1. Drobna smet ima gostoto 1kg/dm^3. V električnem polju se v njej inducira električni dipolni moment p_e = kEV, pri čemer je E električna poljska jakost, V prostornina smeti, sorazmernostna konstanta k pa k = 2 10^{-11} As/Vm. Smeti približamo nabito kovinsko kroglo s polmerom R. Tik nad površjem krogle je električna poljska jakost E_0 = 20 kV/cm. Kolikšen je polmer krogle, če je tik ob krogli teža smeti ravno enaka električni sili tik ob krogli?

Sila na električni dipol v nehomogenem električnem polju okrog krogle je enaka F = -p_e(dE/dr), električna poljska jakost nad površjem krogle pa je E = $E_0(R/r)^2$. Električna sila na smet je torej enaka F = $2kVE_0^2(R^4/r^5)$ in kaže proti središču krogle. Tik ob krogli je električna sila F = $2kVE_0^2/R$ in ta naj bo enaka teži smeti ρVg. Iz tega sledi R = $2kE_0^2/\rho g$ = 16 mm.

* Električni dipolni moment dielektrične krogle v električnem polju je enak $p_e = \varepsilon_0 \dfrac{3(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} EV$. Tu je ε dielektričnost krogle. Izpeljava tega izraza presega nivo Fizike I.

2. Električni naboj e je porazdeljen znotraj krogle s polmerom R tako, da je gostota naboja ρ_e sorazmerna oddaljenosti od središča krogle: $\rho_e \propto r$. Izračunajte električno poljsko jakost in električni potencial znotraj in zunaj krogle.

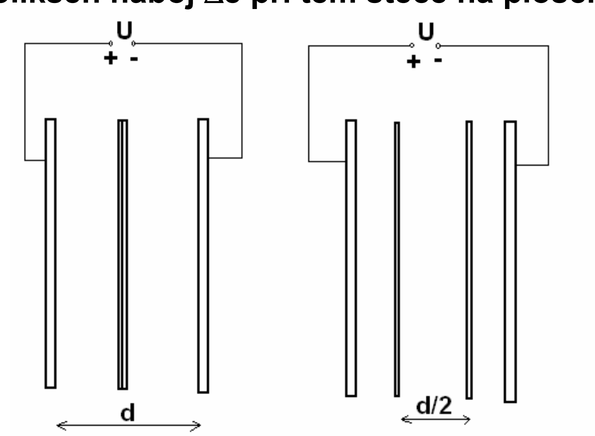
Zapišemo ρ_e = Ar in izračunamo A (A = $e/\pi R^4$). Električna poljska jakost zunaj krogle je enaka E = $e/4\pi\varepsilon_0 r^2$, znotraj krogle pa jo izračunamo po Gaussovem zakonu: E = $er^2/(4\pi\varepsilon_0 R^4)$. Električni potencial zunaj krogle (r≥R) je enak U = $e/4\pi\varepsilon_0 r$. Znotraj krogle (r≤R) pa velja $U(r) = U(R) + \int_r^R E dr = \dfrac{e(4R^3 - r^3)}{12\pi\varepsilon_0 R^4}$.

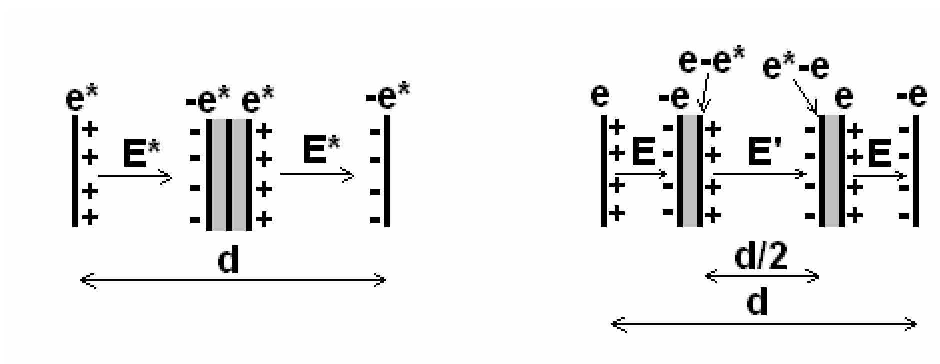
3. V kovinski cevi z notranjim premerom 2b = 1 cm je tanka žica s polmerom a = 0,1 mm. Žica poteka po osi cevi. Med žico in cevjo je suh zrak s tlakom 1 bar. Kolikšno napetost moramo priključiti med žico in cev, da bo prišlo do preboja, če je prebojna električna poljska jakost suhega zraka E_p = 30 kV/cm? Ocenimo še, kolikšna je povprečna prosta pot elektronov, ki se pri tem sprostijo in za koliko jim naraste energija, ko preletijo povprečno prosto pot.

Do preboja bo prišlo v bližini žice, ker je tam električna poljska jakost največja. Električna poljska jakost med žico in cevjo je obratno sorazmerna oddaljenosti r od sredine žice. Če je tik ob žici E = E_p, lahko v prostoru med žico in cevjo zapišemo E = $E_p(a/r)$. Napetost med žico in cevjo je enaka $U = \int_a^b E dr = E_p a \ln(b/a) = 1170\,V$. Povprečno prosto pot elektronov ocenimo podobno, kot smo ocenili povprečno prosto pot molekul. Ker je dimenzija

