Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Matematika – uporabna smer (UNI)

Borut Lužar

Injektivna barvanja grafov

Diplomsko delo

Ljubljana, 2008

Kazalo

Program diplomske naloge

V diplomski nalogi naj se predstavi injektivno barvanje grafov s poudarkom na barvanju ravninskih grafov. Kot osnovno gradivo naj bo uporabljen članek:

B. Lužar, R. Škrekovski in M. Tancer, *Injective colorings of planar graphs with few colors*, sprejeto v objavo v Discrete Mathematics, 14 strani.

Ljubljana, 1.9.2007

doc. dr. R. Škrekovski

Povzetek

Injektivno barvanje grafov je barvanje, ki dvema vozliščema priredi različno barvo, če imata skupnega soseda, to je, če med njima obstaja pot dolžine dva. V delu predstavimo dosedanje rezultate na področju injektivnih barvanj, osredotočimo pa se na barvanje ravninskih grafov z omejenim notranjim obsegom. Pokažemo, da so ravninski grafi z notranjim obsegom večjim od 18 in maksimalno stopnjo Δ injektivno Δ-obarvljivi, grafi z notranjim obsegom večjim od 9 pa injektivno $(\Delta + 1)$-obarvljivi. Velja tudi, da so $\Delta + 4$ barve dovolj za injektivno obarvanje grafov z notranjim obsegom večjim od 4, če je le Δ zadosti velik. Ti rezultati so zanimivi predvsem zato, ker poznamo ravninske grafe, ki imajo injektivno kromatično število enako $\frac{3}{2}\Delta$.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): `05C15`

Ključne besede:
teorija grafov, barvanje grafov, injektivno barvanje grafov, metoda prenosa naboja

Keywords:
graph theory, graph colorings, injective graph colorings, discharging method

Poglavje 1

Uvod

Začetki teorije grafov segajo v leto 1735, ko se je reševanju problema Königsbergških mostov pridružil švicarski matematik Leonhard Euler. Königsberg je reka Pregel razdelila na štiri dele, povezovalo pa jih je sedem mostov. Vprašanje je bilo ali se lahko nedeljski sprehajalec sprehodi po vseh sedmih mostovih natanko enkrat tako, da se na koncu vrne v izhodišče. Euler je problem rešil v članku Sedem mostov Königsberga, ki je bil objavljen leta 1736. Z njim je postavil temelje sodobne teorije grafov.

Z leti se je teorija razvijala v več smereh. V diplomskem delu se bomo osredotočili na barvanja grafov. Daleč najbolj znan problem teorije barvanj grafov je problem štirih barv, ki ga je leta 1852 prvič predstavil Francis Guthrie, prvi zapis pa se je pojavil istega leta v pismu Augustusa De Morgana irskemu matematiku Williamu Hamiltonu. Problem sprašuje ali lahko vsak ravninski graf obarvamo s štirimi barvami. Pravilen dokaz, da trditev drži, se je pojavil več kot sto let kasneje, vmes pa je bilo podanih kar nekaj nepravilnih. Prvi dokaz je leta 1879 objavil Alfred Kempe, ki je bil enostaven, vendar napačen. Za njim je trditev napačno dokazal še Tait.

Leta 1976 sta Kenneth Appel in Wolfgang Haken podala prvi pravilen dokaz. Izrek sta dokazovala z uporabo minimalnega protiprimera, uporabila pa sta kar 1936 reducibilnih konfiguracij. Dokaz je zato obsegal več kot 500 strani. Reducibilnost konfiguracij sta preverjala z računalniki in pri tem porabila več kot 1000 ur računalniškega časa.

V letu 1996 so bistveno skrajšan dokaz objavili Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour in Robin Thomas. Uporabili so podoben pristop kot Appel in Haken, vendar z bistveno manj konfiguracijami (le 633).

Barvanja grafov so se z leti širila in pojavljale so se nove oblike barvanj. Eno izmed novejših je razdaljno barvanje vozlišč. To je barvanje, ki različne barve priredi vozliščem na določeni razdalji. Posebna veja so $L(p, q)$ barvanja, ki obravnavajo sosednja vozlišča in vozlišča na razdalji dva. V praksi se rezultati uporabljajo pri prirejanju frekvenc oddajnikom. Izmed $L(p, q)$-barvanj je največ zanimanja in posledično raziskovanja usmerjenega v $L(2, 1)$-barvanja, mi pa se bomo osredotočili na $L(0, 1)$ ali injektivna barvanja.

V delu najprej predstavimo osnovne pojme teorije grafov. V naslednjem poglavju podamo definicijo barvanja vozlišč in omenimo nekaj glavnih izrekov, posebej se posvetimo razredu ravninskih grafov. Tretje poglavje se osredotoči na splošna razdaljna barvanja in dve glavni smeri le-teh, to sta $L(2, 1)$-barvanje ter barvanje kvadrata grafa. Na kratko prikažemo razvoj raziskovanja tega področja z osnovnimi izreki ter hipotezami. Naslednje poglavje definira injektivna barvanja ter opiše splošne rezultate, medtem ko se v zadnjem poglavju osredotočimo na injektivna barvanja ravninskih grafov z omejenim notranjim obsegom.

Poglavje 2

Osnovni pojmi teorije grafov

2.1 Graf

V tem razdelku predstavimo nekaj osnovnih definicij in izrekov iz teorije grafov, ki jih bomo potrebovali za razumevanje naslednjih poglavij. Izraze, ki se v slovenščini redkeje uporabljajo, smo povzeli po prevodu knjige Uvod v teorijo grafov [52]. Graf sestavljajo objekti, ki jim pravimo vozlišča (včasih tudi točke). Vozlišča so med seboj lahko povezana, takšni relaciji pravimo povezava. Bolj stroga definicija grafa je naslednja:

Definicija 2.1 *Graf* G je struktura, ki jo sestavljata neprazna množica elementov imenovanih *vozlišča* grafa ter množica neurejenih parov vozlišč, ki jim pravimo *povezave*. Množico vozlišč grafa G označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$.

Povezanost dveh vozlišč bomo označevali krajše, tako na primer označimo povezanost vozlišč u in v kot uv. Pravimo, da je vozlišče u *sosednje vozlišče* vozlišča v, oziroma u je *sosed* v. Vozlišče w je *skupni sosed* vozlišč u in v, če obstajata povezavi uw in vw. Pri tem seveda ni nujno, da sta u in v med seboj sosednja.

Med grafi lahko uvedemo tudi pojem izomorfizma. Grafa G in H sta *izomorfna*, če med njima obstaja bijekcija, ki preslika vozlišče v grafa G v vozlišče v' grafa H, pri tem pa ohranja sosednost. Torej, če sta bili vozlišči u in v iz G povezani, sta povezani tudi vozlišči u' in v' iz H.

Če v grafu obstaja več povezav med dvema vozliščema, ga imenujemo *multigraf*. Pravimo, da so takšne povezave *vzporedne*. Če med dvema vozliščema poteka kvečjemu ena povezava, je graf *enostaven*. V multigrafu lahko obstaja tudi povezava, ki povezuje vozlišče samo s sabo. Takšno povezavo imenujemo *zanka*. V delu bomo s pojmom graf mislili na enostavni graf, če ne bo določeno drugače.

Povezave grafa smo definirali kot neurejene pare vozlišč. Če množico povezav definiramo kot urejene pare vozlišč, dobimo *usmerjeni graf* ali *digraf.* Množico povezav digrafa G navadno označimo z $A(G)$. Pravimo, da je povezava $uv \in A(G)$ usmerjena od vozlišča u k vozlišču v.

Dvodelni graf G je graf, katerega množico vozlišč lahko razbijemo na dve disjunktni množici $U, W \subset V(G)$ tako, da ima vsaka povezava $e \in E(G)$ eno krajišče v U in drugo v V.

2.1.1 Podgrafi

Pri dokazovanju izrekov ne opazujemo vedno celotnega grafa. Ponavadi si pomagamo z manjšimi, enostavnejšimi strukturami v njem, ki imajo določene lastnosti. Tem strukturam pravimo podgrafi.

Definicija 2.2 *Podgraf* H grafa G je graf, za katerega velja, da je $V(H) \subseteq V(G)$ ter $E(H) \subseteq E(G)$. Pri tem mora veljati, da so vsa krajišča povezav v $E(H)$ tudi elementi $V(H)$.

Podgraf H imenujemo *trivialni podgraf*, če je $H = G$. Poznamo več tipov podgrafov. *Odprti podgraf* H grafa G je podgraf v katerem ima vsaka povezava e iz $E(G)$ v množici vozlišč $V(H)$ obe ali nobenega izmed krajišč. Podgrafu H grafa G za katerega velja $V(H) = V(G)$ pravimo *vpeti podgraf*. *Inducirani podgraf* grafa G dobimo z odstranjevanjem vozlišč iz $V(G)$. Ko odstranimo vozlišče, izginejo tudi povezave, ki imajo to vozlišče za krajišče.

2.1.2 Stopnja vozlišč

Pomembna lastnost v grafih je tudi število povezav, ki potekajo iz posameznega vozlišča.

Definicija 2.3 Številu povezav v $E(G)$, ki vsebujejo vozlišče $v \in V(G)$, pravimo *stopnja* ali *valenca* vozlišča v. Označimo jo $\deg(v)$ ali $d(v)$.

Vozlišču stopnje k bomo rekli k-vozlišče, vozlišču stopnje večje ali enake k pa $\geq k$-vozlišče, vozlišče stopnje večje od k bo imenovano $>k$-vozlišče. Analogno za vozlišča stopnje manjše ali enake, oziroma manjše od k, uporabimo $\leq k$-vozlišče, oziroma $<k$-vozlišče.

Včasih nas zanima predvsem kakšna je največja, oziroma najmanjša stopnja vozlišč v grafu G. Največjo ali maksimalno stopnjo vozlišč v G označimo z $\Delta(G)$, medtem ko najmanjšo ali minimalno stonjo označimo z $\delta(G)$. Povprečno stopnjo vozlišč grafa G označimo z $d(G)$ in je enaka

$$d(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v) = \frac{2\,|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Zveza med minimalno, povprečno in maksimalno stopnjo je enostavna. Velja

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

Če imajo vsa vozlišča v grafu stopnjo enako k, pravimo, da je graf *regularen stopnje* k ali k-*regularen.* Regularni grafi stopnje 3 se imenujejo *kubični.* Če vozlišče nima povezav, mu pravimo *izolirano.*

Preprosto dejstvo, da ima vsaka povezava dve krajišči, nas pripelje do zveze med številom povezav in vsoto stopenj vozlišč. Vsaka povezava prispeva 1 k stopnji vsakega izmed krajišč.

Izrek 2.4 (Lema o rokovanju) *V grafu G velja naslednja enakost*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\,|E(G)|.$$

Ime Lema o rokovanju izhaja iz možne interpretacije izreka, ki pravi, da je število rokovanj na zabavi enako polovici vsote števila rokovanj vseh gostov. Iz leme o rokovanju sledita naslednji preprosti posledici:

Posledica 2.5 *Vsota stopenj točk v grafu G je soda in število točk lihih stopenj je sodo.*

Posledica 2.6 *Naj bo graf G k-regularen na n točkah. Potem je*

$$|E(G)| = \frac{1}{2}\,k\,n.$$

2.1.3 Posebni tipi grafov

Oglejmo si sedaj nekaj posebnih tipov grafov. Enostaven graf na n točkah, v katerem so vsa vozlišča paroma povezana, imenujemo *polni graf*, označimo ga s K_n. Polni graf K_n je $(n-1)$-regularen. Iz Leme o rokovanju zato sledi, da je število povezav v K_n enako $\frac{1}{2}n(n-1)$. Grafu brez povezav pravimo *prazni graf.*

Ob definiciji polnega grafa lahko smiselno uvedemo pojem *komplementa* grafa. Komplement grafa G je graf, ki ga označimo z G^C, zanj pa velja $V(G^C) = V(G)$. Množico povezav dobimo na način, da vsaki dve točki, ki nista povezani v G, povežemo v G^C. Če naredimo unijo $E(G) \cup E(G^C)$, dobimo poln graf.

Polni dvodelni graf je dvodelni graf, v katerem je vsako vozlišče iz ene komponente povezano z vsemi vozlišči druge komponente z natanko eno povezavo. Če je v prvi komponenti n, v drugi pa m vozlišč, takšen graf označimo s $K_{n,m}$.

Naj bo G graf. Če lahko vsa njegova vozlišča označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tako, da je množica povezav $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$, pravimo, da je G *pot* dolžine n ali n-*pot*. Vozlišči v_1 in v_n sta krajišči poti. Vsaka pot ima natanko $n - 1$ povezav. Pot označimo s simbolom P_n, ko pa želimo poudariti, katera vozlišča ležijo na poti, to zapišemo z zaporedjem vozlišč, tako je n-pot predstavljena kot $v_1v_2v_3 \cdots v_n$.

Če krajišči neke poti povežemo, dobimo *cikel*. Cikel dolžine n je torej sklenjena pot na n vozliščih, pravimo mu tudi n-cikel. Cikel dolžine n ima natanko n povezav, saj je 2-regularen. Označujemo ga s simbolom C_n, katera vozlišča vsebuje, pa označimo podobno kot pri poti, le da na koncu ponovno zapišemo začetno vozlišče (na primer $v_1v_2 \cdots v_nv_1$).

Če graf ne vsebuje ciklov, vendar med vsakima dvema vozliščema obstaja pot, mu pravimo *drevo*. Če je število vozlišč v drevesu enako n, je število povezav enako $n-1$. Intuitivno si to dejstvo razložimo s sestavljanjem drevesa po posameznih vozliščih. Začnemo z nekim vozliščem, nato pa mu vsako sosednje vozlišče dodamo skupaj s povezavo. Tako nadaljujemo po vseh vozliščih. Vedno smo torej dodali par vozlišče in povezavo, le na začetku smo začeli samo z vozliščem.

Graf povezav $L(G)$ grafa G je graf, katerega vozlišča predstavljajo povezave G. Vozlišči grafa povezav sta povezani, če imata v grafu G skupno krajišče.

2.1.4 Povezanost, subdivizija in minor

Naslednja lastnost grafov, ki si jo bomo ogledali, je povezanost. Intuitivno si povezan graf predstavljamo tako, da ga ni mogoče razdeliti na dva ločena dela, med katerima ni povezave.

Definicija 2.7 Graf G je *povezan*, če med poljubnima vozliščema $u, v \in V(G)$ obstaja pot.

Nepovezan graf ima vsaj dva maksimalna, netrivialna odprta podgrafa. Maksimalen pomeni, da mu ne moremo dodati ne vozlišča in ne povezave. Takšnim odprtim podgrafom pravimo *komponente*, oziroma *komponente povezanosti*. Število komponent grafa G označimo z $\Omega(G)$. Povezan graf ima natanko eno komponento.

Vozlišču v grafa G pravimo *prerezna točka*, če ima graf $G - v$, torej G brez točke v, več komponent kot G. Podobno pravimo povezavi e, ki z odstranitvijo povzroči povečanje števila komponent grafa, *prerezna povezava* ali *most*. Množici vozlišč P grafa G, za katero velja, da G razpade na več komponent, če mu odstranimo vse točke iz P, vendar ostane povezan ob odstranitvi poljubne prave podmnožice P, pravimo *točkovni prerez* grafa.

Maksimalnemu povezanemu podgrafu brez prereznih točk pravimo *blok* grafa. Če je graf povezan in ne vsebuje prereznih točk, je blok kar sam. Lahko je videti, da imata dva bloka v grafu kvečjemu eno skupno točko.

Naj bo G poljuben graf in naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G tako, da mu na povezave dodamo 2-vozlišča. Torej poljubno povezavo $uv \in E(G)$ razdelimo na povezavi uw in wv ter ju dodamo v $E(G')$, povezavo uv pa odstranimo. Prav tako dodamo vozlišče w v $V(G')$. Pravimo, da smo povezavo uv subdividirali, graf G' pa je *subdivizija* grafa G. Povezavo $e \in E(G)$ lahko subdividiramo poljubno mnogokrat.

Medtem ko je subdivizija graf z več vozlišči kot jih je imel začetni, poznamo tudi pojem *minorja*, ki ga dobimo s skrčitvami povezav grafa, torej z združevanjem vozlišč. Minor grafa G dobimo tako, da zaporedoma skrčimo poljubno število povezav grafa. Povezavo skrčimo v točko tako, da njeni krajišči postavimo v eno točko, zanko, ki jo naredi skrčena povezava, odstranimo, prav tako pa tudi vse vzporedne povezave, ki s skrčitvijo nastanejo. Graf G s skrčeno povezavo uv označimo z G/uv.

V povezanih grafih nas zanimajo tudi različne razdalje in dolžine. *Razdaljo* med dvema vozliščema u in v definiramo kot dolžino najkrajše poti med njima ter jo označimo z $d(u, v)$. *Diameter* ali *premer* grafa je razdalja med najbolj oddaljenima vozliščema v grafu.

Pomembna lastnost je tudi *notranji obseg* grafa. To je dolžina najkrajšega cikla v grafu. Predpostavko o notranjem obsegu grafa uporabljamo v izrekih zadnjega poglavja, ki govori o injektivnem barvanju ravninskih grafov. Notranji obseg grafa G označimo z $g(G)$.

2.2 Ravninski grafi

V teoriji grafov je veliko raziskovanja deležen poseben razred grafov. To so ravninski grafi.

Definicija 2.8 *Ravninski graf* je graf, ki ga lahko narišemo v ravnino tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata.

Risbi ravninskega grafa v ravnini pravimo *vložitev*. Vložitev razdeli ravninski graf na območja, ki jih omejujejo povezave. Pravimo jim *lica*. Med lica štejemo tudi zunanje, neomejeno lice, ki ga poimenujemo *neskončno lice*. Množico lic grafa G označimo z $F(G)$. Številu povezav, ki neko lice f omejujejo, pravimo *dolžina lica* in ga označimo z $l(f)$. Z uporabo dolžine lica in dejstva, da vsaka povezava omejuje natanko dve lici, izpeljemo še eno verzijo Leme o rokovanju.

Izrek 2.9 (Lema o rokovanju za ravninske grafe) *Naj bo G ravninski graf. Potem velja*

$$\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2|E(G)|\,.$$

Vsi grafi seveda niso ravninski. Ravninskost lahko preverjamo na več načinov. Leta 1930 je poljski matematik Kuratowski [34] objavil naslednji izrek:

Izrek 2.10 (Kuratowski) *Graf je ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafov K_5 ali $K_{3,3}$.*

Nekateri zgornji izrek pripisujejo ruskemu matematiku Pontryaginu, saj naj bi dokaz izreka našli v njegovih neobjavljenih zapiskih. Poznamo tudi podoben izrek, ki namesto subdivizij uporablja minorja grafov K_5 in $K_{3,3}$. V letu 1937 ga je dokazal Wagner [49].

Izrek 2.11 (Wagner) *Graf je ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje podgrafa, ki je minor grafov K_5 ali $K_{3,3}$.*

V kasnejših poglavjih bomo predstavili nekaj trditev o *zunanje-ravninskih grafih*. To so ravninski grafi, za katere velja, da vsa vozlišča ležijo na nekem skupnem licu. Njihove vložitve ponavadi predstavimo s ciklom, ki vsebuje vsa vozlišča, znotraj pa ležijo vse preostale povezave grafa.

Vsi ravninski grafi pa niso zunanje-ravninski. Najmanjši primer takšnega grafa je K_4. Naslednji izrek govori o ravninskih grafih, ki so tudi zunanje-ravninski.

Izrek 2.12 *Ravninski graf je zunanje-ravninski natanko takrat, ko ne vsebuje podgrafa, ki je minor grafov K_4 ali $K_{2,3}$.*

2.2.1 Eulerjeva formula

Povezava med številom vozlišč, povezav in lic ravninskega grafa se ponuja sama od sebe. O njej govori rezultat Leonharda Eulerja iz leta 1752, ki ga imenujemo Eulerjeva formula.

Izrek 2.13 (Eulerjeva formula) *Naj bo G ravninski graf. Potem velja*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2\,.$$

Dokaz. Naj bo G povezan ravninski graf in naj bodo $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ ter $f = |F(G)|$. V povezanem grafu vedno lahko najdemo vpeto drevo. Naj bo torej T neko vpeto drevo grafa G.

Najprej dokažimo, da formula velja za G, če je $G = T$. Drevo ima natanko eno lice ter pri n vozliščih $n-1$ povezav. Zato

$$n - (n-1) + 1 = 2.$$

Torej formula drži za drevo. Graf G lahko iz T sestavimo z dodajanjem povezav. Z vsako dodano povezavo dodamo tudi eno lice, zato se število povezav povečuje enakomerno skupaj s številom lic, število vozlišč pa ostaja enako. Zato formula velja tudi za graf G.□

Posplošitev Eulerjeve formule na nepovezane grafe je naslednja:

Izrek 2.14 *Naj bo G ravninski graf z Ω komponentami. Potem velja*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega\,.$$

Za konec tega podrazdelka navedimo še nekaj posledic Eulerjeve formule.

