaka od vzmeti podaljša za $\delta s = \sqrt{d^2 + x^2} - d = x^2 /(d + \sqrt{d^2 + x^2})$. Sila ene vzmeti je enaka $k(s_0+\delta s)$, sila proti mirovni legi pa $F = -2k(s_0+\delta s)\sin\varphi$, kjer je $\mathrm{tg}\varphi = x/d$. Harmonično nihanje dobimo samo pri majhnih x, ko je $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi \approx x/d$. Raztezek δs, ki je sorazmeren x^2, zanemarimo. Enačba nihanja je v tem primeru $md^2x/dt^2 = -2ks_0x/d$. Frekvenca majhnih prečnih nihanj je enaka $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{md}{2ks_0}}$.

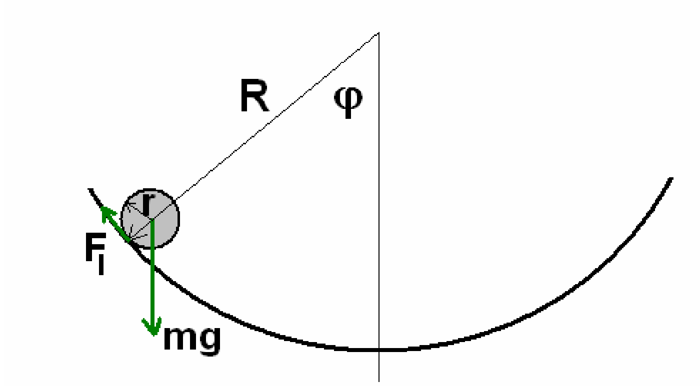
*Harmonično nihanje dobimo tudi pri zelo velikih amplitudah prečnega nihanja ($x>>d$). Tedaj je skoraj povsod $\delta s \approx x$ in $\varphi \approx \pi/2$, frekvenca nihanja pa je enaka ν_1.

7. Homogen valj s polmerom r in maso m je prosto vrtljiv okrog osi, ki poteka po osi valja. Os je preko vzmeti s koeficientom k pritrjena na steno. Podlaga je vodoravna. Valj se kotali po podlagi brez drsenja. S kolikšno frekvenco zaniha valj, ko ga izmaknemno iz mirovne lege?



Ko je težišče valja izmaknjeno iz mirovne lege za x, delujeta na valj dve sili v vodoravni smeri: sila vzmeti –kx in sila lepenja F_l. Zapišimo najprej izrek o gibanju težišča: $ma = F_l - kx$, potem pa še enačbo za vrtenje okrog osi skozi težišče: $F_l r = J\alpha$. Valj ne spodrsuje, zato velja $a = r\alpha$. Iz druge enačbe izračunamo silo lepenja in jo vstavimo v prvo enačbo. Pri tem dobimo enačbo nihanja $a + \frac{k}{m + J/r^2} x = 0$. Za valj je J = mr^2/2. Frekvenca nihanja je enaka $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

8. Tla imajo obliko dela površine valja s polmerom R. Žogo s polmerom r in maso m postavimo na mesto, ki je nad najnižjo točko tal in spustimo. Žoga se pri tem kotali po podlagi z ene na drugo stran in nazaj (kotalno nihalo). Izračunajmo nihajni čas tega nihala.



Najprej zapišimo enačbi za kotaljenje žoge: mgsinφ – F_l = ma in F_lr = Jα. Tu je a pospešek težišča žoge, α pa kotni pospešek pri vrtenju okrog težišča, ki je enak a/r, če ni spodrsavanja. Iz enačb izločimo silo lepenja in dobimo enačbo (m+J/r^2)a = mgsinφ. Težišče žoge se giblje po delu krožnice s polmerom R-r. Lego težišča na krožnici podaja kot φ. Pospešek težišča a je pravzaprav tangentni pospešek pri tem gibanju: a = (R-r)d^{2}φ/dt^2. Upoštevajmo še, da imata kot φ in kotni pospešek d^{2}φ/dt^2 nasprotno smer pa dobimo enačbo nihanja (R-r)(m+J/r^2)d^{2}φ/dt^2 + mgsinφ = 0. Enačba je podobna enačbi nihanja matematičnega ali fizičnega nihala. Harmonično nihanje dobimo, ko je kot φ majhen (sinφ ≈ φ). Nihajni čas kotalnega nihala je tedaj