elektrona zanemarljiva, je ploščina, ki jo »pokrije« elektron pri letu πr^2, pri čener je r polmer molekul. Ta ploščina je štirikrat manjša od ploščine $\pi(2r)^2$, ki jo »pokrije« molekula, zato je povprečna prosta pot elektronov približno štirikat daljša od povprečne proste poti molekul. V kinetični teoriji plinov smo izračunali, da je povprečna prosta pot molekul pri tlaku 1 bar približno 0,3 μm. Povprečna prosta pot elektronov je približno štirikrat daljša, to je 1,2 μm. Elektronu, ki prepotuje to pot v električnem polju z jakostjo E_p, pade električna potencialna energija za e_0E_p1,2 mm = 3,6 eV. Za toliko mu naraste kinetična energija. Ker pride v tolikšnem električnem polju do preboja, mora biti izračunana energija primerljiva z ionizacijsko energijo molekul O_2 in N_2. V resnici je ionizacijska energija molekul O_2 12,1 eV, molekul N_2 pa 15,6 eV, kar je nekajkrat več od izračunane energije.
* S padajočim tlakom povprečna prosta pot elektronov narašča in zato E_p pada. Približno velja E_p/p = konst. Pri nizkih tlakih, ko postane povprečna prosta pot elektronov primerljiva z razdaljo med elektrodama, zapisana zveza ne velja več.

4. Ploščat kondenzator z velikostjo plošč S in razdaljo med ploščama d je priključen na vir z napetostjo U. Med plošči kondenzatorja damo staknjeni tanki kovinski plošči, ki sta vzporedni ploščam kondenzatorja in enako veliki, kot plošči kondenzatorja. Kovinski plošči med ploščama kondenzatorja razmaknemo na razdaljo d/2, pri čemer se skupni naboj na ploščah ohrani. Kolikšen naboj Δe pri tem steče na plošči kondenzatorja?

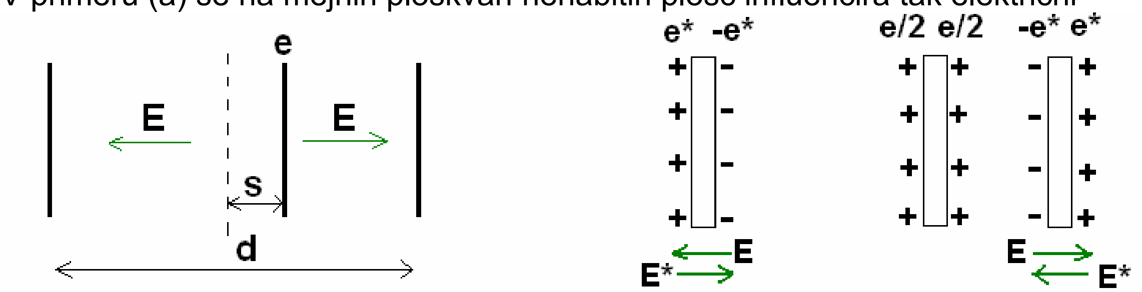




V začetku, ko sta plošči staknjeni, se na njunih mejnih ploskvah influencira naboj e^*, ki je po velikosti enak naboju na ploščah kondenzatorja: $e^* = CU = (\varepsilon_0 S/d)U$. Ko plošči razmaknemo pride do dodatne influence. Desna plošča ima še vedno skupni naboj e^*, ki sestoji iz naboja e na desni ploskvi in naboja e^*-e na levi ploskvi. Naboj e je enak naboju na ploščah kondenzatorja. Podobno, a z nasprotnim znakom, se prerazporedi naboj na levi plošči. Pri tej prerazporeditvi naboja je znotraj plošč $E = 0$. Električna poljska jakost med ploščo kondenzatorja in dodatno ploščo je $E = e/\varepsilon_0 S$, med dodatnima ploščama pa $E' = (e-e^*)/\varepsilon_0 S$. Napetost med ploščama kondenzatorja je $U = [e/\varepsilon_0 S](d/2)+[(e-e^*)/\varepsilon_0 S](d/2)$, iz česar sledi $e = 1.5\, e^*$. Na plošči kondenzatorja torej steče naboj $\Delta e = 0.5e^* = \varepsilon_0 SU/2d$.

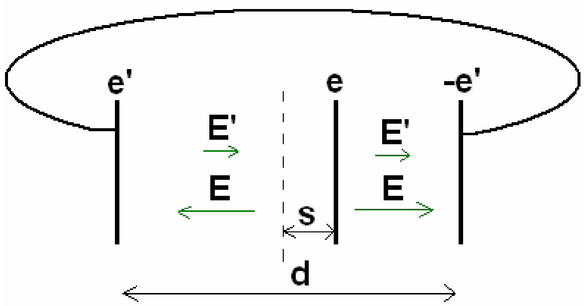
5. Med nenabiti vzporedni kovinski plošči z velikostjo S, ki sta v medsebojni razdalji d, damo enako veliko tanko nabito kovinsko ploščo. Plošča nosi naboj e in je vzporedna z nenabitima ploščama, leži pa v oddaljenosti s od središča med ploščama. Kolikšna je električna poljska jakost v prostoru med ploščami, če sta plošči (a) izolirani, ali (b) povezani z žico? Kolikšna je napetost med krajnima ploščama? Kako je električni naboj porazdeljen po ploščah

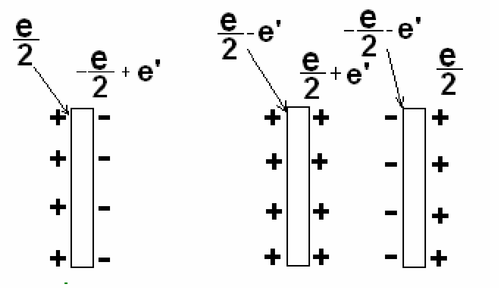
V primeru (a) se na mejnih ploskvah nenabitih plošč influencira tak električni



Naboj e^*, da znotraj kovine njegovo električno polje z jakostjo E^* kompenzira električno polje nabite plošče z jakostjo E: $e^*/\varepsilon_0 S = e/2\varepsilon_0 S$. Velja torej $e^* = e/2$. Električna poljska jakost med ploščama je enaka $E = e/2\varepsilon_0 S$, kaže pa stran od nabite plošče. Ker krajni plošči v svoji okolici ne povzročata električnega polja, je električni naboj na srednji plošči simetrično porazdeljen po obeh mejnih ploskvah. Napetost med krajnima ploščama je enaka razliki napetosti med srednjo ploščo in krajnima ploščama: $U = E(d/2 + s) – E(d/2 – s) = es/\varepsilon_0 S$.

