Teorija barvanj grafov

- uvod v raziskovanju -

doc. dr. R. Škrekovski

Oddelek za Matematiko
Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Univerza v Ljubljani

naslov: Teorija barvanj grafov

avtorske pravice: dr. Riste Škrekovski

izdaja: druga dopolnjena izdaja

Založnik: samozaložba

avtor: Riste Škrekovski

leto izida: 2010 (v Ljubljani)

natis: elektronsko gradivo
http://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Gradiva/BG-skripta.pdf

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.174.7

ŠKREKOVSKI, Riste
Teorija barvanj grafov [Elektronski vir] : uvod v raziskovanju /
R. Škrekovski. - 2. dopolnjena izd. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2010

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/ skreko/Gradiva/BG-skripta.pdf

ISBN 978-961-92887-0-2

251443968

Kazalo

1 Barvanja grafov **6**

1.1 Problem štirih barv, izrek ali domneva? . . . 7

1.2 Kritični grafi . . . 8

1.2.1 k-konstruktibilni grafi . . . 9

1.3 Hadwigerjeva in Hajóseva domneva . . . 10

1.4 Popolni grafi . . . 11

1.5 Grafi na ploskvah . . . 11

1.5.1 Grafi na ploskvah majhnega roda . . . 13

1.6 Barvanje povezav grafa . . . 14

1.7 Popolno barvanje grafa . . . 15

1.8 Nepravilno barvanje . . . 16

1.9 Porazdelitveno število . . . 17

1.10 Posplošeni Grötzschev izrek . . . 18

1.11 Pretoki grafov . . . 21

1.12 Izrek Erdösa . . . 23

2 Seznamska barvanja **27**

2.1 Seznamsko barvanje ravninskih grafov . . . 29

2.1.1 Ravninski grafi brez trikotnikov . . . 30

2.1.2 Seznamsko barvanje s separacijo . . . 31

2.2 Seznamsko barvanje povezav . . . 33

2.3 Seznamsko popolno barvanje . . . 33

2.4 Seznamska nepravilna barvanja . . . 36

2.5 Posplošeni Grötzschev izrek za seznamska barvanja . . . 40

Oznake in definicije

Naj bo G graf. Množico njegovih točk označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. K_n je polni graf na n točkah, $K_{m,n}$ pa je polni dvodelni graf, katerega particija je moči m in n. Cikel na n točkah imenujemo *n-cikel* in ga označimo s C_n, pot dolžine n pa imenujemo *n-pot* in jo označimo s P_n. Za izomorfna grafa G_1 in G_2 pišemo $G_1 \cong G_2$. Z $G_1 + G_2$ označimo graf, ki ga dobimo iz grafov G_1 in G_2 tako, da povežemo vsako točko grafa G_1 z vsako točko grafa G_2. Komplement grafa G označimo z $\overline{G}$.

Stopnjo točke v označimo z $d(v)$. V usmerjenem grafu G označimo z $d^+(v)$ oz. $d^-(v)$ *vhodno* oz. *izhodno* stopnjo točke $v \in V(G)$. Množico sosed točke v označimo z $N(v)$. Naj bosta $\Delta(G)$ in $\delta(G)$ maksimalna in minimalna stopnja grafa G. Graf je *r-regularen*, če imajo vse točke stopnjo r. 3-regularne grafe imenujemo *kubične*. Če pa je graf maksimalne stopnje 3, potem mu rečemo *subkubičen* graf. Graf je *sod*, če je vsaka točka grafa sode stopnje.

Graf G je *k-povezan*, če ima vsaj $k+1$ točk in ne razpade, če odstranimo poljubnih $k-1$ ali manj točk. Naj bo T množica točk v povezanem grafu G. Če graf $G - T$ ni povezan, potem je T *prerez*. V primeru, da je $T = \{v\}$, potem v imenujemo *prerezna* točka. Maksimalne 2-povezane podgrafe v grafu imenujemo *bloke*. Povezan graf G je *po povezavah k-povezan*, če ostane povezan, kadar odstranimo $k-1$ ali manj povezav. Povezan graf brez ciklov je *drevo*. Če je vsaka komponenta grafa drevo, potem ga imenujemo *gozd*.

Graf je *ravninski*, če se ga da narisati v ravnini, ne da bi se povezave sekale. Taki risbi pravimo *vložitev* v ravnino. Ravninski graf je *zunanje-ravninski*, če ima tako vložitev v ravnino, da vse točke ležijo na zunanjem licu. V tem delu bomo zmeraj privzeli, da je ravninski graf že vložen v ravnini. Graf vložen na ploskvi je *triangulacija*, če je vsako lice trikotnik. Ravninski graf je *skoraj-triangulacija*, če je vsako lice, razen mogoče zunanjega, trikotnik. Graf na ploskvi je *kvadrangulacija*, če je vsako lice 4-cikel. *Zunanji obhod* ravninskega grafa je rob zunanjega lica (t.j. neskončnega lica). Naj bo C cikel v ravninskem grafu G. Z $\mathrm{Int}(C)$ označimo podgraf grafa G, ki ga tvorijo povezave ter točke, ki ležijo na C ali v njegovi notranjosti. Podobno definiramo $\mathrm{Out}(C)$. Cikel C je *separacijski*, če velja $V(\mathrm{Out}(C)) \neq V(G)$ ter $V(\mathrm{Int}(C)) \neq V(G)$. Graf G je *apeks*, če obstaja tako točko $v \in V(G)$, da je $G - v$ ravninski graf. Množico lic vloženega grafa G v ravnino oz. neki drugi ploskvi, označimo s $F(G)$. *Povezavna širina* $\mathrm{ew}(G)$ vloženega grafa G na neki ploskvi je dolžina najkrajšega nestisljivega cikla.

Skrčitev povezave $e = uv$ v grafu G pomeni, da povezavo odstranimo ter identificiramo točki u in v. Graf H je *minor* grafa G, če lahko H dobimo iz G tako, da odstranimo in skrčimo nekaj povezav (in odstranimo nekaj izoliranih točk). Če H ni minor grafa G, potem G imenujemo *H-minor-prost* graf. *Subdivizija* povezave $e = uv$ pomeni, da povezavo e odstranimo ter grafu pridružimo novo točko w, ki jo povežemo z u in v.

Multigraf je graf, v katerem so dovoljene vzporedne povezave. V multigrafu G označimo z $\mu(G)$ *multiplikativnost povezav*. To pomeni, koliko je največ vzporednih povezav med poljubnima dvema točkama multigrafa.

Poglavje 1

Barvanja grafov

Graf je k-*obarvljiv*, če obstaja taka preslikava $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, da je $c(u) \neq c(v)$ za poljubni sosednji točki u in v grafa G. Tako preslikavo imenujemo *barvanje* oziroma k-*barvanje* grafa. *Kromatično število* $\chi(G)$ grafa G je najmanjše število k, za katero je G k-obarvljiv. 1-obarvljivi grafi so grafi brez povezav in 2-obarvljivi grafi so natanko dvodelni grafi. Seveda število barv, ki so potrebne, da bi graf obarvali, ni večje, kot je število točk grafa. Nordhaus-Gaddumov izrek [76] poda zelo zanimive meje za kromatični števili grafa ter njegovega komplementa.

Izrek 1.0.1 (Nordhaus in Gaddum). *Za dani graf G na n točkah naj bo $\chi = \chi(G)$ ter $\overline{\chi} = \chi(\overline{G})$. Tedaj velja*

$$2\sqrt{n} \leq \chi + \overline{\chi} \leq n + 1 \qquad \textit{in} \qquad n \leq \chi \cdot \overline{\chi} \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Naj bo G graf maksimalne stopnje Δ. Potem je G $(\Delta + 1)$-obarvljiv. To pokažemo takole. Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ točke grafa G. Barvajmo točke drugo za drugo. V splošnem koraku, pri barvanju točke v_i, zmeraj obstaja prosta barva, s katero bi to točko obarvali, saj je stopnja točke v_i strogo manjša od $\Delta + 1$. Postopek se konča tako, da dobimo $(\Delta + 1)$-barvanje grafa G. Naslednji Brooksov izrek [13] pa nam pove, kdaj je G Δ-obarvljiv. Dokaz izreka je povzet po Melnikovu in Vizingu [70].

Izrek 1.0.2 (Brooks). *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Če G ni lih cikel niti poln graf na $\Delta + 1$ točkah, potem je $\chi(G) \leq \Delta$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je izrek napačen in naj bo G čim manjši protiprimer. Ni se težko prepričati, da mora biti $\Delta \geq 3$ ter da je vsaka točka grafa G stopnje Δ. Naj bo n število točk grafa G ter v poljubna točka grafa G. Po minimalnosti obstaja Δ-barvanje grafa $G - v$. V tem barvanju so vse sosede točke v različno obarvane, sicer barvanje lahko razširimo na G. Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sosede točke v ter naj bodo ustrezno obarvane z barvami $1, 2, \ldots, \Delta$. Označimo s $H(i, j)$ podgraf grafa G, induciranega s točkami, ki imajo barvo i ali barvo j. Komponento grafa $H(i, j)$, ki vsebuje točko u, označimo s $H_u(i, j)$.

Trditev 1. *Poljubni dve sosedi v_i in v_j točke v sta v isti komponenti grafa $H(i, j)$.*

Če to ni res, potem v komponenti, v kateri je v_i, vse točke z barvo i prebarvamo z barvo j in obratno. Nazadnje v obarvamo z barvo i in dobimo iskano barvanje grafa G.

Trditev 2. *Vsaka točka iz $H_{v_i}(i, j)$, ki je različna od v_i in v_j, je stopnje 2.*

Iz točke v_i se začnimo sprehajati po grafu $H_{v_i}(i, j)$. Naj bo u prva točka, ki jo srečamo, stopnje ≥ 3 ter različna od v_i in v_j. Zagotovo obstaja barva, različna od i in j, s katero ni obarvana nobena od sosed točke u. S to barvo obarvamo točko u in dobimo protislovje iz trditve 1.

Trditev 3. *Za poti $H_{v_j}(i, j)$ in $H_{v_j}(k, j)$ je v_j edina skupna točka.*

Recimo, da je u druga skupna točka teh poti. Tedaj ima točka u štiri sosede, ki so pobarvane z barvami i in k. Zaradi tega obstaja prosta barva, s katero pobarvamo točko u ter dobimo protislovje iz trditev 1.

Ker G ni polni graf, na $\Delta + 1$ točkah obstajata taki v_i in v_j, ki nista sosedi. Naj bo u točka grafa G, ki je obarvana z barvo j ter je sosednja z v_i. Ta točka je različna od v_j. Naj bo $k \neq i$ in $k \neq j$. V $H_{v_i}(i, k)$ točkam zamenjamo barve. V novem barvanju je točka u skupna za poti $H_{v_j}(i, j)$ in $H_{v_j}(k, j)$. To pa nasprotuje trditvi 3 in s tem je dokaz končan. $\square$

1.1 Problem štirih barv, izrek ali domneva?

O zgodovini barvanj grafov ne moremo govoriti, ne da bi omenili problem o štirih barv. Začelo se je takole. Leta 1852 je Francis Guthrie opazil, da se regionalni zemljevid Anglije da obarvati s štirimi barvami tako, da sta katerikoli dve sosednji regiji različno obarvani. (Regiji sta sosednji le, če imata skupni rob.) Ugotovil je, da so v splošnem potrebne vsaj štiri barve ter je postavil domnevo, da to število barv tudi zadostuje [38].

Problem štirih barv (Francis Guthrie). *Regije poljubnega zemljevida se lahko obarvajo s štirimi barvami tako, da sta katerikoli dve sosednji regiji različno obarvani.*

Francis Guthrie je povedal gornjo domnevo svojemu bratu Fredericku. Frederick pa je predstavil ta problem svojemu profesorju DeMorganu. Le-ta pa je pisal o njem problemu svojemu kolegu Wiliamu Rowanu Hamiltonu. To pismo je prvi (znani) dokument, v katerem se omenja problem štirih barv.

Problem je bil v celoti pozabljen do leta 1878, ko ga je Artur Cayley omenil članom Londonskega društva matematikov. Leta 1879 je Tait [90, 91] objavil rešitev problema. Tudi Kempe [52, 53] je objavil rešitev. Njuna dokaza pa nista bila popolna. Leta 1890, torej deset let kasneje, je Heawood [44] ugotovil napako v Kempejevem dokazu ter prvi dokazal, da za barvanje zadostuje 5 barv.

Izrek o petih barvah (Heawood). *Vsak ravninski graf je 5-obarvljiv.*

Leta 1969 je Heesch [45] predstavil metodo prenašanja naboja, leta 1977 pa je s to metodo Appel in Haken uspelo rešiti problem. Vendar je dokaz, ki so ga izpeljali Appel in Haken [5] ter Appel, Haken in Koch [6], zelo dolg ter zahteva računalniško obdelavo podatkov. Bolj enostaven dokaz so našli Robertson, Sanders, Seymour in Thomas [79]. Vendar tudi njihov dokaz uporablja računalniško obdelavo podatkov. Bralec naj torej sam presodi, ali je prav zapisati problem štirih barv kot izrek.

Izrek o štirih barvah (Appel in Haken). *Vsak ravninski graf je 4-obarvljiv.*

Med najbolj pomembnimi izreki o barvanju ravninskih grafov sta vsekakor naslednja dva. Prvi je Grötzschev izrek [36], ki pravi, da za ravninske grafe brez trikotnikov lahko potrebno število barv zmanjšamo za 1. Drugi pa je Borodinov izrek [12] o *acikličnem* barvanju, t.j. barvanju, pri katerem vsak par barv inducira gozd.

Izrek 1.1.1 (Grötzsch). *Vsak ravninski graf brez trikotnikov je 3-obarvljiv. Velja pa še več, poljubno 3-barvanje nekega 4-cikla ali 5-cikla grafa se da razširiti na 3-barvanje celotnega grafa.*

Izrek 1.1.2 (Borodin). *Vsak ravninski graf je aciklično 5-obarvljiv.*

1.2 Kritični grafi

Graf G je *k-kritičen*, če je $\chi(G) = k$ in je vsak strogi podgraf grafa G $(k-1)$-obarvljiv. Koncept o kritičnih grafih je prvi definiral ter začel uporabljati Dirac [22]. Ni se težko prepričati, da vsak graf z $\chi(G) \geq k$ vsebuje k-kritičen podgraf.

V razredu 1-kritičnih grafov je en sam graf, in sicer K_1. Podobno je K_2 edini 2-kritični graf. Razred lihih ciklov je natanko razred 3-kritičnih grafov. V tem delu se bomo ukvarjali predvsem s k-kritičnimi grafi za $k \geq 4$. Teh je veliko in se ne dajo tako lepo opisati. Za $k \geq 4$ velja, da je polni graf K_k edini k-kritični graf na k točkah ter ne obstaja k-kritičen graf na $k+1$ točkah. Iz Brooksovega izreka 1.0.2 sledi, da za k-kritičen graf na $n\,(> k \geq 4)$ točkah in z m povezavami velja zveza

$$2m \geq (k-1)n + 1.$$

Dirac [26] je to neenakost precej izboljšal.

Izrek 1.2.1 (Dirac). *Naj bo G k-kritičen graf na $n\,(> k \geq 4)$ točkah in z m povezavami. Tedaj je*

$$2m \geq (k-1)n + k - 3. \tag{1.1}$$

Gallai [31] je podal podobno neenakost (1.2). Če bi ti dve neenakosti primerjali, bi lahko rekli naslednje: Diracova neenakost (1.1) se izkaže kot bolj priročna pri k-kritičnih grafih z majhnim številom točk. Kadar pa imamo opraviti s k-kritičnimi grafi z velikim n, nam pride veliko bolj prav Gallaieva neenakost (1.2).

Izrek 1.2.2 (Gallai). *Naj bo G k-kritičen graf na n ($> k \geq 4$) točkah in z m povezavami. Tedaj je*

$$2m \geq (k-1)n + \frac{k-3}{k^2-3}n. \tag{1.2}$$

Nedolgo tega pa sta Kostochka in Stiebitz [59] posplošila Diracovo in Gallaievo neenakost.

Izrek 1.2.3 (Kostochka in Stiebitz). *Naj bo G k-kritičen graf na n točkah in z m povezavami. Predpostavimo, da je $n > k \geq 4$ ter $n \neq 2k-1$. Potem je*

$$2m \geq (k-1)n + \frac{k-3}{k^2-3}n + k - 4. \tag{1.3}$$

V k-kritičnem grafu G je minimalna stopnja vsaj $k-1$. Naslednji Gallaiev izrek [31] pa pove, da točke stopnje $k-1$ grafa G tvorijo lepo strukturo.

Izrek 1.2.4 (Gallai). *Naj bo $G \neq K_k$ k-kritičen graf s $k \geq 4$ in naj bo M množica točk v G stopnje $k-1$. Potem točke iz M inducirajo podgraf v G, katerega bloki so le polni grafi reda največ $k-1$ ter lihi cikli.*

Naslednji Gallaiev izrek [32] pa govori o dekompoziciji kritičnih grafov z majhnim številom točk.

Izrek 1.2.5 (Gallai). *Naj bo G k-kritičen graf s $k \geq 4$ na n točkah. Če je $n \leq 2k-2$, potem obstajata k_1-kritični graf G_1 in k_2-kritični graf G_2 tako, da je $G \cong G_1 + G_2$ ter $k = k_1 + k_2$.*

1.2.1 k-konstruktibilni grafi

Graf G je *k-konstruktibilen*, če izpolnjuje enega od naslednjih pogojev:

(a) $G \cong K_k$.

(b) G dobimo iz k-konstruktibilnih grafov G_1 in G_2 takole. Naj bo x_1y_1 povezava v G_1 in x_2y_2 povezava v G_2. Odstranimo povezavi x_1y_1 in x_2y_2, identificirajmo točki x_1 in x_2, ter nazadnje povežimo y_1 in y_2.

(c) G dobimo tako, da v nekem k-konstruktibilnem grafu identificiramo dve nesosednji točki.

Zgornjo definicijo je podal Hajós [42]. Poskušal je pokazati, da ne obstajajo ravninski 5-konstruktibilni grafi. (Vendar mu to ni uspelo.) Potem pa bi iz naslednjega rezultata sledil izrek o štirih barvah.

Izrek 1.2.6 (Hajós). *Graf ima kromatično število vsaj k natanko tedaj, ko vsebuje k-konstruktibilen graf kot podgraf. Vsak k-kritičen graf je k-konstruktibilen.*

1.3 Hadwigerjeva in Hajóseva domneva

Domneva 1.3.1 (Hadwiger). *Naj bo G graf s kromatičnim številom $\geq k$. Potem je polni graf K_k minor v G.*

Zgornjo domnevo je podal Hadwiger [41] ter je dokazal njeno veljavnost za $k \leq 3$. Dirac [26] je pokazal, da velja tudi, za $k = 4$. Po Wagnerjevi karakteriziaciji K_5-minor-prostih grafov [111] sledi, da je primer $k = 5$ ekvivalenten izreku o štirih barvah. k-kritičen graf G je *k-minor-kritičen*, če je vsak minor grafa G $(k-1)$-obarvljiv. Potem je Hadwigerjeva domneva ekvivalentna trditvi, da je polni graf K_k edini k-minor-kritičen graf. Veljavnost primera $k = 6$ Hadwigerjeve domneve so pokazali Robertson, Seymour in Thomas [78]. Pravzaprav so dokazali naslednji izrek:

Izrek 1.3.2 (Robertson, Seymour in Thomas). *Vsak 6-minor-kritičen graf G, različen od K_6, je apeks.*

Po izreku o štirih barvah sledi, da je vsak apeks graf 5-obarvljiv. Torej zgornji izrek implicira, da je K_6 edini 6-minor-kritičen graf.

