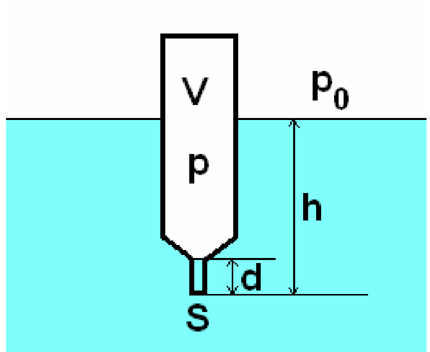
1. V dveh enakih posodah, ki ju povezuje tanka cev, je zrak s tlakom p = 1 bar in temperaturo T = 300 K. Eno posodo segrejemo za ΔT = 50 K, drugo pa obdržimo pri isti temperaturi. Kolikšen je tlak v posodah?
Tanka cev poskrbi, da je v posodah enak tlak p', toplotni tok po cevi pa je zanemarljiv. Ohranja se masa plina v posodah: $mR/M = 2pV/T = p'V/T + p'V/(T+\Delta T)$. Iz tega sledi $p' = p(T + \Delta T)/(T + \Delta T/2) = 1{,}077$ *bar*.

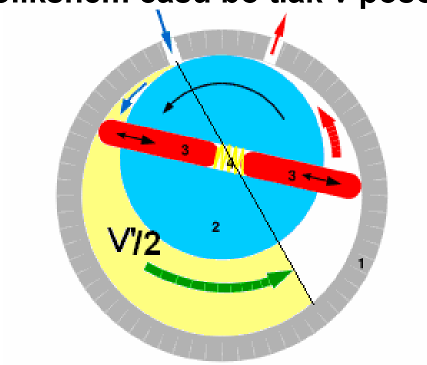
2. Steklenica s prostornino $V = 1\ dm^3$ ima vrat s presekom $S = 2{,}5\ cm^2$ in dolžino d = 5 cm. Prazno steklenico obrnemo na glavo in potopimo v vodo. Kako globoko je konec vratu, ko je ravno ves vrat poln vode?



Vzemimo, da je konec vratu v globini h. Gladina vode v steklenici je v globini h-d pod gladino vode v okolici. Tlak zraka v steklenici je enak $p = p_0 + \rho g(h-d)$.
Upoštevajmo Boylov zakon $p_0V = p(V-Sd)$ pa dobimo $h = d + \dfrac{p_0 Sd}{\rho g(V - Sd)} = 18\,cm$.

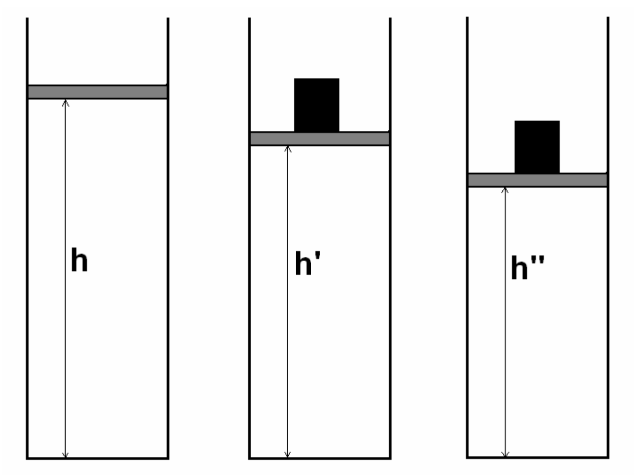
3. Valjasto posodo z maso 2kg in prostornino $4\ dm^3$ obrnemo tako, da je dno zgoraj in potopimo v vodo, pri čemer zrak ostane v posodi. Do kolikšne globine jo moramo potopiti, da v vodi lebdi. Posoda je narejena iz snovi z gostoto $\rho_0 = 8 kg/dm^3$. Predpostavimo, da se temperatura vode z globino ne spreminja.
Z naraščajočo globino narašča tlak, kar povzroči zmanjševanje prostornine zraka. Zaradi tega se zmanjšuje vzgon. Posoda lebdi v globini, v kateri je teža posode enaka vzgonu. Vzemimo, da je posoda v globini h. Tam je tlak $p = p_0 + \rho gh$, pri čemer je p_0 = 1 bar zračni tlak nad površino. Tudi tlak zraka v posodi je enak p. Prostornino zraka v posodi (V') izračunamo z Boylovim zakonom $p_0V = pV'$. Vzgon je enak: $F_v = \rho V'g + \rho V_{posode} = \rho g p_0 V/p + (\rho/\rho_0)mg$. Vzgon je enak teži posode mg, ko je tlak enak $p = p_0 \dfrac{\rho_0 \rho V}{(\rho_0 - \rho)m} = 2{,}3 p_0$. Masa zraka v posodi je majhna, zato smo jo zanemarili. Tlak p je enak $2{,}3p_0$ v globini $h = 13\ m$.