Posledica 2.15 *Naj bo G povezan ravninski graf z vsaj tremi vozlišči. Potem velja*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Posledica 2.16 *Naj bo G povezan ravninski graf z vsaj tremi vozlišči in brez trikotnikov. Potem velja*

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

Posledica 2.17 *Naj bo G povezan ravninski graf. Potem vsebuje vsaj eno $\leq$5-vozlišče.*

2.2.2 Dual ravninskega grafa

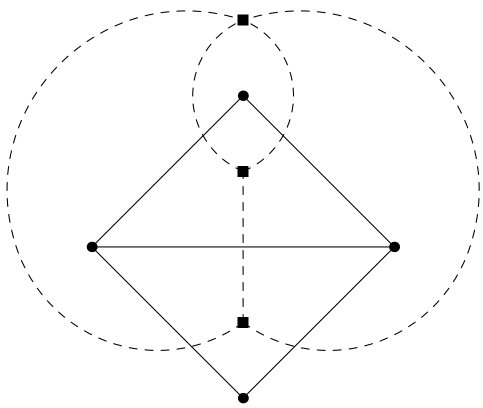
V poglavju o barvanju ravninskih grafov bomo uporabljali pojem dualnega grafa, zato v tem razdelku predstavljamo definicijo in nekaj osnovnih opažanj v povezavi z dualom ravninskega grafa.

Definicija 2.18 Graf G^* je *dualni graf* ravninskega grafa G, če velja $V(G^*) = F(G)$ in $vu \in E(G^*)$, če imata lici v in u v G skupno povezavo.

Dualni graf je konstruiran v odvisnosti od vložitve grafa G na ravnino, vendar število vozlišč, povezav in lic seveda ostaja enako. O tem govori naslednja trditev:

Izrek 2.19 *Naj bo G povezan ravninski graf z n točkami, m povezavami in f lici. Za dualni graf G^* velja, da ima f vozlišč, m povezav in n lic.*

Na sliki 2.1 je primer ravninskega grafa in njegovega duala. Vozlišča duala so kvadratna, povezave pa so črtkane.



Slika 2.1: Ravninski graf in njegov dual

Lahko je videti, da je dual povezanega ravninskega grafa tudi povezan ravninski graf. Z uporabo izreka 2.19 pa opazimo, da lica dolžine k v dualu predstavljajo vozlišča stopnje k. S tem pa nam posledica 2.17 pove tudi, da vsak ravninski graf brez 1- in 2-vozlišč vsebuje lice dolžine kvečjemu 5.

Poglavje 3

Barvanja grafov

Z barvanjem grafov navadno mislimo na prirejanje barv vozliščem grafa, čeprav poznamo tudi barvanja povezav in popolna barvanja, kjer prirejamo barve hkrati vozliščem in povezavam. Pri barvanju vozlišč uporabljamo različne pogoje, lahko zahtevamo, da sta sosednji vozlišči obarvani različno ali da sta obarvani drugače vozlišči na določeni razdalji. V ravninskih grafih barvamo različno vozlišča na skupnem licu in podobno. V tem diplomskem delu se bomo osredotočili zgolj na barvanja vozlišč, ker se navezujejo na glavno temo dela.

3.1 Barvanja vozlišč

V prvem razdelku bomo predstavili navadno barvanje vozlišč grafov in dokazali nekaj pomembnih izrekov s tega področja.

Definicija 3.1 Graf G je *k-obarvljiv*, če obstaja takšna preslikava $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, da je $c(u) \neq c(v)$ za poljubni sosednji vozlišči $u, v \in V(G)$. Preslikavo c imenujemo *barvanje* grafa G, oziroma *k-barvanje* G.

Najmanjše število k, za katero je graf G k-obarvljiv, imenujemo *kromatično število* G in ga označimo s $\chi(G)$.

Lahko je videti, da so 1-obarvljivi le grafi brez povezav, 2-obarvljivi pa dvodelni grafi. Ker so poti in sodi cikli dvodelni grafi, so seveda 2-obarvljivi. Po drugi strani pa imajo lihi cikli kromatično število enako 3.

Kromatično število polnega grafa K_n je n, saj so vozlišča paroma sosednja. Kromatično število z naslednjo preprosto trditvijo močno omejimo:

Trditev 3.2 *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Potem je $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Dokaz. Naj bo G graf in naj bo $\Delta = \Delta(G)$. Vozlišča G označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Barvajmo jih zaporedoma. Vsako vozlišče v_i ima kvečjemu Δ sosedov, ki so lahko obarvani poljubno, zato mu gotovo ostane še ena barva, s katero ni pobarvan noben sosed. Na ta način lahko obarvamo vsa vozlišča. □

Naslednja trditev še malo zniža zgornjo mejo za kromatično število grafa, če le-ta vsebuje kakšno vozlišče, ki ni maksimalne stopnje.

Trditev 3.3 *Naj bo G povezan graf z maksimalno stopnjo Δ. Če obstaja $v \in V(G)$, da velja $d(v) < \Delta$, je $\chi(G) \leq \Delta$.*

Dokaz. Naj bo G povezan graf in $\Delta = \Delta(G)$, naj bo v vozlišče s stopnjo $d(v) < \Delta$. Vozlišča G želimo obarvati z Δ barvami. Da dobimo ustrezno barvanje uporabimo naslednji postopek: na vozliščih naredimo pregled v širino, za katerega je korensko vozlišče v. Pregledana vozlišča označujemo po vrsti, tako v postane v_1, naslednja pa dobijo oznake $v_2, v_3, \ldots, v_{|V(G)|}$. Sedaj po vrsti obarvamo vozlišča začenši z zadnjim. Za vsako vozlišče v_i je med v_{i+1} in $v_{|V(G)|}$ kvečjemu $\Delta - 1$ njegovih sosedov, saj vedno obstaja nek sosed v_j, kjer je $j < i$. Zato ima vozlišče v_i vedno na voljo vsaj eno barvo. Na koncu moramo obarvati le še $v_1 = v$, ki nima soseda z nižjim indeksom, vendar ima po predpostavki manj kot Δ sosedov in zato vsaj eno prosto barvo. □

Opomba 3.4 Označevanje vozlišč grafa s pregledom v širino je postopek, pri katerem iz izbranega vozlišča, ki mu pravimo korensko in ga označimo kot prvega, pregledamo graf tako, da najprej označimo vse sosede korenskega vozlišča. Nato se vrnemo k prvemu sosedu in označimo njegove sosede, če seveda že niso označeni. Nadaljujemo z drugim sosedom in ponavljamo do zadnjega soseda korenskega vozlišča. Ko označimo vse sosede sosedov korenskega vozlišča, iščemo sosede vozlišč drugega nivoja in nadaljujemo postopek dokler ne označimo vseh vozlišč.

3.1.1 Brooksov izrek

V tem razdelku bomo dokazali Brooksov izrek [14], ki karakterizira grafe s kromatičnim številom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Izrek 3.5 (Brooks) *Naj bo G povezan graf. Če G ni poln graf ali lih cikel, velja $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Dokaz. Izrek je za $\Delta < 3$ trivialen, saj je pri $\Delta = 0$ graf $G = K_1$, pri $\Delta = 1$ je $G = K_2$. Za $\Delta = 2$ imamo na voljo dve možnosti, ali je G pot ali pa cikel. Poti in sodi cikli so 2-obarvljivi, če pa je G lih cikel, je $\chi(G) = 3$ in izrek velja.

Oglejmo si sedaj grafe z $\Delta \geq 3$. Razdelimo jih na tri razrede in za pripadnike vsakega izmed njih dokažemo veljavnost izreka.

Najprej si oglejmo grafe, ki imajo prerezno točko. Naj bo v prerezna točka G, opazujemo povezana podgrafa G_1 in G_2, na katera v razdeli G, natančneje edina skupna točka G_1 in G_2 je v, skupaj pa vsebujeta vsa vozlišča in povezave G. Točka v ima tako v G_1 kot v G_2 stopnjo enako kvečjemu $\Delta - 1$, zato je po trditvi 3.3 kromatično število grafov G_1 in G_2 manjše ali kvečjemu enako Δ. Seveda je s tem tudi $\chi(G) \leq \Delta$.

Naslednji razred so grafi brez prerezne točke, ki pa imajo prerezne množice z dvema vozliščema u in v, za kateri velja $uv \notin E(G)$. Oglejmo si ponovno podgrafa G_1 in G_2, na katera podobno kot zgoraj razdelimo G z vozliščema u in v. Stopnja u in v je v obeh grafih manjša od Δ, zato ju lahko obarvamo z Δ barvami. Če je stopnja vsaj enega izmed vozlišč v in u v G_1 in G_2 kvečjemu $\Delta - 2$, lahko vozlišči obarvamo različno in s tem zagotovimo Δ-obarvljivost grafa G. V nasprotnem primeru lahko predpostavimo, da imata vozlišči v G_1 stopnjo $\Delta - 1$. Torej imata v G_2 stopnjo ena in zato obstajata vozlišči u' in v' v G_2, da velja $uu' \in E(G)$ ter $vv' \in E(G)$. Seveda velja tudi $v' \neq u'$, sicer bi imel G prerezno točko. Sedaj vzamemo za prerezno množico $\{u, v'\}$. Za vozlišči u in v' velja, da ima vsaj eno stopnjo manjšo kot $\Delta - 1$ tako v G_1 kot v G_2. S tem lahko Δ-barvanje razširimo na G.

V tretji razred spadajo grafi, ki ne ustrezajo prvima dvema. Vzemimo poljubno vozlišče $w \in V(G)$, za katero velja $d(w) = \Delta$. Za w obstajata soseda u in v, za katera velja, da $uv \notin E(G)$. Če takšni vozlišči ne obstajata, je G poln graf. Graf $G - u - v$ je povezan. Naj bo $n = |V(G)|$. Naredimo pregled v širino s korenskim vozliščem w in označimo vozlišča z $v_1, \ldots, v_{n-2}$. Nato označimo $u = v_{n-1}$ in $v = v_n$ in pobarvamo vozlišča od v_n do v_1 tako, da vsakič uporabimo najnižjo še neuporabljeno barvo. Na ta način so lahko vsa vozlišča obarvana z Δ barvami. $\square$

3.2 O povezanosti kromatičnega števila in notranjega obsega grafa

V tem razdelku bomo predstavili zanimiv rezultat madžarskega matematika Paula Erdősa, ki poveže notranji obseg grafa in njegovo kromatično število. Dokazal je, da obstajajo grafi z notranjim obsegom k, za katere je kromatično število $\chi \geq k$. Pri dokazovanju si je pomagal s slučajnimi grafi in verjetnostno metodo.

3.2.1 Slučajni grafi in verjetnostna metoda

Naj bo V množica z n elementi, $V = \{1, \ldots, n\}$ in $\mathcal{G}$ množica vseh grafov z $V(G) = V$, kjer je $G \in \mathcal{G}$. S spremembo množice $\mathcal{G}$ v verjetnostni prostor $\mathcal{G}(n,p)$ dobimo strukturo, s pomočjo katere lahko določimo verjetnost, da ima nek graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ lastnost l. Na tej ideji temelji *verjetnostna metoda*. Njeno bistvo je naslednje: za dokaz obstoja nekega objekta z dano lastnostjo definiramo verjetnostni prostor na razredu objektov in nato pokažemo, da v tem razredu obstaja objekt, ki ima dano lastnost s pozitivno verjetnostjo. Uporaba verjetnostne metode je prikazana v naslednjem podrazdelku.

Graf G zgradimo naključno tako, da se za vsako povezavo $e \in V \times V$ odločimo naključno ali je, oziroma ni vsebovana v $E(G)$. Te odločitve so izvedene neodvisno, verjetnost dogodka, da je $e \in E(G)$, pa je enaka $p \in [0,1]$. Tako dobljenemu grafu G pravimo *slučajni graf* z verjetnostjo povezave p.

Naj bo G graf na množici vozlišč V z m povezavami. Verjetnost, da ga izberemo, je enaka

$$P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}.$$

Lema 3.6 *Naj bo G graf iz množice $\mathcal{G}(n,p)$. Za vsa naravna števila n in k, za katera velja $n \geq k \geq 2$, je verjetnost, da ima množica neodvisnih vozlišč $\alpha(G)$ grafa G vsaj k elementov, naslednja*

$$P(\alpha(G) \geq k) \leq \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}}.$$

Dokaz. Verjetnost, da je neka določena množica $U \subseteq V$ z močjo k neodvisna v grafu G, je enaka $q^{\binom{k}{2}}$. Lema nato sledi iz dejstva, da je natanko $\binom{n}{k}$ takih množic U. □

V kontekstu slučajnih grafov lahko vsako izmed invariant grafa (npr. povprečno stopnjo, povezanost, notranji obseg, kromatično število, itd.) interpretiramo kot nenegativno *slučajno spremenljivko* na $\mathcal{G}(n,p)$:

$$X : \mathcal{G}(n,p) \to [0, \infty).$$

Pričakovana vrednost slučajne spremenljivke X pa je število

$$E(X) := \sum_{G \in \mathcal{G}(n,p)} P(G) \cdot X(G).$$

Izračun povprečne vrednosti slučajne spremenljivke X je preprost in učinkovit način za dokaz obstoja grafa G z $X(G) < a$ za nek določen $a > 0$ in da ima G hkrati neko lastnost L. Če je pričakovana vrednost X majhna, $X(G)$ ne more biti velik za več kot le nekaj grafov iz $\mathcal{G}(n,p)$, ker je $X(G) \geq 0$ za vse $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Torej mora biti X majhen za večino grafov iz $\mathcal{G}(n,p)$ in lahko pričakujemo, da bomo med njimi našli nekega z željeno lastnostjo L.

Ta preprosta ideja je jedro številnih nekonstruktivnih dokazov obstoja s slučajnimi grafi vključno z Erdősevim izrekom, ki ga bomo dokazali v naslednjem podrazdelku.

Lema 3.7 (Markova neenakost) *Naj bo $X > 0$ slučajna spremenljivka v prostoru $\mathcal{G}(n,p)$ in $a > 0$. Potem velja*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{G \in \mathcal{G}(n,p)} P(G) \cdot X(G) \\ &\geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n,p) \\ X(G) \geq a}} P(G) \cdot X(G) \\ &\geq \sum_{\substack{G \in \mathcal{G}(n,p) \\ X(G) \geq a}} P(G) \cdot a \\ &= P(X \geq a) \cdot a. \end{aligned}$$

□

Ker so naši verjetnosti prostori končni, lahko pričakovano vrednost pogosto izračunamo z metodo dvojnega štetja. Naj bo X slučajna spremenljivka na prostoru $\mathcal{G}(n,p)$, ki šteje podgrafe grafa G v neki določeni množici $\mathcal{H}$ grafov na V. Potem $E(X)$ po definiciji šteje pare (G,H) tako, da je $H \subseteq G$. Vsak par je utežen z verjetnostjo $P(G)$. Postopek za izračun $E(X)$ bo v grobem naslednji: za vsak graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ pogledamo koliko podgrafov vsebuje množica $\mathcal{H}$ in tako izračunamo $P(G)$.

Izračunajmo število pričakovanih ciklov neke dane dolžine $k \geq 3$ v slučajnem grafu $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Naj bo $X : \mathcal{G}(n,p) \to \mathbb{N}$ slučajna spremenljivka, ki vsakemu izmed slučajnih grafov G priredi število k-ciklov v njem, to je število podgrafov izomorfnih C^k. Definirajmo

$$(n)_k := n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

število zaporedij k različnih elementov na dani množici z n elementi.

Lema 3.8 *Pričakovano število k-ciklov v $G \in \mathcal{G}(n,p)$ je*

$$E(X) = \frac{(n)_k}{2k}\, p^k.$$

Dokaz. Za vsak k-cikel C z vozlišči v $V = \{0, \ldots, n-1\}$, množici vozlišč grafov iz $\mathcal{G}$, naj $X_C : \mathcal{G}(n,p) \to \{0,1\}$ predstavlja *indikacijsko slučajno spremenljivko* za C:

$$X_C : G \mapsto \begin{cases} 1\,, & C \subseteq G; \\ 0\,, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker X_C dobi samo 1 za pozitivno vrednost, je pričakovana vrednost $E(X_C)$ enaka meri $P(X_C = 1)$ množice vseh grafov v $\mathcal{G}(n,p)$, ki vsebujejo C. To je natanko verjetnost, da je $C \subseteq G$:

$$E(X_C) = P(C \subseteq G) = p^k. \tag{3.1}$$

Takšnih, med sabo različnih, ciklov $C = v_0 \cdots v_{k-1} v_0$ je natanko $(n)_k/2k$. Vsak cikel je namreč opisan z $2k$ izmed $(n)_k$ zaporedij $v_0 \cdots v_{k-1}$ različnih vozlišč v V. Naša slučajna spremenljivka X priredi vsakemu grafu G njegovo število k-ciklov. Torej je X vsota vseh vrednosti $X_C(G)$:

$$X = \sum_C X_C.$$

Pričakovana vrednost je linearna in zato iz (3.1) sledi:

$$E(X) = E\big(\sum_C X_C\big) = \sum_C E(X_C) = \frac{(n_k)}{2k} p^k.$$

□

3.2.2 Erdősev izrek

Kot smo omenili že zgoraj, izrek govori o obstoju grafa z notranjim obsegom in kromatičnim številom večjima od k, kjer je k poljubno naravno število. Erdős je dokaz objavil leta 1959 [21], mi pa ga povzemamo po [17].

Recimo ciklom dolžine največ k – *kratki* in množicam vozlišč z močjo vsaj $\frac{|V(G)|}{k}$ – *velike*. Za dokaz Erdősevega izreka bo torej zadostovalo najti graf G brez kratkih ciklov in brez velikih neodvisnih množic vozlišč. V tem primeru bodo barvni razredi vsakega barvanja vozlišč G majhni (ne veliki) in zato bomo potrebovali več kot k barv, da pobarvamo G.

Kako takšen graf najti? Če izberemo dovolj majhen p, ni verjetno, da bo slučajni graf iz prostora $\mathcal{G}(n,p)$ vseboval kakšen (kratek) cikel. Če izberemo dovolj velik p, ni verjetno, da bo G imel velike neodvisne množice vozlišč. Vprašanje je torej ali se ti območji prekrivata, torej ali lahko izberemo takšen p za nek n, da bo oboje: dovolj majhen, da bo $P(g \leq k) < \frac{1}{2}$ in dovolj velik za $P(\alpha \geq \frac{n}{k}) < \frac{1}{2}$, kjer je α velikost neodvisne množice vozlišč. Če bi to bilo res, bi $\mathcal{G}(n,p)$ vseboval vsaj en graf brez kratkih ciklov ali velikih neodvisnih množic vozlišč.

Na žalost je takšna izbira p nemogoča. Območji se ne prekrivata! Kot bo pokazano kasneje, moramo obdržati p pod n^{-1}, da ni preveč verjetno, da se pojavijo kratki cikli, toda za vsak tak p sploh ni verjetno, da se cikli pojavijo! V želji, da obdržimo pojavljanje velikih neodvisnih množic malo verjetno, postavimo p nad n^{-1}, na $n^{\epsilon-1}$ za nek $\epsilon > 0$. To bo sicer povzročilo pojavitev nekaj kratkih ciklov v G neodvisno od n tako, da bomo vozlišče v vsakem izmed takšnih ciklov vedno lahko odstranili. Dobljenemu grafu recimo H. Graf H bo brez kratkih ciklov, njegovo neodvisnostno število pa bo kvečjemu enako neodvisnostnemu številu G. Ker H ni veliko manjši od grafa G, bo njegovo kromatično število še vedno veliko in tako smo našli graf z velikim notranjim obsegom in velikim kromatičnim številom. Za pripravo na formalni dokaz Erdősevega izreka, pokažimo najprej, da je verjetnost pojavitve povezave $p = n^{\epsilon-1}$ v resnici vedno dovolj velika, da zagotovi, da $G \in \mathcal{G}(n,p)$ skoraj gotovo nima velikih neodvisnih množic vozlišč.