Kostochka [57] je dokazal naslednjo šibkejšo verzijo zgornje domneve.

Izrek 1.3.3 (Kostochka). *Obstaja taka konstanta c, da vsak graf G s kromatičnim številom*

$$\chi(G) \geq c\,t\sqrt{\frac{\lg t}{\lg 2}}$$

vsebuje polni graf K_t kot minor.

Domneva 1.3.4 (Hajós). *Naj bo G graf s kromatičnim številom $k = 5$ ali 6. Potem G vsebuje subdivizijo grafa K_k kot podgraf.*

Pravzaprav je Hajós postavil zgornjo domnevo za vsak $k \geq 1$. Veljavnost domneve za $k \leq 4$ je dokazal Dirac [22]. Catlin [16] je dokazal, da je domneva neveljavna za $k \geq 7$.

1.4 Popolni grafi

Spomnimo se, da je $\omega(G)$ red največje klike grafa ter $\alpha(G)$ moč največje neodvisne množice v grafu G. Graf G je *popoln*, če za vsak inducirani podgraf H grafa G velja $\chi(H) = \omega(H)$. Dvodelni grafi so podrazred popolnih grafov. Malo manj očitno je, da so komplementi dvodelnih grafov tudi popolni grafi. Naslednji Lovászev izrek [68] nam to posploši.

Izrek 1.4.1 (izrek o popolnih grafih). *Graf G je popoln natanko takrat, kadar je $\overline{G}$ popoln.*

Naslednji Lovászev izrek [68] pa implicira izrek o popolnih grafih.

Izrek 1.4.2 (Lovász). *Graf G je popoln natanko takrat, kadar velja*

$$|V(H)| = \alpha(H)\,\omega(H) \tag{1.4}$$

za vsak inducirani podgraf H grafa G.

Ni se težko prepričati, da za popolni graf G velja, da nobeden od grafov G in $\overline{G}$ ne vsebuje induciranega lihega cikla dolžine ≥ 5. Naslednja Bergeeva domneva [10] trdi, da je to tudi zadosten pogoj, za popolnost grafa.

Domneva 1.4.3 (domneva o popolnih grafih). *Graf G je popoln natanko takrat, kadar nobeden od grafov G in $\overline{G}$ ne vsebuje induciranega lihega cikla dolžine ≥ 5.*

1.5 Grafi na ploskvah

Naj bo G graf, vložen na ploskvi SS z Eulerjevim rodom g. Potem Eulerjeva formula pravi, da je

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \geq 2 - g \tag{1.5}$$

in da enakost velja natanko takrat, ko je vsako lice 2-celica.

Heawoodovo število $H(g)$ je definirano takole:

$$H(g) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g}}{2} \right\rfloor. \tag{1.6}$$

Za to število velja naslednji zanimiv Heawoodov izrek [44].

Izrek 1.5.1 (Heawood). *Naj bo G graf, vložen na ploskvi SS z Eulerjevim rodom g. Potem je $\chi(G) \leq H(g)$.*

Definirajmo *kromatično število* ploskve SS kot najmanjše število k, za katero velja, da so vsi grafi vložljivi na tej ploskvi k-obarvljivi. To število označimo z $\chi(SS)$. Po izreku o štirih barvah, Franklina [30] ter Ringel in Youngs [77], sledi naslednji zelo pomemben izrek, znan pod imenom izrek o barvanju zemljevidov.

Izrek 1.5.2 (izrek o barvanju zemjevidov). *Naj bo SS ploskev, različna od Kleinove staklenice, z Eulerejevim rodom g. Potem je $\chi(SS) = H(g)$. Če pa je SS Kleinova steklenica, je $\chi(SS) = 6$.*

Kadar SS ni sfera oz. Kleinova steklenica, sledi gornji izrek iz rezultata [77], ki pravi da je maksimalni polni graf, vložljiv v SS, pravzaprav $K_{H(g)}$, kjer je g Eulerjev rod ploskve SS. Velja pa še tole:

$$\left\lceil \frac{(H(g)-3)(H(g)-4)}{6} \right\rceil \leq g < \left\lceil \frac{(H(g)-2)(H(g)-3)}{6} \right\rceil. \tag{1.7}$$

Naslednji izrek je znan kot *Diracov izrek o barvanju zemljevidov.* Njegov dokaz izreka najdemo v Dirac [24, 25] za $g = 2$ in $g \geq 4$ ter v Albertson in Hutchinson [2] za $g = 1$ in $g = 3$.

Izrek 1.5.3 (Dirac). *Naj bo G graf, vložen na ploskvi SS z Eulerjevim rodom $g \geq 1$. Če G ne vsebuje $K_{H(g)}$ kot podgraf, potem je $\chi(G) \leq H(g) - 1$.*

Po izreku 1.5.2 sledi, da je kromatično število grafa G, vloženega na ploskvi z Eulerjevim rodom g, reda $O(\sqrt{g})$. Naslednji izrek Gimbela in Thomassena [33] pa pove, da se red bistveno zmanjša za grafe brez trikotnikov.

Izrek 1.5.4 (Gimbel in Thomassen). *Naj bo $\chi_3(SS)$ maksimalno kromatično število grafov brez trikotnikov, ki so vložljivi na ploskvi SS, ter naj bo g Eulerjev rod ploskve SS. Obstajata konstanti c_1 in c_2, tako da velja*

$$c_1 \frac{\sqrt[3]{g}}{\lg g} \leq \chi_3(SS) \leq c_2 \sqrt[3]{\frac{g}{\lg g}}.$$

Naslednji izrek so pokazali Dirac [23] za $k \geq 8$, Mohar [73] in Thomassen [93] za $k = 7$ ter Thomassen [98] za $k = 6$.

Izrek 1.5.5. *Naj bo SS ploskev ter $k \geq 6$ naravno število. Tedaj obstaja končno mnogo kritičnih grafov, vložljivih na SS.*

Graf G iz naslednjega izreka [39] ima 5-kritičen podgraf G'. Za graf G' velja $|V(G')| \geq \mathrm{ew}(G)$. To nam pove, da imamo na poljubni ploskvi, različni od sfere, neskončno mnogo 5-kritičnih grafov.

Izrek 1.5.6 (Fisk). *Naj bo G triangulacija neke ploskve. Če ima G natanko dve točki lihe stopnje in če sta ti dve točki sosednji, potem G ni 4-obarvljiv.*

Kot smo že rekli, so lihi cikli 3-kritični grafi. Graf je *kolo*, če je sestavljen iz cikla ter dodatne točke, ki je povezana z vsemi točkami iz cikla. Če je cikel dolžine n, potem kolo označimo z W_n. W_n je ravninski graf in za lihi n je ta 4-kritičen. Tako smo prišli do naslednje posledice.

Posledica 1.5.7. *Naj bo SS ploskev, različna od sfere. Potem obstaja neskončno mnogo k-kritičnih grafov, vložljivih na SS natanko takrat, kadar je $k \in \{3, 4, 5\}$.*

1.5.1 Grafi na ploskvah majhnega roda

Kromatično število grafov na ploskvah majhnega roda je dobro raziskano. V nadaljevanju bomo omenili nekaj zanimivih rezultatov. Thomassen [96] je dokazal naslednjo varianto Grötzschevega izreka 1.1.1.

Izrek 1.5.8 (Thomassen).

(a) Naj bo G graf, vložen na torusu. Če G nima ciklov dolžine ≤ 4, potem je $\chi(G) \leq 3$.

(b) Naj bo G graf, vložen na projektivni ravnini tako, da ni stisljivih 3- ali 4-ciklov. Tedaj je $\chi(G) \leq 3$.

Thomas in Walls [92] sta podoben izrek pokazala za Kleinovo steklenico.

Izrek 1.5.9 (Thomas in Walls). *Naj bo G graf, vložen na Kleinovi steklenici. Če G nima ciklov dolžine ≤ 4, potem je $\chi(G) \leq 3$.*

Če so v ravninskem grafu lica sode dolžine, potem je graf dvodelen. Na ploskvah večjega roda pa to ni več tako. Naslednji Youngsov izrek [110] nam namreč pove, da za kvandragulacije na projektivni ravnini kromatično število ni 3.

Izrek 1.5.10 (Youngs). *Če je graf vložen na projektivni ravnini tako, da je vsako lice dolžine 4, potem je kromatično število grafa G enako 2 ali 4.*

Po drugi strani pa nam izrek Gimbela in Thomassena [33] pove, kateri grafi brez trikotnikov na projektivni ravnini so 3-obarvljivi.

Izrek 1.5.11 (Gimbel in Thomassen). *Naj bo G graf brez trikotnikov vložen na projektivni ravnini. Potem G ni 3-obarvljiv natanko takrat, kadar G vsebuje kvadarangulacijo ploskve, ki ni dvodelen graf.*

6-kritičnih grafov v ravnini ni. Na projektivni ravnini je samo graf K_6. Thomassen [95] pa je za torus ugotovil naslednje. Označimo s H_2 graf, ki ga dobimo s Hajósovo konstrukcijo iz dveh kopij grafa K_4. Naj bo T_{11} (krožni) graf, ki ga dobimo iz 11-cikla $x_0x_1 \cdots x_{10}x_0$ tako, da dodamo povezave x_ix_{i+j} za $i = 0, \ldots, 10$ ter $j = 2, 3$.

Izrek 1.5.12 (Thomassen). *Grafi K_6, $C_3 + C_5$, $K_2 + H_7$ in T_{11} so edini 6-kritični grafi na torusu.*

1.6 Barvanje povezav grafa

Podobno kot pri barvanju točk barvamo povezave tako, da bosta poljubni dve sosednji povezavi različno obarvani. Najmanjšo število potrebnih barv, da bi obarvali povezave grafa G, imenujemo *kromatični indeks* grafa G in ga označimo z $\chi'(G)$. Očitno je, da je $\Delta(G)$ potrebno število barv za barvanje povezav grafa G. Osupljiv rezultat Vizinga [104] pa pove, da zadostno število barv ni bistveno večje.

Izrek 1.6.1 (Vizing). *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Potem je*

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1. \tag{1.8}$$

Za multigrafe je zgornja meja Vizingovega izreka $\Delta + \mu$, kjer je μ multiplikativnost povezav grafa G. Vizingov izrek pa poraja zelo zanimiv problem. Naj bo *razred I* sestavljen iz grafov, za katere velja, da je $\Delta = \chi'$. Grafi, za katere pa to ne velja, naj tvorijo *razred II*. Za dani graf se lahko vprašamo, v katerem razredu je.

Barvanje povezav določenega grafa G lahko obravnavamo kot barvanje točk nekega grafa $L(G)$ (t.j. *povezavni graf* grafa G). Za graf $L(G)$ velja, da je $V(L(G)) = E(G)$, dve točki $e, f \in V(L(G))$ pa sta sosednji natanko takrat, ko sta povezavi e in f incidenčni v grafu G. Tako je povezavni graf $L(G)$ enolično določen ter velja zveza $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Naslednji izrek Kiersteada in Schmerla [54] ni v zvezi z barvanjem povezav, vender posploši Vizinogov izrek. Do posplošitve pride, ker povezavni graf $L(G)$ ne vsebuje niti $K_5 - e$ (to je graf K_5 brez ene povezave) niti $K_{1,3}$ kot induciranega podgrafa ter je $\omega(L(G)) = \Delta(G)$.

Izrek 1.6.2 (Kierstead in Schmerl). *Naj bo G graf, ki ne vsebuje niti $K_5 - e$ niti $K_{1,3}$ kot induciran podgraf. Potem je $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \omega(G) + 1$.*

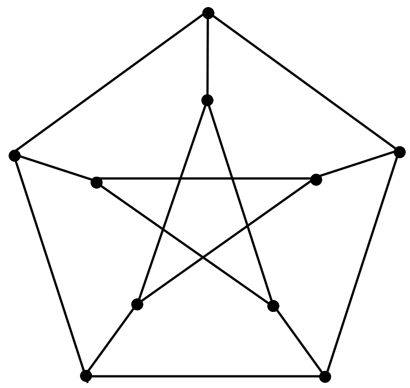
Med najstarejšimi izreki o grafih sta vsekakor Königov izrek [62], ki pove, da so dvodelni grafi v razredu I ter Taitov [91] izrek, ki poda zelo zanimivo zvezo med barvanji točk ter barvanji povezav ravninskih grafov.

Izrek 1.6.3 (König). *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'(G) = \Delta(G). \tag{1.9}$$

Izrek 1.6.4 (Tait). *Izrek o štirih barvah je ekvivalenten trditvi, da so po povezavah 2-povezani ravninski kubični grafi v razredu I.*

Kubičen graf je *snark*, če je po povezavah 2-povezan ter po povezavah ni 3-obarvljiv. Najmanjši snark je vsekakor Petersenov graf. Tutte [101] je podal zelo zanimivo domnevo, ki posploši izrek o štirih barvah.



Slika 1.1: Petersenov graf.

Domneva 1.6.5 (Tutte). *Vsak po povezavah 2-povezan kubičen graf, ki ne vsebuje Petersenovega grafa kot minor, je po povezavah 3-obarvljiv.*

Z drugimi besedami, domneva trdi, da vsak snark vsebuje Petersenov graf kot minor. Pred kratkim so Robertson, Seymour in Thomas dokazali zgornjo domnevo. Dokaz še ni objavljen in temelji na metodi prenašanja naboja.

1.7 Popolno barvanje grafa

Pri popolnem barvanju grafa barvamo hkrati točke in povezave tako, da morata poljubna dva sosednja oz. incidenčna elementa iz $V(G) \cup E(G)$ biti različno obarvana. Najmanjše število barv, ki je potrebno, da bi popolno obarvali graf G, imenujemo *popolno kromatično število* in ga označimo z $\chi''(G)$. Tovrstno barvanje sta začela prva študirati Vizing [104, 105] in Behzad [9]. Podala sta naslednjo domnevo:

Domneva 1.7.1. *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ ter multiplikativost povezav μ. Potem je*

$$\chi''(G) \leq \Delta + \mu + 1. \tag{1.10}$$

Za enostavne grafe je multiplikativost povezav enaka 1. Torej naj bi bila v tem primeru zgornja meja $\Delta+2$. Trivialna spodnja meja za popolno kromatično število grafa je $\Delta+1$. Pri enostavnih grafih se porodi zanimivo vprašanje, kateri grafi stopnje Δ so $\Delta+1$ totalno obarvljivi. Lahko definiramo, da ti grafi tvorijo razred I, vsi ostali grafi pa razred II.

Za grafe z maksimalno stopnjo ≤ 2 zgornje domneve ni težko preveriti. Za cikle velja naslednja zveza:

$$\chi''(C_n) = \begin{cases} 3, & n = 3k, k \in \boldsymbol{N} \\ 4, & \text{sicer.} \end{cases} \tag{1.11}$$

Rosenfeld [80] in Vijayaditya [103] sta neodvisno drug od drugega dokazala, da je za totalno barvanje multigrafov z maksimalno stopnjo $\Delta \leq 3$ dovolj 5 barv. Kostochka [56, 61] je dokazal za multigrafe stopnje $\Delta \leq 4$ oz. $\Delta \leq 5$, da je 6 oz. 7 zadostno število barv. Molloy in Reed sta dokazala šibkejšo verzijo zgornje domneve. Dokaz še ni obljavljen in temelji na verjetnostnem računu.

Izrek 1.7.2 (Molloy in Reed). *Obstaja taka konstanta c, da za poljuben multigraf G velja*

$$\chi''(G) \leq \Delta(G) + \mu(G) + c. \tag{1.12}$$

1.8 Nepravilno barvanje

Graf G je *m-obarvljiv z nepravilnostjo d*, ali krajše *$(m,d)^*$-obarvljiv* če lahko točke grafa obarvamo z m barvami tako, da ima vsaka točka grafa največ d sosed, obarvanih s svojo barvo. Torej barvni razred ne vsebuje zvezde $K_{1,d+1}$ kot podgrafa. Opazimo, da je nepravilno barvanje posplošitev navadnega barvanja. Navadno m-barvanje je pravzaprav $(m,0)^*$-barvanje.

Tovrstno barvanje so definirali L. J. Cowen, R. H.Cowen in Woodall [19]. Dokazali so, da je vsak ravninski graf $(3,2)^*$-obarvljiv in $(4,1)^*$-obarvljiv. Po izreku o štirih barvah so ravninski grafi $(4,0)^*$-obarvljivi. To je vsekakor boljši rezultat, vendar pa je dokaz o $(4,1)^*$-obarvljivosti bistveno krajši.

Izrek 1.8.1 (Cowen, Cowen in Woodall).

(a) Vsi ravninski grafi so $(m,d)^*$-obarvljivi natanko tedaj, ko je $(m,d) \geq (4,0)$ ali $(m,d) \geq (3,2)$.

(b) Vsi zunanje-ravninski grafi so $(m,d)^*$-obarvljivi natanko tedaj, ko je $(m,d) \geq (3,0)$ ali $(m,d) \geq (2,2)$.

Za grafe na ploskvi z Eulerjevim rodom g so L. J. Cowen, R. H. Cowen in Woodall dokazali, da so $(4,k)^*$-obarvljivi tedaj, ko je $k = \max(14, \lceil \frac{4g-8}{3} \rceil - 1)$. Postavili so vprašanje, ali se 4-obarvljivost da zamenjati s 3-obarvljivostjo. Na to vprašanje je prvi pritrdilno odgovoril Archdeacon [7]. Dokazal je namreč, da so grafi na ploskvi z Eulerjevim rodom g $(3,k)^*$-obarvljivi tedaj, ko je $k = \max(15, \lceil \frac{3g-6}{2} \rceil - 1)$. Cowen, Goddard in Jesurum [20] so velikost k bistveno izboljšali.

Izrek 1.8.2 (Cowen, Goddard in Jesurum). *Naj bo G graf, vložen na ploskvi SS Eulerjevega roda g. Tedaj je G $(3,k)^*$-obarvljiv, ko je $k = \max(12, \sqrt{12g} + 6)$.*

Woodall [112] je pokazal, da velja spodnji izrek. Podal je tudi vprašanje, za katere pare (m,d) so grafi na projektivni ravnini oz. torusu $(m,d)^*$-obarvljivi.

Izrek 1.8.3 (Woodall).

(a) *Vsak $K_{2,3}$-minor-prost graf je $(2,2)^*$-obarvljiv.*

(b) *Vsak $K_{3,3}$-minor-prost graf je $(3,2)^*$-obarvljiv.*

Cowen, Goddard in Jesurum [20] so za grafe na torusu dokazali naslednji izrek.