4. Z rotacijsko vakuumsko črpalko izčrpavamo zrak iz posode s prostornino $V = 10\ dm^3$. Pri vsakem obratu se plin razpne v prazen prostor velikosti $V' = 0{,}05\ dm^3$. Rotor črpalke se vrti s frekvenco ν = 25 Hz. Začetni tlak v posodi je $p_0 = 1\ bar$. Po kolikšnem času bo tlak v posodi $p' = 1\ mbar$?



Ko se plin razpne v prazen prostor, se masa plina v posodi zmanjša za $\Delta m = mV'/(V+V')$. Tu je m masa plina v posodi, preden se je razpel iz prostora velikosti V v prostor velikosti V+V'. Za toliko se zmanjša masa plina v posodi v *času* $t_0 = 1/\nu$. Ker je $\Delta m \ll m$, lahko zanemarimo drobne detajle spreminjanja mase s časom znotraj časa enega zasuka rotorja in zapišemo enačbo, ki dovolj dobro opisuje spreminjanje mase s časom v daljšem obdobju ($t \gg t_0$): $dm/dt = -\Delta m/t_0 = \Delta m\nu = -\nu mV'/(V+V')$. Rešitev enačbe je $m = m_0 e^{-t/\tau}$. Tu je $\tau = (V+V')/\nu V' = 8{,}0\ s$. Ker je pri nespremenjeni temperaturi in prostornini tlak sorazmeren masi, velja tudi $p = p_0 e^{-t/\tau}$. V posodi bo tlak padel na vrednost p' ob času $t = \tau \ln(p_0/p') = 56\ s$.

5, V navpični valjasti posodi s presekom $S = 1\ dm^2$ je zrak. Posodo na vrhu zapira lahek bat, ki brez trenja drsi ob stenah. Tlak zraka v posodi je enak zunanjemu zračnemu tlaku $p_0 = 10^5\ Pa$. Razdalja h od bata do dna posode je enaka 1 m. Na bat položimo utež z maso $m = 2\ kg$. Za koliko se premakne bat v kratkem času, za koliko pa po dolgem času?



Ko položimo na bat utež, naraste tlak v posodi za $\Delta p = mg/S = 2\ 10^3\ Pa$. V začetku zrak ne izmenja toplote z okolico, zato je sprememba izentropna.

Označimo višino stolpca zraka v posodi s h'. Zvezo $p_0V^\kappa = (p_0+\Delta p)V'^\kappa$ prepišemo v obliki $p_0h^\kappa = (p_0+\Delta p)h'^\kappa$. Iz enačbe izračunamo h': $h' = h/(1 + \Delta p/p_0)^{1/\kappa} \approx h(1 - \Delta p/\kappa p_0)$. Upoštevali smo, da je $\Delta p/p_0 = 0{,}02 \ll 1$ in pri razvoju izraza za h' v Taylorjevo vrsto obdržali samo prvi člen. Zavedamo se, da smo zanemarili člene reda velikosti $(\Delta p/p_0)^2 \sim 10^{-4}$ in višjih potenc. Premik bata je enak $h-h' \approx h\Delta p/\kappa p_0 = 1{,}4\ cm$. Po daljšem času zrak v posodi, ki se pri adiabatnem stiskanju segreje, odda toploto okolici, njegova temperatura pa se izenači s temperaturo okolice. Prehod iz začetnega stanja (brez uteži) v končno stanje opisuje Boylov zakon $p_0V = (p_0 + \Delta p)V''$, oziroma $p_0h = (p_0 + \Delta p)h''$. Višina stolpca zraka h'' je enaka $h'' = h/(1 + \Delta p/p_0) \approx h(1 - \Delta p/p_0)$. Končni premik bata je enak $h'' – h = 2\ cm$. Bat se torej v kratkem času premakne za 1,4 cm, nato pa še počasi za 0,6 cm in obmiruje pri končnem premiku 2 cm.