Lema 3.9 *Naj bo $k > 0$ naravno število in naj bo $p = p(n)$ funkcija n, za katero velja $p \geq \frac{6k \ln n}{n}$ za velike n. Potem velja*

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) = 0.$$

Dokaz. Za vsa naravna števila n in r z lastnostjo $n \geq r \geq 2$ in vse $G \in \mathcal{G}(n,p)$ lema 3.6 implicira

$$\begin{aligned}
P(\alpha \geq r) &\leq \binom{n}{k}(1-p)^{\binom{r}{2}} \\
&\leq n^r(1-p)\binom{r}{2} \\
&= \left(n(1-p)^{(r-1)/2}\right)^r \\
&\leq \left(ne^{-p(r-1)/2}\right)^r.
\end{aligned}$$

Zadnja neenakost sledi iz dejstva, da je $1 - p \leq e^{-p}$ za vse p. Če je $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$ in $r \geq \frac{n}{2k}$, za osnovo potence v zgornjem izrazu velja

$$\begin{aligned} ne^{-p(r-1)/2} &= ne^{-pr/2+p/2} \\ &\leq ne^{-(3/2)\ln n + p/2} \\ &\leq nn^{-3/2}e^{1/2} \\ &= \sqrt{e}/\sqrt{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Ker je $p \geq (6k \ln n)n^{-1}$, za velike n vzamemo $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha \geq r) = 0,$$

kar dokaže lemo. $\square$

Pripravili smo vsa orodja potrebna za formulacijo in dokaz glavnega izreka tega podrazdelka:

Izrek 3.10 (Erdősev izrek) *Za vsako naravno število k obstaja graf H z notranjim obsegom $g(H) > k$ in kromatičnim številom $\chi(H) > k$.*

Dokaz. Naj bo $k \geq 3$, ϵ določen in naj velja $0 < \epsilon < \frac{1}{k}$ ter $p = n^{\epsilon-1}$. Naj bo $X(G)$ število kratkih ciklov, to je število ciklov dolžine največ k v slučajnem grafu $G \in \mathcal{G}(n,p)$. Po lemi 3.8 imamo

$$E(X) = \sum_{i=3}^{k} \frac{(n)_i}{2i} p^i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2)n^k p^k.$$

Velja $(np)^i \leq (np)^k$, saj je $np = n^\epsilon \geq 1$. Po lemi 3.7 velja

$$\begin{aligned} P(X \geq n/2) &\leq E(X)/(n/2) \\ &\leq (k-2)n^{k-1}p^k \\ &= (k-2)n^{k-1}n^{(\epsilon-1)k} \\ &= (k-2)n^{k\epsilon-1}. \end{aligned}$$

Ker smo izbrali ϵ tako, da velja $k\epsilon - 1 < 0$, velja tudi

$$\lim_{n\to\infty} P(X \geq n/2) = 0.$$

Naj bo n dovolj velik, da bo $P(X \geq \frac{n}{2}) < \frac{1}{2}$ in $P(\alpha \geq \frac{n}{2k}) < \frac{1}{2}$. Zadnje je mogoče zaradi naše izbire p in leme 3.9. Potem obstaja graf $G \in \mathcal{G}(n,p)$ z manj kot $n/2$ kratkimi cikli in $\alpha(G) < \frac{n}{2k}$. Iz vsakega izmed kratkih ciklov izbrišemo vozlišče. Naj bo H dobljeni graf. Potem je $|H| \geq n/2$ in H ne vsebuje kratkih ciklov, torej je notranji obseg $g(H) > k$. Po definiciji G pa velja še

$$\chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)} \geq \frac{n/2}{\alpha(G)} > k.$$

□

3.3 Barvanja ravninskih grafov

Barvanje ravninskih grafov zaseda posebno mesto v teoriji barvanj. Najslavnejši izrek teorije grafov prihaja prav s tega področja. To je Izrek štirih barv, njegovo formulacijo in zgodovino si bomo ogledali v prvem podrazdelku, v drugem predstavimo metodo prenosa naboja, naslednji podrazdelek pa opiše nekaj preostalih pomembnih rezultatov iz barvanj ravninskih grafov.

3.3.1 Izrek štirih barv

Začetki problema štirih barv segajo v leto 1852, ko je Francis Guthrie opazil, da lahko zemljevid angleških grofij obarva s štirimi barvami tako, da imajo sosednje grofije prirejene različne barve. Pri svojem bivšem profesorju Avgustusu De Morganu se je pozanimal o resničnosti svojih opažanj, profesor, ki se mu je vprašanje najprej zdelo enostavno, pa problema ni nikoli rešil. Minilo je več kot sto let preden je bil končno dokazan, dokaz pa je bil vse prej kot kratek.

Problem je bil zastavljen v obliki barvanja lic ravninskega grafa, vendar se precej bolj uporablja ekvivalentna različica izreka, kjer barvamo dual grafa in s tem njegova vozlišča. Izrek štirih barv se torej glasi:

Izrek 3.11 *Vsak ravninski graf je* 4*-obarvljiv.*

Kasneje bomo na kratko opisali pristop k dokazovanju izreka, sedaj pa dokažimo šibkejšo trditev:

Trditev 3.12 *Vsak ravninski graf je* 5*-obarvljiv.*

Dokaz. Trditev dokazujemo z indukcijo po vozliščih. Eno vozlišče je očitno 5-obarvljivo. Naj bo graf na n točkah 5-obarvljiv. Oglejmo si graf G z $n+1$ točkami. V njem po posledici 2.17 obstaja vsaj eno $\leq$5-vozlišče, ki ga poimenujmo v.

Pobarvajmo sedaj $G - v$ s petimi barvami. Po indukcijski predpostavki je to mogoče, zato nam preostane pobarvati le še vozlišče v. Obarvamo ga lahko v vseh primerih razen v primeru, ko je v stopnje 5 in so vsi sosedi v obarvani z različnimi barvami. V tem primeru uporabimo t.i. *Kempejeve verige*.

Naj bodo u_1, u_2, u_3, u_4 in u_5 sosedje točke v. Oglejmo si vložitev G v ravnino, kjer so sosedje v razporejeni okrog v v zgornjem vrstnem redu in obarvani z barvami $c_1, \ldots, c_5$. Sedaj si izberemo dva soseda v, ki v vložitvi G ne ležita drug ob drugem, recimo u_1 in u_3. Če med njima ne obstaja pot obarvana zgolj z barvama c_1 in c_3, na povezanem podgrafu induciranem s točko u_3 in vozlišči, ki so obarvana z barvama c_1 ali c_3, zamenjamo barvo c_1 s c_3 in barvo c_3 s c_1. S tem postane u_3 obarvano s c_1 in za v je prosta barva c_3.

V nasprotnem primeru, ko med u_1 in u_3 obstaja pot obarvana le s c_1 in c_3, imamo skupaj z vozliščem v cikel, ki graf G razdeli na dve ločeni področji. Znotraj področja, ki vsebuje u_2, zamenjamo, na primer, barvo c_2 s c_4 in barvo c_4 s c_2. Tako postane u_2 obarvano s c_4, barva c_2 pa je prosta za v. □

Kempe je leta 1879 s pomočjo svojih verig dokazal izrek štirih barv, vendar je bil dokaz žal napačen, kar je s protiprimerom pokazal Heawood več kot deset let kasneje. Pravilen dokaz je bil podan šele s pomočjo računalnika leta 1976, narejen pa je bil s pomočjo metode prenosa naboja in pojma reducibilnih konfiguracij. Ta pristop je opisan v naslednjem razdelku.

3.3.2 Metoda prenosa naboja in reducibilne konfiguracije

Metodo prenosa naboja uporabljamo, ko želimo dokazati, da graf z določenimi lastnostmi ne obstaja. Prvi jo je uporabil Wernicke leta 1904. Metoda se lahko uporablja na splošnih, mi pa se bomo osredotočili na prenašanje naboja v ravninskih grafih. V ravninskih grafih namreč naboj lahko priredimo tudi licem.

Na začetku vsem vozliščem in licem priredimo *začetni naboj*, nato pa ga z določenimi pravili prenašamo na bližnja vozlišča ali lica. Pri tem navadno uporabljamo graf, za katerega sumimo, da ne obstaja. Njegov ne-obstoj dokažemo s tem, da je vsota vseh končnih nabojev v grafu drugačna kot vsota vseh začetnih.

Pri prenašanju naboja nas zanima vsota nabojev vozlišč in lic. Iz obeh lem o rokovanju imamo rezultat

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) + \sum_{f\in F(G)} l(f) = 2|E(G)| + 2|E(G)| = 4|E(G)|.$$

Število povezav pa lahko izrazimo tudi iz Eulerjeve formule:

$$|E(G)| = |V(G)| + |F(G)| - 2.$$

Tako pridemo do naslednje formule, ki določa začetni naboj posameznih vozlišč in lic ter obenem poda začetni naboj celotnega grafa.

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) + \sum_{f\in F(G)} l(f) = 4(|V(G)| + |F(G)| - 2)$$

$$\sum_{v\in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f\in F(G)} (l(f) - 4) = -8.$$

Začetni naboj $\mathrm{ch}_0(v)$ vozlišča $v \in V(G)$ je torej

$$\mathrm{ch}_0(v) = d(v) - 4,$$

začetni naboj $\mathrm{ch}_0(f)$ lica $f \in F(G)$ pa

$$\mathrm{ch}_0(f) = l(f) - 4.$$

Opazimo, da imajo <4-vozlišča negativen začetni naboj, 4-vozlišča imajo naboj enak 0, preostala pa pozitivnega. Podobno imajo le >5-lica pozitiven naboj. Naša naloga je, da poiščemo pravila za prenos naboja vozlišč in lic tako, da bodo imela vsa vozlišča ter lica nenegativen naboj. S tem bo naboj celotnega grafa nenegativen in dobimo protislovje. Zgoraj definirani začetni naboj seveda ni edini možen. V splošnem izgleda formula definicij začetnega naboja takole:

$$\sum_{v\in V(G)} \big(a\, d(v) - 2(a+b)\big) + \sum_{f\in F(G)} \big(b\, l(f) - 2(a+b)\big) = -4(a+b).$$

Naboj, ki ga imajo vozlišča in lica na koncu imenujemo *končni naboj*, označimo pa ga s $\mathrm{ch}^*(v)$, kjer je v vozlišče ali lice. Metoda prenosa naboja je uporabljena pri dokazovanju izrekov v poglavju 6.

Induciranemu podgrafu nekega grafa G, ki zadošča določenim lastnostim, pravimo *konfiguracija*. Če je G minimalni protiprimer za neko trditev in določena konfiguracija v njem ne more nastopiti, pravimo, da je *reducibilna*. Reducibilne konfiguracije tipično iščemo pri dokazovanju trditev z metodo prenosa naboja. Ponavadi samo s pravili prenašanja naboja ne moremo prenesti naboja tako, da bi imel celoten graf nenegativen naboj. Z izločitvijo nekaterih problematičnih konfiguracij pa to lahko dosežemo.

Ta postopek je bil uporabljen pri dokazovanju Izreka štirih barv, kjer sta Appel in Haken [4, 5] uporabila kar 1936 reducibilnih konfiguracij. V letu 1996 so Robertson, Sanders, Seymour in Thomas [42] objavili nov dokaz z le 633 reducibilnimi konfiguracijami.

3.3.3 Ostali rezultati

V tem podrazdelku bomo navedli nekaj ostalih pomembnih trditev, ki se nanašajo na barvanja ravninskih grafov. Prva med njimi je izrek, ki govori o barvanju ravninskih grafov brez trikotnikov. Izrek je dokazal nemški matematik Grötzsch [26].

Izrek 3.13 (Grötzsch) *Vsak ravninski graf brez trikotnikov je* 3*-obarvljiv. Poleg tega velja, da lahko poljubno* 3*-barvanje nekega* 4*- ali* 5*-cikla v grafu razširimo na* 3*-barvanje celotnega grafa.*

Problem barvanja ravninskih grafov s tremi barvami je zanimiv, saj se izkaže, da so veliki razredi ravninskih grafov 3-obarvljivi. Leta 1976 je Steinberg podal hipotezo, da je vsak ravninski graf brez 4- in 5-ciklov 3-obarvljiv. Hipoteza je še vedno nerešena ([30], problem 2.9). Kasneje je Erdős predlagal poenostavitev problema na vprašanje: ali obstaja konstanta C, da odsotnost ciklov dolžine od 4 do C pomeni, da je ravninski graf 3-obarvljiv? Abbott in Zhou [1] sta dokazala, da takšen C obstaja in je manjši od 12. Omejitev za C je prvi zmanjšal Borodin, ki je dokazal, da je $C \leq 10$. Kasneje je svoj rezultat izboljšal na $C \leq 9$ [10], neodvisno pa sta enako dokazala tudi Sanders in Zhao [43]. Zadnji rezultat na to temo je iz leta 2005, ko so Borodin, Glebov, Raspaud in Salavatipour [12] dokazali naslednji izrek:

Izrek 3.14 *Vsak ravninski graf brez ciklov dolžine med* 4 *in* 7 *je* 3*-obarvljiv.*

Borodin in Raspaud sta v letu 2003 dokazala še en izrek [13], ki govori o 3-barvanju:

Izrek 3.15 *Vsak ravninski graf brez trikotnikov na razdalji manj kot štiri in brez* 5*-ciklov je* 3*-obarvljiv.*

Obenem sta podala še dve hipotezi. Prva trdi, da je vsak ravninski graf brez prekrivajočih se trikotnikov (trikotnikov, ki imajo vsaj eno skupno vozlišče) in brez 5-ciklov 3-obarvljiv. Druga, krepka verzija, pa vpelje še Steinbergovo hipotezo in pravi, da je 3-obarvljiv vsak ravninski graf brez trikotnikov s skupno povezavo in brez 5-ciklov. Obe predpostavki prve hipoteze sta potrebni, saj obstaja ravninski graf, ki ni 3-obarvljiv in ne vsebuje prekrivajočih se trikotnikov. Obstaja pa tudi ravninski graf brez 5-ciklov, ki ni 3-obarvljiv.

3.4 Seznamska barvanja vozlišč

Seznamska barvanja uporabljamo v poglavju o injektivnem barvanju ravninskih grafov, kjer imajo pomembno vlogo v razširjanju barvanja dela grafa na celoten graf. Se pravi, ko so določena vozlišča že obarvana, za preostala ostane na voljo nekaj barv, vendar pri različnih vozliščih seznam razpoložljivih največkrat ne sestavljajo enake barve. Seznamsko barvanje je bilo neodvisno predstavljeno v [22] in [47].

Označimo s $\mathcal{C}$ množico barv, z L pa preslikavo, ki vsakemu vozlišču grafa G priredi podmnožico barv iz $\mathcal{C}$. Preslikavo L imenujemo *izbira barv* za točke G, množica $L(v)$, kjer je $v \in V(G)$, pa je *seznam dopustnih barv* za v. V delu uporabljamo tudi izraz razpoložljive barve, oziroma barve, ki so v na voljo. Preslikava c, ki vsakemu vozlišču v grafa G priredi vrednost iz $L(v)$ in za katero velja, da je $c(v) \neq c(u)$ za vsaki sosednji točki v G, se imenuje *L-barvanje* grafa G.

Pravimo, da je graf G *k-izbirljiv*, če za vsako izbiro barv L, za katero velja $L(v) \geq k$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$, obstaja L-barvanje G. Najmanjše število k, za katero je G k-izbirljiv, imenujemo *seznamsko kromatično število* grafa G. Označimo ga s $\chi_l(G)$.

Očitno je seznamsko kromatično število grafa G vsaj enako kromatičnemu številu. Za množico razpoložljivih barv namreč vzamemo kar množico barv od 1 do k, kjer je $k = \chi(G)$. V splošnem obstajajo grafi s poljubno veliko razliko $\chi_l(G) - \chi(G)$, kot so pokazali Erdős, Rubin in Taylor [22]. Primer grafa, ki ima seznamsko kromatično število večje od kromatičnega števila, je $K_{2,4}$. Na sliki 3.1 so ob vozliščih označeni seznami barv, ki ne dovoljujejo 2-barvanja.

Tudi za seznamska barvanja velja podoben rezultat kot je Brooksov izrek (izrek 3.5) pri navadnih barvanjih. Dokazali so ga Kostochka, Stiebitz in Wirth leta 1996 [32].

Izrek 3.16 *Naj bo G povezan graf in naj bo L takšna izbira barv, da je $|L(v)| \geq \Delta(G)$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$. Potem G dopušča L-barvanje grafa G, če L ne priredi vsaki točki enakih $\Delta(G)$ barv in če G ni izomorfen polnemu grafu $K_{\Delta+1}$ ali lihemu ciklu.*

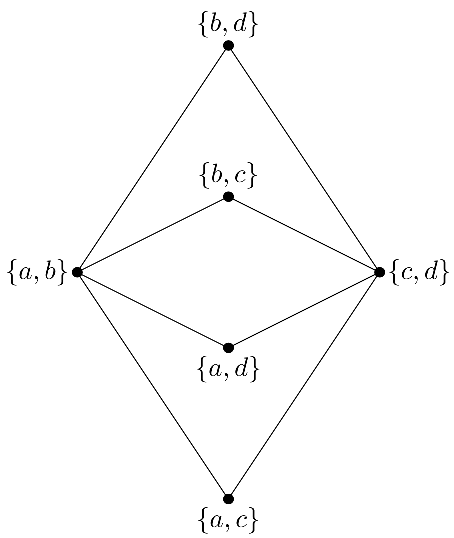
Hkrati so objavili še naslednjo posplošitev zgornjega izreka, ki jo bomo uporabljali pri dokazovanju reducibilnosti konfiguracij v zadnjem poglavju.

Izrek 3.17 *Naj bo G povezan graf in naj bo L izbira barv za vozlišča G, za katero velja $|L(v)| \geq d(v)$ za vsak $v \in V(G)$. Če je $L(v) > d(v)$ za neko vozlišče v ali G vsebuje blok, ki ni ne poln graf niti induciran lih cikel, potem je G L-obarvljiv.*

Zanimiv je tudi izrek Alona in Tarsija [3], ki govori o seznamskem barvanju usmerjenih grafov. Najprej definirajmo strukturo, ki se uporabi v predpostavki izreka.

Definicija 3.18 Usmerjeni podgraf H usmerjenega grafa G je *Eulerjev*, če za vsako vozlišče $v \in V(H)$ velja, da je število povezav, ki so usmerjene v v (oznaka $d_H^+(v)$), enako številu povezav, ki gredo iz v (oznaka $d_H^-(v)$). Graf H je *sod*, če ima sodo število povezav in *lih*, če je število povezav liho. Z $E^s(G)$ označimo število sodih Eulerjevih podgrafov grafa G, z $E^l(G)$ pa število lihih Eulerjevih podgrafov.

Izrek 3.19 (Alon-Tarsi) *Naj bo G usmerjeni graf in naj bo L izbira barv tako, da je $|L(v)| \geq d_G^+(v) + 1$ za vsak $v \in V(G)$. Če je $E^s(G) \neq E^l(G)$, za G obstaja L-barvanje.*



Slika 3.1: Dvodelni graf $K_{2,4}$, ki ni seznamsko 2-obarvljiv

Na koncu omenimo še nekaj rezultatov o seznamskih barvanjih ravninskih grafov. V letu 1993 je Thomassen [45] dokazal hipotezo iz leta 1975, ki pravi, da je vsak ravninski graf 5-izbirljiv. Trditev izreka je pravzaprav še močnejša od hipoteze, dokaz pa je presentljivo enostaven.

Izrek 3.20 *Naj bo G enostaven ravninski graf, ki sestoji iz cikla $C = v_1v_2\cdots v_pv_1$ ter vozlišč in povezav znotraj C tako, da so vsa notranja lica trikotniki. Naj bosta vozlišči v_1 in v_2 obarvani z barvama 1 in 2 in naj bo $L(v)$ seznam vsaj treh barv, če je $v \in C-\{v_1, v_2\}$, oziroma seznam vsaj petih barv, če je $v \in G - C$. Potem lahko barvanje vozlišč v_1 in v_2 razširimo na seznamsko barvanje grafa G.*

Dokaz. Izrek dokazujemo z indukcijo po številu vozlišč grafa G. Če je $p = 3$ in $G = C$, izrek očitno velja. Nadaljujmo z indukcijskim korakom.

Če ima C diagonalo v_iv_j $(2 \leq i \leq j-2 \leq p-1)$, kjer definiramo $v_{p+1} = v_1$, indukcijsko hipotezo apliciramo na cikel $v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j+1}\cdots v_1$ in njegovo notranjost ter na cikel $v_jv_iv_{i+1}v_{j-1}v_j$ in na njegovo notranjost. Privzamemo torej lahko, da C nima diagonale.

Naj bodo v_1, u_1, u_2,..., u_m, v_{p-1} sosedje vozlišča v_p, označeni v smeri urinega kazalca okrog v_p. Ker notranjost C tvorijo trikotniki, G vsebuje pot $P = v_1u_1u_2\cdots u_mv_{p-1}$. Ker C nima diagonale, je $P \cup (C - v_p)$ cikel C'. Naj bosta x in y različni barvi v $L(v_p)\backslash\{1\}$. Označimo sedaj $L'(u_i) = L(u_i)\backslash\{x, y\}$, za $1 \leq i \leq m$ in $L'(v) = L(v)$, če je v vozlišče G, ki ni v $\{u_1, \ldots, u_m\}$. Indukcijsko hipotezo priredimo C' in njegovi notranjosti z novimi seznami L'. Barvanje zaključimo z obarvanjem vozlišča v_p z barvo x, oziroma y, če je že v_{p-1} obarvan z x. $\square$

Dve leti kasneje je Thomassen [44] dokazal še, da so vsi ravninski grafi z notranjim obsegom vsaj 5 seznamsko 3-obarvljivi. Seznamsko 5-barvanje ravninskih grafov je najboljše možno, saj obstajajo ravninski grafi, ki niso seznamsko 4-obarvljivi [48, 37].