Izrek 1.8.4 (Cowen, Goddard in Jesurum). *Vsi grafi na torusu so $(m,d)^*$-obarvljivi za $(m,d) \geq (3,2)$, $(m,d) \geq (5,1)$, ali $(m,d) \geq (7,0)$.*

Zanimivo odprto vprašanje za grafe na torusu (in projektivni ravnini) je $(4,1)^*$-obarvljivost.

1.9 Porazdelitveno število

Graf G je *k-izrojen*, če ima vsak podgraf grafa G točko stopnje $\leq k$. Očitno so k-izrojeni grafi tudi $(k+1)$-izrojeni. 0-izrojeni grafi so grafi brez povezav in 1-izrojeni grafi so natanko aciklični grafi (i.e. gozdovi). Označimo z $\rho_s(G)$ najmanjše število potrebnih barv, , da vsak barvni razred inducira s-izrojen graf. To število imenujemo *porazdelitveno število reda s*. Tako je $\rho_0(G)$ pravzaprav kromatično število $\chi(G)$ grafa G. *Točkasto drevesnost* grafa G je najmanjše število potrebnih barv, za takšno barvanje grafa, da vsak barvni razred inducira gozd. Točkasta drevesnost grafa G označimo z $\rho(G)$. Torej velja $\rho(G) = \rho_1(G)$. Točkasto drevestnost so vpeljali Chartrand, Kronk in Wall [17] ter dokazali, da je točkasta drevesnost ravninskih grafov ≤ 3. Kasneje sta Chartrand in Kronk [18] pokazala, da je ta meja natančna. Če je $\rho(G) = k$ in ima vsak pravi podgraf grafa G točkasto drevesnost $< k$, potem je G *k-drevesno-kritičen*. 2-drevesno-kritični grafi so natanko cikli. Ni težko videti, da vsebuje vsak graf G z $\rho(G) = k$ k-drevesno-kritičen podgraf. V [18] so dokazali, da je minimalna stopnja k-drevesno-kritičnih grafov $\geq 2k-2$. Kronk in Mitchem [67] sta dokazala Brooksov, Kronk [66] pa Heawoodov izrek za točkasto drevesnost. Pravzaprav je Kronk dokazal spodnji izrek samo za orientabilne ploskve. Dokaz za neorientabilne ploskve roda $g \geq 3$ je enak. Grafi, ki se dajo vložiti v projektivno ravnino, imajo točkasto drevesnost ≤ 3. To hitro sledi, ker ima na tej ploskvi vsak graf točko stopnje ≤ 5. Grafi na Kleinovi steklenici imajo tudi točkasto drevesnost ≤ 3.

Izrek 1.9.1 (Kronk). *Naj bo SS ploskev z Eulerjevim rodom g. Potem je*

$$\rho(SS) = \left\lfloor \frac{9 + \sqrt{1 + 24\,g}}{4} \right\rfloor, \tag{1.13}$$

kadar je SS različna od sfere in Kleinove steklenice, sicer pa je $\rho(SS) = 3$.

Mihók [71] je pokazal, da imajo k-drevesno-kritični grafi ($k \geq 3$) naslednjo lepo Gallaievo strukturo.

Izrek 1.9.2 (Mihók). *Naj bo G k-drevesno-kritičen graf, $k \geq 3$, in naj bo M množica točk stopnje $2k-2$. Potem je vsak blok grafa $G[M]$ bodisi poln graf na $\leq 2k-1$ točkah ali cikel.*

1.10 Posplošeni Grötzschev izrek

Hipergraf $\mathcal{H}$ je podan z množico točk $V(\mathcal{H})$ ter množico *hiperpovezav* $E(\mathcal{H})$. Vsaka hiperpovezava je pravzaprav podmnožica iz $V(\mathcal{H})$. *k-barvanje* hipergrafa $\mathcal{H}$ je funkcija $c : V(\mathcal{H}) \to \{1, \ldots, k\}$, tako da nobena povezava v $\mathcal{H}$ ni monokromatska, t.j. $|c(e)| \geq 2$ za vsako povezavo $e \in E(\mathcal{H})$. (Monokromatska povezava pomeni, da so vse njene točke obarvane z isto barvo.) Najmanjše število k, za katero je $\mathcal{H}$ k-obarvljiv, imenujemo *kromatično število* hipergrafa $\mathcal{H}$ in ga označimo z $\chi(\mathcal{H})$. Naj bo G graf. Hipergraf $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G)$ z isto množico točk kot G, katerega (hiper)povezave so maksimalne klike grafa G, imenujemo *hipergraf maksimalnih klik* grafa G ali krajše *klični hipergraf* grafa G.

Za klični hipergraf popolnih grafov so Duffus, Sands, Sauer in Woodrow [28] podali naslednjo zanimivo domnevo 1.10.1. Dokazali so, da je $\mathcal{H}(G)$ za vsak komparabilni graf 2-obarvljiv. (Graf G je *komparabilen*, če obstaja taka delna urejenost $\mathcal{P}$ nad $V(G)$, da sta točki $u, v \in V(G)$ primerljivi v $\mathcal{P}$ natanko tedaj, ko sta sosednji v G.) Dobro je znano, da so komparabilni grafi podrazred v popolnih grafih. Duffus, Kierstead in Trotter [27] so dokazali, da je $\chi(\mathcal{H}(\overline{G})) \leq 3$. Omenimo še, da so po Lovászovem izreku 1.4.1 komplementi komparabilnih grafov tudi popolni grafi.

Domneva 1.10.1. *Obstaja taka konstanta k, da je za vsak popoln graf G*

$$\chi(\mathcal{H}(G)) \leq k. \tag{1.14}$$

Bascó, Gravier, Gyárfás, Preissmann in Sebö [8] so podali domnevo, da je konstanta k iz zgornje domneve enaka 3. Dokazali so, da je domneva veljavna tudi za nekatere druge zanimive podrazrede popolnih grafov.

V nadaljevanju bomo študirali kromatično število kličnega hipergrafa za ravninske grafe z naslednjo motivacijo: Če je graf G brez trikotnikov, potem je $\mathcal{H}(G) \cong G$. Od tod sledi, da je v tem primeru $\chi(\mathcal{H}(G)) = \chi(G)$. Po Grötzschevem izreku 1.1.1 je klični hipergraf ravninskega grafa brez trikotnikov 3-obarvljiv. V nadaljevanju bomo pokazali, da to velja celo za vsak ravninski graf.

Posledica 1.10.2. *Naj bo G ravninski graf z natanko enim 3-ciklom $C = xyz$ ter naj bo $c : V(C) \to \{1, 2, 3\}$ barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(C)$. Potem c lahko razširimo na 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.*

Dokaz. Če sta dve točki hipergrafa $\mathcal{H}(C)$ enako obarvani, privzamemo, da sta to točki y in z. Subdividiramo povezavo yz tako, da dodamo novo točko w. Naj bo $c(w) \in \{1, 2, 3\} \setminus \{c(y), c(z)\}$. Zdaj pa po Grötzschevem izreku 1.1.1 razširimo c najprej na $\mathrm{Int}(C)$, potem pa še na $\mathrm{Out}(C)$. Tako dobimo iskano barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$. $\square$

Ravninski grafi, ki se "najbolj razlikujejo" od ravninskih grafov brez trikotnikov, so grafi, pri katerih vsaka povezava leži na nekem trikotniku.

Izrek 1.10.3. *Naj bo G ravninski graf z vsaj eno povezavo ter naj vsaka povezava grafa G leži na nekem trikotniku. Tedaj je $\chi(\mathcal{H}(G)) = 2$.*

Dokaz. Po izreku o štirih barvah obstaja 4-barvanje c grafa G. Za $i = 1, 2, 3, 4$, naj bo $U_i \subseteq V(G)$ barvni razred barve i. Postavimo $c(v) = 1$, če je $v \in U_1 \cup U_2$, in $c(v) = 2$, če je $v \in U_3 \cup U_4$.

Ker ima vsaka maksimalna klika K grafa G vsaj tri točke, smo pri 4-barvanju točk klike K uporabili vsaj tri različne barve. Od tod sledi, da je $|c(K)| = 2$. Zaradi tega je c 2-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$. □

Barvanje je *krepko*, kadar ne obstaja monokromatski trikotnik.

Lema 1.10.4. *Naj bo G graf kot v izreku 1.10.3. Potem ima $\mathcal{H}(G)$ krepko 3-barvanje.*

Dokaz. Dokaz je enak kot pri prejšnjem izreku, samo da uporabimo izrek o petih barvah in postavimo $c(v) = 3$, če je $v \in U_5$. □

Trditev 1.10.5. *Naj bo G ravninski graf brez separacijskih trikotnikov.*

(*a*) *Predpostavimo, da G nima povezave, ki leži na natanko enem 3-ciklu. Tedaj je G bodisi triangulacija ali graf brez trikotnikov.*

(*b*) *Naj bo C zunanji cikel grafa G. Predpostavimo, da nobena povezava iz $E(G) \setminus E(C)$ ne leži na natanko enem 3-ciklu. Tedaj je G bodisi skoraj-triangulacija ali je C edini možni trikotnik v G.*

Dokaz. Ni težko videti, da je vsak 3-cikel grafa G rob nekega lica. Če G ni (skoraj-)triangulacija niti graf brez trikotnikov (z edino izjemo cikla C v primeru (b)), potem obstaja taka točka u, vsebovana v nekem 3-ciklu C' (in $C' \neq C$ v primeru (b)), da lica, ki so incidenčna s točko u, niso sami trikotniki. Tedaj obstajata vsaj dve povezavi, incidenčni z u, ki ležita na natanko enem trikotniku. (V primeru (b) pa ti povezavi nista na ciklu C.) □

Lema 1.10.6. *Naj bo G ravninski graf z zunanjim 3-ciklom C in naj bo $c : V(C) \to \{1, 2, 3\}$ barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(C)$. Potem se da barvanje c razširiti na krepko 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.*

Dokaz. Dokaz izvedemo z matematično indukcijo po $|V(G)| + |E(G)|$. Lahko predpostavimo, da je $G \neq C$. Naj bo C' 3-cikel grafa G (možnost $C' = C$ je dopustna), tako da ima C' vsaj eno točko v notranjosti ter $\mathrm{Int}(C')$ čim manjši. Naj bo G_1 graf, ki ga dobimo iz G tako, da odstranimo vse točke in povezave v notranjosti cikla C'. Po indukcijski predpostavki lahko razširimo c na krepko 3-barvanje c_1 hipergrafa $\mathcal{H}(G_1)$. Barvanje c_1

inducira 3-barvanje c' hipergrafa $\mathcal{H}(C')$, ker je c_1 krepko barvanje. Če je $C' \neq C$, potem je $\mathrm{Int}(C')$ manjši graf od G. Zaradi tega po indukcijski predpostavki c' lahko razširimo na krepko 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(\mathrm{Int}(C'))$. Ker je vsak 3-cikel grafa G bodisi v G_1 ali v $\mathrm{Int}(C')$, smo dobili iskano barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.

Zdaj pa predpostavimo, da je $C' = C$. Tedaj G nima separacijskih 3-ciklov. Predpostavimo, da ima G povezavo $e = uv$, kjer je $u \notin V(C)$ in e leži natanko na enem 3-ciklu $C^* = uvw$. Ker separacijskih trikotnikov ni in ker je $u \notin V(C)$, dobimo, da je C^* rob nekega lica in je C^* različen od C. Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_d$ ($d = deg(u)$) sosede točke u, naštete v smeri urnega kazalca okrog točke u. Lahko privzamemo, da je $v_1 = v$ in $v_2 = w$. Naj bo $k \geq 2$ tak, da je uv_iv_{i+1} 3-cikel za $i = 1, \ldots, k-1$ in uv_kv_{k+1} (indeksiramo po modulo d) ni 3-cikel v G. Ker e leži na natanko enem 3-ciklu, število k obstaja. Naj bo G' podgraf grafa v G, ki ga dobimo tako, da odstranimo povezave $uv_2, uv_4, uv_6, \ldots, uv_k$ (če je k sod) oziroma $uv_2, uv_4, uv_6, \ldots, uv_{k-1}$ (če je k lih). Po indukcijski predpostavki hipergraf $\mathcal{H}(G')$ dopušča razširitev c na krepko 3-barvanje. Ni težko videti, da nobena od povezav $uv_1, uv_3, uv_5, \ldots$ ne leži na nekem 3-ciklu grafa G'. Zaradi tega so točke $v_1, v_3, v_5, \ldots$ drugače obarvane kot u. To pa implicira, da je 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G')$ ravno tako krepko 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.

Zdaj pa lahko predpostavimo, da G nima separacijskih 3-ciklov in nobena od povezav $E(G) \backslash E(C)$ ne leži na nekem 3-ciklu grafa G. Po trditvi 1.10.5(b) je G bodisi triangulacija ali je C edini 3-cikel v G. V drugem primeru lahko c, po posledici 1.10.2, razširimo na (krepko) 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$. Torej naj bo G triangulacija. Zaradi tega bo vsaka povezava grafa G ležala na nekem 3-ciklu grafa G. Lema 1.10.4 implicira, da je $\mathcal{H}(G)$ krepko 3-obarvljiv. Velja še več, iz dokaza leme 1.10.4 lahko uporabimo 5-barvanje grafa G in po potrebi te barve permutiramo tako, da je ustrezno krepko 3-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$ razširitev barvanja c. To pa je tudi konec dokaza. □

Končno smo prispeli do iskane posplošitve Grötzschevega izreka. Rezultat je privzet iz Mohar in Škrekovski [74].

Izrek 1.10.7. *Klični hipergraf poljubnega ravninskega grafa je krepko 3-obarvljiv.*

Dokaz. Če ima G 3-cikel C, potem poljubno obarvamo $\mathcal{H}(C)$ ter z uporabo leme 1.10.6 razširimo to barvanje na $\mathrm{Int}(C)$ in zatem na $\mathrm{Out}(C)$. Sicer je G graf brez trikotnikov. Tedaj je po Grötzschevem izreku 1.1.1 $\chi(\mathcal{H}(G)) = \chi(G) \leq 3$. □

Kratochvíl in Tuza [63] sta pokazala, da obstaja algoritem, ki v polinomskem času ugotovi, ali je $\mathcal{H}(G)$ za ravninski graf G 2-obarvljiv. Ta rezultat skupaj z izrekom 1.10.7 implicira, da obstaja polinomski algoritem, ki za ravninske grafe izračuna kromatično število hipergrafa maksimalnih klik.

1.11 Pretoki grafov

Usmeritev grafa je predpis, ki vsaki povezavi določi eno od dveh možnih smeri. Z usmeritvijo D grafa G dobimo usmerjeni graf, ki ga bomo označili z $D(G)$. Usmeritev D lahko obravnavamo kot funkcijo, za katero velja:

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{usmeritev povezave } uv \text{ je iz } u \text{ proti } v \\ -1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako za vsako povezavo uv velja $D(u,v) = -D(v,u)$. *Pretok* grafa G je urejeni par (D,f), kjer je D usmeritev in f utež grafa G, ki izpolnjuje Kircoffov pogoj:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) = 0. \tag{1.15}$$

Za utež f grafa G je *nosilec* množica povezav $e \in E(G)$, za katere je $f(e) \neq 0$. Nosilec označimo s $\mathrm{supp}(f)$. Pretok (D,f) grafa G je *nikjer-ničelni pretok*, če je $\mathrm{supp}(f) = E(G)$. Če f slika v grupo Γ, potem pravimo, da je par (D,f) Γ-pretok. Če pa je $\Gamma = (\boldsymbol{Z}, +)$, par (D,f) imenujemo *celoštevilski pretok*. *k-pretok* grafa G je celoštevilski pretok (D,f), pri katerem je $|f(e)| < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.

Graf z mostovi ne dopušča nikjer-ničelnega pretoka. Če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi za vsak $h \geq k$ dopušča nikjer-ničelni h-pretok. Če graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok za dano usmeritev, potem dopušča tudi nikjer ničelni k-pretok za poljubno usmeritev. Za dani celoštevilski pretok grafa G naj bo H podgraf grafa G, induciran z liho uteženimi povezavami. Tedaj je H sod graf. Od tod sledi, da graf dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod. Tutte [99] je dokazal naslednja dva izreka o pretokih.

Izrek 1.11.1. *Naj bo (D,f) $(\boldsymbol{Z}_k, +_k)$-pretok grafa G. Potem G dopušča k-pretok (D,f') tako, da velja $f(e) \equiv f'(e) \pmod{k}$ za vsako povezavo e grafa G.*

Kot posledico dobimo naslednji izrek:

Izrek 1.11.2. *Graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni $(\boldsymbol{Z}_k, +_k)$-pretok.*

Obstaja zelo zanimiva zveza med celoštevilskimi pretoki in barvanji grafov. Vsak nikjer ničelni k-pretok ravninskega grafa namreč inducira k-barvanje dualnega grafa in obratno. Torej se izkaže, da je teorija k-pretokov nekako naravna posplošitev dobro znane teorije barvanja ravninskih zemljevidov. Vložitev grafa na sklenjeni ploskvi imenujemo *celično*, če je vsako lice grafa homeomorfno odprtemu disku. Tutte [100] je dokazal tudi naslednja dva izreka:

Izrek 1.11.3 (Tutte). *Naj bo G celično vložen graf na neki orientabilni ploskvi. Če je G po licih k-obarvljiv, potem G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Izrek 1.11.4 (Tutte). *Naj bo G ravninski graf brez mostov. Tedaj je G po licih k-obarvljiv natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Pri barvanju grafov vsakemu grafu priredimo kromatično število. Podobno pri pretokih priredimo vsakemu grafu G *pretočno število* $\kappa(G)$, ki pomeni najmanjše število k, za katero G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Če tak k ne obstaja, potem definiramo $\kappa(G) = \infty$. Na primer, če ima graf G most, je $\kappa(G) = \infty$.

Domneva 1.11.5 (domneva o zgornji meji). *Obstaja tako naravno število k, da vsak graf brez mostov dopušča nikjer ničelni k-pretok.*

Domneva 1.11.6 (domneva o 5-pretoku). *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Domnevo o zgornji meji sta neodvisno dokazala Kilpatrick [55] in Jaeger [46]. Oba sta pokazala, da je zgornja meja 8. Kasneje je Seymour [81] pokazal, da je tudi število 6 zgornja meja.

Izrek 1.11.7 (Seymour). *Vsak po povezavah 2-povezan graf dopušča nikjer-ničelni 6-pretok.*

To je hkrati tudi najboljši približek domnevi o 5-pretoku. Torej za vsak graf G brez mostov je $\kappa(G) \leq 6$. Domneva o 5-pretoku je posplošitev trditve, da je vsak ravninski graf 5-obarvljiv. Vemo, da Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka. Torej v tej domnevi ne moremo zamenjati 5 s 4.

Naslednja Tuttova domneva govori o posplošitvi izreka o štirih barvah. Iz izreka 1.11.4 in izreka štirih barv dobimo naslednji rezultat:

Posledica 1.11.8. *Vsak ravninski graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka in se ne da vložiti v ravnino. Tutte [101] posploši domnevo 1.6.5 takole:

Domneva 1.11.9 (domneva o 4-pretoku). *Vsak graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Grötzschev izrek 1.1.1 pravi, da je vsak ravninski graf brez zank in trikotnikov 3-obarvljiv. Iz dualnosti sledi, da je vsak ravninski graf brez 1- in 3-prerezov po licih 3-obarvljiv. Tuttova zadnja domneva o pretokih govori o posplošitvi te posledice.