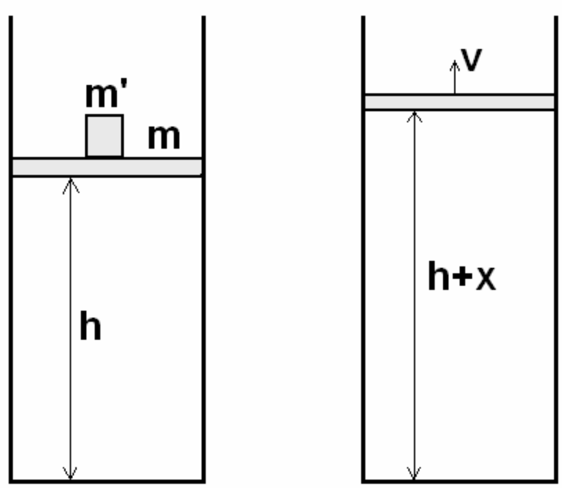
6. V valjasti posodi s presekom S je zrak. Tlak zraka v posodi je enak zunanjemu zračnemu tlaku p_0. Posodo zapira premičen bat. Dolžina zračnega stolpca v posodi je l. Bat hitro izmaknemo iz začetne lege za razdaljo x. S kolikšno sila deluje zrak na bat? Kolikšno delo opravimo pri tem premiku? Kolikšna sta sila in delo pri majhnem premiku (x<<l)?

Ker je sprememba hitra, je najboljši približek adiabatna sprememba. Vzemimo, da predstavlja x skrajšanje zračnega stolpca. V tem primeru velja $p_0l^\kappa = p(l-x)^\kappa$, oziroma $p = p_0(l/(l-x))^\kappa$. Sila na bat je $F = (p - p_0)S = p_0S[(l/(l-x))^\kappa – 1]$. Delo. Ki ga opravimo pri tem premiku je enako $A = \int_0^x F dx = \frac{p_0Sl}{\kappa-1}\left(\left(\frac{l}{l-x}\right)^{\kappa-1} - \frac{(\kappa-1)x}{l} - 1\right)$. Pri majhnem premiku izraza poenostavimo. V izrazu za silo zapišemo $\left(\frac{l}{l-x}\right)^{\kappa} = \left(1-\frac{x}{l}\right)^{-\kappa} \approx 1+(-\kappa)\left(-\frac{x}{l}\right) = 1+\frac{\kappa x}{l}$. Sila je enaka $F \approx \frac{\kappa p_0 Sx}{l}$. Delo sile pri majhnem premiku z integracijo slednjega izraza. Pri tem dobimo $A \approx \frac{\kappa p_0 Sx^2}{2l}$..

Do enakega rezultata pridemo tudi z razvojem izraza $(l/(l-x))^{\kappa-1}$, ki nastopa v izrazu za delo, v potenčno vrsto po x do kvadratnega člena:

$$\left(\frac{l}{l-x}\right)^{\kappa-1} = \left(1-\frac{x}{l}\right)^{-\kappa+1} \approx 1+(-\kappa+1)\left(-\frac{x}{l}\right) + \frac{(-\kappa+1)(-\kappa)}{2!}\left(-\frac{x}{l}\right)^2 = 1+(\kappa-1)\frac{x}{l} + \frac{\kappa(\kappa-1)x^2}{2l^2}.$$

7. V navpični valjasti posodi s presekom *$S = 20\ cm^2$* je zrak, ki ga zapira bat z maso *$m = 1\ kg$*. Na bat pritiska utež z maso *$m' = 2\ kg$*. V ravnovesju je dolžina zračnega stolpca v posodi *$h = 80\ cm$*. Temperatura posode in okolice je *$T = 300\ K$*. Utež hitro umaknemo in sicer tako, da se med umikanjem ne dotika bata. Kako je hitrost bata odvisna od premika iz mirovne lege? Kolikšen je največji premik? Kolikšna je največja hitrost bata? Zunanji zračni tlak je *$p_0 = 1\ bar$*. Trenje bata ob stene posode in zračni upor zanemarimo.



Odmik bata iz začetne lege označimo z x. Kot sistem obravnavajmo zrak v posodi in bat. Delo zunanjih sil je enako spremembi kinetične, potencialne in notranje energije. Zunanja sila je sila okolnega zraka. Njeno delo je negativno: $A = -p_0Sx$. Sprememba kinetične energije je enaka $mv^2/2$, potencialne mgx, notranje pa $m^*c_v(T' - T)$. Tu je m* masa zraka v posodi, T' pa temperatura zraka v posodi, ko je premik bata enak x. Ker nas zanima dogajanje v kratkem času po odmiku uteži, predpostavimo, da so spremembe zraka izentropne. Zvezo $TV^{\kappa-1} = konst$. prepišemo v obliki $Th^{\kappa-1} = T'(h+x)^{\kappa-1}$. Velja torej $T' = T(h/h+x)^{\kappa-1}$. Produkt m^*c_vT je enak $m^*c_vT = pV/(\kappa-1) = h(p_0S + mg + m'g)/(\kappa-1)$. Energijski izrek pove:

$-p_0Sx = \dfrac{mv^2}{2} + mgx + \dfrac{h(p_0S + mg + m'g)}{\kappa - 1}\left[\left(\dfrac{h}{h+x}\right)^{\kappa-1} - 1\right]$. Kvadrat hitrosti je enak