Poglavje 4

Razdaljna barvanja

V tem poglavju predstavimo posplošitev barvanja vozlišč, ki upošteva tudi barve bolj oddaljenih vozlišč in ne le sosednjih. Uporabnost razdaljnih barvanj se kaže na mnogih področjih. Najbolj znan primer uporabe je prirejanje frekvenc radijskim oddajnikom ter antenam mobilne telefonije. Pri oddajnikih namreč prihaja do problema interference, če so frekvence preveč podobne. Rešitev je, da oddajnikom postavljenim zelo blizu, priredimo kar se da različne frekvence, bolj oddaljenim že bolj podobne, tistim, med katerimi do interference ne more priti, pa frekvence priredimo neodvisno.

V teoriji grafov problem modeliramo tako, da oddajnike predstavimo kot vozlišča grafa. Povezave med oddajniki dodamo glede na njihovo bližino. Bližnje oddajnike povežemo, za bolj oddaljene pa oddaljenost reguliramo z dolžino poti med njimi. Za zagotovitev različnosti frekvenc, torej, da preprečimo dodelitev sosednjih frekvenčnih območij sosednjima oddajnikoma, barve (frekvence) označimo s števili in pri barvanju sosednjih vozlišč zahtevamo določen razpon med barvami. Definirajmo barvanje, ki ustreza zgornjim zahtevam.

Definicija 4.1 Naj bo G graf in $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \mathbb{N}_0$. Preslikavi

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_k) : V(G) \mapsto \mathbb{N}_0,$$

pravimo *razdaljno* ali $L(p_1, p_2, \ldots, p_k)$-*barvanje*, če velja:

$$\left| L(p_1, p_2, \ldots, p_k)(u) - L(p_1, p_2, \ldots, p_k)(v) \right| \geq p_i,$$

za vozlišči u in v na razdalji $d(u, v) = i$. *Razpon* razdaljnega barvanja je razlika med največjo in najmanjšo barvo. Brez škode za splošnost lahko najmanjši barvi vedno priredimo vrednost 0, zato je razpon razdaljnega barvanja kar enak največji barvi. Najmanjši možen razpon označimo z $\lambda_{p_1,p_2,\ldots,p_k}$.

Razpon je analogija kromatičnega števila za razdaljna barvanja, s to razliko, da je razpon za 1 manjši (pri eni uporabljeni barvi je razpon enak 0).

Splošna razdaljna barvanja so slabo raziskana, zato pa so posebni primeri toliko bolj zanimivi. Eden izmed njih je barvanje potenc grafov. Lahko je videti, da če velja $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1$, je $\lambda_{p_1,p_2,\ldots,p_k}(G) = \chi(G^k) - 1$. Z G^k označujemo graf, ki ima enako množico vozlišč kot G, poljubni vozlišči pa sta povezani, če med njima obstaja pot dolžine kvečjemu k v grafu G. Grafu G^k pravimo k-ta potenca grafa G (primer kvadrata grafa najdete v razdelku 4.2).

Pri vseh barvanjih si želimo kar najbolj omejiti število barv. Omejitev za barvanje potenc ravninskega grafa je predstavljena v [2], kjer je dokazan naslednji izrek:

Izrek 4.2 *Naj bo G ravninski graf z maksimalno stopnjo Δ. Graf G^k je obarvljiv z $O(\Delta^{\lfloor k/2 \rfloor})$ barvami za vsak $k \geq 1$. Obstaja tudi družina grafov, ki to mejo dosežejo.*

K potencam grafov se bomo vrnili kasneje, še prej pa si bomo ogledali drugi poseben primer razdaljnih barvanj – $L(p, q)$-barvanja. V naslednjem razdelku naredimo kratek pregled (glej [15] za podrobnejši pregled) nekaj najpomembnejših rezultatov s tega področja.

4.1 $L(p, q)$-barvanja

V literaturi se pojavlja kar nekaj izrazov, ki označujejo $L(p, q)$-barvanja oziroma posebne primere le-teh. Pravimo jim tudi $L(p, q)$-označevanje, 2-razdaljno barvanje ali barvanje kvadrata (za $p = q = 1$), radio-barvanje ali λ-barvanje (za $p = 2$ in $q = 1$). V tem razdelku se osredotočimo na rezultate za splošna p in q ter na $L(2, 1)$-barvanje, ki je med vsemi $L(p, q)$-barvanji najbolj raziskano.

4.1.1 Spodnje in zgornje meje

Oglejmo si najprej spodnje in zgornje meje. Naj bo G graf in Δ njegova maksimalna stopnja. Za $\lambda_{2,1}(G)$ je spodnja meja očitno $\Delta + 1$, dosežena pa je pri grafih $G = K_{1,\Delta}$. V [25] sta Griggs in Yeh pokazala, da je najvišja spodnja meja v splošnem precej višje. Opisala sta graf, ki ima razpon $\Delta^2 - \Delta$.

Avtorja zgornjega rezultata sta podala tudi nekaj rezultatov za zgornje meje razpona $\lambda_{2,1}$. Dokazala sta naslednje:

Izrek 4.3 *Za graf G z maksimalno stopnjo Δ velja, da je*

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta.$$

Če je G 3-povezan, je $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta - 3$. Če pa ima G premer 2, velja $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$.

Poleg tega sta Griggs in Yeh podala tudi osrednjo hipotezo na tem področju, ki še vedno ostaja nerešena.

Hipoteza 4.4 *Vsak graf G z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 2$ ima $L(2,1)$-barvanje z razponom $\lambda_{2,1} \leq \Delta^2$.*

Zgornja meja je bila še nekajkrat izboljšana. Najprej jo je Jonas postavil na $\Delta^2+2\Delta-4$ v [31], nekaj let kasneje pa sta jo Chang in Kuo [16] znižala na $\Delta^2+\Delta$. V letu 2003 sta Král' in Škrekovski [33] dokazala analogijo Brooksovega izreka za nekaj problemov prirejanja kanalov in obenem prišla do rezultata $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ za vsak graf G, dve leti kasneje pa je njun rezultat izboljšal in posplošil Gonçalves [24], ki je dokazal naslednji izrek:

Izrek 4.5 *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 3$ in $p \geq 2$ naravno število. Potem velja:*

$$\lambda_{p,1}(G) \leq \Delta^2 + (p-1)\Delta - 2.$$

Oglejmo si sedaj spodnjo mejo $L(p,q)$-barvanja. Lahko je videti, da velja $\lambda_{p,q}(G) \geq p + (\Delta - 1)q$ za $p \geq q$. Če je $p > q$ in drži enakost v zgornji neenačbi, morajo biti vsa Δ-vozlišča v G obarvana z barvo 0 (ali $p + (\Delta - 1)q$), njihovi sosedje pa z barvami $p + iq$ (ali iq), za $i = 0, 1, \ldots, \Delta - 1$. Takšne grafe imenujemo $\lambda_{p,q}$*-minimalni*.

Tukaj omenimo še dva rezultata dokazana v [23]. Prvi pravi, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $k\lambda_{p,q}(G) = \lambda_{cp,cq}(G)$. Drugi rezultat je monotonost funkcije razpona v obeh parametrih, torej za $p' \geq p$ ter $q' \geq q$ velja $\lambda_{p',q'}(G) \geq \lambda_{p,q}(G)$.

4.1.2 $L(p,q)$-barvanja ravninskih grafov

V tem podrazdelku naredimo pregled raziskovanja $L(p,q)$-barvanja ravninskih grafov. Izpustili bomo $L(1,1)$-barvanje, ki je podrobneje predstavljeno v razdelku 4.2.

Prva zgornja meja $\lambda_{2,1}(G) \leq 8\Delta - 13$, kjer je G ravninski graf, je bila postavljena leta 1993 v [31]. Leta 2003 sta jo izboljšala in obenem rezultat posplošila van den Heuvel in McGuinnes [29]. Dokazala sta, da velja $\lambda_{p,q} \leq (4q-2)\Delta + 10p + 38q - 23$ za $p \geq q$. Skoraj istočasno so Borodin, Broersma in Glebov skupaj z van den Heuvelom podali boljšo mejo, vendar za grafe z $\Delta \geq 47$ [11]. Dokazali so, da velja $\lambda_{p,q}(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil (2q-1) + 8p - 8q + 1$. Leta 2005 sta Molloy in Salavatipour [38] dokazala, da velja $\lambda_{p,q}(G) \leq \lfloor \frac{5}{3}\Delta \rfloor q + 18p + 77q - 18$.

Zgornji rezultat van den Heuvela in McGuinnesa potrdi hipotezo 4.4 za ravninske grafe z maksimalno stopnjo vsaj 7 v primeru $L(2,1)$-barvanja. Bella, Král', Mohar in Quittnerová [6] so hipotezo potrdili še za $\Delta \neq 3$:

Izrek 4.6 *Naj bo G ravninski graf. Potem velja:*

(i) $\lambda_{2,1}(G) \leq 32$, *za* $\Delta(G) = 6$;

(ii) $\lambda_{2,1}(G) \leq 25$, *za* $\Delta(G) = 5$;

(iii) $\lambda_{2,1}(G) \leq 16$, *za* $\Delta(G) = 4$.

Oglejmo si sedaj izrek, ki sta ga dokazala Wang in Lih [50]. V njem je upoštevan notranji obseg grafa, meje pa so zelo natančne.

Izrek 4.7 *Naj bo G ravninski graf ter Δ njegova maksimalna stopnja. Naj bosta p in q naravni števili. Potem velja:*

(i) $\lambda_{2,1}(G) \leq (2q-1)\Delta + 4p + 4q - 4$, *za* $g(G) \geq 7$;

(ii) $\lambda_{2,1}(G) \leq (2q-1)\Delta + 6p + 12q - 9$, *za* $g(G) \geq 6$;

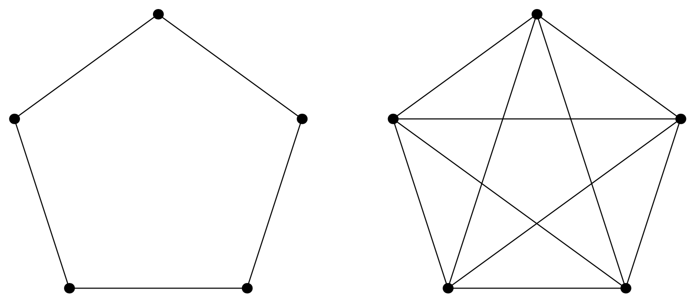
(iii) $\lambda_{2,1}(G) \leq (2q-1)\Delta + 6p + 24q - 15$, *za* $g(G) \geq 5$.

Tukaj poudarimo, da sta p in q pozitivni števili, zato zgornji rezultat ne velja za injektivna barvanja ($L(0,1)$-barvanja). Podobne rezultate za injektivna barvanja predstavimo v poglavju 6.

4.2 Barvanja kvadratov grafov

V tem razdelku si bomo podrobneje ogledali nekaj rezultatov teorije barvanja kvadratov grafov ($L(1,1)$-barvanj). Potence grafov smo omenili že zgoraj, sedaj pa natančneje definirajmo kvadrat grafa G:

Definicija 4.8 *Kvadrat* G^2 grafa G je graf, za katerega je $V(G^2) = V(G)$ in v katerem med dvema vozliščema u in v obstaja povezava, če je razdalja med u in v v grafu G kvečjemu dva.



Slika 4.1: Graf in njegov kvadrat

Barvanje kvadratov je za nas zanimivo, saj kromatično število kvadrata predstavlja zgornjo mejo injektivnega kromatičnega števila. Oglejmo si nekaj rezultatov. Naslednja neenakost hitro sledi iz definicije:

$$\Delta + 1 \leq \chi(G^2) \leq \Delta^2 + 1.$$

Iz Brooksovega izreka enostavno sledi, da obstaja končno mnogo povezanih grafov, za katere je zgornja meja dosežena. Tesnejši rezultati nastanejo pri študiju ožjega razreda grafov, zanimal nas bo predvsem razred ravninskih. V sedemdesetih letih je Wegner [51] dokazal naslednji izrek:

Izrek 4.9 (Wegner) *Kvadrat kubičnega ravninskega grafa je* 8*-obarvljiv.*

Wegner je podal tudi naslednjo hipotezo:

Hipoteza 4.10 *Naj bo G ravninski graf z maksimalno stopnjo Δ. Kromatično število grafa G^2 je kvečjemu* 7*, če je $\Delta = 3$, kvečjemu $\Delta + 5$, če velja $4 \leq \Delta \leq 7$ in kvečjemu* $\left\lfloor \frac{3\Delta}{2} \right\rfloor + 1$ *sicer.*

Če je hipoteza resnična, so meje najboljše možne. V letu 2006 jo je za kubične ravninske grafe rešil Thomassen [46].

Izrek 4.11 (Thomassen) *Kvadrat kubičnega ravninskega grafa je* 7*-obarvljiv.*

Ostale stopnje ostajajo nerešene, dokazanih pa je nekaj posebnih primerov. Lih in Wang [35] sta hipotezo v letu 2002 potrdila za razred zunanje-ravninskih grafov. Molloy in Salavatipour sta v [38, 39] določila do zdaj najboljše znane zgornje meje. Dokazala sta, da je kvadrat ravninskega grafa obarvljiv s $\lceil 5\Delta/3 \rceil + 78$ barvami za vse Δ in s $\lceil 5\Delta/3 \rceil + 25$ barvami za $\Delta \geq 241$. Podala sta tudi naslednjo hipotezo.

Hipoteza 4.12 *Obstaja število M, da je vsak ravninski graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq M$ in notranjim obsegom vsaj pet $(\Delta + 2)$-obarvljiv.*

Natančnejše meje so določene na posebnih razredih ravninskih grafov. Tako so Dvořák, Kráľ, Neyedlý in Škrekovski [19, 20] dokazali, da je kromatično število kvadrata ravninskega grafa enako $\Delta + 1$, če je Δ dovolj velik in je notranji obseg grafa vsaj sedem in omejeno z $\Delta + 2$, če je notranji obseg enak šest.

Poznamo še nekaj rezultatov na subkubičnih ravninskih grafih. Montassier in Raspaud [40] sta dokazala, da je za subkubični ravninski graf G kromatično število kvadrata $\chi(G^2) \leq 5$, če je $g(G) \geq 14$ in $\chi(G^2) \leq 6$, če je $g(G) \geq 10$.

Poglavje 5

Injektivna barvanja grafov

V letu 2000 so Hahn, Kratochvíl, Širáň in Sotteau v [27] predstavili nove rezultate za $L(0,1)$-barvanja, ki so jih obenem preimenovali v injektivna barvanja grafov. Model uporabe rezultatov injektivnih barvanj je predstavljen v [7]. Gre za problem hkratnega sprejemanja podatkov z več sosednjih postaj. Če vsem priredimo drugo frekvenčno območje, do interference pri sprejemniku ne pride. Pri tem frekvenčno območje sprejemnika ni pomembno.

V tem poglavju bomo predstavili splošnejše rezultate za injektivna barvanja, v naslednjem pa se bomo osredotočili na injektivna barvanja ravninskih grafov.

Definicija 5.1 *Injektivno k-barvanje* grafa G je funkcija $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, ki dvema vozliščema $u, v \in V(G)$ priredi različno vrednost, če imata skupnega soseda. Najmanjše število k, za katero je graf injektivno k-obarvljiv, imenujemo *injektivno kromatično število.*

Pri injektivnem barvanju torej ni potrebno, da sta sosednji vozlišči obarvani različno. Beseda injektivno je uporabljena zato, ker je zožitev injektivnega barvanja na soseščino poljubnega vozlišča $v \in V(G)$ injektivna. To pomeni, da, če imata dve vozlišči iz neke soseščine enako barvo, sta enaki. Za injektivno barvanje grafa si lahko pomagamo z grafom sosednosti.

Definicija 5.2 Naj bo G graf. Graf $G^{(2)}$ je *graf sosednosti* grafa G natanko takrat, ko velja $V(G^{(2)}) = V(G)$ in $E(G^{(2)}) = \{uv \mid \exists w \in V(G^{(2)}) : uw \in E(G) \wedge wv \in E(G)\}$.

Lahko je videti, da je injektivno k-barvanje grafa G natanko k-barvanje grafa $G^{(2)}$.

Oglejmo si nekaj osnovnih rezultatov za injektivno barvanje. Za polne grafe velja $\chi_i(K_n) = n$ za $n > 2$, saj imata poljubni dve vozlišči skupnega soseda. Graf K_2 je injektivno 1-obarvljiv. Pot je injektivno 2-obarvljiva, saj jo lahko obarvamo tako, da pobarvamo z enako barvo prvi dve vozlišči, z drugo naslednji dve in to ponavljamo do konca. Injektivno kromatično število dreves je enako $\Delta(G)$.

Za cikle velja $\chi_i(C_n) = 2$, če je $n = 4k$ in $\chi_i(C_n) = 3$ sicer. Graf sosednosti v sodih ciklih C_{2n} je namreč sestavljen iz dveh komponent, ki sta obe cikla dolžine n. Če je n sod, sta ti dve komponenti obarvljivi z dvema barvama, v nasprotnem primeru s tremi. V primeru lihih ciklov, je graf sosednosti izomorfen začetnemu grafu.

5.1 Spodnje in zgornje meje

Pri določanju spodnje in zgornje meje injektivnega kromatičnega števila takoj vidimo, da za graf G velja neenakost $\Delta(G) \leq \chi_i(G) \leq |V(G)|$. Maksimalna stopnja je natanko največje število vozlišč, ki imajo skupno neko vozlišče, zato mora biti vsako izmed njih obarvano drugače. Naslednja trditev zgornjo ugotovitev vključi v neenakost s kromatičnim številom grafa.

Trditev 5.3 *Naj bo G povezan graf različen od K_2, potem velja $\chi(G) \leq \chi_i(G)$.*

Dokaz. Naj bo G graf. Če G ni ne poln graf in ne lih cikel, po Brooksovem izreku sledi $\chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi_i(G)$. Če pa je G poln graf različen od K_2 ali lih cikel, velja $\chi(G) = \chi_i(G)$. □

Trivialna zgornja meja injektivnega kromatičnega števila je $\chi_i(G) \leq |V(G)|$. Naslednja trditev opiše grafe, za katere je ta meja dosežena. Izpusti K_1 in K_3, ki sta edina takšna grafa na manj kot štirih točkah.

Trditev 5.4 *Naj bo G poljuben graf z vsaj štirimi vozlišči. Potem je $\chi_i(G) = |V(G)|$ natanko takrat, ko je G poln graf ali ima premer enak 2, vsaka povezava pa je vsebovana v nekem 3-ciklu.*

Dokaz. Naj bo G graf na vsaj štirih vozliščih. Ker velja $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$, po Brooksovem izreku sledi, da je, ob predpostavki $\chi_i(G) = |V(G)|$, $G^{(2)}$ poln graf. To pa je natanko takrat, ko imata poljubni dve vozlišči skupnega soseda. Pri premeru 2 lahko imata vsaki vozlišči na razdalji dva skupnega soseda, vozlišča na razdalji ena pa so po predpostavki vsebovana v nekem trikotniku, zato tudi med njimi obstaja pot dolžine dva. □

Naslednja neenakost predstavlja splošnejši rezultat za zgornjo mejo.

Trditev 5.5 *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Potem je $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$.*

Dokaz. Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Za poljubno vozlišče $v \in V(G)$ velja, da ima kvečjemu $\Delta(\Delta - 1)$ vozlišč na razdalji dva. Torej je maksimalna stopnja v grafu $G^{(2)}$ kvečjemu $\Delta(\Delta - 1)$. Ker pa velja $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$ in je kromatično število za poljuben graf H navzgor omejeno z $\Delta(H) + 1$, sledi $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$. □

5.2 Injektivno barvanje hiperkock

Prvi članek posvečen injektivnemu barvanju grafov [27], je bil motiviran s področjem teorije kod za popravljanje napak, ki ga zanima injektivno kromatično število hiperkocke. *Hiperkocka* dimenzije n je povezan n-regularen graf na 2^n vozliščih, označimo ga s Q_n. Navadno vozlišča predstavimo z vektorji dimenzije n, ki imajo za koordinate števili 1 ali 0. Povezave pa predstavljajo pari vozlišč, ki se razlikujejo v natanko eni koordinati.

Najprej si oglejmo preprosto trditev, ki govori o injektivnem barvanju regularnih grafov.

Trditev 5.6 *Naj bo G d-regularen graf z injektivnim kromatičnim številom $\chi_i(G) = d$. Potem d deli $|V(G)|$.*

Nadaljujmo pa z izrekom o injektivnem barvanju hiperkock.

Izrek 5.7 *Injektivno kromatično število hiperkocke Q_n je enako n natanko takrat, ko je $n = 2^r$ za nek $r \geq 0$.*

Zapišimo še posledico zgornjega izreka:

Posledica 5.8 *Za vsak n je $\chi_i(Q_n) \leq 2^{\lceil log\ n \rceil}$ in zato $\chi_i(Q_n) \leq 2n - 2$.*

Zaključna ugotovitev članka [27] je izrek, ki združi in razširi zgornje rezultate.