Domneva 1.11.10 (domneva o 3-pretoku). *Vsak graf brez mostov in brez 3-prereza dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Razen domneve o zgornji meji, ki je sedaj izrek, se je izkazalo, da so vse druge domneve pretrd oreh. Res pa je, da so nekatere stare že več kot štiri desetletja in da je bilo doslej v tej smeri zelo malo narejenega.

1.12 Izrek Erdösa

Tale razdelek sledi seminarsko Boruta Lužarja [69].

Erdösev izrek pravi, da za vsako naravno število k obstaja graf G, za katerega velja, da je $g(G) > k$ in hkrati $\chi(G) > k$. Običajen pristop k dokazovanju takšnega izreka bi bila konstrukcija grafa z željeno lastnostjo za neki manjši k in nato prehod na grafe z lastnostjo za večje k s pomočjo indukcije. V našem primeru takšen način ni uporaben, saj, če ustrežemo lastnosti z velikim notranjim obsegom, dobimo graf, ki je lokalno 2-obarvljiv. Erdös je k stvari pristopil s popolnoma druge strani. Za vsak n je definiral verjetnostni prostor na množici grafov z n vozlišči in pokazal, da za pazljivo izbrane verjetnostne mere obstaja pozitivna verjetnost, da obstaja graf z n vozlišči, ki zadošča obema lastnostima.

Slučajni graf je graf, ki mu na dani množici vozlišč naključno določimo povezave. Povezave določamo neodvisno med seboj. Verjetnostni prostor slučajnih grafov $G(n,p)$ je končni verjetnostni prostor, katerega elementarni dogodki so grafi na fiksni množici n točk, in kjer je verjetnost grafa z m povezavami enaka

$$p(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

To ustreza ustvarjanju slučajnega grafa z vključitvijo vsake potencialne povezave neodvisno z verjetnostjo p. Za $p = \frac{1}{2}$ si lahko zamislimo metanje kovanca za vsako potencialno povezavo, da odločimo, če naj nastopi v grafu.

Lema 1.12.1 *Za vsa naravna števila n in k, kjer velja $n \geq k \geq 2$, je verjetnost, da ima $G \in \mathcal{G}(n,p)$ množico k neodvisnih vozlišč največ*

$$P(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Dokaz. Verjetnost, da je neka določena množica $U \subseteq V$ z močjo k neodvisna v grafu G, je enaka $q^{\binom{k}{2}}$. Trditev nato sledi iz dejstva, da je natanko $\binom{n}{k}$ takšnih množic U.

□

Rabili bomo nasledjno neenakost:

Lema 1.12.2 (Markova neenakost) *Naj bo X pozitivna slučajna spremenljivka v prostoru $\mathcal{G}(n,p)$ in $a > 0$. Potem velja*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{G\in\mathcal{G}(n,p)} P(G)\cdot X(G) \\
&\geq \sum_{\substack{G\in\mathcal{G}(n,p)\\ X(G)\geq a}} P(G)\cdot X(G) \\
&\geq \sum_{\substack{G\in\mathcal{G}(n,p)\\ X(G)\geq a}} P(G)\cdot a \\
&= P(X\geq a)\cdot a.
\end{aligned}$$

□

Izračunajmo število pričakovanih ciklov neke dane dolžine $k \geq 3$ v slučajnem grafu $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Naj bo $X : \mathcal{G}(n,p) \to \boldsymbol{N}$ slučajna spremenljivka, ki vsakemu izmed slučajnih grafov G priredi število k-ciklov v njem. Definirajmo

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

To je število zaporedij k različnih elementov na množici z n elementi.

Lema 1.12.3 *Pričakovano število k-ciklov v $G \in \mathcal{G}(n,p)$ je*

$$E(X) = \frac{(n)_k}{2k}p^k.$$

Dokaz. Za vsak k-cikel C z vozlišči v $V = \{0,\ldots,n-1\}$ naj $X_C : \mathcal{G}(n,p) \to \{0,1\}$ predstavlja *indikacijsko slučajno spremenljivko* za C:

$$X_C : G \mapsto \begin{cases} 1 & C \subseteq G; \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker X_C dobi samo 1 za pozitivno vrednost, je pričakovana vrednost $E(X_C)$ enaka meri $P(X_C = 1)$ množice vseh grafov v $\mathcal{G}(n,p)$, ki vsebujejo C. To pa je natanko verjetnost, da je $C \subseteq G$:

$$E(X_C) = P(C \subseteq G) = p^k.$$

Takšne cikle predstavlja natanko $(n)_k$ zaporedij $v_0v_1\ldots v_{k-1}$ različnih vozlišč v V in vsak izmed ciklov je opisan z $2k$ takšnimi zaporedji. Torej je natanko $(n)_k/2k$ različnih ciklov. Slučajna spremenljivka X priredi vsakemu grafu G število k-ciklov, torej je X vsota vseh vrednosti $X_C(G)$ in tako dobimo:

$$E(X) = E\Big(\sum_C X_C\Big) = \sum_C E(X_C) = \frac{(n_k)}{2k}p^k.$$

□

Za pripravo na formalni dokaz Erdösevega izreka pokažimo najprej, da je verjetnost pojavitve povezave $p = n^{\epsilon-1}$ v resnici vedno dovolj velika, da zagotovi, da $G \in \mathcal{G}(n,p)$ skoraj gotovo nima velikih neodvisnih množic vozlišč.

Lema 1.12.4 *Naj bo $k > 0$ naravno število in naj bo $p = p(n)$ funkcija n, takšna da velja $p \geq \frac{6k \ln n}{n}$ za velike n. Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) = 0.$$

Dokaz. Za vsa naravna števila n in r z lastnostjo $n \geq r \geq 2$ in vse $G \in \mathcal{G}(n,p)$ Lema 1.12.2 implicira

$$\begin{aligned} P(\alpha \geq r) &\leq \binom{n}{r} q^{\binom{r}{2}} \\ &\leq n^r q^{\binom{r}{2}} \\ &= \left(nq^{(r-1)/2}\right)^r \\ &\leq \left(ne^{-p(r-1)/2}\right)^r. \end{aligned}$$

Zadnja neenakost sledi iz dejstva, da je $1 - p \leq e^{-p}$ za vse p. Če je $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$ in $r \geq \frac{n}{2k}$, za osnovo potence v zgornjem izrazu velja

$$\begin{aligned} ne^{-p(r-1)/2} &= ne^{-pr/2+p/2} \\ &\leq ne^{-(3/2)\ln n + p/2} \\ &\leq nn^{-3/2}e^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}} \longrightarrow_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Ker je $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$, za velike n vzamemo $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ in tako je

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq r) = 0,$$

kar dokaže lemo.

$\square$

Izrek 1.12.5 (Erdös, 1959) *Za vsako naravno število k obstaja graf H z notranjim obsegom $g(H) > k$ in kromatičnim številom $\chi(H) > k$.*

Dokaz. Naj bo $k \geq 3$, $0 < \epsilon < \frac{1}{k}$ in $p = n^{\epsilon-1}$. Naj bo $X(G)$ število kratkih ciklov v slučajnem grafu $G \in \mathcal{G}(n,p)$, to je število ciklov dolžine največ k. Po Lemi 1.12.3 imamo

$$E(X) = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2)n^k p^k.$$

Velja $(np)^i \leq (np)^k$, saj je $np = n^\epsilon \geq 1$. Po Lemi 1.12.2 velja

$$\begin{aligned} P(X \geq n/2) &\leq E(X)/(n/2) \\ &\leq (k-2)n^{k-1}p^k \\ &= (k-2)n^{k-1}n^{(\epsilon-1)k} \\ &= (k-2)n^{k\epsilon-1}. \end{aligned}$$

Ker smo izbrali ϵ tako, da velja $k\epsilon - 1 < 0$, velja tudi

$$\lim_{n\to\infty} P(X \geq n/2) = 0.$$

Naj bo n dovolj velik, da je $P(X \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2}$ in $P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < \frac{1}{2}$, zadnje je mogoče zaradi naše izbire p in Leme 1.12.4. Potem obstaja graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ z manj kot $n/2$ kratkimi cikli in $\alpha(G) < \frac{n}{2k}$. Iz vsakega izmed kratkih ciklov izbrišemo vozlišče. Naj bo H dobljeni graf. Potem je $|H| \geq n/2$ in H ne vsebuje kratkih ciklov, torej je notranji obseg $g(H) > k$. Po definiciji G pa velja še

$$\chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)} \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} > k.$$

□

Poglavje 2

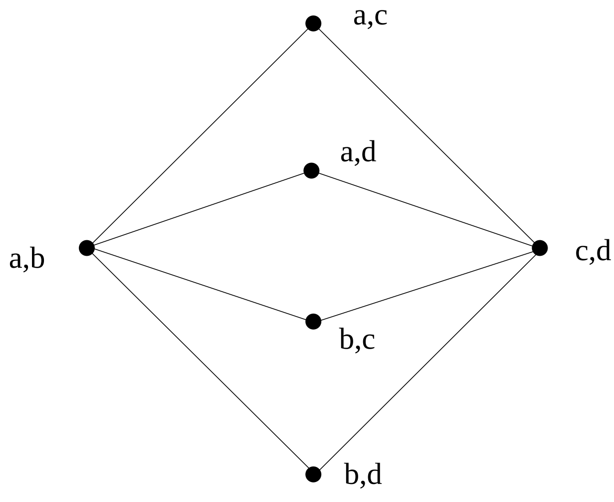
Seznamska barvanja

Označimo s $\mathcal{C}$ razred vseh barv. Naj bo $L : V(G) \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ preslikava, ki vsaki točki v grafa G priredi množico barv $L(v)$. Preslikavi L pravimo *izbira barv* za točke grafa G, množico $L(v)$ pa imenujemo *seznam dopustnih barv* za točko v. Preslikava $c : V(G) \to \mathcal{C}$ je *L-barvanje* (točk) grafa G, če veljata naslednja pogoja:

(a) $c(v) \in L(v)$ za vsako točko v grafa G,

(b) za poljubni dve sosednji točki u in v grafa G je $c(u) \neq c(v)$.

Naj graf G dopušča L-barvanje za vsako izbiro barv L, za katero velja, da je $|L(v)| \geq k$ za vsako točko $v \in V(G)$. Potem pravimo, da je G *k-izbirljiv*. Najmanjše število k, za katero je G k-izbirljiv, imenujemo *seznamsko kromatično število* grafa G in ga označimo z $\chi_l(G)$. Koncept seznamskega barvanja so neodvisno vpeljali Vizing [106] ter Erdős, Rubin in Taylor [29].



Slika 2.1: $K_{2,3}$.

Intuitivno se zdi, da je seznamsko barvanje lažje kot navadno. Čim bolj so seznami pri sosednjih točkah različni, toliko lažje naj bi jih potem obarvali različno. Na žalost v splošnem to ni tako. Na to kaže graf $K_{2,3}$ ter ustrezna izbira barv iz slike 2.1. Seveda so

1-izbirljivi grafi natanko tisti, ki so brez povezav. Rubin [29] je karakteriziral 2-izbirljive grafe. Za to karakterizacijo bomo uporabili naslednje definicije: Naj bo G poljuben graf. Iz G začnimo odstranjevati točke stopnje ≤ 1 in jih odstranujemo toliko časa, dokler ne dobimo grafa na eno točko ali pa grafa, katerega točke so stopnje ≥ 2. Graf, ki smo ga dobili, označimo s $\mathrm{core}(G)$. Označimo s $\Theta_{a,b,c}$ graf, ki je sestavljen iz dveh točk ter treh poti med tema točkama. Prva je dolžine a, druga dolžine b in tretja dolžine c. Z izjemo krajišč zahtevamo, da so te poti disjunktne.

Izrek 2.0.6 (Rubin). *Graf je 2-izbirljiv natanko tedaj, ko je* $\mathrm{core}(G) \in \{K_1, C_{2m+2}, \Theta_{2,2,2m} : m \geq 1\}$.

Erdős, Rubin in Taylor [29] so pokazali naslednji izrek, iz katerega sledi, da obstajajo grafi, za katere je $\chi_l(G) - \chi(G)$ poljubno veliko število.

Izrek 2.0.7 (Erdős, Rubin in Taylor). *Za* $m \geq \binom{2k-1}{k}$ *dvodelni polni graf* $K_{m,m}$ *ni* k*-izbirljiv.*

Barvanje lahko posplošimo takole. Namesto da bi posamezni točki dodelili eno barvo, ji dodelimo množico q različnih barv. Te množice imenujemo q*-terice*. Če sta si točki sosednji, potem zahtevamo, da sta ustrezni q-terici disjunktni. Takemu barvanju pravimo q*-terično barvanje*. Graf je (m, q)*-izbirljiv*, če je q-terično L-obarvljiv za vsako izbiro barv L, za katero velja, da je $|L(v)| \geq m$ pri vsaki točki $v \in V(G)$. Ena od osnovnih domnev o seznamskem barvanju govori o q-teričnem barvanju. Najdemo jo v [29].

Domneva 2.0.8 (Erdős, Rubin in Taylor). *Naj bo graf* G (m, q)*-izbirljiv. Potem je* G (km, kq)*-izbirljiv za vsako naravno število* $k \geq 1$.

V nadaljevanju razdelka si bomo ogledali nekaj zanimivih rezultatov seznamskega barvanja. V glavnem so ti rezultati posplošitev znanih izrekov za navadno barvanje.

Naj bo L izbira barv za graf G. Če graf G ne dopušča L-barvanja ter je vsak pravi podgraf grafa G L-obarvljiv, potem je G L*-kritičen* graf. Graf G je *seznamsko* k*-kritičen*, če G ni k-izbirljiv, vsak pravi podgraf grafa G pa je k-izbirljiv. Iz teh dveh definicij hitro sledi, da za seznamsko k-kritičen graf G obstaja taka izbira barv L, da je $|L(v)| \geq k$ za vsako točko $v \in V(G)$ ter da je G L-kritičen graf.

Ni težko videti, da je v L-kritičnem grafu G vsaka točka v stopnje vsaj $|L(v)|$. Točka je *majhna*, če velja enakost $|L(v)| = d(v)$. Naslednji izrek je posplošitev Gallaievega izreka 1.2.4 in je dokazan v [60].

Izrek 2.0.9. *Naj bo* G L*-kritičen graf. Potem majhne točke inducirajo podgraf v* G*, katerega bloki so lihi cikli ali polni grafi.*

Kot posledico zgornjega izreka dobimo naslednjo posplošitev Brooksovega izreka 1.0.2.

Izrek 2.0.10. *Naj bo G povezan graf z maksimalno stopnjo Δ in naj bo L takšna izbira barv, da bo $|L(v)| \geq \Delta$ za vsako točko v grafa G. Tedaj G dopušča L-barvanje razen v primeru, kadar L priredi vsaki točki enakih Δ barv ter je G izomorfen polnemu grafu $K_{\Delta+1}$ ali lihemu ciklu za $\Delta = 2$.*

Gravier [35] je podal Hajósovo konstrukcijo za seznamsko barvanje.

Izrek 2.0.11 (Gravier). *Vse grafe s seznamskim kromatičnim številom $\geq k$ lahko konstruiramo iz polnih dvodelnih grafov s seznamskim kromatičnim številom $\geq k$ z naslednjimi operacijami:*

(a) Dodamo točko ali povezavo.

(b) Naj bo x_1y_1 povezava v G_1 in x_2y_2 povezava v G_2. Odstranimo povezave x_1y_1 in x_2y_2, identificiramo točki x_1 in x_2 ter nazadnje povežemo y_1 in y_2.

(c) Če G ni L-obarvljiv za neko izbiro barv z $|L(v)| \geq k$ za vsako točko, potem identificiramo dve nesosednji točki u in v, za kateri velja $L(u) = L(v)$, ter odstranimo vzporedne povezave.

2.1 Seznamsko barvanje ravninskih grafov

Spomnimo se, da je ravninski graf skoraj-triangulacija, če so vsa lica razen morda zunanjega, trikotniki. Po izreku o štirih barvah za barvanje vsakega ravninskega grafa zadostujejo štiri barve. Katero pa je najmanjše število k, za katero so vsi ravninski grafi k-izbirljivi? Na to zanimivo vprašanje bomo odgovorili v tem razdelku.

Lema 2.1.1 (Thomassen). *Naj bo G 2-povezana skoraj-triangulacija in naj bo $C = x_1x_2 \cdots x_nx_1$ rob zunanjega lica. Za izbiro barv L grafa G naj velja $|L(x)| \geq 3$, če je $x \in V(C)$, sicer pa $|L(x)| \geq 5$. Predpostavimo, da je c L-barvanje točk x_1 in x_n. Tedaj je mogoče c razširiti na L-barvanje grafa G.*

Dokaz. Predpostavimo, da lema ne velja in naj bo G protiprimer s čim manjšim $|V(G)|+|E(G)|$. Ker je G 2-povezan graf, je C cikel.

Najprej predpostavimo, da ima C diagonalo x_px_q $(p < q)$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je $q \neq n$. Postavimo $G_1 = \mathrm{Int}(x_1 \cdots x_px_q \cdots x_nx_1)$ ter $G_2 = \mathrm{Int}(x_px_{p+1} \cdots x_qx_p)$. Po minimalnosti grafa G najprej razširimo c na grafu G_1. Potem pa c iz $\{x_p, x_q\}$ razširimo na G_2 in tako dobimo barvanje grafa G.

Zdaj pa lahko privzamemo, da je cikel C brez diagonal. Naj bo $G' = G - x_2$ in naj bosta a, b dve različni barvi iz $L(x_2) \setminus \{c(x_1)\}$. Izbira barv L' za G' naj bo podana takole: če je točka $x \in V(G') \setminus \{x_1, x_3\}$ sosednja s točko x_2, potem naj bo $L'(x) = L(x) \setminus \{a, b\}$, sicer pa naj bo $L'(x) = L(x)$. Par G', L' izpolnjuje zahtevo leme in G' je manjši graf kot G.

Zaradi tega lahko c razširimo na L'-barvanje grafa G'. Postavimo $c(x_2) \in \{a, b\} \setminus \{c(x_3)\}$ in tako dobimo, da je c iskano L-barvanje za G. To pa je protislovje in s tem je dokaz koncan.

□

Zgornja lema implicira naslednji pomemben Thomassenov izrek [94].