$v^2 = \dfrac{2h(p_0S + mg + m'g)}{m(\kappa-1)}\left[1 - \left(\dfrac{h}{h+x}\right)^{\kappa-1}\right] - \dfrac{2h(p_0S + mg)}{m}\dfrac{x}{h}$. V splošnem moramo

največji premik, pri katerem je hitrost nič, izračunati numerično. V našem primeru je $m'g << p_0S$, zato je tudi $x/h << 1$. Izraz v oglatem oklepaju razvijemo v potenčno vrsto po x/h do kvadratnega člena. Višje člene zanemarimo. Dobimo:

$v^2 = \dfrac{2m'g}{m}x - \dfrac{\kappa(p_0S + mg + m'g)}{hm}x^2$. Največji premik bata x_0 ustreza v=0. Enak je

$x_0 = \dfrac{2m'gh}{\kappa(p_0S + mg + m'g)} = 10\text{ cm}$. Nadalje pogledamo, pri katerem x je $d(v^2)/dx=0$.

Tedaj je hitrost bata največja. Premik x je enak $x_0/2 = 5$ *cm*, hitrost pa

$v = \sqrt{\dfrac{h(m'g)^2}{\kappa m(p_0S + mg + m'g)}} = 1{,}0\ m/s$.

* Največjo hitrost lahko izračunamo tudi analitično. Odvod $d(v^2)/dx$ je enak 0, ko

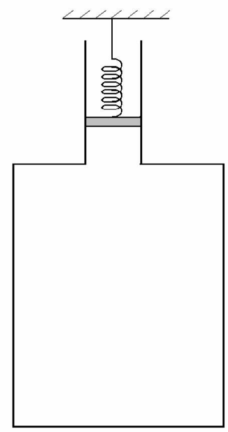
je $\dfrac{h+x}{h} = \left(1 + \dfrac{m'g}{p_0S + mg}\right)^{1/\kappa}$, oziroma $x = 5{,}5$ *cm*. Rezultat se razlikuje od približnega (x = 5 cm) za 10 %, kar smo tudi pričakovali, saj sta tudi x/h in m'g/p_0S tega reda velikosti.

** Gibanje bata je nihanje, ki ga dušita trenje ob stenah in zračni upor. Krožna frekvenca nihanja ω je enaka razmerju med največjo hitrostjo (1m/s) in amplitudo (5 cm). Frekvenca nihanja $\nu = \omega/2\pi$ je približno 3 Hz.

8. V posodi s prostornino 10 l je 8l vode in 2l zraka s tlakom 6 bar. Zunaj je zračni tlak 1 bar. Ko odpremo ventil, brizga voda skozi šobo s presekom 10 mm^2. Po kolikšnem času se posoda izprazni?

Označimo začetni tlak v posodi s p_0, tlak v poljubnem trenutku pa s p. Tlak zunaj posode označimo s p*. Začetno prostornino zraka v posodi označimo z V_0, prostornino zraka v posodi v poljubnem trenutku pa z V. Predpostavimo, da je razpenjanje zraka v posodi izotermno. Velja torej zveza $pV = p_0V_0$. Prostorninski tok vode, ki brizga iz posode, je enak $\Phi_v = S\sqrt{\frac{2(p-p^*)}{\rho}}$, pri čemer je ρ gostota vode. Prostorninski tok Φ_v je enak prirastku prostornine zraka v posodi v času dt: $dV/dt = \Phi_v$. V izrazu za prostorninski tok izrazimo tlak s prostornino, p = p_0V_0/V, in ločimo spremenljivki: $\sqrt{\frac{V}{p_0V_0/p^*-V}}dV = S\sqrt{\frac{2p^*}{\rho}}dt.$ Da bo enačba preglednejša vpeljemo novo spremenljivko $z = Vp^*/p_0V_0$ in konstanto τ, $\tau = \frac{p_0V_0}{p^*S}\sqrt{\frac{\rho}{2p^*}} = 424$ s. Pri tem dobimo $\sqrt{\frac{z}{1-z}}dz = \frac{dt}{\tau}$. Spremenljivka z se spreminja od z = z_0 = 1/6 ob času 0 do z = z' = 5/6 , ko je posoda prazna. Za lažje računanje vpeljemo novo spremenljivko ϕ: $z = \sin^2\phi$. Meji za ϕ sta $\phi_0 = \arcsin\sqrt{z_0} = \arcsin\sqrt{1/6}$ in $\phi' = \arcsin\sqrt{z'} = \arcsin\sqrt{5/6}$. Z novo spremenljivko dobimo enačbo $2\sin^2\phi d\phi = dt/\tau$. Z integriranjem dobimo čas praznjenja posode $t = \tau(\phi' - \phi_0 - \frac{\sin 2\phi'}{2} + \frac{\sin 2\phi_0}{2}) = 309$ s.

