1. Majhna utež na tanki jekleni žici niha pri temperaturi 20 ^{0}C z nihajnim časom 3 s. Za koliko se spremeni nihajni čas pri temperaturi 0 ^{0}C? Linearni temperaturni koeficient jekla je α = 1,2 10^{-5} K^{-1}.

Enačbo $t_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ logaritmiramo in diferenciramo. Pri tem dobimo $dt_0/t_0 = dl/2l$. Ker je v našem primeru $\Delta l/l = \alpha\Delta T$ = -2,4 10^{-4} <<1, uporabimo prejšnjo enačbo: $\Delta t_0/t_0 = \Delta l/2l$ = -1,2 10^{-4}. Sprememba nihajnega časa je enaka Δt_0 = -3,6 10^{-4} s, kar pomeni, da se nihajni čas za toliko skrajša.

2. V navpični stekleni cevi, ki je spodaj zaprta, je pri 20 ^{0}C 60 cm dolg stolpec živega srebra. Za koliko je daljši stolpec živega srebra pri temperaturi 100 ^{0}C? Za steklo je α = 1,5 10^{-5} K^{-1}, za živo srebro pa β = 18 10^{-5} K^{-1}.

Ko se živo srebro segreje, se mu spremeni prostornina za $\Delta V = lS\beta\Delta T = V\beta\Delta T$. Tu je l dolžina stolpca, S presek cevi, ΔT pa 80 K. Hkrati se spremeni tudi presek steklene cevi. Ta je enak $S = \pi r^2$. Z logaritmiranjem in diferenciranjem enačbe dobimo $dS/S = 2dr/r$. Enačbo uporabimo tudi pri večjih spremembah, ko je $\Delta r/r = \alpha\Delta T$ <<1. Velja torej $\Delta S/S = 2\alpha\Delta T$. V naslednjem koraku zapišimo enačbo za prostornino živosrebrnega stolpca $V = Sl$ in ugotovimo, kako je sprememba prostornine dV povezana s spremembo preseka dS in spremembo dolžine dl. Enačbo logaritmiramo in diferenciramo. Pri tem dobimo $dV/V = dS/S + dl/l$. Kot smo že navajeni, uporabimo enačbo tudi pri neinfinitezimalnih spremembah: $\Delta V/V = \Delta S/S + \Delta l/l$. Iz enačbe izračunamo $\Delta l/l$: $\Delta l/l = \Delta V/V - \Delta S/S = (\beta - 2\alpha)\Delta T$. Sprememba dolžine stolpca Δl je enaka 7,2 mm.

3. V aluminijasto posodo s prostornimo 1 dm^3 do vrha nalijemo vodo s temperaturo 20 ^{0}C. Posodo z vodo segrejemo na temperaturo 80 ^{0}C. Koliko vode pri tem steče iz posode? Linearni temperaturni razteznostni koeficient aluminija je α = 2,4 10^{-5} K^{-1}, povprečni prostorninski razteznostni koeficient vode na navedenem temperaturnem intervalu pa β = 4,5 10^{-4} K^{-1}.

Čez rob posode steče voda s prostornino, ki je enaka razliki med spremembo prostornine vode in spremembo prostornine posode: $\Delta V = V(\beta - 3\alpha)\Delta T$ = 22,7 cm^3.

4. Gostoto vode približno opišemo z enačbo $\rho = \rho_0 - A(T - T_0)^2 + B(T - T_0)^3$, kjer je ρ_0 = 1000 kg/m^3, T_0 = 4 ^{0}C, A = 69 10^{-4} kg/m^3K^2 in B = 2,5 10^{-5} kg/m^3K^3. Izračunajmo prostorninski temperaturni razteznostni koeficient vode pri temperaturi 50 ^{0}C.