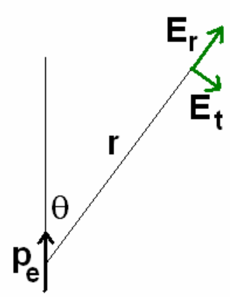
V primeru (b) je električni potencial krajnih plošč enak, zato se mora nekaj električnega naboja e' preseliti z ene plošče na drugo.

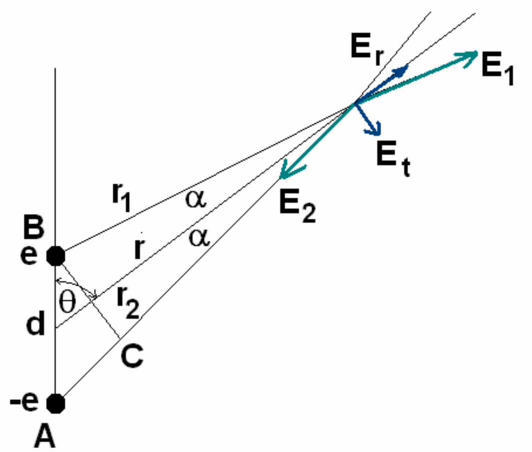




Dodatno električno polje z jakostjo E' = e'/ε_0S zmanjša električno poljsko jakost v prostoru, kjer je razdalja med krajno in srednjo ploščo d/2 + s in poveča električno poljsko jakost v prostoru, kjer je razdalja med srednjo in krajno ploščo d/2 – s. Električna napetost med srednjo ploščo in katerokoli krajno ploščo je enaka: (E + E')(d/2 - s) = (E – E')(d/2 + s). Iz tega sledi E' = (2s/d)E, oziroma e' = (s/d)e. Podrobnejša razporeditev električnega naboja po površjih plošč je narisana na desni sliki. Pri tej razporeditvi naboja znotraj plošč ni električnega polja.

6. Izračunajmo električno poljsko jakost v veliki oddaljenosti od električnega dipola z dipolnim momentom p_e.



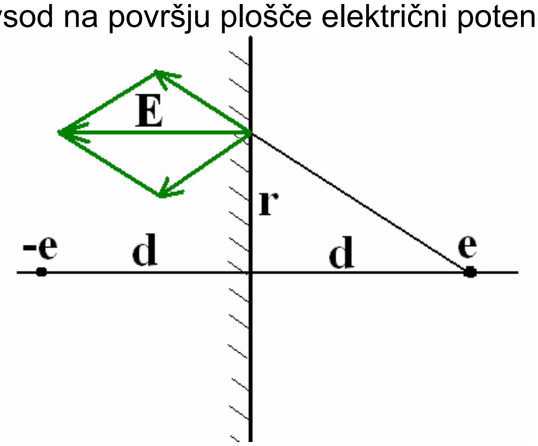


Velika oddaljenost pomeni, da je r>>d. Situacija je predstavljena na levi sliki, shematsko pa tudi na desni. Računali bomo projekcijo električne poljske jakosti na radialno smer (E_r) in projekcijo električne poljske jakosti na tangentno smer (E_t). Dovolj je, da obravnavamo problem v ravnini, saj je dipol osno simetričen. Električna poljska jakost zato je odvisna samo od r in θ. Oglejmo si najprej E_t. Ta je enaka $E_t = (E_1 + E_2)\sin\alpha$. Pri velikih oddaljenostih je $E_1 \approx E_2 \approx \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Kot α je majhen, $\sin\alpha \approx \alpha \approx \dfrac{BC}{2r} \approx \dfrac{d\sin\theta}{2r}$. S C smo označili točko, ki je od mesta, kjer računamo električno poljsko jakost, enako oddaljena, kot točka B. Iz navedenega sledi $E_t \approx \dfrac{ed\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{p_e\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Ker bomo v glavnem obravnavali samo primere, ko je pogoj d<<r dobro izpolnjen, bomo zapisali kar $E_t = \dfrac{p_e\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Zdaj si oglejmo še projekcijo na radialno smer E_r. Ta je enaka $E_r = (E_1 - E_2)\cos\alpha$. Tu lahko pri velikih oddaljenostih vzamemo $\cos\alpha \approx 1$, razlike med E_1 in E_2 pa seveda ne smemo zanemariti. Ta nastopa, ker se $r_2 = r_1 + AC \approx r_1 + d\cos\theta$ razlikuje od r_1. V velikih oddaljenostih lahko razliko $E_1 - E_2$ izračunamo s pomočjo odvoda dE/dr, pri čemer je $E = e/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Velja $E_1 - E_2 \approx -\dfrac{dE}{dr} d\cos\theta = \dfrac{2de\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{2p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. V veliki oddaljenosti od dipola torej velja $E_r = \dfrac{2p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. E_r je po velikosti največja pri $\theta=0$, ko kaže stran od dipola in pri $\theta=\pi$, ko kaže proti dipolu. Nič je enaka pri $\theta=\pi/2$. Nasprotno je E_t nič pri $\theta=0$ in $\theta=\pi$ ter največja pri $\theta=\pi/2$. Tedaj ima smer nasprotno od smeri dipola.

* V splošnem je električna poljska jakost daleč od dipola enaka $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(\dfrac{3}{r^2}(\vec{p}_e\vec{r})\vec{r} - \vec{p}_e\right)$. Tu je $\vec{r}$ vektor od dipola do točke, v kateri iščemo električno poljsko jakost.