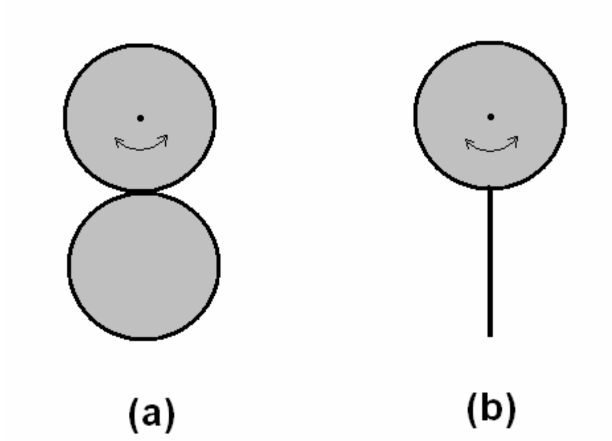
$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)(1+J/mr^2)}{g}}.$$

*Žogo si lahko približno predstavljamo kot krogelno lupino. Vztrajnostni moment krogelne lupine najlaže izračunamo z diferenciranjem izraza za vztrajnostni moment homogene krogle: J = 2mr^2/5 = 8πρr^5/15. Ko povečamo polmer krogle za dr, se vztrajnostni moment poveča za dJ = (8πρr^4/3)dr. Vztrajnostni moment tanke krogelne lupine s polmerom r in debelino dr je torej enak dJ. Masa dm te krogelne lupine je enaka dm = ρ4πr^{2}dr. Vztrajnostni moment dJ je enak dJ = (2/3)r^{2}dm. Ta izraz dokaj dobro velja tudi za krogelne lupine, ki nimajo ravno infinitezimalne debeline, če je le debelina lupine dosti manjša od polmera. Za žogo torej vzamemo J = (2/3)mr^2 in pri tem dobimo $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5(R-r)}{3g}}$.

9. Avto vozi po krožni stezi s polmerom 100 m. Hitrost avtomobila je 20 m/s. V avtu je nitno nihalo z dolžino l = 1m. Kolikšen kot oklepa nit z navpičnico, ko utež miruje? S kolikšno frekvenco zaniha nihalo, ko utež izmaknemno iz mirovne lege?

V avtu deluje na utež teža $F_g = mg$ in sistemska (centrifugalna) sila $F_c = mv^2/r$. Tangens kota α med nitjo in navpičnico je enak razmerju $F_c/F_g = v^2/rg$. Kot α je enak 22^0. Napetost niti F_v je enaka rezultanti sil $F_v = \sqrt{F_g^2 + F_c^2} = 1{,}08mg$. Ko izmaknemo utež iz mirovne lege, deluje na nihalo navor rezultante sil. Zato je nihajni čas enak $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{1{,}08g}} = 1{,}93s$. V mirujočem avtomobilu je nihajni čas istega nihala 2,01s.

10. Fizično nihalo sestavimo iz dveh enakih tankih okroglih plošč s polmerom R, ki ju pritrdimo skupaj na dva načina, kot kaže slika. Nihalo je vrtljivo okrog sredine zgornje plošče. Kolikšna sta nihajna časa v obeh primerih?



Nihajni čas fizičnega nihala je v splošnem enak $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m^* g r^*}}$. V obeh primerih je masa telesa m* enaka 2m, če z m označimo maso ene plošče. Tudi razdalja r* je v obeh primerih enaka R, saj je težišče v točki, v kateri sta plošči spojeni. Razlika je v vztrajnostnem momentu. V primeru (a) je $J = mR^2/2+mR^2/2+4mR^2 = 5mR^2$. V primeru (b) je $J = mR^2/2+mR^2/4+4mR^2 = 4{,}75\ mR^2$. Nihajna časa sta torej enaka $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{2g}}$ (a), oziroma $t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4{,}75R}{2g}}$ (b)

11. Nihanje vzmetnega nihala duši sila $F_u = -2\beta mv$ (a) oziroma $F_u = \gamma v^2$ (b). Predpostavimo, da je dušenje šibko in izračunajmo časovni potek amplitude.

Računali bomo približno. Primer (a) smo že obravnavali natančno in bo služil za to, da bomo preverili postopek. Primer (b), ki ustreza na primer zračnemu uporu, je za natančno obravnavo mnogo zahtevnejši.