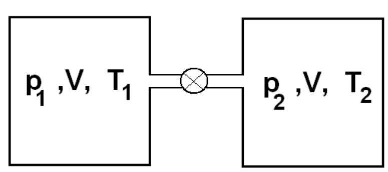
9. Posodo s prostornino V zapira lahek bat s ploščino S, ki drsi ob stenah brez trenja. V posodi je plin s tlakom p in temperaturo T. Na bat je pritrjena vzmet s koeficientom k, ki ni deformirana. Posodo s plinom segrejemo. Pri tem se bat premakne za razdaljo x. Za koliko smo segreli posodo? Kolikšna je sprememba notranje energije plina? Kolikšno toploto smo dovedli plinu?



Ko posodo s plinom segrejemo na temperaturo T', zraste tlak plina v posodi na vrednost p'. Bat se ustali v legi, pri kateri je $p'S = pS + kx$. Tlak plina v posodi je $p' = p + kx/S$. Spremeba prostornine plina je Sx. Upoštevajmo splošni plinski zakon: $pV/T = p'V'/T' = (p+kx/S)(V+Sx)/T'$. Iz enačbe lahko izračunamo temperaturo T': $T' = T(p+kx/S)(V+Sx)/pV$. Sprememba temperature plina (in posode) je enaka $T' - T = (T/pV)(pSx + kVx/S + kx^2) = (M/mR)(pSx + kVx/S + kx^2)$. Sprememba notranje energije plina je enaka $\Delta W_n = mc_v(T' - T) = (1/(\kappa-1))(pSx + kVx/S + kx^2)$. Toplota, ki jo je prejel plin, je večja, saj je plin opravil delo $A = -pSx - kx^2/2$. Enaka je $Q = \Delta W_n - A = (1/(\kappa-1))[\kappa pSx + kVx/S + (\kappa+1)kx^2/2]$.

*Če opišemo spremembo temperature plina s specifično toploto, je ta enaka $c = \dfrac{Q}{m(T'-T)} = \dfrac{R}{(\kappa-1)M}\dfrac{\kappa pS + kV/S + (\kappa+1)kx/2}{pS + kV/S + kx}$. Specifična toplota je odvisna od premika bata x. V primeru zelo trde vzmeti ($k \to \infty$) je premik bata x zanemarljiv, specifična toplota pa je enaka $c = R/(\kappa-1)M = c_v$. Pri zelo mehki vzmeti ($k \to 0$) se bat premakne tako, da je v posodi tlak p, specifična toplota pa je enaka $c = \kappa R/(\kappa-1)M = c_p$. V splošnem je c med c_v in c_p: $c_v<c<c_p$.

10. V dveh enako velikih toplotno izoliranih posodah sta zaprta različna plina, n. pr. N_2 in O_2. Prvi plin ima tlak p_1 in temperaturo T_1, drugi pa tlak p_2 in temperaturo T_2. Posodi povezuje ventil. Ventil odpremo. Kolikšna sta tlak p in temperatura T v posodah, ko se vzpostavi ravnovesje?



Sistem je toplotno izoliran in ne opravi dela. Zato se notranja energija ohrani: $m_1c_{v1}T_1 + m_2c_{v2}T_2 = m_1c_{v1}T + m_2c_{v2}T$. Pri plinu velja $c_v = R/(\kappa-1)M$ in $mc_v = pV/(\kappa-1)T$. Vstavimno slednji izraz v enačbo za temperaturo T in dobimo $T = T_1T_2\dfrac{p_1(\kappa_2-1)+p_2(\kappa_1-1)}{p_1T_2(\kappa_2-1)+p_2T_1(\kappa_1-1)}$. Delni tlak p_1' prvega plina po vzpostavitvi ravnovesja podaja zveza $p_1V/T_1 = p_1'2V/T$, iz česar sledi $p_1' = p_1T/2T_1$. Podobno izračunamo delni tlak drugega plina p_2' in potem skupni tlak

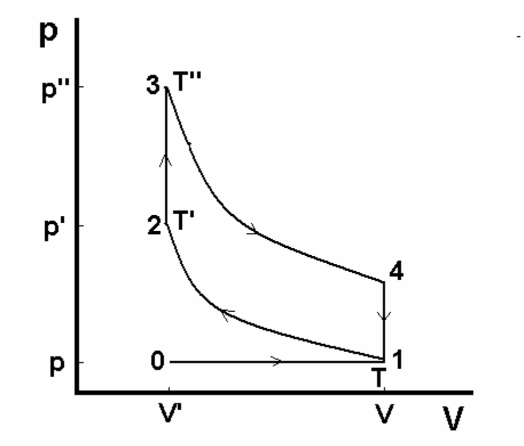
$$p = p_1' + p_2' = \frac{(p_1(\kappa_2 - 1) + p_2(\kappa_1 - 1))(p_1T_2 + p_2T_1)}{2(p_1T_2(\kappa_2 - 1) + p_2T_1(\kappa_1 - 1))}.$$ V posebnem primeru, ko je $\kappa_1 = \kappa_2$, velja $p = (p_1 + p_2)/2$. Enak rezultat dobimo tudi, ko je $T_1 = T_2$.