Izrek 2.1.2 (Thomassen). *Vsak ravninski graf je 5-izbirljiv.*

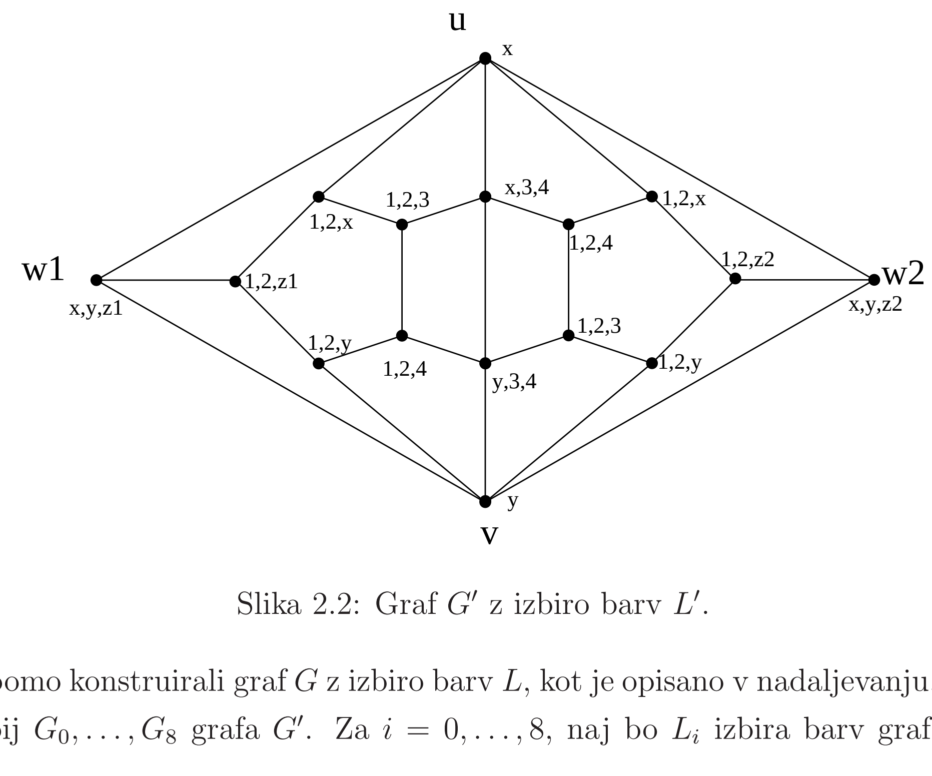
Voigtova [107] je pokazala, da se meja 5 iz zgornjega izreka ne da izboljšati na 4. Bolj natančno rečeno, konstruirala je ravninski graf na 238 točkah, ki ni 5-izbirljiv. Kasneje je Mirzakhani [72] našel manjši tak graf na 69 točkah. Voigtova in Wirthova [109] sta pokazali, da obstajajo tudi 3-obarvljivi ravninski grafi, ki niso 4-izbirljivi.

2.1.1 Ravninski grafi brez trikotnikov

Ravninski grafi brez trikotnikov so posebej zanimiv podrazred ravninskih grafov. Kot smo že omenili, so po Grötzschevem izreku 1.1.1 ti grafi 3-obarvljivi. Podobno kot v podrazdelku 2.1 se lahko vprašamo po najmanjšem številu, za katerega so ti grafi k-izbirljivi. Ker so ravninski grafi brez trikotnikov 3-degenerirani grafi, hitro sledi, da so tudi 4-izbirljivi. Voigtova [108] je pokazala, da obstaja ravninski graf brez trikotnikov, ki ni 3-izbirljiv na 166 točkah. Torej je najmanjše tako število 4. Gutner [37] je podal takšen graf na 164 točkah. V nadaljevanju bomo mejo 164 znižali na 119.

Lema 2.1.3 *Graf G' s slike 2.2 nima L'-barvanja.*

Bralcu prepustimo, da preveri veljavnost zgornje leme.



Slika 2.2: Graf G' z izbiro barv L'.

Zdaj bomo konstruirali graf G z izbiro barv L, kot je opisano v nadaljevanju. Vzemimo devet kopij $G_0, \ldots, G_8$ grafa G'. Za $i = 0, \ldots, 8$, naj bo L_i izbira barv grafa G_i, ki jo dobimo iz L' tako, da barve iz seznama (z_1, x, y, z_2) ustrezno zamenjamo z barvami iz t_i:

$$\begin{array}{lll} t_0 = (7,5,8,9) & t_1 = (8,5,9,10) & t_2 = (9,5,10,6) \\ t_3 = (5,6,10,7) & t_4 = (6,7,10,9) & t_5 = (10,7,9,6) \\ t_6 = (7,6,9,8) & t_7 = (9,6,8,7) & t_8 = (6,7,8,5). \end{array}$$

Identificirajmo vseh devet točk u grafov G_i $(i = 0, \ldots, 8)$ in potem identificirajmo vseh devet točk v teh grafov. Na koncu identificirajmo točko w_2 grafa G_i s točko w_1 iz grafa G_{i+1} za vsak $i = 0, \ldots, 8$ (indeksiramo po modulu 9). Naj bo $L(u) = \{5, 6, 7\}$ in $L(v) = \{8, 9, 10\}$, za vsako drugo točko $x \in V(G)$ pa naj bo $L(x) = L_i(x)$, kadar je $x \in G_i$. Izbiro barv L smo dobro definirali, ker je $L_i(w_2) = L_{i+1}(w_1)$ za $i = 0, \ldots, 8$ (indeksiramo po modulu 9).

Ni se težko prepričati, da je G ravninski graf brez trikotnikov. Ta graf ima $12\cdot 9+9+2 = 119$ točk. Za poljubno L-barvanje grafa G vedno obstaja tak indeks $i \in \{0, \ldots, 8\}$, da sta barvi pri točkah u in v pravzaprav druga in tretja barva v seznamu t_i. Zdaj pa iz leme 2.1.3 sledi, da se barvanje točk u in v ne da razširiti na barvanje grafa G_i. To nasprotuje predpostavki, da graf G dopušča L-barvanje. S tem smo dokazali naslednjo trditev iz Škrekovski [87].

Trditev 2.1.4. *Obstaja ravninski graf brez trikotnikov na 119 točkah, ki ni 3-izbirljiv.*

2.1.2 Seznamsko barvanje s separacijo

Izbiri barv L grafa G pravimo (p, r) *izbira barv*, če velja $|L(v)| \geq p$ za vsako točko $v \in V(G)$ ter $|L(u) \cap L(v)| \leq p - r$ za vsak par sosednjih točk u, v grafa G. Graf G je (p, q, r)-*izbirljiv*, če za vsako (p, r) izbiro barv L dopušča q-terično L-barvanje. Tovrstno seznamsko barvanje so vpeljali Kratochvíl, Tuza, in Voigt [65]. Dokazali so naslednji izrek ter postavili naslednji problem:

Izrek 2.1.5 (Kratochvíl, Tuza in Voigt).

(a) Vsak ravninski graf je $(4, 1, 3)$*-izbirljiv.*

(b) Vsak ravninski graf brez trikotnikov je $(3, 1, 2)$*-izbirljiv.*

Domneva 2.1.6. *Vsak ravninski graf je* $(4, 1, 2)$*-izbirljiv.*

Dokaz izreka 2.1.5 ni dolg, vendar se sklicuje na nekatere izreke iz teorije prirejanja v grafih. V nadaljevanju bomo izrek 2.1.5(a) dokazali direktno in sicer na podoben način, kot je Thomassen dokazal 5-izbirljivost ravninskih grafov. Dokaz je privzet iz Škrekovski [87].

Lema 2.1.7. *Naj bo G povezan ravninski graf z zunanjim obhodom $C = x_1 \cdots x_n x_1$. Za izbiro barv grafa G naj velja $|L(x)| \geq 3$, če je $x \in V(C)$, $|L(x)| \geq 4$, če je $x \in V(G) \backslash V(C)$, in $|L(x) \cap L(y)| \leq 1$, če sta x, y sosednji točki grafa G. Naj bo c L-barvanje točk x_1, x_2. Potem se c da razširiti na L-barvanje grafa G.*

Dokaz. Predpostavimo, da je lema napačna in da je G protiprimer s čim manjšim $|V(G)|$.

Trditev 1. *G je 2-povezan graf.*

Predpostavimo, da G ni 2-povezan graf. Iz minimalnosti grafa G sledi, da lahko c razširimo na bloku, ki vsebuje x_1 in x_n. Zatem ponavljamo naslednjo proceduro: izberemo blok B z natanko eno obarvano točko, recimo točko u. Naj bo v točka iz B sosednja z u in naj hkrati leži na zunanjem obhodu bloka B. Postavimo $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u)\}$ in zatem c iz u, v razširimo na B (to lahko naredimo po minimalnosti grafa G). Na koncu dobimo iskano barvanje grafa G.

Trditev 2. *C je brez diagonal.*

Predpostavimo, da je uv diagonala za cikel C. Označimo s C_1 in C_2 oba cikla brez diagonal v grafu $C \cup \{uv\}$. Naj bo $G_1 = \mathrm{Int}(C_1)$ in $G_2 = \mathrm{Int}(C_2)$. Lahko predpostavimo, da je $x_n x_1$ povezava v G_1. Zdaj po minimalnosti lahko razširimo c iz x_n, x_1 na G_1. Potem pa c iz u, v razširimo na G_2.

Trditev 3. *C ima diagonalo.*

Predpostavimo, da je c brez diagonal. Ni težko videti, da lahko izberemo $c(x_2) \in L(x_2) \setminus \{c(x_1)\}$ tako, da je $c(x_2) \neq c(x_3)$. Zdaj pa postavimo $G' = G \setminus \{x_2\}$ in naj bo L' izbira barv, za katero velja, da je $L'(x) = L(x) \setminus \{c(x_2)\}$, če je $x \in N(x_2) \setminus \{x_n, x_1\}$, sicer pa je $L'(x) = L(x)$. Par G', L' izpolnjuje zahteve lem hkrati pa je graf G' manjši od grafa G. Zaradi tega lahko c razširimo na L'-barvanje grafa G' in s tem dobimo iskano L-barvanje za G.

Očitno je, da iz trditvah 2 in 3 pridemo do protislovja. □

Problemi, našteti v nadaljevanju, so privzeti iz Škrekovski [87]. Podobno kot za $(4, 1, 2)$-izbirljivost se lahko vprašamo za $(3, 1, 2)$-izbirljivost. Kot smo že omenili, je problem veljaven za ravninske grafe brez trikotnikov.

Problem 1. *Ali je vsak ravninski graf $(3, 1, 2)$-izbirljiv?*

Naj bo $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ funkcija. Označimo z $\mathcal{L}(G, f)$ vse izbire barv L grafa G, ki priredijo vsaki točki vsaj eno barvo, ter naj bo $|L(u) \cap L(v)| \geq f(\chi(G))$.

Problem 2. *Ali obstaja taka funkcija $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, da je za vsak graf G ter izbiro barv $L \in \mathcal{L}(G, f)$ G L-izbirljiv.*

Pravzaprav je v [87] postavljena različica zgornjega problema. Ta problem sprašuje, ali obstaja tako velika konstanta c, da je iskana funkcija $f(x) = x + c$. Iz primera, ki sta ga podala Voigtova in Wirtova [109], sledi, da je $c \geq 1$.

Različici zgornjega problema za ravninske grafe sta spodnja dva. Če sta ta dva problema resnična, potem sta posplošitvi izreka o štirih barvah ter Grötzschevega izreka (v konceptu seznamskih barvanj).

Problem 3. *Naj bo G povezan netrivialen graf ter naj bo L taka izbira barv grafa G, da je $|L(u) \cup L(v)| \geq 4$ za poljubni dve sosednji točki u in v. Ali je G L-obarvljiv?*

Problem 4. *Naj bo G povezan netrivialen graf brez trikotnikov ter naj bo L taka izbira barv grafa G, da je $|L(u) \cup L(v)| \geq 3$ za poljubni dve sosednji točki u in v. Ali je G L-obarvljiv?*

2.2 Seznamsko barvanje povezav

Podobno kot pri seznamskemu barvanju točk, povezave barvamo tako, da vsaka povezava dobi barvo iz svojega seznama, pri tem pa morata biti poljubni dve sosednji povezavi biti različno obarvani.

Naj graf G dopušča L-barvanje povezav za vsako izbiro barv $L : E(G) \to P(\mathcal{C})$ za katero velja, da je $|L(e)| \geq k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Potem rečemo, da je G *po povezavah k-izbirljiv*. Najmanjše število k, za katerega je G po povezavah k-izbirljiv, imenujemo *seznamski kromatični indeks* grafa G in ga označimo z $\chi'_l(G)$.

Naslednja domneva je znana kot *Domneva o seznamskem barvanju povezav*. Domneva 2.2.2 pa je znana kot njena šibkejša verzija. Po Vizingovem izreku 1.6.1 veljavnost prve domneve implicira veljavnost druge domneve.

Domneva 2.2.1. *Za poljuben multigraf G velja $\chi'_l(G) = \chi'(G)$.*

Domneva 2.2.2. *Za poljuben multigraf G velja $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + \mu$.*

Osupljiv rezultat Galvina [34] je, da sta obe domnevi resnični za dvodelne multigrafe.

Izrek 2.2.3 (Galvin). *Naj bo G dvodelen multigraf, potem je $\chi'_l(G) = \Delta(G)$.*

Kostochka [58] je dokazal, da je domneva 2.2.2 veljavna za grafe z dolžino najkrajšega cikla $\geq 8\Delta(\lg \Delta + 1.1)$. Juvan, Mohar in Thomas [51] so dokazale, da so zgornje domneve resnične za K_4-minor-proste grafe. Omenimio samo, da so zunanjo-ravninski grafi K_4-minor-prosti.

2.3 Seznamsko popolno barvanje

Pri totalnem seznamskem barvanju barvamo hkrati točke in povezave grafa tako, da vsaka točka oz. povezava dobi barvo iz svojega seznama ter morata biti poljubna dva sosednja oz. incidenčna elementa različno obarvana. Naj graf G dopušča popolno L-barvanje za vsako izbiro barv $L : V(G) \cup E(G) \to P(\mathcal{C})$, za katero velja, da je $|L(x)| \geq k$ za vsak element $x \in V(G) \cup E(G)$. Potem rečemo, da je G *popolno k-izbirljiv*. Najmanjše število k, za katerega je G popolno k-izbirljiv, imenujemo *seznamsko popolno kromatično število* grafa G in ga označimo z $\chi_l''(G)$. Za tovrstno seznamsko barvanje imamo dva zanimiva problema.

Domneva 2.3.1. *Za poljuben multigraf G velja $\chi_l''(G) = \chi''(G)$.*

Domneva 2.3.2. *Za poljuben multigraf G velja $\chi_l''(G) \leq \Delta(G) + \mu + 1$.*

Ni težko videti, da je

$$\chi_l''(G) \leq \chi_l'(G) + 2.$$

Dokažemo takole. Najprej obarvamo točke grafa G. Ker je $\chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$ in $\chi_l'(G) \geq \Delta(G)$, barvanje točk obstaja. Potem pa ima vsaka povezava na voljo še $\chi_l'(G)$ barv. Po definiciji sledi, da to barvanje lahko razširimo na povezave grafa G. Zdaj pa iz izreka 2.2.3 za dvodelne multigrafe sledi

$$\chi_l''(G) \leq \chi_l'(G) + 2 = \Delta(G) + 2. \tag{2.1}$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je vsak multigraf G z $\Delta(G) = 2$ totalno $\chi''(G)$-izbirljiv.

Lema 2.3.3. *Naj bo L izbira barv grafa C_n $(n \geq 2)$ tako, da velja*

$$|L(t)| \geq \begin{cases} 3, & t \in V(G) \\ 4, & t \in E(G). \end{cases} \tag{2.2}$$

Potem ima C_n totalno L-barvanje.

Dokaz. Naj bo $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$. Primer $n = 2$ je trivialen. Zato naj bo $n \geq 3$. Najprej obarvajmo točke grafa. Tedaj vsaki povezavi ostaneta na voljo vsaj dve barvi. V primeru da ne moremo povezave pobarvati, potem je n liho število ter ima vsaka povezava isti dve barvi na voljo. Lahko predpostavimo, da je $L(v_i) = \{c(v_{i-1}, c(v_i), c(v_{i+1})\}$ za $i = 1, \ldots, n$. Sicer lahko spremenimo barvo točki v_i tako, da dobimo na voljo povezavo s tremi barvami ali pa dve povezavi, ki nimata istega para barv na voljo. Ker je $c(v_1) \neq c(v_3)$ in $c(v_2) \neq c(v_n)$, lahko spremenimo barve pri točkah v_1 in v_2. Spremenjeno barvanje lahko razširimo na graf C_n. □

Usmerjen graf je *Eulerjev*, če za vsako točko grafa velja, da je število povezav, ki so usmerjene stran od te točke, enako številu povezav, ki so usmerjene k tej točki. Eulerjev usmerjen graf je *sod* oz. *lih*, če je število povezav sodo oz. liho. Za usmerjen graf G definiramo $\mathcal{E}^e(G)$ (oz. $\mathcal{E}^o(G)$) kot množico sodih (oz. lihih) vpetih Eulerjevih usmerjenih podgrafov v G. Naj bo $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}^e(G) \cup \mathcal{E}^o(G)$. Torej $\mathcal{E}(G)$ je množico Eulerjevih usmerjenih vpetih podgrafov v G. Alon in Tarsi [4] sta dokazala naslednji izrek, ki ga bomo uporabili v dokazu izreka 2.3.5.

Izrek 2.3.4 (Alon in Tarsi). *Predpostavimo, da ima graf G usmeritev D, za katero velja, da je izhodna stopnja vsake točke $\leq d$ ter $|\mathcal{E}^e(D)| \neq |\mathcal{E}^o(D)|$. Potem, je $\chi_l(G) \leq d+1$.*

Nasledjni izrek je privzet iz Juvan, Mohar in Škrekovski [86].

Izrek 2.3.5. *Če je G cikel dolžine $3n$, potem je $\chi_l''(G) = 3$.*

Dokaz. Označimo s T totalni graf za G, t.j. za graf T velja, da je $V(T) = V(G) \cup E(G)$, kjer sta točki iz T sosednji natanko tedaj, kadar sta ustrezna elementa iz G sosednja oz. incidenčna v G. Dovolj bo pokazati, da je $\chi_l(T) = 3$. Ni težko videti, da je T izomorfen krožnemu grafu $C(6n, 2)$, t.j. grafu, ki je sestavljen iz enega $6n$-cikla C_1 in dveh paroma prepletajočih se $3n$-ciklov C_2 in C_3. Naj bo D usmeritev grafa T tako, da so cikli C_1, C_2, C_3 usmerjeni v enako smer. Naj bo $\mathcal{E} = \mathcal{E}(D)$ ter definirajmo

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &= \{H \in \mathcal{E} \mid \forall v \in V(D) : d_H^+(v) \leq 1\}, \\
\mathcal{E}_1 &= \{H \in \mathcal{E} \mid \forall v \in V(D) : d_H^+(v) = 1\}, \\
\mathcal{E}_2 &= \{H \in \mathcal{E} \mid \forall v \in V(D) : d_H^+(v) \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Tedaj velja $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$. Ni težko videti, da $\mathcal{E}_1$ vsebuje samo dva usmerjena grafa C_1 ter $C_2 \cup C_3$. Naj bo $H \in \mathcal{E}$. Če obstaja točka v z $d_H^+(v) = 2$, potem ni težko videti, da pri vsaki točki $u \in V(D)$ velja $d_H^+(u) \geq 1$. To pa implicira $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_2$.