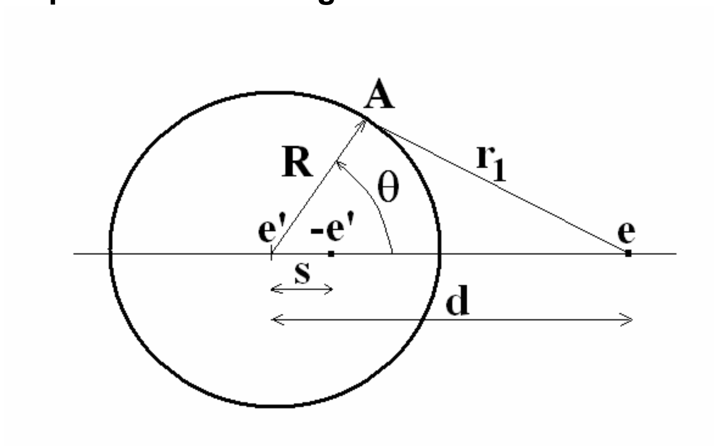
7. Točkast električni naboj e leži v oddaljenosti d od velike ozemljene prevodne ravne plošče. Izračunajmo površinsko gostoto električnega naboja σ na plošči in silo med ploščo in nabojem.

Uporabimo metodo preslikave nabojev, pri kateri je električno polje nad ploščo tako, kot bi ga povzročala naboj e in naboj –e v zrcalni legi glede na ploščo. V tem primeru je povsod na površju plošče električni potencial nič.



Električna poljska jakost E tik nad površjem plošče je $E = \frac{ed}{2\pi\varepsilon_0(d^2+r^2)^{3/2}}$. Iz Gaussovega zakona sledi σ = -D = -ε_0E. Silo F med ploščo in nabojem izračunamo kot silo med nabojema e in –e. Enaka je $F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}$.

8. V razdalji d od nenabite izolirane prevodne krogle s polmerom R leži točkast naboj e. Električno polje influenciranega naboja na površju krogle je zunaj krogle enako električnemu polju dveh točkastih nabojev z velikostjo e' in –e'. Naboj e' leži v središču krogle, naboj –e' pa v oddaljenosti s od središča krogle na zveznici središča krogle in naboja e. Izračunajmo, kolikšna sta e' in s. V primeru, ko je d>>s (prevodna krogla v homogenem električnem polju), izračunajmo površinsko gostoto naboja in električni dipolni moment krogle.



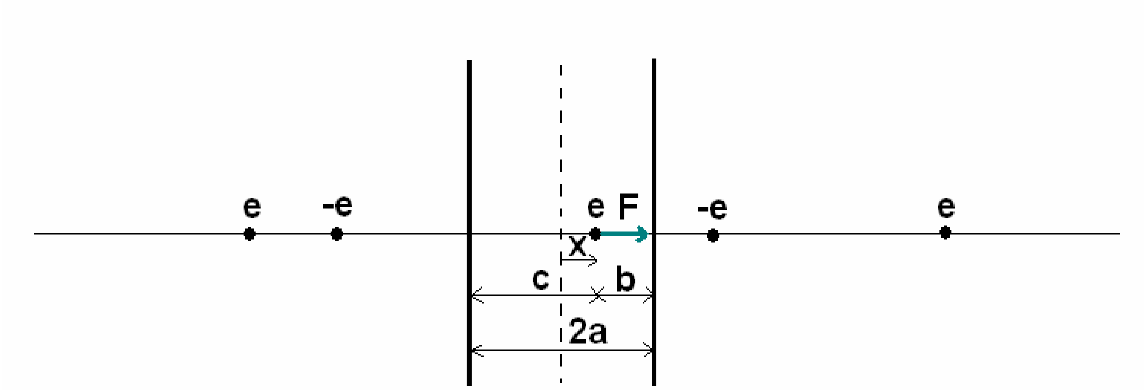
Razdaljo od naboja e do poljubne točke A na površju krogle označimo z r_1. Razdaljo od naboja -e' do iste točke označimo z r2 (ni na sliki). Električni potencial v točki A je enak $U = \frac{e'}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{e'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$. Površje prevodne krogle je ekvipotencialna ploskev, zato mora biti vsota drugega in tretjega člena, ki sta odvisna od lege točke A, enaka nič. Razdalji r_1 in r_2 izrazimo s kosinusnim izrekom:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{d^2+R^2-2dR\cos\theta} = d\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}, \quad a = R/d \\ r_2 &= \sqrt{s^2+R^2-2sR\cos\theta} = R\sqrt{1+b^2-2b\cos\theta}, \quad b = s/R \end{aligned}.$$

Vsota drugega in tretjega člena v izrazu za električni potencial je nič, ko je a = b in e/d = e'/R. Velja torej s = R^2/d in e' = eR/d. Električno polje influenciranega naboja je enako polju električnega dipola z dipolnim momentom p_e = e's = eR^3/d^2. Središče dipola je v razdalji s/2 od središča krogle.
V primeru, ko je d>>r je s <<r. Dipol je praktično v središču krogle, dopolni moment pa je enak $p_e = eR^3/d^2 = 4\pi\varepsilon_0 ER^3$. Tu je E jakost (skoraj homogenega) električnega polja na mestu krogle. Enak dipol seveda dobimo, če postavimo kroglo v homogeno električno polje z jakostjo E. Izračunajmo še površinsko