Izrek 5.9 *Velja naslednja enakost:*

$$\chi_i(Q_{2^k - j}) = 2^k, \ \ 0 \leq j \leq 3.$$

5.3 Ostali rezultati s področja injektivnih barvanj

V letu 2005 so Doyon, Hahn in Raspaud v [18] napisali članek, ki se je ukvarjal z injektivnim barvanjem redkih grafov, to je grafov, ki imajo relativno majhno stopnjo glede na število vozlišč. Dobili so nekaj zanimivih rezultatov, uporabljajoč maksimalno povprečno stopnjo grafa.

Definicija 5.10 Naj bo G graf. *Maksimalna povprečna stopnja* G, označena z $\mathrm{Mad}(G)$ je

$$\mathrm{Mad}(G) = \max\left\{\frac{2|E(H)|}{V(H)}, H \subseteq G\right\}.$$

Njihov glavni rezultat je naslednji izrek:

Izrek 5.11 *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Veljajo naslednje trditve:*

(i) Če je $\mathrm{Mad}(G) < \frac{14}{5}$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 3$;

(ii) Če je $\mathrm{Mad}(G) < 3$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 4$;

(iii) Če je $\mathrm{Mad}(G) < \frac{10}{3}$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 8$.

S pomočjo dejstva, da je maksimalna povprečna stopnja ravninskega grafa manjša od $\frac{2g}{g-2}$, kjer je g notranji obseg grafa, so zgornji izrek aplicirali na ravninske grafe.

Posledica 5.12 *Naj bo G ravninski graf z maksimalno stopnjo Δ. Veljajo naslednje trditve:*

(i) Če je $g(G) \geq 7$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 3$;

(ii) Če je $g(G) \geq 6$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 4$;

(iii) Če je $g(G) \geq 5$, je $\chi_i(G) \leq \Delta + 8$.

V poglavju 6 dokažemo nekaj podobnih izrekov z drugačnim pristopom. Dokazujemo jih namreč s pomočjo metode prenosa naboja in reducibilnih konfiguracij.

Tretji članek o injektivnem barvanju grafov [28] je bil napisan v letu 2006 in vsebuje rezultat o injektivnem barvanju grafov brez K_4 minorja.

Izrek 5.13 *Naj bo G graf brez K_4 minorja z maksimalno stopnjo Δ. Potem je* $\chi_i(G) \leq \lceil \frac{3}{2}\Delta \rceil$.

Primeri grafov z maksimalno stopnjo $2k$, ki dosežejo mejo izreka, so Shannonovi trikotniki (opisani so v razdelku 6.6). Ni znano ali obstajajo takšni grafi za vsak Δ. Naslednji izrek karakterizira grafe, ki imajo injektivno kromatično število enako $\Delta^2 - \Delta + 1$.

Izrek 5.14 *Naj bo G povezan graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 3$. Potem je graf sosednosti $G^{(2)}$ sestavljen iz dveh polnih grafov $K_{\Delta^2-\Delta+1}$ natanko takrat, ko je $\chi_i(G) = \Delta^2 - \Delta + 1$.*

Za $\Delta \leq 4$ torej velja, da je $\chi_i(G) \leq 13$. Avtorji članek zaključijo z naslednjim izrekom, ki omeji zgornjo mejo injektivnega kromatičnega števila za ravninske grafe:

Izrek 5.15 *Za vsak G ravninski graf z maksimalno stopnjo Δ velja $\chi_i(G) \leq \Delta^2 - \Delta$, če je $\Delta \geq 3$.*

Posledica 5.16 *Injektivno kromatično število subkubičnega ravninskega grafa je manjše ali kvečjemu enako 6.*

V poglavju 6 dokažemo, da je injektivno kromatično število subkubičnega ravninskega grafa manjše ali kvečjemu enako 5, če je notranji obseg grafa $g(G) \geq 7$. Hipoteza, ki so jo Hahn, Raspaud, Wang postavili v [28] pravi, da to velja za vse subkubične ravninske grafe. Pravzaprav gredo še dlje, hipoteza je naslednja:

Hipoteza 5.17 *Za vsak ravninski graf G velja*

$$\chi_i(G) \leq \left\lceil \frac{3\Delta}{2} \right\rceil.$$

Poglavje 6

Injektivna barvanja ravninskih grafov

V tem poglavju predstavimo rezultate Lužarja, Škrekovskega in Tancerja o injektivnem barvanju ravninskih grafov z navzdol omejenim notranjim obsegom [36]. V prvih treh razdelkih obravnavamo subkubične ravninske grafe, v naslednjih pa grafe z maksimalno stopnjo vsaj štiri.

Pri vseh dokazih najdemo nekaj reducibilnih konfiguracij in nato z metodo prenosa naboja na grafu, ki naj bi predstavljal minimalni protiprimer, oziroma posebni strukturi, ki jo definiramo spodaj, s protislovjem dokažemo željen rezultat. V vseh razdelkih, z izjemo zadnjega, uporabljamo enak začetni naboj. Vsakemu vozlišču v minimalnega protiprimera G podamo naslednji začetni naboj:

$$\mathrm{ch}_0(v) = 2d(v) - 6.$$

Vsakemu licu f protiprimera G pa priredimo naslednji začetni naboj:

$$\mathrm{ch}_0(f) = r(f) - 6.$$

Opazimo, da imajo $\leq$2-vozlišča in $\leq$5-lica negativen začetni naboj. Po Eulerjevi formuli izračunamo, da je skupni naboj enak

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V(G)} \mathrm{ch}_0(v) + \sum_{f\in F(G)} \mathrm{ch}_0(f) &= (4|E(G)| - 6|V(G)|) + (2|E(G)| - 6|F(G)|) \\ &= 6(|E(G)| - |V(G)| - |F(G)|) \\ &= -12.\end{aligned}$$

Naboj bomo prenašali na grafu G^*, ki ga dobimo tako, da v grafu G skrčimo vsa vozlišča stopnje dva. To pomeni, da ta vozlišča izbrišemo ter povežemo njihove sosede. S tem na vozliščih nimamo več negativnega naboja, zato pa dobimo manjša lica in posledično manj naboja na njih.

6.1 Injektivna 3-barvanja ravninskih grafov

V tem razdelku bomo dokazali, da je vsak subkubični ravninski graf z notranjim obsegom vsaj 19 injektivno 3-obarvljiv. Poleg tega predstavimo subkubični ravninski graf z notranjim obsegom 10, katerega ni mogoče injektivno obarvati s tremi barvami.

Izrek 6.1 *Vsak subkubični ravninski graf G z notranjim obsegom $g(G) \geq 19$ je injektivno 3-obarvljiv.*

Dokaz. Recimo, da izrek 6.1 ne drži. Naj bo G minimalni protiprimer zanj, torej subkubični ravninski graf z notranjim obsegom vsaj 19, ki ni injektivno 3-obarvljiv. Še več, vsak pravi podgraf grafa G je injektivno 3-obarvljiv. Dokazali bomo, da takšen G ne obstaja.

Reducibilne konfiguracije. Reducibilne konfiguracije predstavljene v tem razdelku bomo uporabili tudi v kasnejših razdelkih, kjer obravnamo injektivna barvanja z več kot tremi barvami. Najprej definirajmo strukturo, ki se v reducibilnih konfiguracijah injektivnih barvanj pogosto pojavlja.

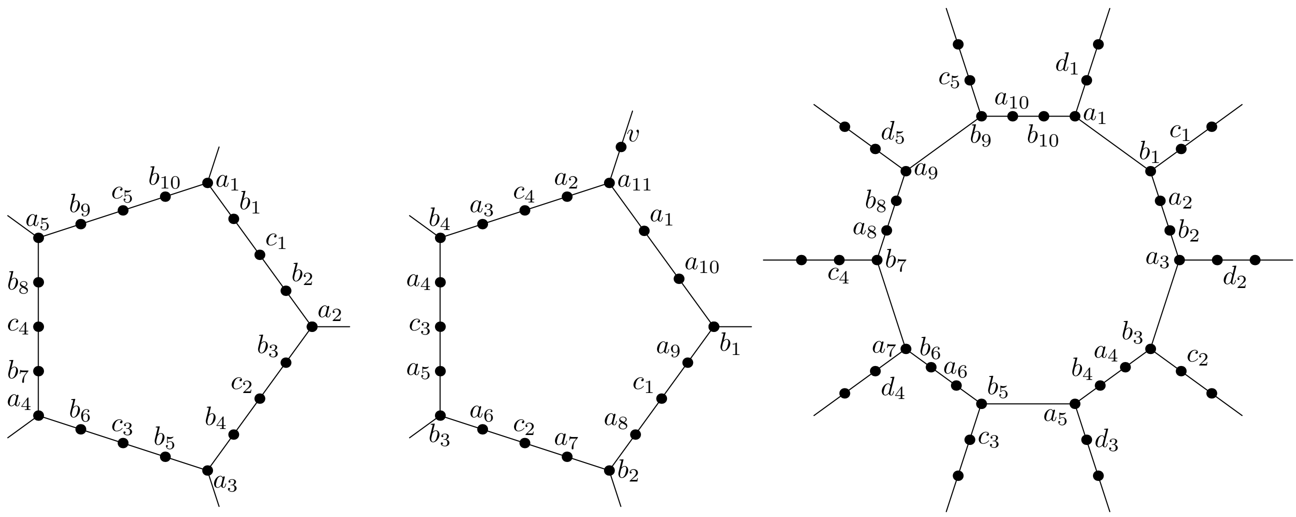
Definicija 6.2 *Nit* je inducirana pot v grafu G, katere vozlišča so vsa stopnje 2 v G. Niti dolžine k pravimo k-nit.

Lema 6.3 *V G sta 1-vozlišče ter 4-nit reducibilni konfiguraciji.*

Dokaz. Naj bo $u \in V(G)$ vozlišče stopnje ena. Edini sosed vozlišča u je stopnje ≤ 3, torej ima u kvečjemu dva soseda na razdalji dva. Sledi, da obstaja vsaj ena barva, s katero lahko obarvamo u.

Naj bo $uvwz$ 4-nit v G. Ko obarvamo graf G brez niti $uvwz$, ostane končnima vozliščema u in z na voljo vsaj ena barva, saj imata po kvečjemu dva soseda na razdalji dva. Središčnima vozliščema v in w preostaneta dve barvi, saj sta u in z stopnje dva. Ker sta u in z na razdalji tri, ju lahko obarvamo z njunima prostima barvama. S tem izločimo po eno izmed razpoložljivih barv vozlišč v in w tako, da jima preostane na voljo le po ena barva. Ti barvi sta lahko enaki toda, ker sta v in w na razdalji ena, vozlišči lahko obarvamo. □

Lema 6.4 *Konfiguracije na sliki 6.1 so reducibilne v G.*



(a) (b) (c)

Slika 6.1: Reducibilne konfiguracije za injektivna 3-barvanja

Dokaz. Konfiguracije na sliki 6.1 bomo obravnavali posamič. V vsakem primeru naj bo H konfiguracija s slike 6.1, za katero hočemo dokazati reducibilnost. Zaradi minimalnosti G, obstaja injektivno 3-barvanje c podgrafa $G - H$. Dokazali bomo, da c lahko razširimo na G in s tem pridemo do protislovja, ki dokaže reducibilnost H.

(a) V prvem primeru je H 20-cikel. Uporabimo oznake vozlišč H kot na sliki 6.1(a). Ko obarvamo graf $G - H$, preostane vsakemu izmed vozlišč a_i na voljo vsaj ena barva, vozliščem b_i preostaneta po dve, c_i pa so lahko obarvani s poljubno barvo barvanja c.

Vzemimo sedaj graf $H^{(2)}$. Vemo, da je 3-barvanje vozlišč $H^{(2)}$ natanko injektivno 3-barvanje H. Graf $H^{(2)}$ ima dve komponenti, prva je 10-cikel $a_1c_1a_2c_2 \cdots a_5c_5a_1$, druga pa 10-cikel $b_1b_2 \cdots b_{10}b_1$. Ker imajo vozlišča a_i vsaj po eno prosto barvo, jih obarvamo. S tem zmanjšamo število prostih barv vozliščem c_i, vendar jim še vedno preostane ena barva, s katero obarvamo še njih. Tako je obarvana prva komponenta. V drugi komponenti ima vsako izmed vozlišč natanko dve prosti barvi. Ker pa je komponenta sod cikel, jo lahko obarvamo. Barvanje c smo s tem razširili na G in dokazali reducibilnost H.

(b) V konfiguraciji na sliki 6.1(b) je H 19-cikel s pripetim vozliščem. Za oznake vozlišč uporabimo označevanje kot na sliki. Vozlišče v je v grafu G stopnje dva. Zaradi minimalnosti G, obstaja injektivno 3-barvanje c grafa $G - (H - v)$. Opazimo, da po barvanju c, vsakemu izmed vozlišč a_i ostaneta po dve prosti barvi, vozliščem c_i vse tri in vozliščem b_i vsaj ena prosta barva s katero vsak b_i tudi obarvamo.

Za dokaz reducibilnosti ponovno uporabimo $H^{(2)}$. Preostala neobarvana vozlišča so a_i in c_i, ki v $H^{(2)}$ tvorijo štiri komponente. Tri izmed njih so zgolj izolirana vozlišča c_1, c_2 ter c_3, ki so pred barvanjem b_i imela po tri proste barve, po njem pa imajo vsaj po eno prosto barvo, s katero jih obarvamo. Četrta komponenta je pot $a_1 a_2 \cdots a_{10} a_{11} c_4$. Vsako izmed vozlišč na njej ima po dve prosti barvi, z izjemo a_1, ki ima le eno. Pot torej lahko obarvamo. Graf $H^{(2)}$ je tako obarvan v celoti, torej barvanje c lahko razširimo na G. H je reducibilna konfiguracija.

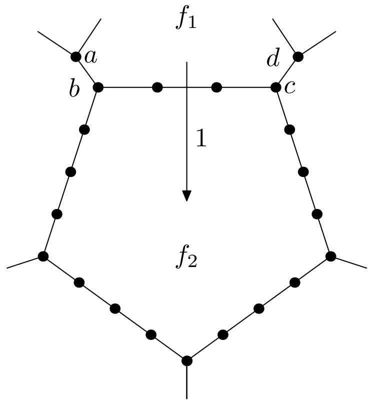
(c) V zadnjem primeru konfiguracijo H sestavljajo 20-cikel C in nekaj 2-niti kot je prikazano na sliki 6.1(c). Uporabili bomo enako označevanje. Podobno kot zgoraj vidimo, da obstaja injektivno 3-barvanje c grafa $G - H$, ki ga lahko enostavno razširimo na vozlišča, ki ležijo na oddaljenosti dva od cikla C. Tako ostanejo neobarvana le vozlišča na razdalji ena od C ter sam cikel C. Graf, ki ga ta vozlišča tvorijo, označimo s K, torej $K = C \cup \{c_1, d_1, \ldots, c_5, d_5\}$. Graf sosednosti $K^{(2)}$ ima dve izomorfni komponenti. Uporabili bomo Alon-Tarsijev izrek 3.19 za dokaz, da je vsaka od njiju obarvljiva z danim seznamom barv.

Zaradi izomorfnosti obeh komponent, lahko dokažemo obarvljivost ene. Izberimo torej komponento C_1 inducirano z vozlišči $\{a_1, c_1, a_2, a_3, c_2, a_4, a_5, c_3, \ldots, a_9, c_5, a_{10}\}$. Opazimo, da imajo a_2, a_4, a_6, a_8 ter a_{10} po tri proste barve, preostala vozlišča C_1 pa po dve. V C_1 imamo pet 3-lic. Povezave v 3-licih usmerimo, in sicer v nasprotni smeri urinega kazalca. Tako ima vsako vozlišče po eno vhodno in eno izhodno povezavo. Neusmerjene so ostale povezave, ki povezujejo 3-lica. Te usmerimo v smeri urinega kazalca. Na ta način dobimo v komponenti C_1 šestnajst lihih ter sedemnajst sodih Eulerjevih grafov, to so kombinacije 3-ciklov, 10-cikel $a_1 a_2 \cdots a_{10} a_1$ ter prazni graf. Vozlišča s tremi prostimi barvami imajo po dve izhodni povezavi, ostala po eno. S tem smo zadostili predpostavkam Alon-Tarsijevega izreka, zato C_1 lahko obarvamo. Sledi, da je H reducibilna. $\square$

Pravilo prenosa naboja. Metodo prenosa naboja bomo uporabili na grafu G^* upoštevaje naslednje pravilo:

Pravilo P1: *Naj bo f_1 $\geq$7-lice in f_2 5-lice v G^* tako, da v G ležita kot je predstavljeno na sliki 6.2, torej, da leži edina povezava f_2, ki je v G subdividirana z dvema vozliščema, ob f_1. Potem f_1 pošlje 1 licu f_2.*

Opomba. Pravilo predpostavlja, da so vozlišča a, b, c in d na sliki 6.2 stopnje tri, f_2 pa je 19-lice v G.



Slika 6.2: Pravilo P1

Končni naboj. Graf G^* je kubičen, saj smo ga pridobili iz subkubičnega grafa. Skupni naboj G^* je enak -12, zato v njem gotovo obstaja $\leq$5-lice, po drugi strani pa v njem ni $\leq$4-lica, saj bi, zaradi predpostavke o notranjem obsegu, v G morala biti 4-nit. Ta pa je po lemi 6.3 reducibilna za injektivno 3-barvanje.

V grafu G nastopajo 5-lica iz G^* v treh različnih konfiguracijah. Prvi dve sta izomorfni reducibilnima konfiguracijama (a) in (b) s slike 6.1. Tretja je predstavljena na sliki 6.2, v njej sta vozlišči a in d stopnje tri.

Če upoštevamo, da je $g(G) \geq 19$ ter, da G ne vsebuje 4-niti, vidimo, da je lice f_1 dolžine $\geq$7 v G^*. Sledi, da ima vsako 5-lice ob povezavi, ki je v G subdividirana z dvema vozliščema, neko $\geq$ 7-lice. Zato dobi 1 po pravilu P1 in ima s tem nenegativen končni naboj.

Sedaj moramo pokazati, da imajo lica, ki pošiljajo naboj sosednjim 5-licem po pravilu P1, prav tako nenegativen končni naboj. Obravnavali bomo posamezne primere glede na dolžino lica. Opazimo, da ima vsako k-lice v G^*, kjer je $k \geq 7$, kvečjemu $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ sosednjih 5-lic, katerim pošlje naboj. To je res, saj povezavi ab ter cd s slike 6.2 nista subdividirani v G. Lahko je preveriti, da je končni naboj $\geq$11-lica f enak

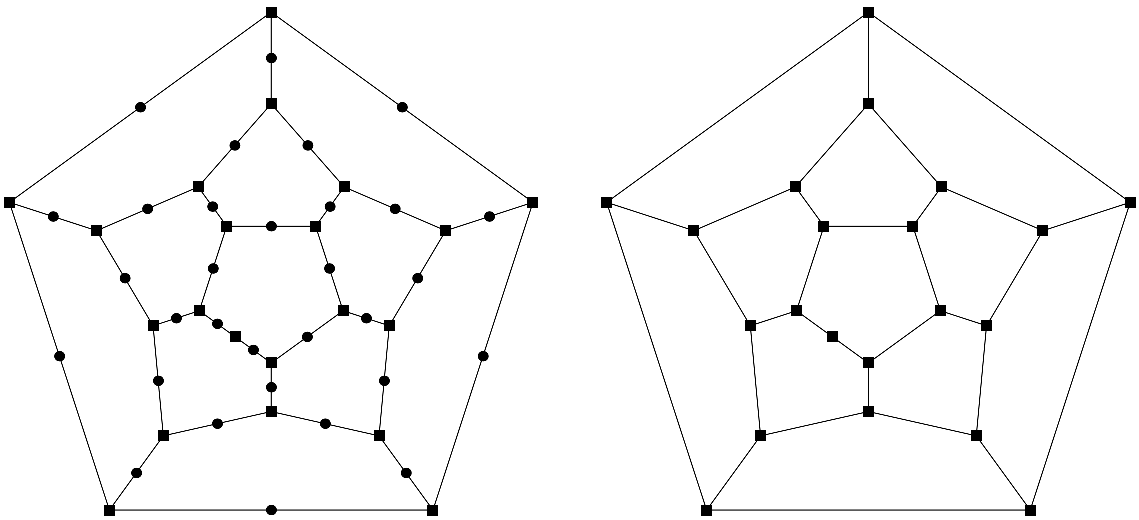
$$\mathrm{ch}^*(f) = \mathrm{ch}_0(f) - \left\lfloor \frac{r(f)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{r(f)}{2} \right\rceil - 6 \geq 0.$$

Preostane nam še izračun končnega naboja lic dolžin med 7 in 10. Lice dolžine 7 lahko naboj pošlje le enemu 5-licu, v nasprotnem primeru ima negativen končni naboj. Predpostavimo nasprotno, da v G^* obstaja 7-lice f_1, ki naboj pošlje dvema 5-licema. V tem primeru bi f_1 v G bilo 17-lice, kar pa ne zadošča pogoju o notranjem obsegu. Podobno lahko izračunamo, da ima 8-lice kvečjemu dve sosednji 5-lici, katerima pošlje naboj, 9-lice pa tri takšna lica. Končni naboj teh lic bo torej ostal nenegativen.