11. Zračnica kolesa ima prostornino 2,5 dm^3, v njej pa je zrak s tlakom, ki je za 2 bara višji od zunanjega zračnega tlaka $p_0 = 1$ *bar*. V zračnici naredimo luknjo velikosti $S = 0{,}1$ *mm*^{2}. Ocenimo, po kolikšnem času pade razlika med tlakom v zračnici in zunanjim tlakom na polovico začetne vrednosti.

Premer luknje (~ 0,3 mm) je dosti večji od povprečne proste poti molekul, zato uporabimo Bernoullijevo enačbo. Bernoullijeva enačba za stisljivo tekočino se razlikuje od Bernoullijeve enačbe za nestisljivo tekočino, a te razlike pri naši oceni ne bomo upoštevali. Predpostavili bomo, da je gostota zraka ρ v curku tik po izstopu iz luknje približno enaka gostoti zraka v zračnici, tlak pa je enak p_0. Pri tem dobimo $v = \sqrt{2(p - p_0)/\rho}$. S p smo označili tlak v zračnici. Masni tok zraka iz zračnice je enak $\Phi_m = \rho vS$. Časovni potek mase zraka v zračnici podaja enačba $dm/dt = -\Phi_m$. Upoštevajmo, da je $m = \rho V$, da za zrak dokaj dobro velja splošni plinski zakon: $p = \rho RT/M$ in izraz za hitrost zvoka $c = \sqrt{\kappa RT/M}$. Pri tem dobimo enačbo $\frac{dp}{\sqrt{p(p-p_0)}} = -\frac{Sc}{V}\sqrt{\frac{2}{\kappa}}dt = -\frac{dt}{\tau}$. Tu je $\tau = \frac{V}{Sc}\sqrt{\frac{\kappa}{2}} = 62s$. Z integracijo po času od 0 do t, po tlaku pa od p(0) do p, dobimo

$$\sqrt{\frac{p}{p_0}} + \sqrt{\frac{p}{p_0} - 1} = \left(\sqrt{\frac{p(0)}{p_0}} + \sqrt{\frac{p(0)}{p_0} - 1}\right)e^{-\frac{t}{2\tau}}.$$ Tlak v zračnici pade s $p(0) = 3bar$ na $p = 2$ *bar* v času $t = 0{,}53\tau = 33s$.

12. Z Ottovo krožno spremembo opišemo delovanje motorjev z notranjim izgorevanjem.



V delu 0→1 valj vsesa iz vplinjača mešanico zraka in goriva. V delu 1→2 bat izentropno stisne mešanico. V točki 2 pride do vžiga. Tlak in temperatura pri stalni prostornini močno narasteta, kar ustreza delu 2→3. V delu 3→4 plin izentropno odrine bat, ki pri tem zavrti os motorja. V delu cikla 4→1 se odpre ventil, ki izpusti vroč plin iz valja. Nadomesti ga mešanica zraka in goriva in potem se krožna sprememba 1→2→3→4→1 ponovi.
Vzemimo, da je v točki 1 tlak mešanice zraka in goriva p, prostornina valja V in temperatura T. V točki 2 je prostornina valja V', tlak p' in temperatura T'. V točki 3 je tlak v valju p'' in temperatura T''. Izračunajmo, kolikšno je neto delo, ki ga odda plin v eni krožni sporemembi, kolikšna je prejeta toplota in kolikšen je izkoristek stroja?
Razmerje V/V' se imenuje kompresijsko razmerje in ga bomo označili z r.
Delo, ki ga pri izentropni spremembi $p_1, V_1, T_1 \rightarrow p_2, V_2, T_2$ prejme, ali odda plin, je enako $A = \frac{p_1V_1}{\kappa-1}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right) = mc_V T_1\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right)$. Razlika med oddanim in prejetim delom $|A_{3\rightarrow4}| - A_{1\rightarrow2}$ je enaka delu A, ki ga v eni krožni spremebi opravi stroj: $A = mc_v\left(1 - r^{1-\kappa}\right)\left(T'' - Tr^{\kappa-1}\right)$. Stroj prejme toploto v delu cikla 2→3. Enaka je $Q = mc_v(T'' - T') = mc_v\left(T'' - Tr^{\kappa-1}\right)$. Izkoristek stroja je enak $\eta = A/Q = 1 - r^{1-\kappa}$. Pri kompresijskem razmerju $r = 8$ je izkoristek stroja, ki opravlja Ottovo krožno spremembo 0,56. V praksi je izkoristek bencinskih motorjev približno dvakrat manjši.