gostoto električnega naboja na krogli. Ta je enaka $\sigma = \varepsilon_0 E_r$, pri čemer je E_r projekcija električne poljske jakosti na radialno smer tik nad površjem krogle. Er je vsota dveh prispevkov: prispevka zunanjega električnega polja $E_{1r} = -E\cos\theta$ in prispevka dipola v sredini $E_{2r} = -\dfrac{2p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -2E\cos\theta$. Tu smo zapisali znak -, ker je kot θ v našem primeru ravno π minus kot θ, ki smo ga uporabili pri izračunu električnega polja dipola. Projekcija električne poljske jakosti na radialno smer je torej enaka $E_r = E_{1r} + E_{2r} = -3E\cos\theta$. Iz tega sledi $\sigma = -3\varepsilon_0 E\cos\theta$.
*Obravnavamo lahko še eno limito: d = R+x, x<<R. V tem primeru je s = R-x in e'=e. Rezultat je v bližini naboja e enak kot pri ozemljeni (ali razsežni) prevodni ravni plošči. V tem primeru je električno polje oddaljenega naboja e' v sredini krogle zanemarljivo.
**Električni dipolni moment prevodne krogle v električnem polju je enak električnemu dipolnemu momentu enako velike dielektrične krogle v limiti $\varepsilon\to\infty$.

9. Med dve veliki vzporedni prevodni plošči v razdalji 2a damo mejhno telo z električnim nabojem e , ki pa ne leži na sredi, ampak je za razdaljo x premaknjeno proti eni plošči. Razdaljo do bližnje plošče označimo z v b = a - x, razdaljo do bolj oddaljene pa s c = a + x (b+c = 2a). S kolikšno silo deluje influenciran naboj na ploščah na naboj med ploščama?



Pomagamo si z zrcaljenjem nabojev. Zrcalna slika naboja e na desni plošči ima naboj –e in je oddaljena od plošče za b. Električno polje tega naboja pa influencira naboj na levi plošči, katerega polje med ploščama opišemo s poljem zrcalne slike e v razdalji 2a + b od leve plošče. Polje tega naboja pa zopet influencira naboj v desni plošči... Tako dobimo neskončno zaporedje nabojev e in –e na obeh straneh. Na desni so naboji –e oddaljeni od plošče za b, 4a+b, 8a+b, 12a+b,... Naboji e so oddaljeni od plošče za 2a+c, 6a+c, 10a+c,... Levo od leve plošče dobimo naboje –e v razdaljah c, 4a+c, 8a+c, 12a+c,... od plošče Oddaljenosti nabojev e od leve plošče pa so enake 2a+b, 6a+b, 10a+b,... Sila influenciranega naboja na naboj med ploščama je enaka vsoti sil vseh omenjenih nabojev. Enaka je

$$F=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{(2b)^2}+\frac{1}{(4a+2b)^2}+\frac{1}{(8a+2b)^2}+..\right)-\left(\frac{1}{(2c)^2}+\frac{1}{(4a+2c)^2}+\frac{1}{(8a+2c)^2}+..\right)\right\}$$

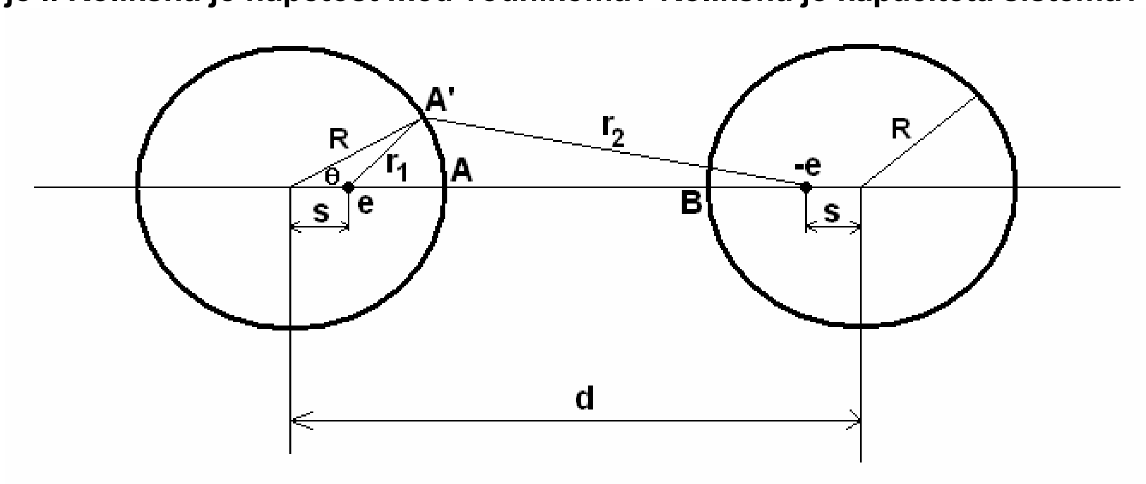
Člene paroma odštejemo : $\frac{1}{(2b)^2}-\frac{1}{(2c)^2}=\frac{ax}{(a^2-x^2)^2}$, itd in pri tem dobimo

$F=\frac{e^2ax}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{\left[(2n+1)^2a^2-x^2\right]^2}$. Če nismo posebej natančni, se zadovoljimo s prvim členom vsote (n=0), ki ga prispevata najbližja zrcalna naboja:

$F\approx\frac{e^2ax}{4\pi\varepsilon_0(a^2-x^2)^2}$. Pravi rezultat se razlikuje od tega izraza za nekaj %. Telo pritegne tista plošča, kateri je bližje. Le v sredini med ploščama (x=0) ni sile.

*Dobljeni izraz ne velja v neposredni bližini plošče (x≈a). Tu je treba upoštevati, da telo med ploščama ni točkasto.

10. Dva dolga vzporedna valjasta vodnika s polmerom R sta v medsebojni razdalji d. Na enem je električni naboj e, na drugem pa –e. Dolžina vodnikov je l. Kolikšna je napetost med vodnikoma? Kolikšna je kapaciteta sistema?