V primeru, ko spreminjanje prostorvine s temperaturo ni linearno, definiramo temperaturno odvisni prostorninski temperaturni razteznostni koeficient kot $\beta = dV/VdT$. Enačbo $m = \rho V$ logaritmiramo in diferenciramo. Pri tem dobimo $dV/V = -d\rho/\rho$. Velja torej

$\beta = \frac{dV}{VdT} = -\frac{d\rho}{\rho dT} = \frac{2A(T-T_0)-3B(T-T_0)^2}{\rho} \approx \frac{2A(T-T_0)-3B(T-T_0)^2}{\rho_0}$. Pri temperaturi 50 ^{0}C je β = 4,8 10^{-4} K^{-1}.

5. V jekleni posodi, ki ima obliko krogelne lupine z notranjim polmerom r = 25 cm in debelino sten d = 0,5 cm je voda. Pri 20 ^{0}C je prostornina vode ravno enaka prostornini posode. Posodo z vodo segrejemo na temperaturo 50 ^{0}C. Za koliko pri tem naraste tlak v posodi? Linearni temperaturni razteznostni koeficient jekla je α = 1,2 10^{-5} K^{-1}, povprečni prostorninski temperaturni koeficient vode na tem temperaturnem intervalu pa β = 3,4 10^{-4} K^{-1}. Prožnostni modul jekla je E = 2 10^{11} N/m^2, stisljivost vode pa χ = 5 10^{-10} $(N/m^2)^{-1}$.

Razlika med spremembo prostornine vode in spremembo prostornine posode pri nespremenjenem tlaku je enaka $\Delta V = V(\beta - 3\alpha)\Delta T$. Ker je voda v posodi, se za Δp poveča tlak v posodi, zaradi česar se za ΔV_1 zmanjša prostornina vode, za ΔV_2 pa poveča prostornina posode. Vsota $\Delta V_1 + \Delta V_2$ je enaka ΔV. Izrazimo ΔV_1 in ΔV_2 s tlakom Δp. Za vodo velja $\Delta V_2 = \chi V\Delta p = 4\pi\chi r^3\Delta p/3$. V jeklu je napetost enaka $\sigma = F/S = \Delta p\pi r^2/2\pi rd = \Delta pr/2d$. Relativni podaljšek vsakega dela posode v tangentni smeri in s tem tudi obsega in polmera je enak σ/E. Velja torej $\Delta r/r = \sigma/E$, oziroma $\Delta V_1/V = 3\Delta r/r = 3\sigma/E = 3\Delta pr/2dE$. Iz enačbe $\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V$ izračunamo Δp in dobimo $\Delta p = \frac{2(\beta - 3\alpha)dE\Delta T}{3r + 2\chi dE} = 104 bar$. Mimogrede izračunajmo še napetost v jeklu. Enaka je $\sigma = \Delta pr/2d$ = 2,6 10^8 N/m^2, kar je manj od natezne trdnosti, ki je za jeklo enaka σ_t = 4 10^8 N/m^2.

6. Na jekleno palico s polmerom 20,05 mm nataknemo medeninasto cev z notranjim polmerom r = 20,00 mm, debelino d = 2 mm in dolžino l = 2 cm. To storimo tako, da cev segrejemo na dovolj visoko temperaturo in še vročo nataknemo na palico. Ko se ohladi, se trdno stisne ob palico. Izračunajmo, do kako visoke temperature moramo ogreti cev, da jo lahko nataknemo na palico. S kolikšno silo moramo vleči cev, da jo ohlajeno snamemo s palice? Do katere temperature moramo segreti palico in cev, da lahko cev snamemo? Linearni temperaturni razteznostni koeficient medenine je α = 1,9 10^{-5} K^{-1}, jekla pa α' = 1,1 10^{-5} K^{-1}.

Najprej izračunajmo, do katere temperature moramo segreti cev, da se ji notranji polmer poveča za Δr = 50 μmVelja $\Delta r/r = \alpha\Delta T$, iz česar sledi ΔT = 132 K. Pri temperaturi okrog 160 ^{0}C je torej notranji polmer cevi enak polmeru palice pri sobni temperaturi. Cev moramo seveda ogreti na višjo temperaturo, da jo brez težav nataknemo na palico.