Naj bo $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ preslikava definirana takole $\varphi(H) = D - E(H)$. Tedaj je φ bijektivna preslikava ter $\varphi(H) \neq H$ za vsak $H \in \mathcal{E}$. Ker je $|E(D)|$ sodo število, $\varphi(\mathcal{E}^e(D)) = \mathcal{E}^e(D)$ in $\varphi(\mathcal{E}^o(D)) = \mathcal{E}^o(D)$. To pa implicira, da sta $|\mathcal{E}^e(D)|$ in $|\mathcal{E}^o(D)|$ soda števila. Če je $|\mathcal{E}^e(D)| = |\mathcal{E}^o(D)|$, potem je $|\mathcal{E}| = 4k$ za nek k. Da bi uporabili izrek 2.3.4 bo dovolj, da pokažemo, da je $|\mathcal{E}| = 4k+2$ za neko naravno število k. Iz $\varphi(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}_2$ in $\varphi(\mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_0$ sledi, da je $|\mathcal{E}_0| = |\mathcal{E}_2|$. Torej bo dovolj, če pokažemo, da je $|\mathcal{E}_0|$ sodo število.

Vsak graf iz $\mathcal{E}_0$ je sestavljen iz 0, 1, ali 2 usmerjenih ciklov. Natanko eden graf je brez ciklov, to je tisti, ki nima povezave. Podobno, natanko eden graf ima dva cikla, to je $C_2 \cup C_3$. Določili bomo število grafov, ki imajo natanko en cikel. Označimo s f_i število različnih načinov, s katerimi število i lahko zapišemo kot (urejeno) vsoto števil 1 in 2. Ni se težko prepričati, da je število f_i določeno z naslednjo rekurzivno zvezo:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 2 \quad \text{in} \quad f_i = f_{i-1} + f_{i-2}, \quad i \geq 3.$$

Izberimo točko $v \in V(D)$. Vsak usmerjen cikel v D, ki vsebuje točko v, se lahko enolično predstavi kot sekvenca števil 1 in 2, katerih vsota je $6n$. Zaradi tega je število takih ciklov natanko f_{6n}. Vsak cikel, ki ne vsebuje točke v, zagotovo vsebuje povezavo med obema sosedama točke v in C_1. Podobno kot prej je število takih ciklov enako f_{6n-2}. Tako dobimo, da je

$$|\mathcal{E}_0| = f_{6n} + f_{6n-2} + 2 = f_{6n-1} + 2f_{6n-2} + 2\,.$$

Ker je f_{6n-1} sodo število za vsako naravno število, smo izrek dokazali. $\square$

2.4 Seznamska nepravilna barvanja

Najprej bomo podali nekaj definicij. Naj bo L izbira barv grafa G. *L-barvanje z nepravilnostjo d*, ali krajše $(L,d)^*$-barvanje, je preslikava c, ki dodeli vsaki točki $v \in V(G)$ tako barvo $c(v)$ iz $L(v)$, da ima v največ d sosedov obarvanih z barvo $c(v)$. Za $m \in \boldsymbol{N}$ je graf *m-izbirljiv z nepravilnostjo d*, ali krajše *$(m,d)^*$-izbirljiv*, če obstaja $(L,d)^*$-barvanje za vsako izbiro barv L z $|L(v)| \geq m$ za vsako točko $v \in V(G)$. Torej je $(m,0)^*$-izbirljivost enaka kot m-izbirljivost. Izbira barv L ravninskega grafa G (z zunanjim obhodom C) je *dobra*, če velja

$$|L(v)| \geq \begin{cases} 2, & v \in V(C) \\ 3, & v \in V(G) \setminus V(C). \end{cases} \tag{2.3}$$

Označimo z $\mathrm{im}(v)$ število sosedov točke v, ki so obarvani z isto barvo kot v. Naj bosta u, v točki povezanega grafa G. Točka $w \in V(G)$ *loči* u in v, če vsaka pot od u do v vsebje w. S $S(u,v)$ označimo množico točk grafa, ki ločijo u in v. Ni težko videti, da je vsaka točka iz $S(u,v) \setminus \{u,v\}$ prerezna točka v G. Torej, če je G 2-povezan, potem je $S(u,v) = \{u,v\}$.

Lema 2.4.1. *Naj bo G ravninski graf z zunanjim obhodom C in naj bo L dobra izbira barv grafa G. Za točki $u, v \in V(C)$ naj bo c $(L,2)^*$-barvanje množice $S(u,v)$. Potem lahko c razširimo na $(L,2)^*$-barvanje grafa G tako, da je* $\mathrm{im}(u) \leq 1$, $\mathrm{im}(v) \leq 1$. *Kadar pa je $uv \in E(C)$ in $c(u) \neq c(v)$, je potem* $\mathrm{im}(u) = 0$, $\mathrm{im}(v) \leq 1$.

Dokaz. Predpostavimo, da je lema napačna in da je G protiprimer s čim manjšim $|V(G)|$. V nadaljevanju bomo konstruirali barvanje, ki ga zahteva lema, in tako bomo prišli do protislovja.

Najprej bomo dokazali, da je G 2-povezan. Predpostavimo, da to ni res. Označimo z $v_0(=u), v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}(=v)$ točke iz $S(u,v)$, kjer je $v_{i+1}(i = 0, \ldots, n-1)$ prva prerezna točka, različna od v_i, ki leži na vsaki poti od v_i do v_{i+1}; blok, ki vsebuje v_{i-1} in v_i, označimo z B_i. Po minimalnosti grafa G razširimo c na B_i tako, da je $\mathrm{im}_{B_i}(v_{i-1}) \leq 1$ in $\mathrm{im}_{B_i}(v_i) \leq 1$. Mogoče je tudi c razširiti tako, kot zahteva lema, kadar sta si točki u in v sosednji in različno obarvani. Če graf G še ni že obarvan, potem obstaja blok B, katerega ena točka je obarvana druge pa ne. Obarvana točka, poimenujmo jo w_1, je prerezna točka. Izberimo tako točko $w_2 \in V(B)$, da je sosednja z w_1 in da w_1w_2 leži na zunanjem obhodu bloka B. Naj bo $c(w_2) \in L(w_2) \setminus c(w_1)$. Po minimalnosti lahko razširimo c na B tako, da je $\mathrm{im}_B(w_1) = 0$ in $\mathrm{im}_B(w_2) \leq 1$. Potem ponovimo isto proceduro, dokler graf ni obarvan. Na koncu velja $\mathrm{im}(u) \leq 1$ in $\mathrm{im}(v) \leq 1$ oziroma $\mathrm{im}(u) = 0$ in $\mathrm{im}(v) \leq 1$, če je $uv \in E(C)$ in $c(u) \neq c(v)$.

Torej lahko predpostavimo, da je G povezan. Od tod sledi, da je $S(u,v) = \{u,v\}$. Ker $G \neq K_2$, sledi, da je C cikel. Lahko predpostavimo, da je rob vsakega lica, razen mogoče zunanjega, trikotnik. Sicer lahko dodajamo povezave v G, da bi prišli do tega. Če sta točki u in v sosednji in je $uv \in E(C)$, potem bomo privzeli, da je v naslednik točke u na C. Označimo z u^* in v^* predhodnika točke u in naslednika točke v na C.

V nadaljevanju bomo obravnavali nekaj primerov, v katerih bomo (razen v 1.(a)) konstruirali graf G' iz G tako, da bomo odstranili nekaj točk. Tako bo G' manjši kot G. Graf G', točki u' in v', ustrezna izbira barv L' ter barvanje c so zdaj taki, da so zahteve leme izpolnjene. Po minimalnosti bomo obarvali G' in tako dobili iskano barvanje grafa G. Naj bo $S' = S_{G'}(u', v')$ in naj bo C' zunanji obhod grafa G'.

1. *točki u in v sta sosednji.*

   (a) *uv je diagonala cikla C.*
   Naj bo $G_1 = \mathrm{Int}(C[u,v] \cup \{vu\})$ in $G_2 = \mathrm{Int}(C[v,u] \cup \{uv\})$. Povezava uv leži na zunanjem obhodu teh grafov. Zdaj bomo na grafih G_1 in G_2 po minimalnosti razširili c takole: Če je $c(u) = c(v)$, potem tadva grafa obarvamo tako, da je $\mathrm{im}_{G_i}(u) = \mathrm{im}_{G_i}(v) = 1$ za $i = 1, 2$. Sicer obarvamo G_1 tako, da je $\mathrm{im}_{G_1}(u) = 0$, $\mathrm{im}_{G_1}(v) \leq 1$ in potem obarvamo še G_2 tako, da je $\mathrm{im}_{G_2}(u) \leq 1$, $\mathrm{im}_{G_2}(v) = 0$.

   (b) *$uv \in E(C)$ in $c(u) \neq c(v)$.*
   Naj bo $G' = G \setminus \{u\}$. Definirajmo $L'(x) = L(x) \setminus \{c(u)\}$ za vsak $x \in N(u) \setminus V(C)$, in sicer $L'(x) = L(x)$. Točki u^* in v bosta dobili vlogo točk u' in v'. Vsako točko $x \in S' \setminus \{v'\}$ obarvamo tako, da je $c(x) \in L(x) \setminus \{c(u)\}$. Potem po minimalnosti razširimo c na G'. Tedaj je $\mathrm{im}(u) = 0$ in $\mathrm{im}(v) \leq 1$.

   (c) *$uv \in E(C)$ in $c(u) = c(v)$.*
   Naj bo $G' = G \setminus \{u, v\}$. Za vsako točko $x \in V(G')$ definirajmo $L'(x) = L(x) \setminus \{c(u)\}$, kadar je $x \in [N(u) \cup N(v)] \setminus V(C)$, in sicer $L'(x) = L(x)$. Če je $u^* \neq v^*$, potem naj imata u^* in v^* vlogo točk u' in v'. Sicer $u^* = v^*$. Naj bo w^* naslednik točke u^* na C' in naj imata u^* in w^* vlogo točk u' in w'. Vsako točko $x \in S'$ obarvamo s $c(x) \in L(x) \setminus \{c(u)\}$. Potem po minimalnosti razširimo c na G'. Ker je u edini sosed točke v z barvo $c(v)$ in obratno, sledi, da je $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(v) = 1$.

2. *u in v nista sosednji točki.*
   Naj bo $P^* = w_0 w_1 \cdots w_k$ pot brez diagonal (v G), kjer je $w_0 = u$, $w_k = v$, in naj bo $w_i \in C[u,v]$ za $i = 1, \ldots, k-1$. Očitno je, da pot P^* obstaja in je natanko določena. Izberimo največji $s \in [0, k-1]$ tako, da je $c(u) \in L(w_i)$ za $i = 0, \ldots, s$. Če je $s = k-1$ in $c(u) = c(v)$, potem postavimo $s = k$. Naj bo $G_i = \mathrm{Int}(C[w_i, w_{i+1}] \cup \{w_{i+1} w_i\}])$ za $i = 0, \ldots, k-1$. Ni težko opaziti, da je tedaj, kadar $w_i w_{i+1} \in E(C)$, graf G_i izomorfen grafu K_2.

   (a) *$s = k$.*
   Za $i = 1, \ldots, k-1$, naj bo $c(w_i) = c(u)$. Graf G' dobimo tako, da odstranimo točke grafov G_i, $i = 0, \ldots, k-1$. Za vsako točko $x \in V(G')$ definirajmo $L'(x) = L(x) \setminus \{c(u)\}$ kadar je $x \in [\cup_{i=0}^{k} N(w_i)] \setminus V(C)$, sicer pa je $L'(x) = L(x)$.

Če je $u^* \neq v^*$, potem naj imata u^* in v^* vlogo točk u' in v'. Sicer, $u^* = v^*$, naj bo w^* naslednik za u^* na C' in naj imata w^* in u^* vlogo točk u' in v'. Vsako neobarvano točko x obarvamo s $c(x) \in L(x) \setminus \{c(u)\}$. Potem pa razširimo c na G'. Barvanje vsakega od grafa G_i $(i = 0, \ldots, k-1)$ lahko konstruiramo tako, kot je opisano v 1.(c). Točka w_1 je edina soseda točki u, ki ima isto barvo. Podobno je w_{k-1} edina soseda točke v, ki ima isto barvo. Od tod sledi, da je $\mathrm{im}(u) = \mathrm{im}(v) = 1$.

(b) *$s < k$ in $w_s w_{s+1} \in E(C)$.*
Po definiciji sledi, da je $c(u) \notin L(w_{s+1})$ (kjer je $w_{s+1} \neq v$). Podobno kot v primeru 2.(a) obarvamo točke w_i za $i = 1, \ldots, s$ z barvo $c(u)$ in konstruiramo graf G' iz G tako, da odstranimo točke grafa G_i za $i = 0, \ldots, s-1$. Za vsak $x \in V(G')$ naj bo $L'(x) = L(x) \setminus \{c(u)\}$, kadar je $x \in [\cup_{i=0}^{s} N(w_i)] \setminus V(C)$, sicer pa $L'(x) = L(x)$. Točki u^* in v ustrezata točkama u' in v' grafa G'. Za vsako točko $x \in S' \setminus \{v'\}$ naj bo $c(x) \in L(x) \setminus \{c(u)\}$ in potem razširimo c na G'.

(c) $s < k$ in $w_s w_{s+1} \notin E(C)$.
Naredimo kot v prejšnjem primeru. Odstranimo tudi točke grafa G_s razen točke w_{s+1}. V tem primeru moramo dodatno pa skrbeti, da zagotovimo $\mathrm{im}(w_{s+1}) \leq 2$. Po razširitvi barvanja c na grafu G' dobimo, da je $\mathrm{im}_{G'}(w_s) = 1$. Po minimalnosti graf G_s obarvamo tako, da je $\mathrm{im}_{G_s}(w_{s+1}) = 0$ in $\mathrm{im}_{G_s}(w_s) \leq 1$. Tedaj je $\mathrm{im}(w_{s+1}) \leq 2$, kadar pa je $w_{s+1} = v$, imamo $\mathrm{im}(w_{s+1}) \leq 1$.

□

Naslednji izrek je direktna posledica zgornje leme.

Izrek 2.4.2.

(a) Vsak zunanje-ravninski graf je $(2,2)^*$-izbirljiv.

(b) Vsak ravninski graf je $(3,2)^*$-izbirljiv.

Zgornji izrek pa ima naslednjo posledico.

Posledica 2.4.3.

(a) Vsi zunanje-ravninski grafi so $(m,d)^*$-izbirljivi natanko takrat, kadar je $(m,d) \geq (3,0)$ ali $(m,d) \geq (2,2)$.

(b) Vsi ravninski grafi so $(m,d)^*$-izbirljivi, kadar je $(m,d) \geq (3,3)$ ali $(m,d) \geq (5,0)$.

Kasneje je Woodall [113] razširil posledico 2.4.3(b) na $K_{3,3}$-minor-proste grafe. Da bi imeli v posledici 2.4.3(b) dvosmerno trditev, moramo odgovoriti na naslednje odprto vprašanje.

Domneva 2.4.4. *Vsak ravninski graf je* $(4,1)^*$*-izbirljiv.*

V Škrekovski [84] je dokazan naslednji Grötzschev izrek za seznamska barvanja z nepravilnostjo ena. Dokaz je dolg, zato ga bomo izpustili.

Izrek 2.4.5. *Naj bo* G *ravninski graf brez trikotnikov in naj bo* L *taka izbira barv grafa* G*, da bo veljal* $|L(v)| \geq 3$ *za vsako točko* $v \in V(G)$*. Potem je*

(i) graf G $(L,1)^*$*-obarvaljiv;*

(ii) če ima G *4- ali 5-cikel* C*, potem vsako* $(L,1)^*$*-barvanje cikla* C *lahko razširimo na* $(L,1)^*$*-barvanje grafa* G *tako, da velja* $\mathrm{im}_G(v) = \mathrm{im}_C(v)$ *za vsako točko* $v \in V(C)$*.*

Zgornji izrek implicira, da so ravninski grafi brez trikotnikov $(3,1)^*$-izbirljivi. V [84] je tudi dokazano, da so zunanje-ravninski grafi brez trikotnikov $(2,1)^*$-izbirljivi. Tako dobimo naslednjo zanimivo posledico:

Posledica 2.4.6.

(a) Vsi zunajne-ravninski grafi brez trikotnikov so $(m,d)^*$*-izbirljivi natanko takrat, kadar je* $(m,d) \geq (3,0)$ *ali* $(m,d) \geq (2,1)$*.*

(b) Vsi ravninski grafi brez trikotnikov so $(m,d)^*$*-izbirljivi natanko takrat, kadar je* $(m,d) \geq (3,1)$ *ali* $(m,d) \geq (4,0)$*.*

Naj bo g_d najmanjše tako število, da je vsak ravninski graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj g_d, $(2,d)^*$-izbirljiv. Najprej bi videli, da je $g_0 = \infty$ in $g_{d_1} \geq g_{d_2}$, kadar je $d_2 \geq d_1$. Spodnje meje naslednjega izreka so dokazane v Škrekovski [83], zgornje meje pa v Škrekovski [85].

Izrek 2.4.7. *Naj bo* g_d *najmanjše tako število, da je vsak ravninski graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj* g_d*,* $(2,d)^*$*-izbirljiv. Potem velja*

(1) $6 \leq g_1 \leq 9$*;*

(2) $5 \leq g_2 \leq 7$*;*

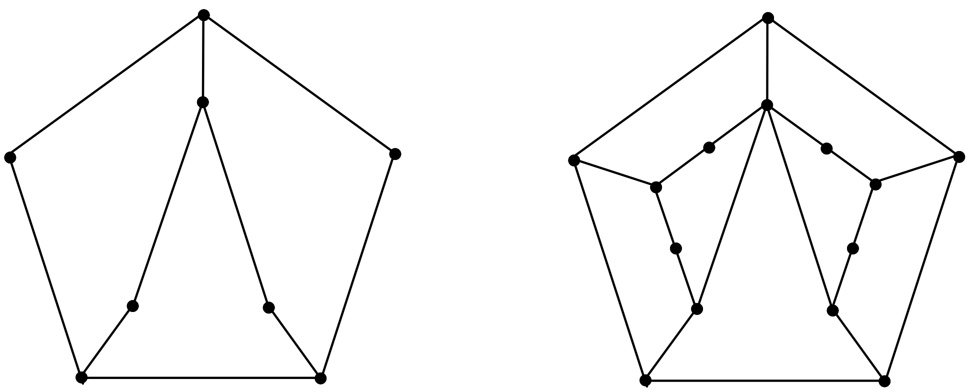
(3) $5 \leq g_3 \leq 6$*;*

(4) $g_d = 5$ *za vsak* $d \geq 4$*.*

V nadaljevanju bomo dokazali samo spodnje meje gornjega izreka. Da bi dokažali zgornje meje, bi potrebovali malo več prostora. Zato bomo te dokaze izpustili.