Tudi tu si pomagamo z zrcaljenjem naboja. Električno polje zunaj vodnikov je tako, kot bo ga povzročala enakomerna porazdelitev naboja po dveh tankih ekscentrično postavljenih vodnikih v razdalji s od središča vodnikov. Najprej preverimo, da je to res in izračunajmo razdaljo s. Električna potenciala v razdaljah a in b od dolgega linearnega vodnika sta povezana na naslednji način: $U(b) = U(a) -(e/2\pi\varepsilon_0 l)\ln(b/a)$. Pomagajmo si s to zvezo in povežimo potenciala v točkah A in A': $U(A')=U(A)-\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_1}{R-s}\right)+\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_2}{d-R-s}\right)$. Združimo logaritma: $U(A')=U(A)+\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{r_2(R-s)}{r_1(d-R-s)}\right)$. Razdalji r_1 in r_2 izrazimo s kosinusnim izrekom:

$$r_1 = \sqrt{R^2 + s^2 - 2Rs\cos\theta} = R\sqrt{1 + (s/R)^2 - (s/R)\cos\theta}$$
$$r_2 = \sqrt{(d-s)^2 + R^2 - 2R(d-s)\cos\theta} = (d-s)\sqrt{1 + (R/(d-s))^2 - 2(R/(d-s))\cos\theta}$$

Argument logaritma je neodvisen od kota θ, ko je s/R = R/(d-s). V tem primeru je električni potencial po površju levega vodnika konstanten. Enako velja za desni vodnik. Za izračun ekscentričnosti s dobimo kvadratno enačbo $s^2 - sd + R^2 = 0$.

Upoštevamo rešitev, pri kateri gre s→0, ko d narašča: $s = \dfrac{2R^2}{d + \sqrt{d^2 - 4R^2}}$. Druga rešitev ustreza legi nasprotnega zrcaljenega naboja in ne predstavlja nič novega. Električna napetost med vodnikoma U je enaka razliki U(A) – U(B).

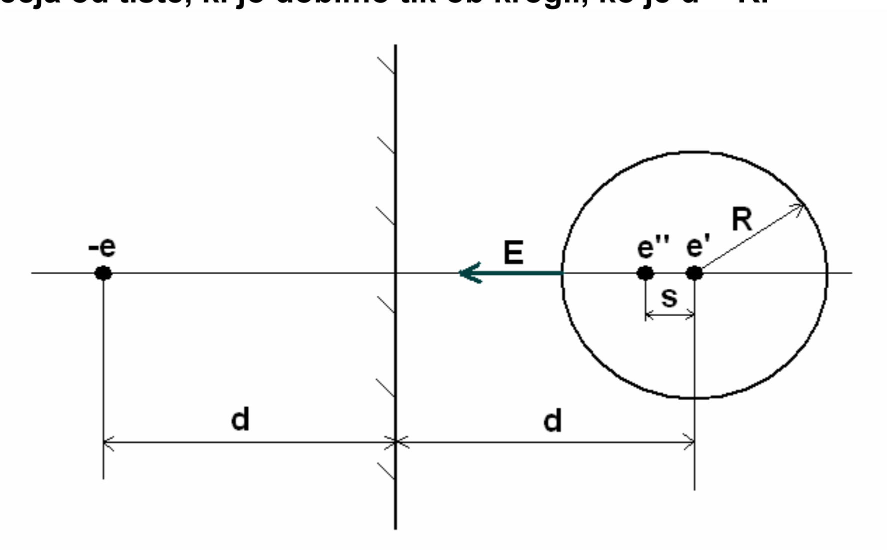
Izračunajmo še električni potencial v točki B: $U(B) = U(A) - \dfrac{e}{\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\dfrac{d-R-s}{R-s}\right)$.

Upoštevamo vrednost za s in dobimo $U = \dfrac{e}{\pi\varepsilon_0 l}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; $x = \dfrac{d}{2R}$.

Kapaciteto sistema izračunamo iz zveze e = CU in dobimo $C = \dfrac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$.

*Podobnega računa za sistem dveh krogel ne moremo narediti. Linijski naboj se namreč na valjasti površini preslika v enako velik linijski naboj nasprotnega znaka. Točkasti naboj se na krogelni površini preslika v manjši točkasti naboj nasprotnega znaka, zato samo naboja e in –e nista dovolj, da bi po celi krogelni površini izenačili potencial.

11. Ozemljeni kovinski plošči približamo kovinsko kroglo s polmerom R, ki nosi električni naboj e. Razdalja med kroglo in ploščo naj bo d = 2R. Ocenimo, za koliko je v tem primeru največja električna poljska jakost ob krogli večja od tiste, ki jo dobimo tik ob krogli, ko je d>>R.



V primeru, ko je d>>R, je električna poljska jakost tik ob krogli enaka $E_0 = e/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Ko je krogla blizu plošče moramo upoštevati, da se električni naboj na krogli prerazporedi. Dodatno moramo upoštevati še električno polje naboja nasprotnega znaka na plošči.Največja električna poljska jakost je tik ob krogli, v točki, v kateri je krogla najbliže plošči. Pri naši oceni bomo vzeli, da je električno polje naboja na krogli tako, kot bi ga povzročala točkast naboj e' v središču krogle in točkast naboj e'' v oddaljenosti s od središča krogle (e' + e'' = e). Za električno polje naboja na plošči bomo vzeli, da je tako, kot bi ga povzročal točkast naboj –e v oddaljenosti d od plošče na drugi strani. Tu delitve ne upoštevamo, kar je upravičeno, če je s << 2d. V našem primeru je s = R/4, kar je šestnajstkrat manj od 2d = 4R, zato pričakujemo, da ocena ne bo slaba. Ob tej predpostavki je $s = R^2/2d$, e'' = eR/2d in e' = e – e''. Največja električna poljska jakost je v tem primeru enaka $E = \frac{e'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{e''}{4\pi\varepsilon_0 (R-s)^2} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2d-R)^2}$. Če definiramo x = R/2d, dobimo $E = E_0\left(1 - x + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^2}\right) = E_0\left(1 + x^2\frac{3-x}{(1-x)^2}\right)$. V našem primeru je x = ¼ in $E = 1{,}31E_0$. Električna poljska jakost ob krogli se poveča približno za tretjino.