Ko se cev ohladi, se ne more skrčiti na prvotne dimenzije, ampak ostane raztegnjena. Seveda se zaradi sile med cevjo in palico skrči tudi palica. V našem primeru je cev tanka, njen prožnostni modul E pa je manjši od prožnostnega modula palice. Zato ne naredimo velike napake, če skrček palice zanemarimo in računamo, kot da se deformira samo cev. Sila med palico in cevjo je homogeno porazdeljena po stični ploskvi. Označimo silo s ploskvijo F/S = p. S stališča cevi je situacija enaka, kot da bi bila v njej tekočina s tlakom, ki je za p večji od tlaka v okolici. Za ta primer smo že izračunali, da je napetost σ v cevi enaka: σ = (p2rl)/(2dl) = pr/d. Ker velja tudi $\sigma = E\Delta r/r$, lahko izračunamo silo na enoto ploskve $p = dE\Delta r/r^2 = 2{,}25\ 10^7\ N/m^2$. Za prožnostni modul medenine smo vzeli $E = 9\ 10^{10}\ N/m^2$. Sila, s katero pritiska cev na palico, je enaka $F = p2\pi rl$ = 57 kN. Če je koeficient lepenja med cevjo in palico na primer k_l = 0,6, lahko snamemo cev z vzdolžno silo F', $F' = k_lF$ = 34 kN.

Na koncu izračunajmo še, pri kateri temperaturi lahko cev snamemo s palice. Notranji polmer cevi in polmer palice sta enaka, ko je $r\alpha\Delta T - r\alpha'\Delta T = \Delta r$. Temu ustreza ΔT = 312 K. Pri temperaturi nad približno 340 ^{0}C postane notranji polmer cevi večji od polmera palice in tedaj lahko cev snamemo.

* Meja trdnosti za medenino je približno $\sigma_t = 4\ 10^8\ N/m^2$. V našem primeru je mehanska napetost v cevi, $F/S = E\Delta l/l = E\Delta r/r = 2{,}3\ 10^8\ N/m^2$, manjša od σ_t.

7. S potopnim grelcem z močjo 300 W grejemo vodo za čaj. V kolikšnem času grelec segreje 4 dl vode z 20 ^{0}C na 90 ^{0}C? Izgube zanemarimo.

Če ni izgub velja $Q = Pt = mc_p\Delta T$. Upoštevamo, da je m = 0,4 kg, c_p = 4186 J/kgK in ΔT = 70 K pa dobimo t = 391 s ≈ 6,5 min. Zaradi izgub toplote je v resnici čas daljši.

8. Elektromagnet troši električno moč P = 1,5 kW. Hladimo ga z vodo, ki ima pri vstopu v magnet temperaturo 18 ^{0}C. Želimo, da ima voda pri izstopu iz magneta temperaturo največ 40 ^{0}C. Kolikšen mora biti najmanj prostorninski tok vode skozi magnet?

V stacionarnih razmerah steče skozi magnet v času Δt voda z maso $\Delta m = \rho\Phi_v\Delta t$. Voda prejme toploto $Q = P\Delta t$ in se pri tem ogreje za $\Delta T = P\Delta t/\Delta mc_p = P/\rho\Phi_v c_p$. Minimalni prostorninski tok Φ_v, ki ustreza temperaturni spremembi ΔT = 22 K, je enak $\Phi_v = P/\rho c_p\Delta T = 0{,}0162\ dm^3/s = 0{,}97\ dm^3/min$.