Lice dolžine 10, ki pošlje naboj kvečjemu štirim sosednjim 5-licem ima nenegativen končni naboj. Preostane nam le 10-lice, ki pošilja naboj petim 5-licem. Takšna konfiguracija pa se ujema s konfiguracijo na sliki 6.1(c), ki je po lemi 6.4 reducibilna.

Tako smo dokazali, da imajo vsa lica v G^* nenegativen naboj. Ker pa je G^* kubičen, imajo nenegativen naboj tudi vozlišča. Sledi, da graf G kot minimalni protiprimer izreka 6.1 ne obstaja. Izrek je s tem dokazan. $\square$

Vsak subkubičen ravninski graf ni injektivno 3-obarvljiv. Takšen graf z notranjim obsegom 10 je predstavljen na sliki 6.3.



Slika 6.3: Subkubičen ravninski graf z notranjim obsegom 10 in injektivnim kromatičnim številom 4, ter subkubični ravninski graf s kromatičnim indeksom 4.

Trditev 6.5 *Subkubični ravninski graf na levi strani slike 6.3 ni injektivno* 3*-obarvljiv.*

Dokaz. Naj bo H levi graf na sliki 6.3. Pobarvati ga želimo injektivno s tremi barvami. Oglejmo si njegov graf sosednosti $H^{(2)}$. Le-ta ima dve komponenti. Vozlišča prve so označena kot kvadrati, vozlišča druge pa kot krogi na isti sliki.

Druga komponenta $H^{(2)}$ je graf povezav desnega grafa na sliki 6.3, zato je ekvivalentno obarvati komponento injektivno s tremi barvami ali pa s tremi barvami pobarvati povezave desnega grafa. Ta je kubični z eno povezavo subdividirano. Sedaj uporabimo posledico Leme o parnosti [8], ki pravi, da kubični graf z eno subdividirano povezavo ni po povezavah 3-obarvljiv. Trditev je s tem dokazana. □

Opomba 6.6 Definirajmo še zgoraj omenjeno obarvljivost po povezavah in kromatični indeks. Graf G je *po povezavah k-obarvljiv*, če lahko vsaki povezavi $e \in E(G)$ priredimo eno izmed k barv tako, da imata povezavi s skupnim krajiščem različni barvi. Najmanjši tak k se imenuje *kromatični indeks*.

6.2 Injektivna 4-barvanja ravninskih grafov

V tem razdelku spustimo predpostavko o notranjem obsegu iz izreka 6.1 na 10 z uporabo ene dodatne barve.

Izrek 6.7 *Vsak subkubični ravninski graf G z notranjim obsegom $g(G) \geq 10$ je injektivno 4-obarvljiv.*

Dokaz. Izrek dokazujemo s protislovjem. Naj bo subkubični ravninski graf G z notranjim obsegom vsaj 10 minimalni protiprimer za izrek 6.7. Pri dokazu, da G ne obstaja bomo ponovno uporabili metodo prenosa naboja.

Reducibilne konfiguracije. Začnimo spet s konfiguracijami, ki so v G reducibilne.

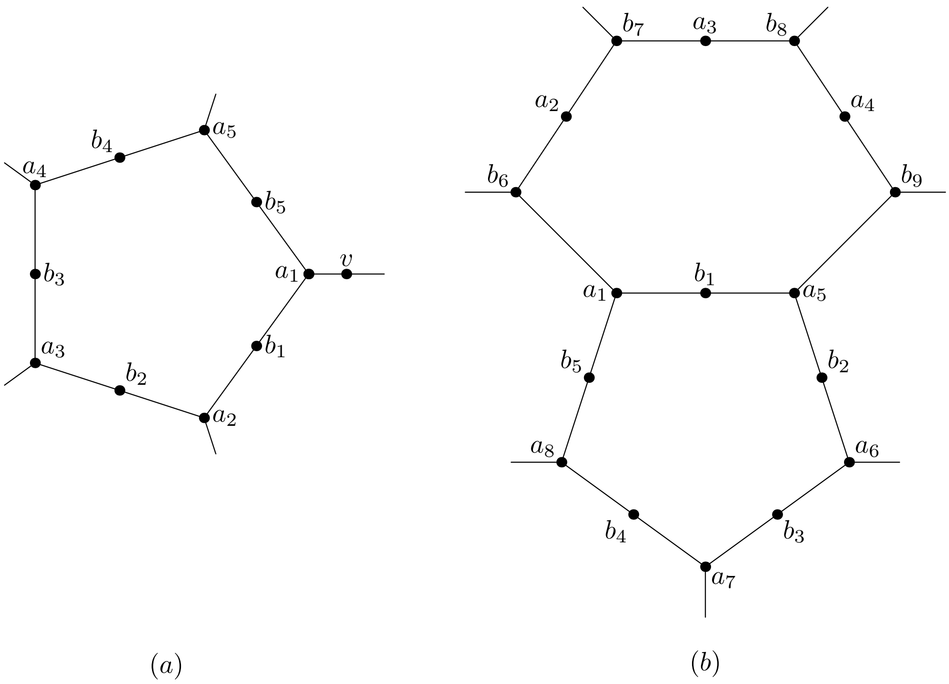
Lema 6.8 *Graf G ne vsebuje 1-vozlišča in 2-niti.*

Dokaz. Ker je 1-vozlišče reducibilno za injektivno 3-barvanje, je reducibilno tudi za 4-barvanje.

V 2-niti uv ima vsako izmed vozlišč kvečjemu tri sosede na razdalji dva, torej vsakemu preostane vsaj ena barva. Poleg tega na razdalji dva nimata skupnega soseda, torej ju lahko obarvamo z enako barvo. Sledi, da je 2-nit reducibilna za injektivno 4-barvanje. □

V dokazu so, tako kot v prejšnjem razdelku, pomembne različne konfiguracije 5-lic v grafu G^*. Naslednja lema govori o reducibilnosti dveh izmed njih.

Lema 6.9 *Konfiguraciji na sliki 6.4 sta reducibilni.*



Slika 6.4: Reducibilni konfiguraciji za injektivno 4-barvanje

Dokaz. Reducibilnost vsake izmed konfiguracij na sliki 6.4 bomo dokazali posebej.

(a) Naj bo H izomorfen konfiguraciji na sliki 6.4(a) in podgraf grafa G. Njegova vozlišča označimo enako kot na sliki. Zaradi minimalnosti G, obstaja injektivno 4-barvanje c grafa $G - H$. Barvanje c želimo razširiti na G. Najprej opazimo, da imajo vsa vozlišča H vsaj dve prosti barvi. Še več, vsako izmed vozlišč a_1, b_1, b_5 ima tri proste barve.

Kot v prejšnjih dokazih barvamo graf sosednosti $H^{(2)}$. Graf $H^{(2)}$ ima dve komponenti. Prva je 5-cikel $a_1a_2 \cdots a_5a_1$, druga pa 6-cikel $b_1b_2 \cdots b_5vb_1$ skupaj z diagonalo b_1b_5. V prvi komponenti ima a_1 na voljo tri barve, preostala vozlišča pa imajo vsaj dve prosti barvi, zato prvo komponento lahko pobarvamo.

Obarvljivost druge komponente enostavno sledi iz izreka 3.17. Na ta način smo obe komponenti obarvali s štirimi barvami in omogočili razširitev barvanja c na graf G, protislovje.

(b) Naj bo H izomorfen konfiguraciji na sliki 6.4(b) in podgraf grafa G. Njegova vozlišča ponovno označimo enako kot na sliki. Ker je G minimalni protiprimer, obstaja injektivno 4-barvanje c grafa $G - H$. Nadalje opazimo, da ima vozlišče b_1 vse štiri barve na voljo, vozlišča a_1, b_2, a_5 in b_5 imajo po tri proste barve, preostala pa vsaj dve.

Vozlišča H tvorijo dve komponenti v $H^{(2)}$. Prva je 8-cikel $a_1 a_2 \cdots a_8 a_1$ skupaj s povezavo $a_1 a_5$, druga pa je sestavljena iz ciklov $b_1 b_2 \cdots b_5 b_1$ ter $b_1 b_6 \cdots b_9 b_1$ skupaj s povezavama $b_2 b_9$ in $b_5 b_6$. Prva komponenta je očitno obarvljiva z uporabo izreka 3.17, drugo pa obarvamo na naslednji način: najprej obarvamo vozlišče b_5 tako, da ima b_4 še vedno na voljo dve prosti barvi. Nato obarvamo b_6, b_7, b_8 in b_9 v tem vrstnem redu. Zatem obarvamo b_1, ki ima obarvane že tri sosede, vendar ima še vsaj eno prosto barvo. Obarvamo še b_2 ter b_3 in tako preostane neobarvano le še vozlišče b_4. Obarvamo ga lahko, saj smo b_5 obarvali tako, da sta b_4 preostali dve prosti barvi, kasneje pa smo obarvali le enega njegovega soseda in ima tako še vsaj eno prosto barvo. Sledi, da je konfiguracija H reducibilna. □

Pravilo prenosa naboja. Pri prenašanju naboja bomo uporabili naslednje pravilo:

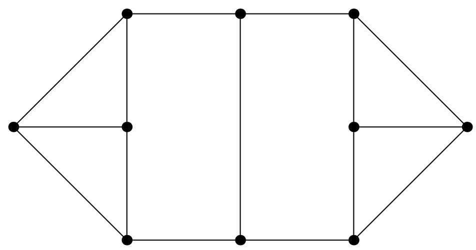
Pravilo P1: *Vsako* ≥ 7*-lice v grafu* G^* *pošlje* $\frac{1}{5}$ *vsakemu sosednjemu* 5*-licu.*

Končni naboj. Predpostavka o notranjem obsegu grafa G nam poda dejstvo, da je v G^* lice dolžine 5 najkrajše možno, saj je 2-nit reducibilna konfiguracija za injektivno 4-barvanje.

Graf G^* je kubičen, zato imajo vsa vozlišča pozitiven naboj. Torej mora G^* vsebovati ≤ 5-lice, zaradi negativnega začetnega naboja. Pokazali bomo, da ima, po uveljavitvi pravila P1 na G^*, vsako lice nenegativen končni naboj.

Dve sosednji 5-lici v G^* sestavljata v grafu G konfiguracijo izomorfno konfiguraciji s slike 6.4(a), ki je reducibilna po lemi 6.9. Takšna konfiguracija se torej v G^* ne pojavi, zaradi minimalnosti G. Nadalje, sosednji 5- in 6-lici v grafu G^* v G inducirata konfiguracijo izomorfno konfiguraciji s slike 6.4(b), ki je, prav tako po lemi 6.9, reducibilna. Iz zgornjih opazk sledi, da ima vsako 5-lice f v G^* natanko pet sosednjih ≥ 7-lic in zato, po izvedbi prenosa naboja po pravilu P1, nenegativen končni naboj. Preostane nam izračun končnega naboja ≥ 7-lic. Za lica dolžine ≥ 8 velja, da imajo končni naboj nenegativen, četudi so vsa njihova sosednja lica dolžine pet, medtem ko je naboj 7-lic v takšnem primeru negativen. Vendar pa vemo, da 5-lici nista sosednji v G^*, torej ima 7-lice kvečjemu tri sosednja 5-lica in s tem nenegativen končni naboj. Torej ima vsako vozlišče in vsako lice v G^* nenegativen končni naboj, protislovje. □

Za vse subkubične ravninske grafe ne velja, da so injektivno 4-obarvljivi. Primer grafa, ki ima injektivno kromatično število 5, je na sliki 6.5, predstavljen pa je bil v [28].



Slika 6.5: Subkubični ravninski graf s $\chi_i = 5$

6.3 Injektivna 5-barvanja ravninskih grafov

V tem razdelku dokažemo izrek o injektivnem 5-barvanju subkubičnih ravninskih grafov.

Izrek 6.10 *Vsak subkubični ravninski graf G z notranjim obsegom $g(G) \geq 7$ je injektivno 5-obarvljiv.*

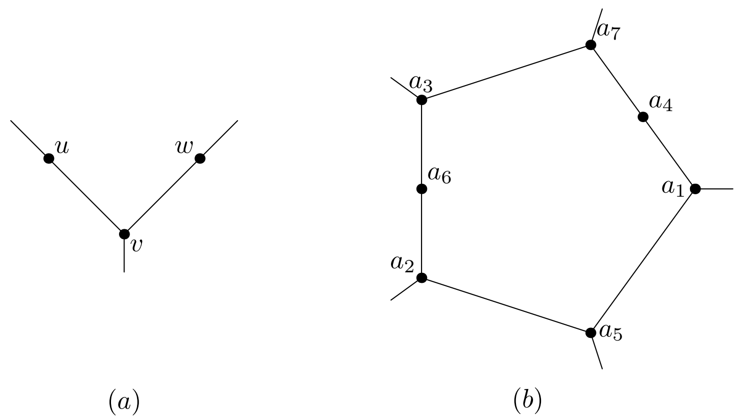
Dokaz. Izrek dokazujemo s protislovjem. Naj bo subkubični ravninski graf G z notranjim obsegom vsaj 7 minimalni protiprimer za izrek 6.10. Dokazali bomo, da G ne obstaja.

Reducibilne konfiguracije. Iz ugotovitev prejšnjih razdelkov sledi, da sta 1-vozlišče ter 2-nit reducibilni konfiguraciji za injektivno 5-barvanje. V dokazu uporabimo še dve reducibilni konfiguraciji:

Lema 6.11 *Konfiguraciji (a) in (b) na sliki 6.6 sta reducibilni za injektivno 5-barvanje.*

Dokaz. Reducibilnost obeh konfiguracij bomo spet dokazovali posebej.

(a) Naj bo H izomorfen konfiguraciji na sliki 6.6(a) in podgraf grafa G. Potem iz minimalnosti G sledi, da obstaja injektivno 5-barvanje c grafa $G - H$. Z razširitvijo c na graf G dokažemo reducibilnost konfiguracije H. Označimo vozlišča H enako kot na sliki. Vozlišče v ima le eno prosto barvo, vozlišči u in w pa vsaj dve. Najprej pobarvamo v z njegovo prosto barvo. Nato pa še preostali vozlišči z med seboj različnima barvama. Barvanje c torej lahko razširimo na G.



Slika 6.6: Reducibilni konfiguraciji za injektivno 5-barvanje

(b) Naj bo sedaj H izomorfen konfiguraciji na sliki 6.6(b) in podgraf grafa G. Iz minimalnosti G dobimo, da obstaja injektivno 5-barvanje grafa $G - H$. Preštejmo proste barve vozlišč. Vozlišče a_5 ima na voljo vsaj eno barvo, vozlišči a_4 in a_6 imata tri, vozlišča a_1, a_2, a_3 in a_7 pa imajo vsaj dve prosti barvi. S tem številom barv poskusimo pobarvati graf sosednosti $H^{(2)}$. Sestavljen je iz 7-cikla $a_1 a_2 \cdots a_7 a_1$. Najprej pobarvamo vozlišče a_5. S tem zmanjšamo število prostih barv njegovih sosedov a_4 in a_6 tako, da imata sedaj le še dve barvi na voljo. Neobarvana torej preostane le 6-pot, na kateri imajo vsa vozlišča po dve prosti barvi, zato jo lahko pobarvamo. Barvanje c lahko razširimo na G, protislovje. □

Oglejmo si sedaj graf G^*. Le-ta je kubičen in kot tak mora vsebovati neko 5-lice. Lic manjše dolžine ne vsebuje, zaradi reducibilnosti in predpostavke o notranjem obsegu grafa G. Nadalje vidimo, da prav tako ne more vsebovati 5-lica. V grafu G je 5-lice iz G^* reducibilno, kajti vsaj dve povezavi morata biti subdividirani, zaradi predpostavke o notranjem obsegu G, takšna konfiguracija pa je po lemi 6.11 reducibilna. Graf G kot minimalni protiprimer izreka 6.10 ne obstaja in izrek drži. □

6.4 Injektivna Δ-barvanja ravninskih grafov

V naslednjih razdelkih barvanje subkubičnih ravninskih grafov posplošimo na barvanje poljubnih ravninskih grafov z navzdol omejenim notranjim obsegom.

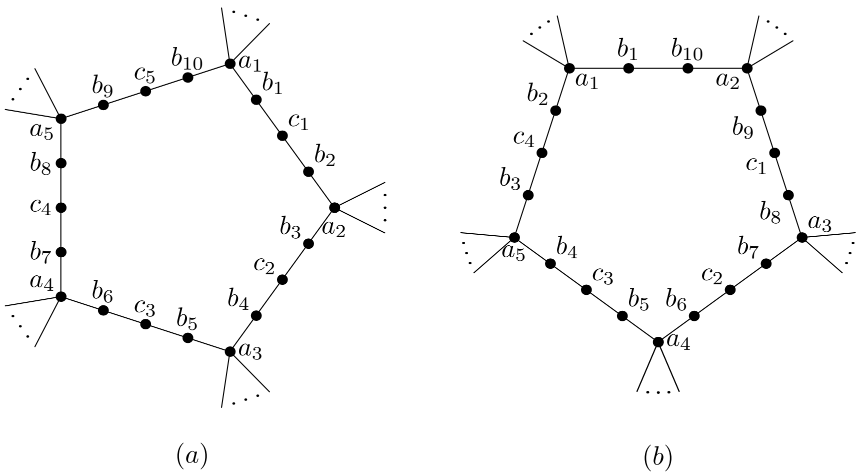
Izrek 6.12 *Vsak ravninski graf G z maksimalno stopnjo $\Delta(G) \geq 4$ in notranjim obsegom $g(G) \geq 19$ je injektivno Δ-obarvljiv.*

Dokaz. Predpostavimo, da izrek ne drži. Potem obstaja ravninski graf G stopnje vsaj 4 in notranjim obsegom vsaj 19, ki je minimalni protiprimer.

Reducibilne konfiguracije. Oglejmo si nekaj reducibilnih konfiguracij injektivnega Δ-barvanja. Dokazali smo že, da sta 1-vozlišče in 4-nit reducibilni v subkubičnih grafih z notranjim obsegom vsaj 19. Podobno lahko dokažemo njuno reducibilnost v grafih višje stopnje.

Pri dokazovanju izreka bomo poleg zgoraj omenjenih upoštevali še dve reducibilni konfiguraciji. V tem in v naslednjih razdelkih bomo na slikah uporabljali posebno označevanje vozlišč, ki imajo stopnjo vsaj 3. Njihove morebitne povezave označimo z dvema polpovezavama in tremi pikami med njima.

Lema 6.13 *Konfiguraciji na sliki 6.7 sta reducibilni, pri predpostavki, da je vsaj eno izmed vozlišč* a_1*,* a_2*,* a_3*,* a_4 *in* a_5 *konfiguracije* (b) *stopnje kvečjemu* $\Delta - 1$*.*



Slika 6.7: Reducibilni konfiguraciji za injektivno Δ-barvanje

Dokaz. Reducibilnost vsake izmed zgornjih konfiguracij bomo ponovno dokazali posebej.

(a) Naj bo H podgraf grafa G, izomorfen konfiguraciji na sliki 6.7(a). Iz minimalnosti G sledi, da obstaja injektivno barvanje c grafa $G - (H - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$. Potem imajo vozlišča $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ vsaj dve prosti barvi, medtem ko imajo vozlišča $c_1, c_2, \ldots, c_5$ po $\Delta - 2$ barv na voljo.

Naj bo $K^{(2)}$ graf dobljen iz grafa $H^{(2)}$ z odstranitvijo vozlišč $a_1, a_2, \ldots, a_5$. Barvanje vozlišč grafa $K^{(2)}$ z barvami, ki so jim na voljo glede na zgornjo ugotovitev, je natanko injektivno barvanje grafa $H - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5$, ki tudi poda razširitev barvanja c na graf G. Graf $K^{(2)}$ ima šest komponent. Pet izmed njih je trivialnih, sestavljenih zgolj iz enega vozlišča, ki ima $\Delta - 2$ barv na voljo. Zadnja komponenta je 10-cikel $b_1 b_2 \cdots b_{10} b_1$, v katerem ima vsako izmed vozlišč vsaj dve prosti barvi, zato je obarvljiv. S tem razširimo c na graf G in dobimo reducibilnost H.

(b) Dokaz reducibilnosti konfiguracije na sliki 6.7(b) je podoben kot v točki (a). Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je vozlišče a_1 stopnje $\Delta - 1$. Naj bo H podgraf grafa G in izomorfen konfiguraciji na sliki 6.7(b). Iz minimalnosti G sledi, da obstaja injektivno barvanje c grafa $G - (H - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$.