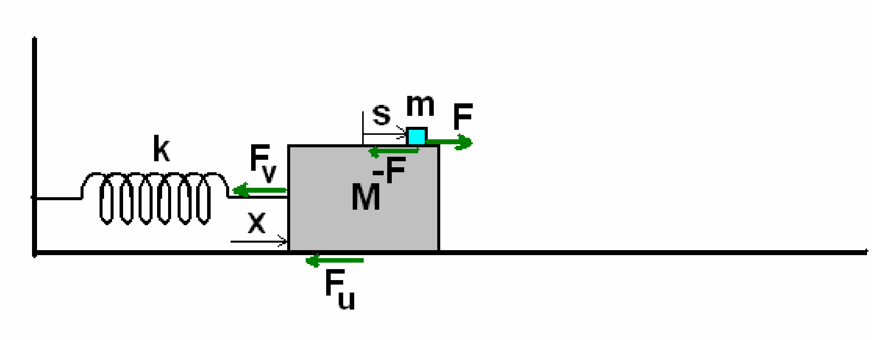
Računali bomo na naslednji način. Znotraj enega nihaja bomo predpostavili, da je nihanje nedušeno in, da velja $x = x_0\sin\Omega t$ ter $v = x_0\Omega\cos\Omega t$. Ob tej predpostavki bomo izračunali delo sile F_u v času enega nihaja:

$A = \int \vec{F}_u d\vec{s} = -\int_0^{t_0} |F_u v|\, dt$. Predpostavili bomo, da je delo A po velikosti dosti manjše od energije nihanja $W = mx_0^2\Omega^2/2$ in zapisali enačbo $dW/dt = mx_0\Omega^2 dx_0/dt = A/t_0$. Pri tem se zavedamo, da nas zanimajo spremembe energije nihanja v časih, ki so daljši od nihajnega časa t_0. Podrobnosti dogajanj pri krajših časih nas ne zanimajo.

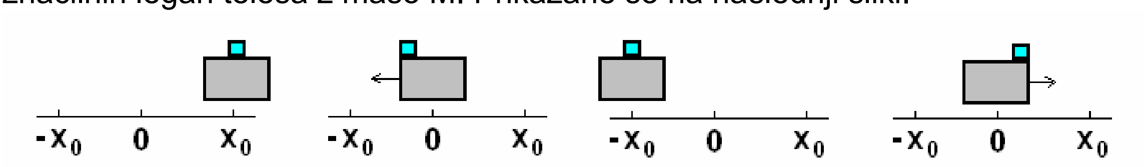
V primeru (a) je delo A enako $A = -\beta mx_0^2\Omega^2 t_0$. Ta izraz vstavimo v enačbo za časovni potek energije nihanja in dobimo enačbo $dx_0/dt = -\beta x_0$ z rešitvijo $x_0(t) = x_0(0)e^{-\beta t}$. Do enakega rezultata smo prišli tudi pri podrobnejši obravnavi dušenega nihanja v primeru, ko je upor sorazmeren hitrosti.

V primeru (b) je delo A enako $A = -(8/3)\gamma x_0^3\Omega^2$. Iz enačbe za časovni potek energije nihanja dobimo enačbo za časovni potek amplitude $\frac{dx_0}{dt} = -\frac{4\gamma\Omega}{3\pi m}x_0^2$ z rešitvijo $x_0(t) = \frac{x_0(0)}{1+\frac{4\gamma\Omega}{3\pi m}x_0(0)t}$. Ko je amplituda nihanja velika, je padanje amplitude hitro, pri manjših amplitudah pa se padanje amplitude upočasni. Čas $t_{1/2}$, v katerem pade amplituda na polovico začetne vrednosti $x_0(0)$, je enak $t_{1/2} = \frac{3\pi m}{4\gamma\Omega}\frac{1}{x_0(0)}$.

12. Vodoravno dušeno vzmetno nihalo sestoji iz vzmeti s keficientom k in telesa z maso M, ki je pritrjeno na vzmet. Na telo je pritrjeno drugo telo z maso m, ki ne miruje, ampak glede na telo z maso M sinusno niha, pri čemer je premik s drugega telesa glede na prvega enak $s = s_0\cos\omega t$. Kako v stacionarnih razmerah niha prvo telo?