Najprej bomo iz grafov G_1 in G_2 iz slike 2.3, konstruirali ravninski graf G^*. . Graf G^* ne bo $(2,1)^*$-obarvljiv, zaradi tega pa tudi ne bo $(2,1)^*$-izbirljiv. Najkrajši cikel grafa G^*

bo dolžine 5. Tako bomo dokazali spodnjo mejo izreka 2.4.7(1). Najprej vzemimo kopijo grafa G_1 in jo poimenujmo *okvir.* Na vsako lice okvirja nalepimo kopijo grafa G_2. Dobljeni graf G' ima 44 točk. Ni se težko prepričati, da imamo za poljubno $(2,1)^*$-barvanje grafa G_2 vedno vsaj tri točke zunanjega cikla z nepravilnostjo 1. Ena od njih ima nepravilnost 1 zato, ker je sosednja z enako obarvano točko iz notranjosti. Poljubno barvanje grafa G_1 ima dva para točk, tako da sta si pri vsakem paru točki sosednji ter enako obarvani. Od tod pa se ni težko prepričati, da imajo v vsakem $(2,1)^*$-barvanju grafa G' točke iz okvirja nepravilnost 1. Končno naj bo graf G'' izomorfen grafu G'. Iz vsakega od grafov G' in G'' izberimo po eno točko iz okvirja ter ju identificirajmo. Tako smo konstruirali graf G^* na 87 točkah, ki ni $(2,1)^*$-obarvljiv.



Slika 2.3: Grafa G_1 in G_2.

Zdaj bomo za vsak $d \geq 2$ konstruirali ravninski graf brez trikotnikov, ki ni $(2,d)^*$-obarvljiv in zaradi tega tudi ni $(2,d)^*$-izbirljiv. S tem bomo pokazali spodnjo mejo izreka 2.4.7(2)–(4). Naj bo $C^*(m)$ graf, ki je sestavljen iz 4-cikla (poimenujmo ga *glavni cikel*) ter dodatne točke (poimenujmo jo *centralna točka*), ki leži v notranjosti glavnega cikla. Centralna točka je povezana z vsako točko glavnega cikla z natanko m 2-potmi. V vsakem $(2,m-1)^*$-barvanju grafa $C^*(m)$ sta centralna točka ter točke glavnega cikla enako obarvani. Zdaj vzemimo dvodelni graf $K_{2,d+1}$ ter v vsakem 4-ciklu tega grafa zlepimo kopijo grafa $C^*(2d+1)$. Novi graf označimo z G^*. Očitno je, da je G^* ravninski graf z dolžino najkrajšega cikla 4. Ni se tudi težko prepričati, da graf G^* ni $(2,d)^*$-obarvljiv.

2.5 Posplošeni Grötzschev izrek za seznamska barvanja

Glavni rezultati tega razdelka sta posledica 2.5.4 ter izrek 2.5.8. Z njima posplošimo izreka 1.10.3 in 1.10.7 na seznamska barvanja. Pri seznamskem barvanju bomo potrebovali vsaj eno barvo več kot pri navadnem barvanju.

Lema 2.5.1. *Naj bo G ravninski graf in naj bo $C = x_1x_2\cdots x_kx_1$ k-cikel grafa G dolžine*

$k \le 7$. Naj bo L izbira barv, ki vsaki točki dodeli vsaj štiri barve, ter naj bo c preslikava, ki priredi vsaki točki v s cikla C barvo $c(v) \in L(v)$. Predpostavimo, da G nima 3-cikla, različnega od C. Potem c lahko razširimo na L-barvanje grafa $G - E(G(V(C)))$.

Dokaz. Naj bo G protiprimer s čim manjšim $|V(G) \setminus V(C)|$. Tedaj je G povezan graf brez točk stopnje 1. Po minimalnosti lahko privzamemo, da je C zunanji cikel grafa G. Podobno je C induciran cikel, vsaka točka iz $V(G) \setminus V(C)$ pa je stopnje vsaj 4. Če je $k = 3$, potem lahko eno povezavo cikla C subdividiramo in novo točko poljubno obarvamo. Zaradi tega lahko predpostavimo, da je $k \ge 4$. Če je $k \ge 5$, potem lahko predpostavimo, da na C stopnje 2 ni dveh zaporednih točk. Sicer lahko povezavo, ki veže ti dve točki skrčimo. Po Eulerjevi formuli (1.5) imamo

$$\sum_{i \ge 0} (4-i) n_i + \sum_{i \ge 0} (4-i) f_i = 8. \tag{2.4}$$

V zgornji enačbi je n_i število točk stopnje i grafa G, f_i pa število lic dolžine i grafa G. Ker je C rob lica dolžine k, sledi, da je $f_k \ge 1$. Iz zgornje zveze sledi, da je $2n_2 + n_3 \ge k + 4$. To pa je prostislovje in s tem je dokaz končan. □

Prvi del naslednjega rezultata se prvič pojavi v Kratochvíl in Tuza [63]. Drugi del posledice 2.5.2 pa je direktna posledica leme 2.5.1.

Posledica 2.5.2. *Vsak ravninski graf G brez trikotnikov je 4-izbirljiv. Velja še več: naj bo L izbira barv, ki dodeli vsaki točki vsaj štiri barve, ter naj bo C k-cikel s $k \le 7$. Potem poljubno L barvanje grafa $G(V(C))$ lahko razširimo na L-barvanje grafa G.*

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo tehnično lemo:

Lema 2.5.3. *Naj bo G ravninski graf z robom zunanjega lica $C = x_1 x_2 \cdots x_n x_1$. Naj bo L izbira barv, ki vsaki točki dodeli vsaj štiri barve, ter naj bo c L-barvanje za x_1, x_n. Predpostavimo, da vsaka povezava, ki ima krajišče v $V(G) \setminus V(C)$, leži na vsaj enem 3-ciklu. Potem lahko c razširimo na krepko L-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$ tako, da sta poljubni dve točki iz C, ki sta sosednji v G, različno obarvani.*

Dokaz. Predpostavimo, da je lema napačna in da je G protiprimer s čim manjšim $|V(G)|$. Bralec naj se sam prepriča, da je G 2-povezan graf. Potem je C cikel. Najprej predpostavimo, da ima C diagonalo $x_i x_j$ $(i < j)$. Naj sta $G_1 = \mathrm{Int}(x_j x_{j+1} \cdots x_i x_j)$ in $G_2 = \mathrm{Int}(x_i x_{i+1} \cdots x_j x_i)$. Tedaj sta x_1 in x_n točki grafa G_1. Iz minimalnosti grafa G sledi, da lahko c razširimo na $\mathcal{H}(G_1)$. Opazi, da sta točki x_i in x_j različno obarvani. Zaradi tega barvanje točk x_i in x_j lahko razširimo na hipergraf $\mathcal{H}(G_2)$ in tako dobimo iskano barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$. To pa je protislovje.

Zdaj lahko predpostavimo, da je C brez diagonal. Naj bo $G' = G - x_{n-1}$. Rob zunajnega lica grafa G' označimo s C'. Vsaka povezava grafa G' s krajiščem v $V(G') \setminus V(C')$

leži na vsaj enem 3-ciklu grafa G, ta 3-cikel pa je tudi v G'. Po minimalnosti, lahko c razširimo na krepko L-barvanje $\bar{c}$ hipergrafa $\mathcal{H}(G')$ tako, da sta poljubni dve točki cikla C', ki sta sosednji v G', različno obarvani. Na koncu postavimo $\bar{c}(x_{n-1}) \in L(x_{n-1}) \setminus \{c(x_n), \bar{c}(x_{n-2})\}$ ter trdimo, da je $\bar{c}$ krepko L-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$. Recimo, da to ne drži. Potem obstaja monokromatska povezava xx_{n-1}. Ker je $x \notin V(C)$, sledi, da obstaja 3-cikel v G, ki vsebuje povezavo xx_{n-1}. Od tod pa sledi, da obstaja monokromatski trikotnik $xx_{n-1}y$. To pa ni mogoče, ker sta x in y sosednji točki in sta obe točki v ciklu C'. S tem je dokaz koncan. □

Podobno kot pri izreku 1.10.3 za navadna barvanja lahko tudi pri seznamskem barvanju prih določenih pogojih uporabimo eno barvo manj . Naslednja trditev Mohar in Škrekovski [74] je direktna posledica zgornje leme.

Posledica 2.5.4. *Naj bo G ravninski graf, v katerem vsaka povezava leži na nekem 3-ciklu. Potem je hipergraf $\mathcal{H}(G)$ 3-izbirljiv.*

V nadaljevanju bomo uporabili naslednjo lemo. Njen dokaz je lahek, Zato ga bomo prepustili bralcu.

Lema 2.5.5. *Naj bo G graf, v katerem vsaka povezava leži na največ dveh 3-ciklih. Naj bo uv povezava, ki leži na natanko enem 3-ciklu $uvwu$ v G. Naj bo $P = v_1v_2 \cdots v_k$ najdaljša pot v $N(u)$, ki vsebuje povezavo $vw = v_1v_2$. Označimo z G' graf, ki ga dobimo iz G, ko odstranimo povezave $uv_2, uv_4, uv_6, \ldots, uv_k$, če je k sodo število, ter $uv_2, uv_4, uv_6, \ldots, uv_{k-1}$, če je k liho število. Tedaj je vsako barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G')$ tudi barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.*

Lema 2.5.6. *Naj bo G povezan ravninski graf, $C = x_1x_2 \cdots x_kx_1$ ($k \leq 7$) rob zunanjega lica in, naj bo L taka izbira barv, da vsaki točki dodeli vsaj štiri barve, ter naj bo $c(v) \in L(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$. Potem c lahko razširimo na $V(G)$ tako, da če je neka (hiper)povezava hipergrafa $\mathcal{H}(G)$ monokromatska, potem je to bodisi C v primeru $k = 3$ ali neka povezava cikla C v primeru $k \neq 3$. Velja še več, vsak 3-cikel grafa G, ki ima točko v $G - C$, je monokromatski.*

Dokaz. Dokaz inpeljemo z matematično indukcijo po $|V(G)| + |E(G)|$. Lahko predpostavimo, da je $G \neq C$ ter da je C cikel brez diagonal. Predpostavimo, da ima 3-cikel, ki ni rob nekega lica C'. Po indukcijski predpostavki najprej razširimo c iz $V(C)$ na $V(\mathrm{Out}(C'))$ in potem še na $(\mathrm{Int}(C'))$. Ni težko videti, da dobimo iskano barvanje.

Torej lahko predpostavimo, da je vsak 3-cikel grafa G rob nekega lica. Recimo, da ima G povezavo $e = uv$, kjer je $u \notin V(C)$ tak, da e leži na natanko enem 3-ciklu. Naj bo G' podgraf grafa G, kot je opisano v lemi 2.5.5. Tedaj je $V(G) = V(G')$. Po indukcijski predpostavki lahko c razširimo na $V(G')$. Tedaj je c tudi iskano barvanje za G.

Zdaj pa lahko predpostavimo, da je vsak 3-cikal rob nekega lica, nobena od povezav $E(G) \setminus E(C)$ pa ne leži na natanko enem 3-ciklu. Iz trditve 1.10.5(b) sledi, da je G bodisi skoraj-triangulacija ali pa je C edini možni 3-cikel v grafu G. V drugem primeru c lahko razširimo po lemi 2.5.1. Sicer lahko predpostavimo, da je G skoraj-triangulacija ravnine.

Predpostavimo, da ima točka $v \in V(G) \backslash V(C)$ dva soseda x_i, x_j, ki nista zaporedna soseda na ciklu C. Ker je $k \leq 7$, obstaja taka barva $a \in L(v)$, da je $a = c(x)$ za največ eno točko $x \in V(C)$. Naj bo $c(v) = a$. Zdaj po indukcije razširimo c na $\mathrm{Int}(C')$ in $\mathrm{Int}(C'')$, kjer sta C' in C'' cikla iz $C \cup \{x_i v, x_j v\}$ različna od C. Zaradi izbire barve a in ker je G skoraj-triangulacija, sledi, da je c iskano barvanje.

Za $i = 1, \ldots, k-1$ naj bo v_i taka točka grafa G, da je $v_i x_i x_{i+1}$ 3-cikel grafa G (različen od C). Barva $a \in L(v_i)$ je *slaba*, če je $c(x_i) = c(x_{i+1}) = a$. Iz prejšnjega odstavka ima vsaka točka v_i v svojem listu največ eno slabo barvo. Naj bo L'' izbira barv grafa G, ki jo dobimo iz L tako, da v vsakem od seznamov $L(v_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$ odstranimo slabe barve. Izbira barv L'' vsaki točki dodeli vsaj tri barve. Naj bo $G'' = G - \{x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}\}$. Z uporabo leme 2.5.3 lahko razširimo c na krepko L''-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G'')$ (oz. $\mathcal{H}(G'') - x_1 x_k$). Trdimo, da je c iskano barvanje. Če to ni res, potem obstaja monohromatski 3-cikel xyz (ker vsaka povezava grafa G pripada nekemu 3-ciklu), kjer je $z \notin V(C)$. Lahko predpostavimo, da je $x = x_i$, $1 < i < k$. Ker $L''(z)$ nima slabih barv, sledi $y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$. Zaradi tega je yz povezava na robu zunanjega lica grafa G''. Ker sta poljubni dve sosednji točki zunanjega obhoda različno obarvani, dobimo protislovje. □

Za izrek 2.5.8 bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 2.5.7. *Predpostavimo, da je G ravninski graf z zunanjim obhodom C dolžine 6. Predpostavimo tudi, da vsaka točka in vsaka povezava grafa G leži na neki 3-poti, ne leži pa na nobeni 2-poti, ki veže diagonalno nasprotni točki cikla C. Potem je $G - V(C)$ 3-izbirljiv graf in vsako lice grafa G je dolžine ≤ 6.*

Dokaz. Ni se težko prepričati, da je $G - V(C)$ zunanje-ravninski graf. Zato je 3-izbirljiv. Tudi ni težko z matematično indukcijo po številu 3-poti, ki vežejo diagonalno nasprotne točke cikla C, pokazati, da je vsako lice dolžine ≤ 6. □

Spomnimo se, da je barvanje krepko, kadar ni monokromatskih trikontikov. V Mohar in Škrekovski [74] je dokazan naslednji izrek:

Izrek 2.5.8. *Naj bo graf G vložen v ravnini ali projektivni ravnini. Tedaj je $\mathcal{H}(G)$ (krepko) 4-izbirljiv.*

Dokaz. Predpostavimo, da je izrek napačen in naj bo G čim manjši protiprimer. Naj bo L ustrezna izbira barv. V nadaljevanju bomo ugotavljali strukturo grafa G.

(a) *G ima vsaj eno lice dolžine 3.*

Če je vsako lice dolžine ≥ 4, potem po Eulerjevi formuli (1.5) sledi, da ima G točko stopnje ≤ 3. Iz minimalnosti sledi, da ima $\mathcal{H}(G-v)$ krepko L-barvanje, ki se da brez težav razširiti na krepko L-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.

(b) *Vsak stisljiv 3-cikel grafa G je lice.*

To takoj sledi iz leme 2.5.6 in iz minimalnosti grafa G. Najpreje barvanje razširimo na zunanjost 3-cikla in potem na njegovo notranjost.

(c) *G nima nestisljivih 3-ciklov.*

Predpostavimo, da je trditev nepravilna in naj bo $C = xyz$ nestisljiv 3-cikel grafa G. Prerežemo graf G po ciklu C. Dobimo ravninski graf G' z zunanjim obhodom $C' = x'y'z'x''y''z''$, kjer x', x'' ustrezata točki x, y', y'' ustrezata točki y ter z', z'' ustrezata točki z. Ni se težko prepričati, da je C' cikel brez diagonal. Pokazati nameravamo, da ima $\mathcal{H}(G)$ krepko L-barvanje. (Dobili bomo prostislovje in s tem končali dokaz.) To pa je enakovredno, kot da bi konstruirali tako krepko L-barvanje za $\mathcal{H}(G')$, da so točke x' in x'', y' in y'', z' in z'' paroma enako obarvane ter da vsaka 3-pot, ki veže nasprotno diagonalne točke cikla C', ni monokromatska.

Naj bo $a \in L(x)$, $b \in L(y) \setminus \{a\}$ in $c \in L(z) \setminus \{a, b\}$. Obarvajmo x' in x'' z a, y' in y'' z b ter z' in z'' s c. Naj bo G'' podgraf grafa G', ki je sestavljen iz natanko teh točk in povezav, ki pripadajo na 3-poteh med nasprotno diagonalnimi točkami grafa G'. Vedno velja $C' \subseteq G''$, možnost $G'' = C'$ pa ni izključena. Po lemi 2.5.7, lahko konstruiramo L-barvanje grafa $G'' - V(C')$. Potem pa za vsako notranje lice C'' grafa G'' razširimo barvanje točk $V(C'')$ na $\mathrm{Int}(C'')$ z uporabo leme 2.5.6. Trdimo, da smo dobili krepko L-barvanje hipergrafa $\mathcal{H}(G)$.

Če je D nestisljiv cikel grafa G, potem ta določa 3-pot med nasprotno diagonalnimi točkami cikla C' v G'. Če ima ta povezavo iz C', potem pot ni monokromatska, sicer je povezava iz D v $E(G'' - V(C'))$. Ker smo za $G'' - V(C')$ konstruirali L-barvanje, so krajišča te povezave različno obarvana. Če pa je D stisljiv 3-cikel, potem je vsebovan v neki $\mathrm{Int}(C'')$. C'' ni monokromatski in zaradi tega barvanje grafa $\mathrm{Int}(C'')$, ki ga dobimo po lemi 2.5.6, porabi za D vsaj dve različni barvi. Na koncu obravnavajmo povezavo $pq \in E(G)$, ki je tudi povezava v $\mathcal{H}(G)$. Tedaj je pq povezava v $\mathrm{Int}(C'') - E(C'')$. Ker pq ne leži na 3-ciklu v $\mathrm{Int}(C'')$, sta si barvi pri točkah p in q različni. S tem smo dokazali, da ima $\mathcal{H}(G)$ krepko L-barvanje.

(d) *Nobena povezava iz G ne leži na natanko enem 3-ciklu.*

Iz (b) in (c) sledi, da je vsak 3-cikel v grafu G rob nekega lica. To nam omogoči, da uporabimo lemo 2.5.5 ter minimalnost grafa G.

Iz (a)–(d) sledi, da je G triangulacija projektivne ravnine brez podgrafa K_4. Po Eulerjevi formuli ima G točko v stopnje ≤ 5. Iz minimalnosti sledi, da obstaja L-barvanje za $\mathcal{H}(G-v)$. Naj bo L_v množica barv, ki smo jih uporabili za obarvanje sosed točke v vsaj dvakrat. Tedaj je $|L_v| \leq 2$. Ker je vsako lice grafa G, ki vsebuje točko v, 3-cikel, sledi, da lahko obarvamo v z barvo iz $L(v) \setminus L_v$. Tako dobimo za $\mathcal{H}(G)$ krepko L-barvanje. S tem je dokaz končan. □

Lema 2.5.9. *Naj bo G povezan graf, vložen na ploskvi z Eulerjevim rodom g.*

(a) Če je $\mathrm{ew}(G) \geq 6g-11$, potem ima G točko stopnje ≤ 6.

(b) Če je $\mathrm{ew}(G) \geq 19g-37$ in je vsako lice dolžine ≥ 4, G pa nima točke stopnje ≤ 3, potem G vsebuje 4-lice C, katerega točke v G so stopnje 4.