Neobarvana vozlišča so b_1, b_2, ..., b_{10} in c_1, c_2, c_3, c_4. Vozlišče b_{10} ima vsaj eno prosto barvo, b_2 ima tri, vsa druga vozlišča b_i, kjer je $i \in \{1, 3, 4, \ldots, 9\}$ pa imajo dve barvi na voljo. Vsako izmed vozlišč c_1, ..., c_4 ima $\Delta - 2$ prostih barv. Definirajmo graf $K^{(2)} := H^{(2)} - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5$ in ga obarvajmo. Ima pet komponent, štiri so izolirana vozlišča c_1, c_2, c_3 ter c_4, ki imajo vsako po $\Delta - 2$ prostih barv, torej jih seveda lahko obarvamo. Peta komponenta je 10-pot $b_1 b_2 \cdots b_{10}$. V njej najprej pobarvamo b_{10}, ker ima le eno barvo na razpolago, nato pa pobarvamo vozlišča b_9, b_8 do b_1 v tem vrstnem redu. Ker je $K^{(2)}$ obarvljiv, sledi, da je konfiguracija reducibilna.

Dokaz primerov, kjer so stopnje kvečjemu $\Delta - 1$ vozlišča a_2,..., a_5 je podoben. Za primer $d(a_2) \leq \Delta - 1$ je dokaz simetričen zgornjemu. Pri ostalih treh imata vozlišči b_1 in b_{10} vsaj eno prosto barvo, ostala imajo po dve. Vedno pa med njimi obstajata tudi dva soseda b_j in b_{j+1}, $j \in \{2, 3, \ldots, 8\}$, ki imata celo po tri proste barve. Tako najprej pobarvamo vozlišča b_1, b_2,..., b_{j-1}, nato vozlišča b_{10}, b_9,..., b_{j+2} in na koncu še vozlišči b_j ter b_{j+1}. □

Pravilo prenosa naboja. Pri prenašanju naboja bomo uporabili naslednje pravilo:

Pravilo P1: *Vsako k-vozlišče v G^*, kjer je $k \geq 4$, pošlje $\frac{1}{5}$ vsakemu sosednjemu 5-licu.*

Končni naboj. Zaradi predpostavke o notranjem obsegu grafa G ter reducibilnosti 4-niti, ima G^* le $\geq$5-lica. Naboj bomo prenesli tako, da bodo končni naboji vseh lic ter vozlišč nenegativni.

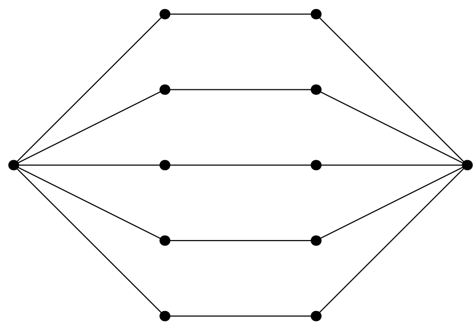
Iz leme 6.13 sledi, da je vsako vozlišče 5-lica v G^* stopnje $\Delta \geq 4$ v G in zato tudi v G^*. Po uporabi pravila $P1$, vsako 5-lice f v G^* dobi $5 \cdot \frac{1}{5}$ naboja, zato je naboj vsakega lica f nenegativen.

Pokazati moramo le še, da niti vozlišča nimajo negativnega naboja po uporabi P1. Začetni naboj vozlišč je nenegativen, ker je minimalna stopnja vozlišča v G^* enaka 3. Po uporabi pravila P1, je končni naboj $\geq$4-vozlišča v vsaj

$$\mathrm{ch}_0(v) - \frac{1}{5}d(v) = 2d(v) - 6 - \frac{1}{5}d(v) = \frac{9}{5}d(v) - 6 > 0.$$

Vsa lica in vozlišča imajo tako nenegativen končni naboj, protislovje. □

Ravninskih grafov, ki jim Δ barv ne zadošča za injektivno barvanje, je precej. Na sliki 6.8 je predstavljen graf s $\chi_i = \Delta + 1$.



Slika 6.8: Ravninski graf s $\chi_i = \Delta + 1$

6.5 Injektivna $(\Delta + 1)$-barvanja ravninskih grafov

V tem razdelku dokažemo izrek o injektivnem $(\Delta + 1)$-barvanju ravninskih grafov.

Izrek 6.14 *Vsak ravninski graf G z maksimalno stopnjo $\Delta(G) \geq 4$ in notranjim obsegom $g(G) \geq 10$ je injektivno $(\Delta + 1)$-obarvljiv.*

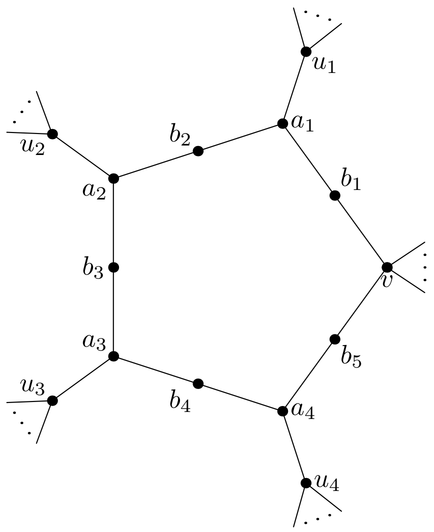
Dokaz. Recimo, da izrek ne drži. Naj bo ravninski graf G z maksimalno stopnjo vsaj 4 in notranjim obsegom vsaj 10 minimalni protiprimer. Pokazali bomo, da G ne obstaja.

Reducibilne konfiguracije. Dokaz začnemo s predstavitvijo nekaj reducibilnih konfiguracij.

Lema 6.15 *Naslednje konfiguracije so reducibilne:*

(*a*) 1-*vozlišče in* 2-*nit;*

(*b*) *konfiguracija na sliki 6.9, če ima eno od vozlišč* u_1*,* u_2*,* u_3*,* u_4 *stopnjo* $\leq \Delta - 1$*.*



Slika 6.9: Reducibilna konfiguracija za injektivno $(\Delta + 1)$-barvanje

Dokaz. (*a*) Ker je 1-vozlišče reducibilno za injektivno Δ-barvanje, je seveda tudi za injektivno $(\Delta + 1)$-barvanje.

Oglejmo si sedaj 2-nit t. Vsako vozlišče v t ima kvečjemu Δ sosedov na razdalji dva, torej natanko eno prosto barvo. Vozlišči niti t nimata skupnega soseda, zato ju lahko obarvamo z enako barvo, če je potrebno. Sledi, da je 2-nit reducibilna.

(*b*) Naj bo H podgraf grafa G, izomorfen konfiguraciji na sliki 6.9(*b*). Vozlišča H označimo kot na sliki. Pri dokazovanju reducibilnosti bomo ločili dva primera. V prvem predpostavimo, da je eno izmed vozlišč u_1 in u_4 stopnje kvečjemu $\Delta - 1$, v drugem pa, da je stopnje kvečjemu $\Delta - 1$ eno izmed vozlišč u_2 in u_3. V obeh primerih iz minimalnosti grafa G sledi, da obstaja injektivno $(\Delta + 1)$-barvanje c grafa $G - (H - v - u_1 - u_2 - u_3 - u_4)$. V vsakem izmed primerov zato preostanejo neobarvana le vozlišča a_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, ter b_j, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Oglejmo si prvi primer. Predpostavimo, da je u_1 stopnje kvečjemu $\Delta - 1$ (simetrično za u_4). Opazimo, da imata vozlišči b_1 in b_5 vsaj dve prosti barvi, b_2, b_3 in b_4 pa vsaj $\Delta - 1$ prostih barv. Definirajmo graf $K^{(2)} := H^{(2)} - v - u_1 - u_2 - u_3 - u_4$. Graf $K^{(2)}$ ima dve komponenti. Prva je 5-cikel $b_1 b_2 \cdots b_5 b_1$, ki je trivialno obarvljiv. Druga komponenta je 4-pot $a_1 a_2 a_3 a_4$, kjer ima vozlišče a_4 le eno prosto barvo, vsa preostala pa vsaj dve. Takšna pot je prav tako enostavno obarvljiva, zato barvanje c lahko razširimo na graf G.

V drugem primeru predpostavimo, da je vozlišče u_2 stopnje kvečjemu $\Delta - 1$ (za u_3 je simetrično). Graf $K^{(2)}$ naj bo definiran kot v prejšnjem primeru. Vsako izmed vozlišč b_1, b_2,. . . ,b_5 ima enako število prostih barv kot v prvem primeru, zato je prva komponenta $K^{(2)}$ spet obarvljiva. Vozlišči a_1 in a_4 imata eno prosto barvo, a_2 pa ima tri in s tem omogoča barvanje druge komponente. Torej, $K^{(2)}$ je obarvljiv, zato je H reducibilna. □

Pravili prenosa naboja. Naboj bomo prenašali z uporabo naslednjih pravil:

Pravilo P1: *Vsako* $\geq$*4-vozlišče grafa* G^* *pošlje* $\frac{1}{2}$ *naboja vsakemu sosednjemu* 5*-licu.*

Pravilo P2: *Naj bo* v *vozlišče stopnje* Δ *in naj bo* 3*-vozlišče* u *njegov sosed v* G*. Če* u *leži na* 5*-licu* f *tako, da* v *in* f *nista sosednja,* v *pošlje* $\frac{1}{4}$ *licu* f*.*

Končni naboj. Pokazali bomo, da je po uporabi pravil P1 in P2 naboj grafa G^* nenegativen. Začnimo ponovno z lici. Začetni naboj je negativen le za 5-lica. Vsako 5-lice v G^* vsebuje ali dve $\geq$ 4-vozlišči ali vsaj štiri 3-vozlišča, ki imajo za sosede vozlišča u_i stopnje Δ, kjer je vsak u_i enakega tipa kot vozlišče v iz pravila P2. V nasprotnem primeru je 5-lice reducibilno po lemi 6.15. V prvem primeru vsako izmed $\geq$4-vozlišč pošlje $\frac{1}{2}$ po pravilu P1 tako, da 5-lice prejme 1. V drugem primeru vsako vozlišče u_i pošlje $\frac{1}{4}$ po pravilu P2. Takšna vozlišča so okrog 5-lica vsaj štiri, zato spet prejme 1 in ima končni naboj nenegativen.

Preostane dokazati, da imajo vsa vozlišča nenegativen končni naboj. Vozlišča stopnje 3 imajo nenegativen naboj, ker jim ga ne spreminjamo. Oglejmo si vozlišča, ki pošiljajo naboj po pravilih P1 ter P2.

Naj bo v k-vozlišče, $4 \leq k < \Delta$ v G^*. Naboj lahko pošlje le po pravilu P1, ima pa k sosednjih 5-lic, zato pošlje kvečjemu $\frac{k}{2}$ naboja in njegov končni naboj je nenegativen.

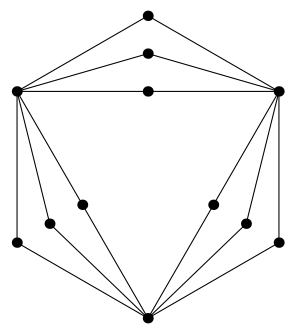
Preostanejo še vozlišča stopnje Δ. Naboj lahko pošiljajo po obeh pravilih. Naj bo v Δ-vozlišče in naj ima k sosednjih 5-lic. Opazimo, da, če obstaja 3-vozlišče u v G, ki je sosed v, povezava uv ni sosednja 5-licu v G^*, zaradi predpostavke o notranjem obsegu. Torej je pravilo P2 uporabljeno kvečjemu $\Delta - 2k$-krat na v. Končni naboj v je tako

$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \mathrm{ch}_0(v) - \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}(\Delta - 2k) = \frac{7}{4}\Delta - 6 > 0.$$

Končni naboj G^* je s tem pozitiven, protislovje. □

6.6 Injektivna $(\Delta + 4)$-barvanja ravninskih grafov

V tem razdelku pokažemo, da so $\Delta + 4$ barve dovolj za injektivno barvanje ravninskega grafa z notranjim obsegom vsaj 5 in z dovolj veliko maksimalno stopnjo Δ. Predpostavka o notranjem obsegu je potrebna, saj obstajajo ravninski grafi z notranjim obsegom 4, ki za injektivno barvanje potrebujejo natanko $\frac{3}{2}\Delta$ barv. Primer takšnega grafa je Δ-regularni Shannonov trikotnik, ki ima vsako povezavo subdividirano in sodo Δ.



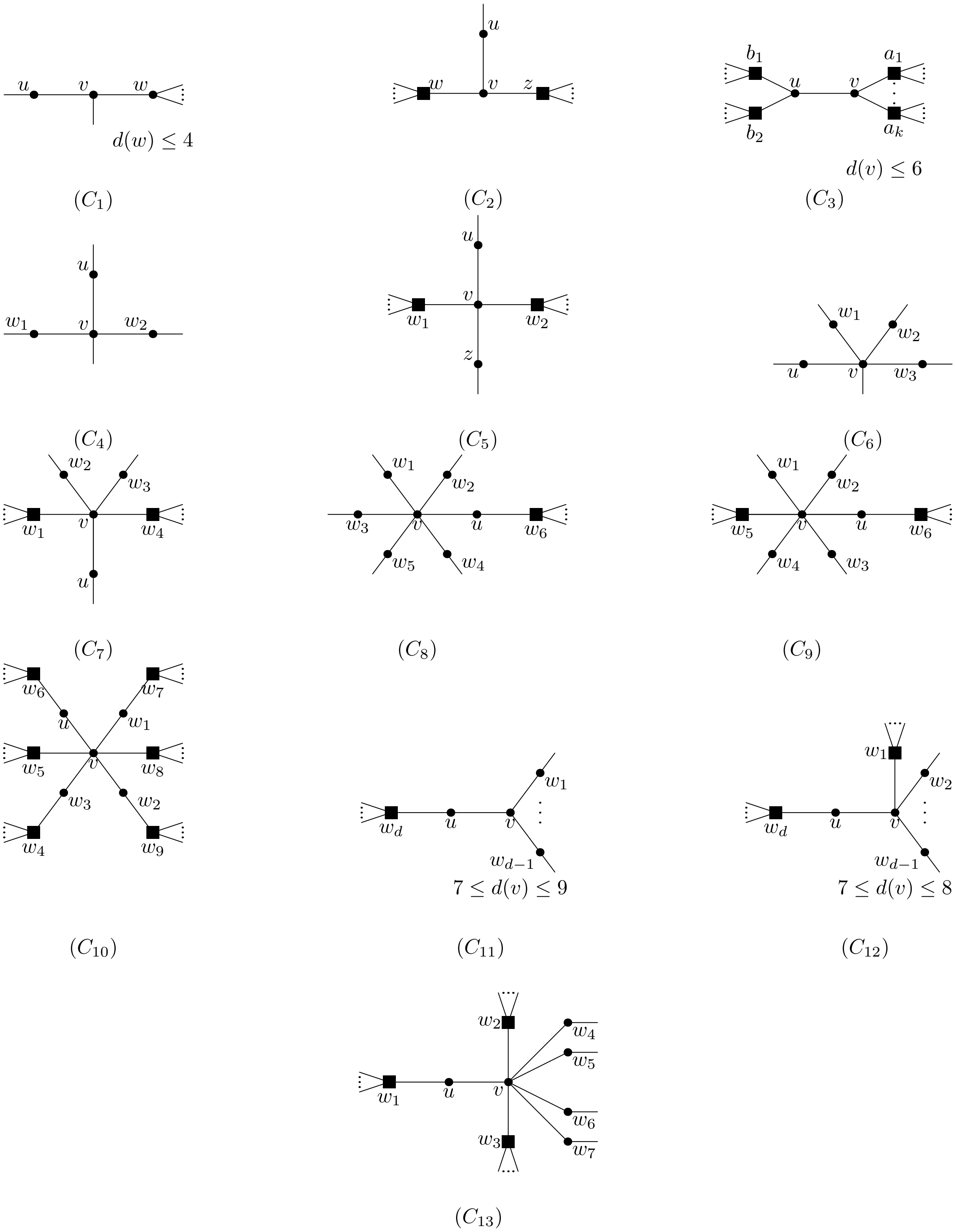
Slika 6.10: Shannonov trikotnik s subdividiranimi povezavami in $\Delta = 6$

Izrek 6.16 *Vsak ravninski graf G z notranjim obsegom $g(G) \geq 5$ in maksimalno stopnjo $\Delta(G) \geq 439$ je injektivno $(\Delta + 4)$-obarvljiv.*

Dokaz. Izrek dokazujemo s protislovjem. Naj bo torej ravninski graf G minimalni protiprimer. Naj bo $\varepsilon \leq \frac{1}{15}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, in $b = \lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil \geq 90$. Če ima vozlišče stopnjo $\geq b$, ga imenujemo *veliko*, sicer je *majhno*.

Reducibilne konfiguracije. V prejšnjih razdelkih smo dokazali, da sta 1-vozlišče ter 2-nit reducibilni za injektivno $(\Delta+1)$-barvanje, zato sta seveda tudi za $(\Delta+4)$-barvanje. V dokazu uporabimo tudi reducibilne konfiguracije s slike 6.11. Majhna vozlišča so narisana kot kvadrati, krogi pa označujejo vozlišča, katerih dejanska stopnja je prikazana na sliki. Naj poudarimo, da konfiguracije na sliki 6.11 niso fiksirane, temveč prikazujejo zgolj tipe soseščin vozlišča v. Na primer, v konfiguraciji (C_4) sta poziciji vozlišč w_1 in w_2 lahko zamenjani v vložitvi na graf G.

Lema 6.17 *Konfiguracije na sliki 6.11 so reducibilne.*



Slika 6.11: Reducibilne konfiguracije za injektivno $(\Delta + 4)$-barvanje

Dokaz. Reducibilnost vsake izmed konfiguracij bomo dokazali posebej. Za vsako domnevamo, da je vsebovana v minimalnem protiprimeru G. Zaradi minimalnosti grafa G predpostavimo, da obstaja barvanje c grafa G/uv, kjer je uv povezava v vsaki izmed konfiguracij na sliki 6.11. Povezavo uv po obarvanju preostanka ponovno raztegnemo in nato razširimo barvanje c na G s tem, da prebarvamo vozlišči u in v. Na ta način dobimo reducibilnost konfiguracije.

Za vsako izmed neobarvanih vozlišč $x \in \{u, v\}$ definiramo seznam prostih barv $L(x)$. Naj bo $l(x) = |L(x)|$ število prostih barv vozlišča x. Spodnjo mejo za število prostih barv vozlišča dobimo tako, da od $\Delta + 4$ odštejemo število vseh možnih sosedov na razdalji dva.

Ker je zgoraj opisani postopek enak v dokazih za vse konfiguracije, bomo pri vsaki podali le spodnje meje za $l(u)$ ter $l(v)$. Ker vozlišči u in v nimata skupnega soseda, je dovolj, da ohranita vsaj eno prosto barvo.

(C_1) $l(v) \geq 1$ in $l(u) \geq 3$;

(C_2) $l(v) \geq \Delta - 2b + 7$ in $l(u) \geq 3$;

(C_3) $l(v) \geq \Delta - 5b + 12$ in $l(u) \geq \Delta - 2b + 3$;

(C_4) $l(v) \geq 2$ in $l(u) \geq 2$;

(C_5) $l(v) \geq \Delta - 2b + 6$ in $l(u) \geq 2$;

(C_6) $l(v) \geq 1$ in $l(u) \geq 1$;

(C_7) $l(v) \geq \Delta - 2b + 5$ in $l(u) \geq 1$;

(C_8) $l(v) \geq \Delta - 2$ in $l(u) \geq \Delta - b + 1$;

(C_9) $l(v) \geq \Delta - b + 1$ in $l(u) \geq \Delta - b + 1$;

(C_{10}) $l(v) \geq \Delta - 2b + 4$ in $l(u) \geq \Delta - b + 1$;

(C_{11}) $l(v) \geq \Delta - 5$ in $l(u) \geq \Delta - b - 2$;

(C_{12}) $l(v) \geq \Delta - b - 1$ in $l(u) \geq \Delta - b - 1$;

(C_{13}) $l(v) \geq \Delta - 2b + 3$ in $l(u) \geq \Delta - b$.

Vozlišči u in v imata v vseh konfiguracijah zadosti prostih barv, če je $\Delta > 5b - 12 \geq 438$.$\square$

Začetni naboj. Začetni naboj vozlišč in lic grafa G v tem razdelku bo definiran drugače kot v prejšnjih. Za vsako vozlišče $v \in V(G)$ naj bo začetni naboj $\mathrm{ch}_0(v) = \frac{9}{5}d(v) - 6$, vsako lice $f \in F(G)$ pa naj ima naboj $\mathrm{ch}_0(f) = \frac{6}{5}r(f) - 6$. Z uporabo Eulerjeve formule, podobno kot v prvem razdelku, vidimo, da je skupni naboj enak -12.

Pravila prenosa naboja. Z naslednjimi pravili za prenos naboja bomo ustvarili nenegativen naboj vsakemu vozlišču in licu.