12. Spremenljiv kondenzator naredimo tako, da med elektrodama valjastega kondenzatorja premikamo dielektrik. Vzemimo, da je notranji polmer zunanje elektrode b = 1 cm, polmer notranje elektrode pa a = 6 mm. Kondenzator je dolg l = 20 cm. Kolikšno najmanjšo oziroma največjo kapaciteto dosežemo, če cev iz dielektrika z dielektričnostjo 3 zapolni ves prostor med elektrodama v radialni smeri? Kolikšno največjo kapaciteto dosežemo, če ima cev iz dielektrika notranji polmer 6 mm, zunanjega pa c = 9 mm?

Kapaciteta praznega kondenzatorja je $C = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(b/a)$ = 22 pF. Ko je ves prostor med elektrodama zapolnjen z dielektrikom, je kapaciteta kondenzatorja 66 pF. V tem območju lahko zvezno spreminjamo kapaciteto brez uporabe drsnih kontaktov.

V primeru, ko cev iz dielektrika ne zapolni celega prostora med elektrodama v radialni smeri, si del kondenzatorja, v katerem je cev, lahko predstavljamo kot dva zaporedno vezanja valjasta kondenzatorja: kondenzator s polmerom elektrod a in c, ki je napolnjen z dielektrikom in kondenzator s polmeroma elektrod c in b, v katerem ni dielektrika. V primeru, ko porinemo dielektrik v kondenzator do konca, sta ti dve kapaciteti $C_1 = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l/\ln(c/a)$ = 82 pF in $C_2 = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(b/c)$ = 106 pF. Skupna kapaciteta obeh kondenzatorjev je $C = C_1C_2/(C_1+C_2)$ = 46 pF. V tem primeru je seveda razpon kapacitet 22 pF – 46 pF manjši, kot v primeru, ko dielektrik izpolnjuje ves prostor med elektrodama.

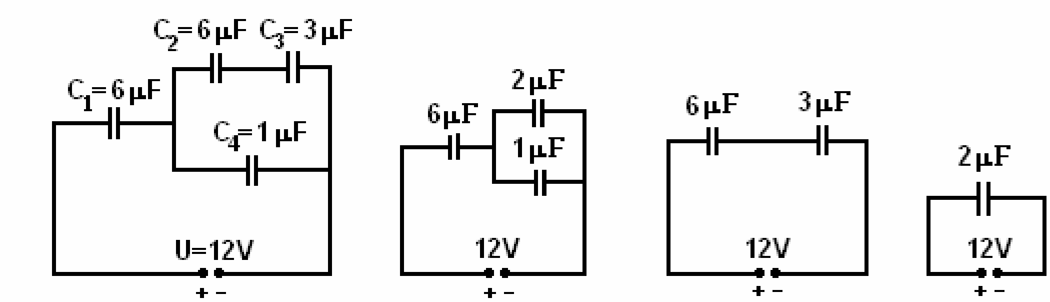
13. Prostor med ploščama ploščatega kondenzatorja z velikostjo plošč S in razmakom med ploščama d je zapolnjen z nehomogenim dielektrikom, katerega dielektričnost se od ene proti drugi plošči spreminja kot $\varepsilon = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)$. Napetost med ploščama je U. Kolikšen je naboj na eni plošči? Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja?

V kondenzatorju se ne spreminja električni pretok Φ_e = DS, zato je D = konst. Spreminja pa se električna poljska jakost: $E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{D}{\varepsilon_0\left[\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)\right]}$.

Napetost med ploščama je enaka $U = \int_0^d E dx = \frac{Dd \ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$. Električni naboj na eni plošči je enak $e = DS = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)d} U = CU$.

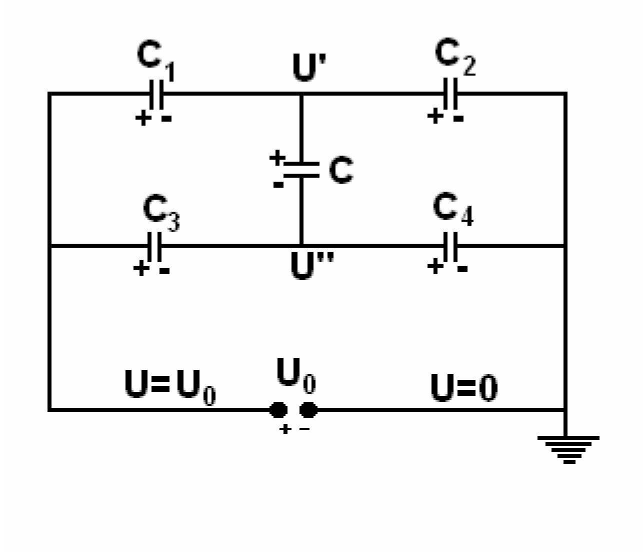
* Dobljenega izraza za kapaciteto, $C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)S}{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)d}$, ni mogoče takoj primerjati z znanim izrazom C = $\varepsilon\varepsilon_0$S/d, ki smo ga dobili v primeru homogenega dielektrika ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$). Lahko pa izračunamo limito, ko gre $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$ in pri tem dobimo enak izraz.