13. V plinski centrifugi se vrti rotor s frekvenco $\nu = 400\ Hz$. Polmer rotorja je $r_0 = 10\ cm$ .V centrifugi je plin z molekulsko maso M = 352 ($^{238}UF_6$), ki je imel, preden se je centrifuga začela vrteti, tlak p_0 in gostoto ρ_0. Kako je tlak plina odvisen od oddaljenosti od osi? Kolikšen je tlak plina v osi centrifuge? Temperatura plina je 360 K.
Oglejmo si del tanke »cevi« plina med r in r+dr s ploščino S. Proti središču kroženja ga potiska sila $F_1 = p(r+dr)S$, v nasprotni smeri pa deluje sila $F_2 = p(r)S$. Razlika $F_1 - F_2$ je enaka centripetalni sili $F_1 - F_2 = F_c = dm\omega^2 r = \rho S\omega^2 r dr$. Razliko $F_1 - F_2$ zapišemo na naslednji način: $F_1 - F_2 = [p(r+dr) - p(r)]S = (dp/dr)Sdr$. Dobimo enačbo $dp/dr = \rho\omega^2 r$. Za plin upoštevamo še zvezo med tlakom in gostoto, $p = \rho RT/M$ in dobimo enačbo za tlak $dp/dr = pM\omega^2 r/RT$. Rešitev enačbe je $p = Ce^{\left(\frac{r}{s}\right)^2}$. Tu je $s = \sqrt{2RT/M\omega^2} = 5{,}1 cm$, konstanto C pa določimo iz pogoja, da je masa plina v centrifugi nespremenjena:

$$m = \rho_0 \pi r_0^2 l = \frac{p_0 M\pi r_0^2 l}{RT} = \frac{Ml}{RT}\int_0^{r_0} p2\pi r dr.$$ Enaka je $C = \frac{p_0 r_0^2}{s^2} / \left(e^{(r_0/s)^2} - 1\right) = 0{,}082 p_0$.

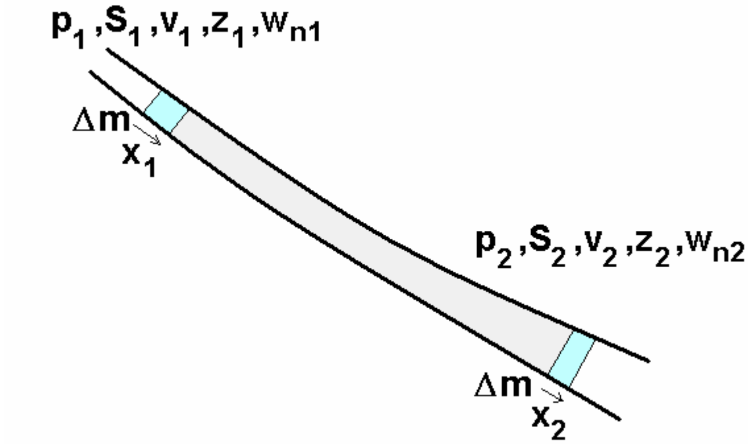
Tlak v osi centrifuge je ravno enak C.

* S plinskimi centrifugami ločujejo $^{235}UF_6$ od $^{238}UF_6$. Naravna koncentracija ^{235}U je 0,72%. Zaradi manjše molekulske mase je razdalja s za $^{235}UF_6$ malo večja od

razdalje s za $^{238}UF_6$. Zato je relativna koncentracija $^{235}UF_6$ v osi centrifuge malo večja od naravne koncentracije ^{235}U. Z zaporedjem večjega števila zaporednih centrifug, iz katerih črpajo uranov heksafluorid na sredini in ga vodijo v naslednjo centrifugo, dosežejo znatno obogatitev ^{235}U.

14. Izpeljimo Bernoullijevo enačbo za plin in izračunajmo zvezo med masnim tokom in razliko tlakov pri toku zraka po Venturijevi cevi. Preseka cevi naj bosta S in S' (S > S').

Bernoullijevo enačbo smo izpeljali za nestisljivo neviskozno tekočino. V primeru, ko je tekočina stisljiva, poteka izpeljava na podoben način. Obravnavamo stacionaren tok stisljive tekočine. Posebej nas zanima stolpec tekočine, ki je bil v začetku opazovanja med poljubno izbranima mestoma »1« in »2«.