Za premikanje telesa z maso m je potrebna sila F. Na telo z maso M delujejo v vodoravni smeri sila vzmeti, $F_v = -kx$, upor, $F_u = -2(M+m)\beta v$ in sila $-F$. Predpostavljamo, da je upor sorazmeren hitrosti. Zapišimo drugi Newtonov zakon za telo z maso M: $Md^2x/dt^2 = -kx - 2(M+m)\beta v - F$. Premik telesa z maso m je za mirujočega opazovalca enak x+s, nanj pa deluje v vodoravni smeri sila F, zato velja $md^2(x+s)/dt^2 = m(d^2x/dt^2 + d^2s/dt^2) = F$. Silo F, kot je izražena z drugo enačbo, vstavimo v prvo enačbo in dobimo: $(M+m)d^2x/dt^2 + 2(M+m)\beta v + kx = -md^2s/dt^2$. Enačbo delimo z M+m, imenujemo $\omega_0^2 = k/(M+m)$ in vstavimo $s = s_0\cos\omega t$ pa dobimo: $d^2x/dt^2 + 2\beta dx/dt + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$, pri čemer je $A = ms_0\omega^2/(M+m)$. Dobili smo enačbo vsiljenega nihanja. Stacionarna rešitev enačbe je $x = x_0\cos(\omega t - \phi)$, pri čemer velja $x_0 = A/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$ in $tg\phi = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Posebej si oglejmo resonanco $\omega = \omega_0$. Tedaj je amplituda nihanja enaka $x_0 = A/2\beta\omega$. Ta je pri majhnem dušenju lahko dosti večja od s_0. Faza ϕ je tedaj enaka $\pi/2$. Nihanje telesa z maso M torej zapišemo kot $x = x_0\sin\omega_0 t$, nihanje telesa z maso m pa kot $s = s_0\cos\omega_0 t$. Oglejmo si še relativno lego teles v štirih značilnih legah telesa z maso M. Prikazane so na naslednji sliki.

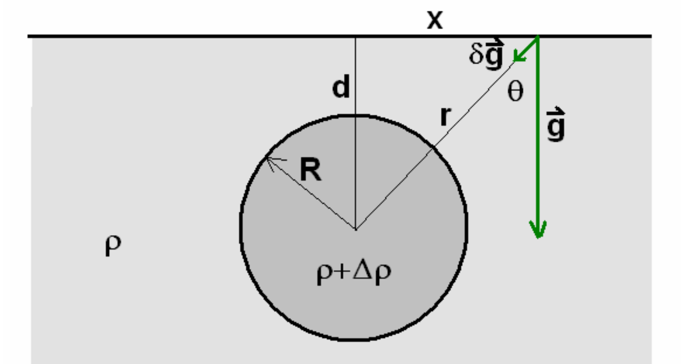


Na osnovi te slike razumemo premikanje nog pri guganju otrok.

* Pri opisanem gibanju se mehanska energija sistema povečuje in v stacionarnih razmerah ohranja, kar je posledica dela notranje sile F. Za razliko od neprožnih trkov, pri katerih je delo notranjih sil negativno in se mehanska energija pri trku zmanjša, je v navedenem primeru delo notranje sile F pozitivno in povečuje mehansko energijo sistema, dokler niso dosežene stacionarne razmere, ko je delo sile F po velikosti enako delu upora, po znaku pa nasprotno.

13. Pod zemeljsko površino je področje, kjer se gostota snovi (rude) razlikuje od gostote snovi v okolici. Vzemimo, da ima to področje obliko krogle s polmerom R = 20 m, katere središče je d = 30 m pod zemeljskim površjem. Znotraj tega področja naj bo gostota snovi za $\Delta\rho = 2$ kg/dm^3 večja od gostote

snovi v okolici. Kolikšna je sprememba težnega pospeška na zemeljski površini? Kolikšni spremembi višine ustreza največja sprememba težnega pospeška?



Predpostavili bomo, da nehomogenost v zemeljski skorji povzroči dodatek $\delta\vec{g}$ k težnemu pospešku, ki je seveda po velikosti mnogo manjši od g. Povzroči ga sprememba gostote Δρ. Po velikosti je δg enak $\delta g = \frac{\kappa \Delta m}{r^2} = \frac{\kappa \Delta\rho 4\pi R^3}{3r^2}$. Pri seštevanju »velikega« vektorja $\vec{g}$ in »majhnega« vektorja $\delta\vec{g}$ upoštevamo samo projekcijo vektorja $\delta\vec{g}$ na vektor $\vec{g}$, ki jo bomo označili z δg*, δg* = δgcosθ=δgd/r. Pravokotna projekcija vektorja $\delta\vec{g}$ nastopa v vsoti vektorjev kvadratično in jo lahko zanemarimo. Na mestu, ki je podano s koordinato x, bomo torej izmerili težni pospešek g + δg*. V točki, ki je najbliže središču krogle, pri x = 0, je δg* enak $\delta g^*(x=0) = \frac{\kappa \Delta\rho 4\pi R^3}{3d^2} = 5.10^{-6} m/s^2$. Razmerje δg*/g je tam enako $5\ 10^{-7}$.