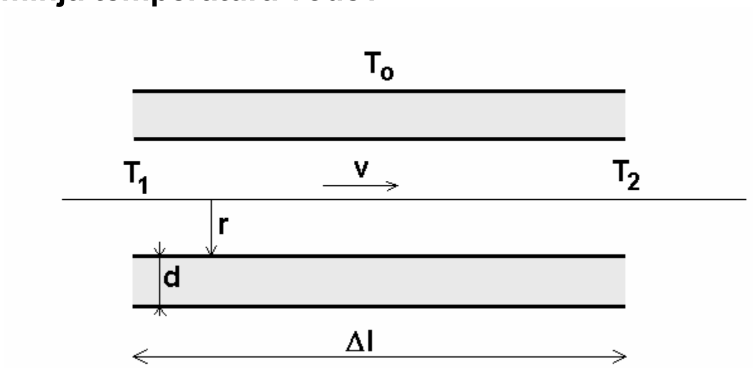
9. Avto se spusti po strmem klancu. Pri tem zavira samo z zavorami. Za koliko se segrejejo zavore, ko napravi višinsko razliko h = 100 m? Hlajenje zavor zanemarimo. Masa avtomobila je m = 10^3 kg, masa zavor je m' = 20 kg, specifična toplota železa pa c_p = 470 J/kgK.

Pri enakomerni vožnji navzdol je delo sile zavor (trenja) enako spremembi potencialne energije in to delo se pretvori v toploto: $mgh = m'c_p\Delta T$. Iz tega sledi ΔT = 104 K.

10. V cevi s polmerom R in dolžino l je voda s temperaturo T. Cev je ovita z dvema plastema toplotnega izolatorja: notranjo s toplotno prevodnostjo λ_1 in debelino d_1 ter zunanjo s toplotno prevodnostjo λ_2 in debelino d_2. V okolici cevi je temperatura T_0. Kolikšen toplotni tok teče skozi izolatorja?
Vzemimo, da je na meji izolatorjev temperatura T'. Toplotni tok skozi notranji izolator je enak $P = 2\pi\lambda_1 l(T - T')/\ln((R+d_1)/R)$. Enak je toplotni tok skozi zunanji izolator: $P = 2\pi\lambda_2 l(T' - T_0)/\ln((R+d_1+d_2)/(R+d_1))$. Z upoštevanjem enakosti toplotnih tokov izračunamo n. pr. T – T' in potem toplotni tok P, ki je enak

$$P = \frac{2\pi l\lambda_1\lambda_2(T - T_0)}{\lambda_1 \ln[(R + d_1 + d_2)/(R + d_1)] + \lambda_2 \ln[(R + d_1)/R]}.$$

11. Po dolgi cevi s polmerom r teče vroča voda. Cev je izolirana s plastjo izolatorja debeline d s toplotno prevodnostjo λ. Na začetku cevi je temperatura vode T_z. V okolici cevi je temperatura T_o. Kako se vzdolž cevi spreminja temperatura vode?



Oglejmo si del cevi dolžine Δl. Dolžina Δl naj bo dosti krajša od dolžine, pri kateri se temperatura znatno spremeni. Na začetku tega dela cevi naj bo temperatura T_1, na koncu pa T_2. S T označimo temperaturo na sredini, ki je pri dovolj kratkem delu cevi kar enaka $T = (T_1 + T_2)/2$. V času Δt vstopi v ta del cevi voda z maso $\Delta m = \Phi_m \Delta t = \rho\pi r^2 v\Delta t$ in s temperaturo T_1. Hkrati izstopi iz tega dela cevi voda z enako maso Δm in temperaturo T_2. V stacionarnih razmerah je $\Delta m c_p(T_1 - T_2)$ enako toploti $Q = P\Delta t = \dfrac{2\pi\lambda\Delta l(T - T_o)}{\ln\left(\dfrac{r + d}{r}\right)}\Delta t,$ ki v času Δt steče iz tega dela cevi,