14. V vezju kondenzatorjev na sliki izračunajmo napetosti na kondenzatorjih in naboje med ploščami kondenzatorjev.



V vezju postopoma nadomeščamo vzporedno in zaporedno vezane kondenzatorje z nadomestnimi in s tem poenostavljamo vezje. Nadomestna kapaciteta celotnega vezja je 2 μF, zato prečrpa generator naboj e = 2μF.12V = 24 μAs. Tolikšen je tudi naboj e_1 na ploščah kondenzatorja C_1. Napetost na kondenzatorju C_1 je enaka $U_1 = e_1/C_1$ = 4 V. Napetost na kondenzatorju C_4 je enaka $U_4 = U - U_1$ = 8 V, naboj na ploščah tega kondenzatorja pa je $e_4 = C_4U_4$ = 8 μAs. Na ploščah kondenzatorjev C_2 in C_3 je enak naboj. Lahko ga izračunamo kot razliko naboja na ploščah kondenzatorja C_1 in naboja na ploščah kondenzatorja C_4, $e_2 = e_3 = e_1 - e_4$ = 16 μAs, ali pa kot produkt napetosti (8 V) in nadomestne kapacitete (2 μF). Napetost na kondenzatorju C_2 je enaka $U_2 = e_2/C_2$ = 2,7 V, napetost na kondenzatorju C_3 pa je enaka $U_3 = e_3/C_3$ = 5,3 V.

15. V mostičnem vezju na sliki izračunajmo napetosti na kondenzatorjih in naboje na ploščah kondenzatorjev.



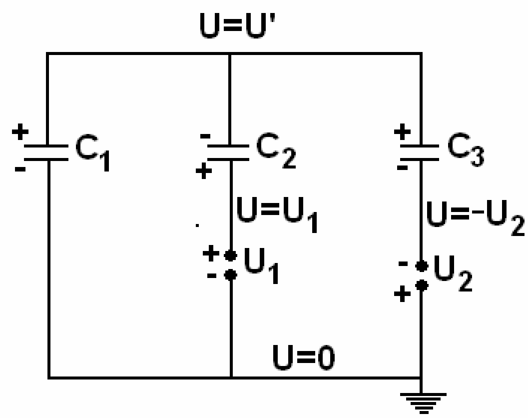
Tu z nadomeščanjem vzporedno in zaporedno vezanih kondenzatorjev ne gre. Računali bomo z vozliščnimi potenciali. Zaradi enostavnosti računanja smo izbrali točko v vezju, kjer je električni potencial nič. Izbrali smo jo na eni strani generatorja. Na drugi strani generatorja je električni potencial U_0. Izračunali bomo vozliščna potenciala U' in U''. Znak nabojev na ploščah kondenzatorjev C_1, C_2, C_3 in C_4 brez težav uganemo. Znaka nabojev na ploščah kondenzatorja C ne moremo uganiti, zato ga poljubno izberemo. Če smo se zmotili, bo rezultat negativen, a velikost naboja bo prava. Vsota nabojev na ploščah kondenzatorja, ki so vezane na vozlišče s potencialom U' je nič: $-e_1 + e_2 + e = 0$. Prav tako je nič vsota nabojev na ploščah, ki so vezane na vozlišče s potencialom U'': $-e_3 + e_4 - e = 0$. Velja namreč zakon o ohranitvi naboja. Naboje izračunamo s pomočjo napetosti na kondenzatorjih (razlike potencialov): $e_1 = (U_0 - U')C_1$, $e_2 = U'C_2$, $e_3 = (U_0 - U'')C_3$, $E_4 = U''C_4$, $e = (U' - U'')C$. Te izraze vstavimo v enačbi, ki sta povezani z ohranitvijo naboja in dobimo dve enačbi za U' in U'':
$U'(C_1 + C_2 + C) - U''C = U_0C_1$ $\quad$ $-U'C + U''(C_3 + C_4 + C) = U_0C_3$.

Rešitvi enačb sta $U' = U_0 \dfrac{C_1(C_3 + C_4) + C(C_1 + C_3)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) + C(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}$

$U'' = U_0 \dfrac{C_3(C_1 + C_2) + C(C_1 + C_3)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4) + C(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)}$. Ko sta potenciala U' in U'' znana, lahko takoj izračunamo napetosti na kondenzatorjih in naboje na ploščah kondenzatorjev.

* Kot zanimivost poglejmo, kdaj sta potenciala U' in U'' enaka. Iz prej zapisanih izrazov vidimo, da je tedaj $C_1(C_3+C_4) = C_3(C_1+C_2)$. Enačbo delimo s produktom C_1C_3 in dobimo $1 + C_4/C_3 = 1 + C_2/C_1$, ali $C_4/C_3 = C_2/C_1$. Zveza med kapacitetami je podobna pogoju za ravnovesje Wheatstonovega mostu.

16. V vezju z dvema generatorjema izračunajmo napetosti med ploščami kondenzatorjev in naboje na ploščah kondenzatorjev. Konkretno vzemimo, da je $U_1 = U_2 = 18V$, kapacitete pa naj bodo $C_1 = 6\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ $C_3 = 2\ \mu F$.



Izračunali bomo vozliščni potencial U'. Izberemo točko, kjer je U = 0. Znak nabojev na ploščah kondenzatorjev poljubno izberemo. Naboji na ploščah kondenzatorjev so enaki: $e_1 = U'C_1$, $e_2 = (U_1 – U')C_2$ in $e_3 = (U' + U_2)C_3$. Iz zakona o ohranitvi naboja sledi $e_1 – e_2 + e_3 = 0$. Vstavimo prej zapisane izraze in dobimo $U' = (U_1C_2 – U_2C_3)/(C_1 + C_2 + C_3)$. S konkretnimi podatki dobimo $U' = 3V$, $U_1 = U'$, $e_1 = C_1U_1 = 18\ \mu As$, $U_2 = U_1 – U' = 15V$, $e_2 = C_2U_2 = 60\ \mu As$, $U_3 = U' + U_2 = 21\ V$ in $e_3 = C_3U_3 = 42\ \mu As$.