Izračunajmo še, pri kolikšni spremembi višine dobimo enako spremembo težnega pospeška. Nad površjem zemlje ($r>R_z$) je težni pospešek enak $g(r) = \kappa M/r^2$. Tu je R_z polmer zemlje, r oddaljenost od sredine zemlje do točke, v kateri računamo težni pospešek, M pa masa zemlje. Spremembo težnega pospeška δg pri majhni spremembi razdalje δr izračunamo z diferenciranjem: $\delta g = [dg(r)/dr]_{r=Rz}\delta r = -2g(\delta r/R_z)$. Sprememba δg je enaka δg*(x=0), ke je δr = -1,6 m, torej pri zmanjšanju višine za 1,6 m.

* Če je na nekem mestu pod zemeljsko površino gostota snovi manjša od gostote snovi v okolici (n. pr. ležišče nafte), je sprememba gostote Δρ negativna, smer vektorja $\delta\vec{g}$ pa se obrne.

** Spremembe težnega pospeška najpogosteje merijo z gravimetri na vzmet, s katerimi lahko merijo δg/g z natančnostjo 10^{-9}. S superprevodnimi gravimetri, ki temelje na levitaciji superprevodne kroglice v magnetnem polju, so možne meritve z red velikosti večjo natančnostjo. Še večjo natančnost dosežejo pri merjenju časovne odvisnosti g na danem mestu s superprevodnimi gravimetri in sicer okrog $\delta g/g = 10^{-12}$.

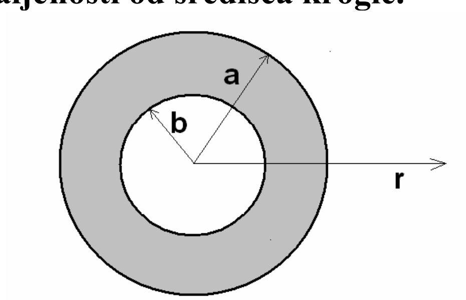
14. Satelit z maso 500 kg kroži v višini 3600 km nad zemljo. Izračunajmo obhodni čas, hitrost in energijo satelita. Kolikšno hitrost je morala v bližini zemlje doseči raketa, ki je utirila ta satelit.

V višini h nad površjem zemlje je težni pospešek g(h) enak $g(h) = gR^2/(R+h)^2 = 4 m/s^2$. Teža je enaka centipetalni sili: $mg(h) = mv^2/(R+h)$, iz česar sledi v = 6,3 km/s. Obhodni čas je enak $t_0 = 2\pi(R+h)/v = 10^4$ s. Energija satelita W je enaka vsoti kinetične energije $W_k = mv^2/2 = mgR^2/2(R+h)$ in potencialne energije $Wp = -\kappa mM/(R+h) = -mgR^2/(R+h)$ in je enaka $W = -mgR^2/2(R+h) = -1{,}02\ 10^{10}$ J. Hitrost rakete (in satelita) v_0 ob izstrelitvi izračunamo z uporabo zakona o ohranitvi energije za satelit: $mv_0^2/2 - mgR = -mgR^2/2(R+h)$. Iz tega sledi

$$v_0 = \sqrt{gR\frac{R+2h}{R+h}} = 9{,}3 km/s.$$

* Hitrost v_0 = 8 km/s, ki jo izračunamo pri h = 0, je enaka hitrosti, s katero bi krožil satelit tik nad površjem zemlje. Hitrost v_0 = 11,2 km/s, ki jo izračunamo pri $h \to \infty$ pa je enaka ubežni hitrosti z zemlje.