kar lahko zapišemo v obliki: $\dfrac{T_2 - T_1}{\Delta l} = -\dfrac{2\lambda}{\rho v r^2 c_p \ln\left(\dfrac{r + d}{r}\right)}(T - T_o).$ Pri majhnem Δl izraz na levi zapišemo kot dT/dx. Pri čemer je x koordinata, ki teče vzdolž cevi. Izraz na desni zapišemo kot $(T - T_o)/x_0$, pri čemer smo definirali značilno dolžino x_0, $x_0 = \rho v r^2 c_p \ln\left(\dfrac{r + d}{r}\right)/2\lambda.$ Enačba dobi obliko $dT/dx = -(T - T_o)/x_0$. Rešitev enačbe je $T = T_o + (T_z - T_o)e^{-x/x_0}$. Temperatura vode se vzdolž cevi eksponentno približuje zunanji temperaturi T_o, pri čemer je x_0 značilna dolžina, pri kateri pade temperaturna razlika $T - T_o$ na približno tretjino začetne vrednosti.

12. Homogeno telo v obliki krogle s polmerom R je obdano s plastjo toplotnega izolatorja z debelino d in s toplotno prevodnostjo λ. Masa toplotnega izolatorja naj bo zanemarljiva v primerjavi z maso telesa m, toplotna prevodnost snovi, iz katere je telo, pa naj bo dosti večja od toplotne prevodnosti izolatorja. Primer je n. pr. stiropor. Temperatura okolice naj bo T_0. V začetku naj bo temperatura telesa $T(0) > T_0$. Kako se s časom spreminja temperatura telesa T? Specifična toplota telesa je c_p.
Pri privzetih pogojih so razmere pri ohlajanju skoraj stacionarne. Znotraj telesa je temperatura povsod enaka, za spreminjanje temperature izolatorja pa je potrebna zanemarljiva toplota. Ker teče toplotni tok samo v radialni smeri, velja v izolatorju enačba $P = -\lambda S dT/dr = -\lambda 4\pi r^2 dT/dr$. Enačbo preuredimo, $dT = -P/4\pi\lambda)(dr/r^2)$ in integriramo po r od R do R+d. Integracijski meji za temperaturo sta $T(R)=T$ in $T(R+d) = T_0$. Iz dobljenega izraza izračunamo toplotni tok: $P = 4\pi\lambda R(R+d)(T-T_0)/d$. Zaradi toplotnega toka se telo hladi. Za kratek časovni interval dt zapišemo enačbo $mc_p dT = -Pdt = -[4\pi\lambda R(R+d)(T-T_0)/d]dt$. Ločimo spremenljivki in dobimo enačbo $dT/(T-T_0) = -dt/\tau$. S τ smo označili konstanto $mc_p d/[4\pi\lambda R(R+d)]$, ki ima dimenzijo časa. Enačbo integriramo po času od 0 do poljubnega časa t, po temperaturi pa od T(0) do temperature T, ki ustreza času t. Pri tem dobimo $T = T_0 + (T(0) - T_0)e^{-t/\tau}$. Temperatura telesa se eksponentno približuje temperaturi okolice. Značilni čas, v katerem pade temperaturna razlika približno na tretjino začetne vrednosti pa je ravno τ.

13. V posodo z vročo vodo pade steklena kroglica s polmerom 5 mm. Ocenimo, v kolikšnem času se kroglica ogreje na temperaturo vode.
Označimo začetno temperaturo kroglice s T1, temperaturo vode pa s T2. Ocenimo toplotni tok v kroglico po času, ko se začno greti tudi notranje plasti, ne samo plast ob površini. Približno je enak: $P \approx \lambda(4\pi r^2)(T_2 - T_1)/r$. Vprašajmo se, po kolikšnem času τ bi ta toplotni tok segrel kroglico na temperatiro T_2: $P\tau = mc_p(T_2 - T_1)$. Iz te enačbe izračunamo čas τ: $\tau = \rho r^2 c_p/3\lambda$. Vzemimo, da je gostota stekla 2700 kg/m^3, toplotna prevodnost 0,9 W/mK, specifična toplota stekla pa 840 J/kgK. Pri teh podatkih dobimo τ = 21 s. V resnici se kroglica segreje na temperaturo vode v nekaj časih τ, kar v praksi predstavlja par minut