V času Δt se zgornji del stolpca premakne za x_1, spodnji del stolpca pa za x_2. V tem času je delo okolne tekočine na izbrano tekočino enako $A = p_1S_1x_1 - p_2S_2x_2$. To delo je enako spremembi kinetične, potencialne in notranje energije »izbrane« tekočine. Vse te spremembe pa so take, kot da bi del tekočine z maso Δm »prenesli« z mesta »1« na mesto »2«. Upoštevajmo še, da je $S_1x_1 = \Delta m/\rho_1$ in $S_2x_2 = \Delta m/\rho_2$ in zapišimo zakon o ohranitvi energije deljen z Δm: $p_1/\rho_1 - p_2/\rho_2 = (v_2^2-v_1^2)/2 + g(z_2 - z_1) + w_{n2} - w_{n1}$. Ker sta mesti »1« in »2« poljubno izbrani, velja vzdolž toka: $p/\rho + v^2/2 + gz + w_n = konst$. Enačbo lahko prepišemo tudi drugače. Entalpijo H smo definirali kot vsoto $H = W_n + pV$. Delimo enačbo z maso snovi: $H/m = h = W_n/m + pV/m = w_n + p/\rho$. Bernoullijeva enačba za stislijivo tekočino je torej naslednja: $h + v^2/2 + gz = \text{konst}$. Za razredčen plin velja $\Delta h = c_p\Delta T = (\kappa/\kappa-1)(R/M)\Delta T$. Ker je pri uporabi Bernoullijeve enačbe pomembna le sprememba entalpije, $\Delta h = c_p\Delta T$, ne bo nič narobe, če zapišemo entalpijo z maso kot $h = c_pT = (\kappa/\kappa-1)(R/M)T = (\kappa/\kappa-1)p/\rho$. Prispevek potencialne energije (gz) lahko ponavadi zanemarimo. Bernoullijevo enačbo v tem primeru zapišemo kot $(\kappa/\kappa-1)p/\rho + v^2/2 = konst$.

Lotimo se Venturijeve cevi. V širšem delu cevi so tlak p, gostota ρ in hitrost v. V zoženju so tlak p', gostota ρ' in hitrost v'. Zapišimo Bernoullijevo enačbo

$\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p'}{\rho'}+\frac{v'^2}{2}$ in kontinuitetno enačbo $\Phi_m=\rho v S=\rho' v' S'$. Nadalje predpostavimo, da so spremembe zraka v cevi izentropne: $\frac{p}{\rho^{\kappa}}=\frac{p'}{\rho'^{\kappa}}$. Iz Bernoullijeve enačbe izračunamo kvadrat masnega toka

$$\Phi_{m,}^2=\frac{2\kappa}{\kappa-1}p\rho S^2\frac{1-(p'/p)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{(S/S')^2(p/p')^{\frac{2}{\kappa}}-1}\approx\frac{2\kappa}{\kappa-1}p\rho S'^2\left[(p'/p)^{\frac{2}{\kappa}}-(p'/p)^{\frac{\kappa+1}{k}}\right].$$

Prvi člen v imenovalcu je ponavadi dosti večji od 1, zato enko zanemarimo. Pri toku nestisljive tekočine dobimo zvezo $\Phi_m^2=2(p-p')\rho S'^2$. Dobljeni rezultat za plin prepišimo v podobni obliki $\Phi_m^2=2(p-p')\rho S'^2F(p'/p)$. Tu je

$$F(z)=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{z^{\frac{2}{\kappa}}-z^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}{1-z}.$$

Limita F(z), ko gre z = p'/p proti 1 je enaka 1. Zveza med kvadratom masnega toka in razliko tlakov p-p' je tedaj enaka, kot pri nestisljivi tekočini. Pri κ = 1,4 je za z < 1 *F(z)* ≈ *z*. Ko je *z = 0,98*, se masni tok samo za 1% razlikuje od masnega toka, ki ga izračunamo ob predpostavki, da je plin nestisljiv. Poglejmo, kolikšni sta tedaj hitrosti v in v'. Iz zapisanih enačb izračunamo v in v' kot funkciji *z = p'/p*. Velja $v=c\frac{S'}{S}\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}(z^{\frac{2}{\kappa}}-z^{\frac{\kappa+1}{\kappa}})}$ in

$$v'=c\sqrt{\frac{2}{\kappa-1}(1-z^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})}.$$

Tu je c hitrost zvoka pri temperaturi zraka v širšem delu cevi. V našem primeru sta hitrosti enaki *v' = 0,17c* in *v = 0,17c(S'/S)*. Hitrosti nista majhni. Če hitrost plina ne preseže nekaj desetin hitrosti zvoka, ne naredimo velike napake, če tudi za pline uporabimo Bernoullijevo enačbo za nestisljive tekočine.