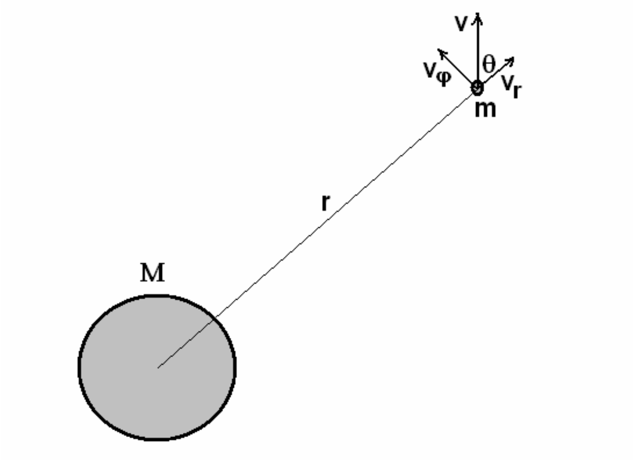
15. Homogena votla krogla ima zunanji polmer a, notranji polmer b in maso M. Izračunajmo gravitacijsko silo te krogle na majhni telo z maso m v odvisnosti od oddaljenosti od središča krogle.



Zaradi krogelne simetrije ima sila radialno smer proti središču krogle.
Ločimo tri področja. Pri r>a je gravitacijska sila taka, kot da bi bila vsa masa M zbrana v središču krogle. Velja torej $F = \kappa mM/r^2$. Pr r<b je gravitacijska sila enaka nič. V vmesnem področju je gravitacijska sila taka, kot da je vsa masa M* notranjega dela krogle s polmerom manjšim od r, $M^* = M(r^3-b^3)/(a^3-b^3)$, zbrana v središču krogle. Gravitacijska sila je enaka $\kappa mM^*/r^2$.
*Sami izračunajte delo, ki je potrebno, da telo z maso m premaknemo iz središča krogle za razdaljo r. Rezultat je: A(r<b) = 0, $A(b<r<a) = \dfrac{\kappa mM(r-b)^2(r+2b)}{2r(a^3-b^3)}$,

$$A(r>a) = \frac{\kappa mM(a-b)(a+2b)}{2a(a^2+ab+b^2)} + \kappa mM\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right),\ A(r=\infty) = \frac{3\kappa mM(a+b)}{2(a^2+ab+b^2)}.$$

16. Nebesno telo z maso m (satelit, komet, raketa...) je v nekem trenutku oddaljeno od planeta z maso M za r_0, njegova hitrost je enaka v_0, kot med smerjo hitrosti in zveznico med planetom in telesom pa je enak θ_0. Razdalja r_0 naj bo dovolj kratka, da je v tem področju gravitacija planeta prevladujoča (vpliv ostalih planetov in sonca zanemarimo). Ali se telo giblje okrog planeta? Če se, izračunajmo največjo in najmanjšo razdaljo med telesom in planetom. Če je hitrost telesa prevelika, da bi krožilo okrog planeta, izračunajmo najmanjšo razdaljo med telesom in planetom.



Uporabili bomo zakon o ohranitvi vrtilne količine in zakon o ohranitvi energije. Zakon o ohranitvi vrtilne količine, $\vec{\Gamma} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v}_\varphi = konst.$, pove, da je $rv_\varphi = r_0 v_{0\varphi} = r_0 v_0 \sin\theta_0$ = konst. Zapišimo še zakon o ohranitvi energije:
$\frac{mv^2}{2} - \kappa\frac{mM}{r} = \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2)}{2} - \kappa\frac{mM}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - \kappa\frac{mM}{r_0}$. Iz enačb izračunamo v_r^2:
$v_r^2 = \left(v_0^2 - \frac{2\kappa M}{r_0}\right) + \frac{2\kappa M}{r} - \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0 r_0^2}{r^2}$. V primeru, ko je razdalja med telesom in planetom največja ali najmanjša, je $v_r = 0$. Iz dobljene enačbe izračunamo $x = r_0/r$: $x = \frac{\kappa M \pm \sqrt{\kappa^2 M^2 + r_0 v_0^2 \sin^2\theta_0 (r_0 v_0^2 - 2\kappa M)}}{r_0 v_0^2 \sin^2\theta_0}$.

Pri dovolj majhnih hitrostih, ko velja $r_0 v_0^2 < 2\kappa M$, ima enačba dve pozitivni rešitvi, ki sta v splošnem različni in ustrezata največji in najmanjši razdalji med telesom in planetom. Poseben primer je kroženje, ki ga dobimo pri pogojih $\theta_0 = \pi/2$ in $r_0 v_0^2 = \kappa M$. Tedaj sta obe rešitvi enačbe za x enaki.

Ko je hitrost telesa prevelika, da bi ga gravitacija planeta zadržala ($r_0 v_0^2 > 2\kappa M$), dobimo za x sam eno pozitivno rešitev, ki ustreza najmanjši oddaljenosti telesa od planeta.