Dokaz. Če je $g=0$, potem je trditev (a) trivialna, graf, ki izpolnjuje zahteve trditve (b), pa ne obstaja. Torej lahko predpostavimo, da velja $\mathrm{ew}(G) < \infty$ in od tod $|V(G)| \geq \mathrm{ew}(G)$. Po Eulerjevi formuli (1.5) imamo

$$\sum (6-i)n_i \geq 12-6g,$$

kjer je n_i število točk stopnje i ($i \geq 0$). Če točke stopnje ≤ 6 ni, potem je $|V(G)| = \sum_{i \geq 7} n_i \leq 6g-12$ in od tod $\mathrm{ew}(G) \leq 6g-12$. S tem smo dokazali trditev (a).

Da bi dokazali trditev (b), bomo uporabili metodo prenosa naboja. Iz Eulerjeve formule sledi

$$\sum_{i \geq 4}(4-i)n_i + \sum_{i \geq 4}(4-i)f_i \geq 8-4g, \tag{2.5}$$

kjer je f_i število lic dolžine i. Priredimo naboj $4-i$ do vsake točke grafa G stopnje i in do vsakega lica grafa G velikosti i. Iz (2.5) sledi, da je skupni naboj vsaj $8-4g$. Zdaj bomo naboj prenašali med točkami in povezavami grafa tako, da se skupni naboj ne spremeni. Pravila za prenašanje naboja so naslednja:

Pravilo 1. Vsaka točka v stopnje 4 pošlje naboj $\frac{1}{5}$ do vsakega sosednjega lica velikosti ≥ 5.

Pravilo 2. Vsaka točka v stopnje 4 pošilja naboj $\frac{2}{19}$ do vsake sosednje točke stopnje ≥ 5.

Pravilo 3. Vsaka točka v stopnje 4 pošilja naboj $\frac{1}{19}$ do vsake točke stopnje ≥ 5, ki leži na skupnem 4-licu F ter je diagonalno nasprotna točki v v F.

Ni težko videti, da je naboj pri vsakem licu nenegativen. Če je u točka stopnje $i \geq 5$, potem je njen novi naboj

$$\leq (4-i) + \frac{3}{19}i \leq -1 + \frac{15}{19} = -\frac{4}{19}.$$

Predpostavimo, da ne obstaja lice dolžine 4, katerega točke so stopnje 4. Če je v točka stopnje 4 ter je sosednja z licem velikosti > 4, potem bo njen novi naboj

$$-\frac{1}{5} - \frac{3}{19} < -\frac{4}{19}.$$

Če pa je v sosednja z licem velikosti 4, potem bo njen novi naboj $\leq -\frac{4}{19}$. Ker je skupni naboj $\geq 8 - 4g$, dobimo

$$8 - 4g \leq -\frac{4}{19}|V(G)|.$$

Od tod pa sledi $|V(G)| \leq 19(g-2)$. □

Izrek 2.5.10. *Naj bo G graf, vložen na ploskvi z Eulerjevim rodom g. Če je* $\mathrm{ew}(G) \geq 19g - 34$, *potem je $\mathcal{H}(G)$ krepko 4-izbirljiv.*

Dokaz. Predpostavimo, da je izrek napačen in da je G minimalni protiprimer. Naj bo L ustrezna izbira barv. Če je G' podgraf v G, potem je $\mathrm{ew}(G') \geq \mathrm{ew}(G)$. To pa implicira, da je za vsak strog podgraf G' grafa G hipergraf $\mathcal{H}(G)$ L-obarvljiv. Zaradi tega G nima točke stopnje 4. Iz izreka 2.5.8 sledi, da je $g \geq 2$. Potem je $\mathrm{ew}(G) > 3$. Torej je vsak 3-cikel stisljiv. Podobno kot pri dokazu trditve (b) izreka 2.5.8 lahko pokažemo, da je vsak 3-cikel lice. Lema 2.5.5 implicira, da vsaka povezava grafa G leži na bodisi dveh ali nobenem ciklu. To pa implicira, da je G triangulacija ali graf brez trikotnikov.

Najprej predpostavimo, da je G triangulacija. Po lemi 2.5.9(a) ima G točko stopnje ≤ 6. Iz minimalnosti sledi, da obstaja L-barvanje grafa $\mathcal{H}(G - v)$. Naj bo L_v množica barv, ki smo jo uporabili vsaj dvakrat, da bi obarvali sosede točke v. Potem je $|L_v| \leq 3$. Ker je vsako lice grafa G, ki vsebuje točko v, 3-cikel, lahko pobarvamo v s poljubno barvo iz $L(v) \setminus L_v$ ter tako dobimo krepko L-barvanje za $\mathcal{H}(G)$.

Zdaj pa predpostavimo, da je G graf brez trikotnikov. Iz leme 2.5.9(b) sledi, da ima G tako lice C dolžine 4, da je vsaka točka tega lica stopnje 4. Po minimalnosti lahko konstruiramo L-barvanje za $\mathcal{H}(G - V(C)) = G - V(C)$. Barvanje, ki smo ga dobili, je takšno, da ima vsaka točka iz C na voljo dve prosti barvi. Zaradi tega lahko to barvanje razširimo na ves graf G. To pa je protislovje in s tem je dokaz koncan. □

Literatura

[1] H. L. Abbott, D. Hanson in N. Sauer, *Intersection Theorems for Systems of Sets*, J. Combin. Theory A **12** (1972) 381–389.

[2] M. O. Albertson in J. P. Hutchinson, *The three excluded cases of Dirac's map-color theorem*, Ann. New York Acad. Sci. **319** (1979) 7–17.

[3] M. O. Albertson in E. H. Moore, *Extending Graph Colorings Using No Extra Colors*, rokopis.

[4] N. Alon in M. Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*, Combinatorica **12** 125–134.

[5] K. Appel in W. Haken, *Every planar graph is four colorable. Part I: Discharging*, Illinois J. Math. **21** (1967) 429–490.

[6] K. Appel, W. Haken in J. Koch, *Every planar graph is four colorable. Part II: Reducibility*, Illinois J. Math. **21** (1967) 491–567.

[7] D. Archdeacon, *A note on defective coloring of graphs on surfaces*, J. Graph Theory **11** (1987) 517–519.

[8] G. Bacsó, S. Gravier, A. Gyárfás, M. Preissmann in A. Sebö, *About coloring the hypergraph of maximal cliques of a graph*, rokopis.

[9] M. Behzad, *Graphs and their chromatic numbers*, Ph. D. Thesis, Michigan State University, (1965).

[10] C. Berge, *Perfect graphs*, v: Six papers on Graph Theory, (1963).

[11] T. Böhme, B. Mohar in M. Stiebitz, *Dirac's Map-Color Theorem for Choosability*, J. Graph Theory **32** (1999) 327–339.

[12] O. V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. **25** (1979) 211–236.

[13] R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **37** (1941) 194–197.

[14] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press, London, (1978).

[15] M. Borowiecki, E. Drgas-Burchardt in P. Mihók, *Generalized list colorings of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **15** (1995) 185–193.

[16] P. A. Catlin, *Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples*, J. Combin. Theory B. **26** (1979) 268–274.

[17] G. Chartrand, H. V. Kronk in C. E. Wall, *The point-arboricity of a graph*, Israel J. Math. **6** (1968) 169–175.

[18] G. Chartrand in H. V. Kronk, *The point-arboricity of planar graphs*, J. London Math. Soc. **44** (1969) 612–616.

[19] L. J. Cowen, R. H. Cowen in D. R. Woodall, *Defective colorings of graphs in surfaces: partitions into subgraphs of bounded valency*, J. Graph Theory **10** (1986) 187–195.

[20] L. J. Cowen, W. Goddard in C. E. Jesurum, *Defective colorings revisited*, J. Graph Theory **24** (1997) 205–219.

[21] G. A. Dirac, *Note on the couloring of graphs*, Math. Z. **54** (1951) 347–353.

[22] G. A. Dirac, *A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs*, J. London Math. Soc. **27** (1952) 85–92.

[23] G. A. Dirac, *The coloring of maps*, J. London Math. Soc. **28** (1953) 476–480.

[24] G. A. Dirac, *Map colour theorems related to the Heawood colour formula*, J. London Math. Soc. **31** (1956) 460–471.

[25] G. A. Dirac, *Short proof of a map-colour theorem*, Canad. J. Math. **9** (1957) 225–226.

[26] G. A. Dirac, *A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger*, Proc. London Math. Soc. **7** (1957) 161–195.

[27] D. Duffus, H. A. Kierstead in W. T. Trotter, *Fibres and ordered set coloring*, J. Combin. Theory A **58** (1991) 158–164.

[28] D. Duffus, B. Sands, N. W. Sauer in R. E. Woodrow, *Two-colouring all two-element maximal antichains*, J. Combin. Theory A **57** (1991) 109–116.

[29] P. Erdős, A. L. Rubin in H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. **26** (1979) 125–157.

[30] P. Franklin, *A six-color problem*, J. Math. Phys. **13** (1934) 363-369.

[31] T. Gallai, *Kritische Graphen I.*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **8** (1963) 165–192.

[32] T. Gallai, *Kritische Graphen II.*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. **8** (1963) 373–395.

[33] J. Gimbel in C. Thomassen, *Coloring graphs with fixed genus and girth*, Trans. A. M. S. **349** (1997) 4555–4564.

[34] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combin. Theory B **63** (1995) 153–158.

[35] S. Gravier, *A Hajós-like theorem for list coloring*, Discrete Math. **152** (1996) 299–302.

[36] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Natur. Reihe **8** (1959) 109–120.

[37] S. Gutner, *The complexity of planar graph choosability*, Discrete Math. **159** (1996) 119–130.

[38] F. Guthrie, *Note on the Coloring of Maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **10** (1880) 727–728.

[39] S. Fisk, *The nonexistence of Colorings*, J. Combin. Theory B **24** (1994) 247–248.

[40] S. Fisk in B. Mohar, *Coloring graphs without short non-bounding cycles*, J. Combin. Theory B **60** (1994) 268–276.

[41] H. Hadwiger, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vierteljahrsch. Naturforsch. Ges. Ziirih **88** (1943) 133–142.

[42] G. Hajós, *Über eine Konstruction nicht n-färbbarer Graphen*, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Natur. Reihe **10** (1967) 156–165.

[43] R. Halin, *Über einen Satz von K. Wagner zum Vierfarbenproblem*, Math. Ann. **153** (1964) 47–62.

[44] P. J. Heawood, *Map coulor theorem*, Quart. J. Pure Appl. Math. **24** (1890) 332–338.

[45] H. Heesch, *Untersuchungen zum Vierfarben-problem*, Number 810/810a/810b in B. I. Hochschulscripten, Bibliographisches Institut (1969).

[46] F. Jaeger, *Flows and generalized coloring theorems in graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979) 205–216.

[47] T. R. Jensen in B. Toft, *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, New York, 1995.

[48] M. Juvan, B. Mohar in R. Škrekovski, *On list edge-colorings of subcubic graphs*, Discrete Math. **187** (1998) 137–149.

[49] M. Juvan, B. Mohar in R. Škrekovski, *Graphs of degree 4 are 5-edge-choosable*, J. Graph Theory **32** (1999) 250–264.

[50] M. Juvan, B. Mohar in R. Škrekovski, *List Total Colourings of Graphs*, Combin. Prob. Comput. **7** (1998) 181–188.

[51] M. Juvan, B. Mohar in R. Thomas, *List edge-colorings of series-parallel graphs*, Electronic J. of Combin. **6** (1999) R42.

[52] A. B. Kempe, *On the Geographical Problem of the Four Colours*, Amer. J. Math. **2** (1879) 193–200.

[53] A. B. Kempe, *How to Colour a Map with Four Colours*, Nature **21** (1880) 399–400.

[54] H. A. Kierstead in J. H. Schmerl, *Some application of Vizin's theorem to vertex colorings of graphs*, Discrete Math. **45** (1983) 277-285.

[55] P. A. Kilpatrick, *Tutte's first colour-cycle conjecture*, Ph. D. Thesis, Cape Town (1975).

[56] A. V. Kostochka, *The total coloring of a multigraph with maximal degree 4*, Discrete Math. **17** (1977) 161–163.

[57] A. V. Kostochka, *The minimum Hadwiger number for a graphs with a given mean degree of vertices* (in Russian), Metody Diskret. Analiz **38** (1982) 37–58.

[58] A. V. Kostochka, *List edge chromatic number of graphs with large girth*, Discrete Math. **101** (1992) 189–201.

[59] A. V. Kostochka in M. Stiebitz, *Colour-critical graphs with few edges*, Discrete Math. **191** (1998) 125–137.

[60] A. V. Kostochka, M. Stiebitz in B. Wirth, *The colour theorems of Brooks and Gallai extended*, Discrete Math. **162** (1996) 299–303.

[61] A. V. Kostochka, *The total coloring of a multigraph with maximal degree 5 is at most seven*, rokopis.

[62] D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. **77** (1916) 453–465.

[63] J. Kratochvíl in Z. Tuza, *Algorithmic complexity of list colorings*, Discrete Appl. Math. **50** (1994) 297–302.

[64] J. Kratochvíl in Z. Tuza, *On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs*, rokopis.

[65] J. Kratochvíl, Z. Tuza in M. Voigt, *Brook's-type theorems for choosability with separation*, J. Graph Theory **27** (1998) 43–49.

[66] H. V. Kronk, *An analogue to the Heawood map-colouring problem*, J. London Math. Soc. (2) 1 (1969) 750–752.

[67] H. V. Kronk in J. Mitchem, *Critical point-arboritic graphs*, J. London Math. Soc. (2) 9 (1975) 459–466.

[68] L. Lovász, *A characterization of perfect graphs*, J. Combin. Theory B **13** (1972) 95–98.

[69] B. Lužar, *Slučajni grafi in verjetnostna metoda*, seminarska, 2006.

[70] L. S. Melnikov in V. G. Vizing, *New Proof of Brooks' Theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **7** (1969) 289–290.

[71] P. Mihók, *On the structure of the point arboricity critical graphs*, Math. Slovaca **31** (1981) 101–106.

[72] M. Mirzakhani, *A small non-4-choosable planar graph*, Bull. Inst. Combin. Appl. **17** (1996) 15–18.

[73] B. Mohar, *7-critical graphs of bounded genus*, Dicrete Math. **112** (1993) 279–281.

[74] B. Mohar in R. Škrekovski, *The Grötzsch Theorem for the hypergraph of maximal cliques*, Electronic J. of Combin. **6** (1999) R26.

[75] B. Mohar in R. Škrekovski, *Nowhere-zero k-flows of supgraphs*, rokopis.

[76] E. A. Nordhaus in J. W. Gaddum, *On complementary graphs*, Amer. Math. Monthly **63** (1956) 175–177.

[77] G. Ringel in J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood map-coloring problem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **60** (1968) 438–445.

[78] N. Robertson, P. D. Seymour in R. Thomas, *Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs*, Combinatorica **13** (1993) 279–361.

[79] N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour in R. Thomas, *The four-color theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **70** (1997) 2–44.

[80] M. Rosenfeld, *On the total coloring of certain graphs*, Israel J. Math. **9** (1971) 396–402.

[81] P. Seymour, *Nowhere-zero 6-flows*, J. Combin. Theory B **31** (1981) 130–135.

[82] R. Steinberg, *The state of the three color problem*, Annals of Discrete Mathematics **55** (1993) 211–248.

[83] R. Škrekovski, *List improper colorings of planar graphs*, Combin. Prob. Comput. **8** (1999) 293–299.

[84] R. Škrekovski, *A Grötzsch-type theorem for list colourings with impropriety one*, Combin. Prob Comput. **8** (1999) 493–507.

[85] R. Škrekovski, *List improper colorings of planar graphs with prescribed girth*, Dicrete Math. **214** (2000) 221-233.

[86] R. Škrekovski, *Choosability of K_5-minor-free graphs*, Discrete Math. **190** (1998) 223–226.

[87] R. Škrekovski, *A note on choosability with separation for planar graphs*, sprejeto v Ars Combinatoria.

[88] R. Škrekovski, *A generalization of the Dirac Map-Color Theorem*, rokopis.

[89] R. Škrekovski, *On point-arboricity of graphs on surfaces*, rokopis.

[90] P. G. Tait, *Note on a Theorem in Geometry of Position*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh **29** (1880) 657–660.

[91] P. G. Tait, *Remarks on the Colourings of Maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **10** 729 (1880).

[92] R. Thomas in B. Walls, *Three-coloring Klein Bottle graphs of girth five*, rokopis.

[93] C. Thomassen, *Five-coloring maps on surfaces*, J. Combin. Theory B **59** (1993) 89–105.

[94] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory B **62** (1994) 180–181.

[95] C. Thomassen, *Five-Coloring Graphs on the Torus*, J. Combin. Theory B **62** (1994) 11–33.

[96] C. Thomassen, *Grötzsch's 3-Color Theorem and Its Counterparts for the Torus and the Projective Plane*, J. Combin. Theory B **62** (1994) 268–279.

[97] C. Thomassen, *3-list-coloring planar graphs of girth 5*, J. Combin. Theory B **64** (1994) 101–107.

[98] C. Thomassen, *Color-Critical Graphs on a Fixed Surface*, J. Combin. Theory B **70** (1997) 67–100.

[99] W. T. Tutte, *On the imbedding of linear graphs in surfaces*, Proc. London Math. Soc. **51** (1950) 474–483.

[100] W. T. Tutte, *A contribution to the theory of chromatic polynomial*, Canad. J. Math. **6** (1954) 80–91.

[101] W. T. Tutte, *On the algebraic theory of graph coulorings*, J. Combin. Theory **1** (1966) 15–50.

[102] W. T. Tutte, *A geometrical version of the four color problem*, v: Combinatorial Mathematics and Its Applications (R. C. Bose in T. A. Dowling, ured.), Univer. of North Carolina Press, (1969) 553–560.

[103] N. Vijayaditya, *On the total chromatic number of a graph*, J. London Math. Soc. **3** (1971) 405–408.

[104] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p-graph* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **3** (1964) 25–30.

[105] V. G. Vizing, *The chromatic class of a multigraph* (v ruščini), *Kibernetika* **3** (1965) 29–39.

[106] V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **29** (1976) 3–10.

[107] M. Voigt, *List colourings of planar graphs*, Discrete Math. **120** (1993) 215–219.

[108] M. Voigt, *A not 3-choosable planar graph without 3-cycles*, Discrete Math. **146** (1995) 325–328.

[109] M. Voigt in B. Wirth, *On 3-colorable non 4-choosable planar graphs*, J. Graph Theory **24** (1997) 233–235.

[110] D. A. Youngs, *4-Chromatic Projective Graphs*, J. Graph Theory **21** (1996) 219–227.

[111] K. Wagner, *Über eine Eigenscaft der Ebenen Komplexe*, Math. Ann **144** (1937) 570–590.

[112] D. R. Woodall, *Improper colourings of graphs*, Graph Colourings (urednika R. Nelson in R. J. Wilson) (1990) 45–63.

[113] D. R. Woodall, *Defective choosability of near-planar and bipartite-minor-free graphs*, rokopis.