Pravilo P1: *Vsako* $\geq$3*-vozlišče pošlje* $\frac{6}{5}$ *vsem sosednjim* 2*-vozliščem.*

Pravilo P2: *Veliko vozlišče* v *pošlje* $\frac{9}{5} - \varepsilon$ *vsakemu sosednjemu* 3*-vozlišču* w*, če ima* w *sosednje* 2*-vozlišče. V primeru, da sta preostala soseda vozlišča* w *stopnje* $\geq$3*,* v *pošlje* $\frac{3}{5}$ *vozlišču* w*.*

Pravilo P3: *Majhno vozlišče* v *stopnje* ≥ 5 *pošlje* ε *vsakemu sosednjemu* 3*-vozlišču* w*, če sta preostala soseda* w 2*-vozlišče in veliko vozlišče.*

Pravilo P4: *Recimo, da ima veliko vozlišče* v *sosednje vozlišče* w *stopnje* 3, 4, 5 *ali* 6*. Potem* v *pošlje* $\frac{1}{5}$ *vsakemu sosedu z vozlišča* w*, ki ima stopnjo* 3 *in ima vse preostale sosede majhne.*

Pravilo P5: *Majhno vozlišče stopnje* $\geq$7 *pošlje* $\frac{1}{5}$ *vsakemu sosednjemu* 3*-vozlišču* w*, če sta preostala soseda* w *majhna in stopnje* $\geq$3*.*

Pravilo P6: *Veliko vozlišče pošlje* $\frac{6}{5}$ *vsakemu sosednjemu* 4*-vozlišču, ki ima vsaj dve sosednji* 2*-vozlišči.*

Pravilo P7: *Veliko vozlišče pošlje* $\frac{3}{5} + 2\varepsilon$ *vsakemu sosednjemu* 5*-vozlišču.*

Pravilo P8: *Veliko vozlišče pošlje* 2ε *vsakemu sosednjemu* 6*-vozlišču.*

Pravilo P9: *Veliko vozlišče pošlje* $\frac{6}{5}$ *vsakemu sosednjemu* 6*-vozlišču* w*, če so vsi drugi sosedi* w 2*-vozlišča.*

Pravilo P10: *Recimo, da ima veliko vozlišče* v *sosednje* 2*-vozlišče* w*. Potem,* v *pošlje* $\frac{2}{5}$

drugemu sosedu w, če je le-ta stopnje 6*,* 7*,* 8 *ali* 9.

Pravilo P11: *Veliko vozlišče pošlje $\frac{4}{5}$ vsakemu sosednjemu* 7*- in* 8*-vozlišču.*

Končni naboj. Naj bo v d-vozlišče grafa G. Oglejmo si končni naboj v glede na d:

- *v je* 2*-vozlišče.* V tem primeru nima sosednjih 2-vozlišč, ker je 2-nit reducibilna. Torej v naboja ne pošilja. Prejme ga $\frac{6}{5}$ od vsakega soseda po pravilu P1. Končni naboj v je zato
$$\mathrm{ch}^*(v) = -\frac{12}{5} + 2 \cdot \frac{6}{5} = 0.$$
- *v je* 3*-vozlišče.* Začetni naboj 3-vozlišča v je $-\frac{3}{5}$. Za dokaz, da je njegov končni naboj nenegativen, si oglejmo nekaj podprimerov:

  (*i*) *v ima vsaj dve sosednji* 2*-vozlišči.* V tem primeru nastane reducibilna konfiguracija (C_1).

  (*ii*) *v ima eno sosednje* 2*-vozlišče.* Potem mu pošlje $\frac{6}{5}$ po pravilu P1. Označimo preostala soseda z x in y. Upoštevamo tri naslednje možnosti. Če je $d(x) \leq 4$ ali $d(y) \leq 4$, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_1). V primeru, ko sta x in y obe majhni, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_2). V nasprotnem primeru je eno izmed vozlišč veliko, drugo pa je stopnje vsaj 5. V tem primeru uporabimo pravilo P2 in morda tudi P3. Kakorkoli, končni naboj v je
$$\mathrm{ch}^*(v) \geq -\frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \left(\frac{9}{5} - \varepsilon\right) + \varepsilon = 0.$$

  (*ii*) *v nima sosednjega* 2*-vozlišča.* Če je v sosednje z nekim velikim vozliščem, uporabimo pravilo P2, tako v dobi $\frac{3}{5}$ in ima zato nenegativen končni naboj. Če v nima velikega soseda, lahko uporabimo eno izmed pravil P4 in P5, saj primer, ko pravil ne moremo upoštevati določa reducibilno konfiguracijo (C_3). Iz pravil prenosa naboja dobimo, da vsak izmed sosedov pošlje, oziroma je preko njega poslana natanko $\frac{1}{5}$ naboja, torej skupaj $\frac{3}{5}$. Tako je končni naboj v nenegativen.

- *v je* 4*-vozlišče.* Njegov začetni naboj je $\frac{6}{5}$. Oglejmo si ponovno primere razporeditev sosedov:

(*i*) *v ima vsaj tri sosednja 2-vozlišča.* Dobimo reducibilno konfiguracijo (C_4).

(*ii*) *v ima natanko dve sosednji 2-vozlišči.* Če ima tudi velikega soseda, uporabimo pravilo P6. V tem primeru veliko vozlišče pošlje $\frac{6}{5}$ naboja vozlišču v, le-ta pa ga pošlje $\frac{12}{5}$, zato je njegov končni naboj enak 0. Če v nima velikega soseda, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_5).

(*iii*) *v ima kvečjemu eno sosednje 2-vozlišče.* V tem primeru ima dovolj naboja, saj ga pošlje kvečjemu $\frac{6}{5}$.

- *v je 5-vozlišče.* Ima $\frac{15}{5}$ začetnega naboja, pošlje pa $\frac{6}{5}$ vsakemu sosednjemu 2-vozlišču po pravilu P1 in ε vsakemu sosednjemu 3-vozlišču po pravilu $P3$. Obravnavali bomo tri podprimere:

(*i*) *v ima vsaj štiri sosednja 2-vozlišča.* Ta primer določa reducibilno konfiguracijo (C_6).

(*ii*) *v ima natanko tri sosednja 2-vozlišča.* Če nima velikega soseda, je konfiguracija izomorfna (C_7). Če v ima velikega soseda, pa dobi $\frac{3}{5} + 2\varepsilon$ po pravilu P7, torej je končni naboj v enak:

$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \frac{15}{5} - 3 \cdot \frac{6}{5} - \varepsilon + \left(\frac{3}{5} + 2\varepsilon\right) = \varepsilon > 0.$$

(*iii*) *v ima kvečjemu dve sosednji 2-vozlišči.* Potem je njegov končni naboj enak

$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \frac{15}{5} - 2 \cdot \frac{6}{5} - 3\varepsilon \geq 0.$$

- *v je 6-vozlišče.* Začetni naboj je $\frac{24}{5}$. Vozlišče v pošlje naboj morebitnim sosednjim 2- in 3-vozliščem. Ločimo naslednje podprimere:

(*i*) *v ima šest sosednjih 2-vozlišč.* Če obstaja majhno vozlišče na razdalji dva, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_8). V nasprotnem primeru so vsa vozlišča na razdalji dva velika. Vsako izmed njih pošlje $\frac{2}{5}$ vozlišču v po pravilu P10, zato je končni naboj

$$\mathrm{ch}^*(v) = \frac{24}{5} - 6 \cdot \frac{6}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} = 0.$$

(*ii*) *v ima pet sosednjih 2-vozlišč.* Če ima v velikega soseda, prejme $\frac{6}{5}$ po P9, zato je končni naboj

$$\mathrm{ch}^*(v)=\frac{24}{5}-5\cdot\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=0.$$

Recimo, da v nima velikega soseda. Če ima v majhno vozlišče na razdalji dva z 2-vozliščem kot skupnim sosedom, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_9). Sicer dobimo konfiguracijo s petimi velikimi vozlišči na razdalji dva, ki imajo z v skupnega soseda stopnje 2. Vsako izmed velikih vozlišč pošlje $\frac{2}{5}$ vozlišču v po pravilu P10. Vozlišče v pošlje naboj, poleg sosednjemu 2-vozlišču, tudi vozliščem stopnje ≥ 3 po P3. Tako dobimo

$$\mathrm{ch}^*(v)=\frac{24}{5}-5\cdot\frac{6}{5}+5\cdot\frac{2}{5}-\varepsilon>0,$$

torej nenegativen končni naboj.

(iii) *v ima štiri sosednja 2-vozlišča.* Če ima v velikega soseda, je njegov končni naboj

$$\mathrm{ch}^*(v)\geq\frac{24}{5}-4\cdot\frac{6}{5}-2\varepsilon+2\varepsilon=0.$$

Če v nima velikega soseda, ima veliko vozlišče u na razdalji dva z 2-vozliščem kot skupnim sosedom, sicer dobimo reducibilno konfiguracijo (C_{10}). Vozlišče u pošlje $\frac{2}{5}$ naboja po P10, zato je končni naboj v

$$\mathrm{ch}^*(v)\geq\frac{24}{5}-4\cdot\frac{6}{5}-2\varepsilon+\frac{2}{5}\geq 0.$$

(iv) *v ima kvečjemu tri sosednja 2-vozlišča.* Končni naboj v je

$$\mathrm{ch}^*(v)=\frac{24}{5}-3\cdot\frac{6}{5}-3\varepsilon\geq 0.$$

- *v je d-vozlišče, kjer je $d\in\{7,8,9\}$.* V tem primeru v lahko pošilja naboj po pravilih P1, P3 in P5. Naj bo d_2 število sosednjih 2-vozlišč in d_3 število sosednjih 3-vozlišč. Ker je $d\geq d_2+d_3$, je končni naboj vozlišča v enak

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^*(v) &\geq \frac{9}{5}d-6-\frac{6}{5}d_2-\frac{1}{5}d_3\\
&\geq \frac{9}{5}d-6-\frac{6}{5}d_2-\frac{1}{5}\big(d-d_2\big)\\
&\geq \frac{8}{5}d-6-d_2.
\end{aligned}$$

Zato ima vozlišče v nenegativen končni naboj, če $d_2 \leq \frac{8}{5}d - 6$. Preostane preveriti še možnosti $d = 7$, kjer je $d_2 \in \{6, 7\}$, $d = 8$, kjer je $d_2 \in \{7, 8\}$ ter $d = 9$ z $d_2 = 9$.

(*i*) Naj bo $d = 7, 8$ ali 9 in $d_2 = d$. Če ima v majhnega soseda na razdalji dva, imamo reducibilno konfiguracijo (C_{11}). Sicer v dobi $\frac{2}{5}d$ naboja po pravilu $P10$ in ima zato dovolj naboja, da ga pošlje vsem sosednjim 2-vozliščem.

(*ii*) Naj bo sedaj $d = 7$ ali 8 in $d_2 = d - 1$. V tem primeru ima v sosednje ≥ 3-vozlišče w. Označimo vozlišča na razdalji dva, ki niso sosednja z w kot $w_1, w_2, \ldots, w_{d-1}$. Če sta w in neko vozlišče w_i majhna, dobimo reducibilno konfiguracijo (C_{12}). V primeru, da so vsa vozlišča w_i velika, uporabimo pravilo P10, da dobimo dovolj naboja. Če pa je tudi w veliko, je končni naboj v

$$\mathrm{ch}^*(v) = \frac{9}{5}d - \frac{6}{5}\big(d - 1\big) + \frac{4}{5} > 0.$$

- *v je majhno vozlišče stopnje ≥ 10.* Pošlje kvečjemu $\frac{6}{5}$ po vsaki povezavi, zato je končni naboj
$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \frac{9}{5}d - 6 - \frac{6}{5}d = \frac{3}{5}d - 6 \geq 0.$$

- *v je veliko vozlišče.* Pokazali bomo, da pošlje kvečjemu $\frac{9}{5} - \varepsilon$ po vsaki povezavi. Razvrstimo primere po stopnjah soseda w vozlišča v.

(*i*) *w je 2-vozlišče.* Po povezavi vw je po pravilih P1 in P10 prenešenega kvečjemu $\frac{8}{5}$ naboja.

(*ii*) *w je 3-vozlišče.* V tem primeru se uporabita le pravili P2 in P4. Če je w sosed nekega 2-vozlišča, ima preostali sosed stopnjo vsaj 5, sicer dobimo reducibilno konfiguracijo ($C1$), in pravilo P4 se ne uporabi (pravilo P2 pa pošlje kvečjemu $\frac{9}{5} - \varepsilon$ naboja). Če w nima soseda stopnje 2, pravili P2 in P4 skupaj porabita kvečjemu 1 naboja.

(*iii*) *w je 4-vozlišče.* Uporabita se le pravili P2 in P6. Skupaj po povezavi vw pošljeta kvečjemu $\frac{7}{5}$ naboja.

(*iv*) *w je 5-vozlišče.* Uporabita se lahko le pravili P2 in P7, ki skupaj pošljeta kvečjemu $\frac{8}{5} + 2\varepsilon \leq \frac{9}{5} - \varepsilon$ naboja.

(*v*) *w je 6-vozlišče.* Uporabijo se lahko pravila P4, P8 in P9, pri tem pa pravili P4 in P9 ne moreta pošiljati naboja po isti povezavi. Sledi, da je po vw poslanega kvečjemu $\frac{6}{5} + 2\varepsilon$ naboja.

(vi) w je ≥ 7-vozlišče. Uporabi se lahko le pravilo P11, ki pošlje kvečjemu $\frac{4}{5}$ naboja.

Vozlišče v po vsaki povezavi pošlje kvečjemu $\frac{9}{5}-\varepsilon$, torej skupaj kvečjemu $(\frac{9}{5}-\varepsilon)d$ naboja. Po uporabi pravil, je končni naboj v enak

$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \frac{9}{5}d - 6 - \left(\frac{9}{5}-\varepsilon\right)d = \varepsilon\, d - 6.$$

Ker ima v stopnjo $d \geq \lceil \frac{6}{\varepsilon} \rceil$, dobimo, da je njegov končni naboj nenegativen. $\square$

Na koncu omenimo še problem, ki je soroden hipotezi 4.12.

Problem 6.18 *Ali obstaja število M, da je vsak ravninski graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq M$ in notranjim obsegom vsaj 5 injektivno $(\Delta+1)$-obarvljiv?*

Zanimivo je tudi vprašanje ali lahko število barv znižamo na Δ, če povečamo omejitev za notranji obseg. Omenimo, da mora notranji obseg v tem primeru biti vsaj 7. Vzemimo namreč graf, ki ga sestavljata dve vozlišči povezani z Δ povezavami, in nato vse povezave subdividiramo z dvema vozliščema. Takšen graf ima $2\Delta+2$ vozlišči, notranji obseg enak 6 in injektivno kromatično število enako $\Delta+1$. Raspaud in Wang naj bi ta problem rešila z dokazom, da ima vsak ravninski graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 71$ in notranjim obsegom vsaj 7 injektivno Δ-barvanje [41].

Literatura

[1] H. L. Abbott, B. Zhou, On small faces in 4-critical graphs, *Ars Combin.* **32** (1991), 203–207.

[2] G. Agnarsson, M. M. Halldórsson, Coloring powers of planar graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **16** (2003), 651–662.

[3] N. Alon, M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica* **12** (1992), 125–134.

[4] K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429–490.

[5] K. Appel, W. Haken, J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491–567.

[6] P. Bella, D. Král', B. Mohar, K. Quittnerová, Labeling planar graphs with a condition at distance two, *In Proc. Eur. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05)*, Germany (2005), 41–44.

[7] A. A. Bertossi, M. A. Bonuccelli, Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks, *IEEE/ACM Trans. Network.* **3**(4), 441–449.

[8] D. Blanuša, Problem četeriju boja, *Math.-Fiz. Astr. Ser. II(1)* (1946), 31–42.

[9] O. V. Borodin, Criterion of chromaticity of a degree prescription (in Russian), *Abstracts of IV All-Union Conf. on Theoretical Cybernetics* (1977), 127–128.

[10] O. V. Borodin, Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings, *J. Graph Theory* **21**(2) (1996) 183–186.

[11] O. V. Borodin, H. J. Broersma, A. Glebov, J. van den Heuvel, *Stars and Bunches in Planar Graphs Part II: General Planar Graphs and Colourings*, Technical report, London School of Economics, London (2002).

[12] O. V. Borodin, A. Glebov, A. Raspaud, M. R. Salavatipour, Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable, *J. Combin. Theory Ser. B* **93** (2005), 303–311.

[13] O. V. Borodin, A. Raspaud, A sufficient condition for planar graphs to be 3-colorable, *J. Combin. Theory Ser. B* **88** (2003), 17–27.

[14] R. L. Brooks, On colouring the nodes of a network, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941), 194–197.

[15] T. Calamoneri, The $L(h, k)$-Labelling Problem: A Survey and Annotated Bibliography, *The Computer Journal* **49** (2006), 585–608.

[16] G. J. Chang, D. Kuo, The $L(2, 1)$-labeling problem on graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **9** (1996), 309–316.

[17] R. Diestel, Random graphs, *Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin (2000), 238–259.

[18] A. Doyon, G. Hahn, A. Raspaud, On the injective chromatic number of sparse graphs, manuscript (2005).

[19] Z. Dvořák, D. Král', P. Nejedlý, R. Škrekovski, Coloring squares of planar graphs with girth six, *European J. Combin.* **22** (2008), 838–849.

[20] Z. Dvořák, D. Král', P. Nejedlý, R. Škrekovski, Distance constrained labelings of planar graph with no short cycles, sprejeto v objavo v *Discrete Applied Math.*

[21] P. Erdős, Graph Theory and Probability, *Canad. J. Math* **11** (1959), 34–38.

[22] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, *In Proc. of the West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*, Congr. Numer. XXVI (1980), 125–157.

[23] J. P. Georges, D. W. Mauro, Generalized vertex labeling with a condition at distance two, Congr. Numer. 109 (1995), 141–159.

[24] D. Gonçalves, On the $L(p, q)$-labeling of graphs, *In Proc. Eur. Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05), Germany* (2005), 81–86.

[25] J. R. Griggs, R. K. Yeh, Labeling graphs with a condition at distance 2, *SIAM J. Discrete Math.* **5** (1992), 586–595.

[26] H. Grötzsch, Ein Dreifarbensatz fűr dreikreisfreie Netze auf der Kugel, *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle Wittenberg, Math. Natur.* **8** (1959), 109–120.

[27] G. Hahn, J. Kratochvíl, J. Širáň, D. Sotteau, On the injective chromatic number of graphs, *Discrete Math.* **256** (2002), 179–192.

[28] G. Hahn, A. Raspaud, W. Wang, On the injective coloring of K_4-minor free graphs, manuscript (2006).

[29] J. van den Heuvel, S. McGuiness, Colouring the square of planar graphs, *J. Graph Theory* **42** (2003), 110–124.

[30] T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, John-Wiley and Sons, New York (1995).

[31] K. Jonas, Graph Coloring Analogues with a Condition at Distance Two: $L(2,1)$-Labelings and List λ-Labelings, PhD Thesis, University of South Carolina, Columbia (1993).

[32] A. V. Kostochka, M. Stiebitz, B. Wirth, The colour theorems of Brooks and Gallai extended, *Discrete Math.* **162** (1996), 299–303.

[33] D. Král', R. Škrekovski, A theorem about the channel assignment, *SIAM J. Discrete Math.* **16**(3) (2003), 426–437.

[34] K. Kuratowski, Sur le probléme des courbes gauches en topologie, *Fund Math.* **15** (1930), 271–283.

[35] K. Lih, W. Wang, Coloring the square of an outerplanar graph, *Taiwanese journal of mathematics*, **10**(4) (2002), 1015–1023.

[36] B. Lužar, R. Škrekovski, M. Tancer, Injective colorings of planar graphs with few colors, sprejeto v objavo v *Discrete Mathematics*, 14 strani.

[37] M. Mirzakhani, A small non-4-choosable planar graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **17** (1996), 15–18.

[38] M. Molloy, M. R. Salavatipour, A bound on the chromatic number of the square of a planar graph, *J. Combin. Theory Ser. B* **94**(2) (2005), 189–213.

[39] M. Molloy, M. R. Salavatipour, Frequency channel assignment on planar networks, R. H. Möhring, R. Raman, eds., *Proc. ESA'02, LNCS* **2461** (2002), 736–747.

[40] M. Montassier, A. Raspaud, A note on 2-facial coloring of plane graphs, *Technical Report RR–1341–05*, LaBRI (2005).

[41] A. Raspaud, Osebna korespondenca (2006).

[42] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas, A New Proof of the Four Colour Theorem. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **2** (1996), 17–25.

[43] D. P. Sanders, Y. Zhao, A note on the three color problem, *Graphs Combin.* **11** (1995), 91–94.

[44] C. Thomassen, 3-list-coloring planar graphs of girth 5, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 101–107.

[45] C. Thomassen, Every planar graph is 5-choosable, *J. Combin. Theory Ser. B* **62** (1994), 180–181.

[46] C. Thomassen, The square of a planar cubic graph is 7-colorable, manuscript (2006).

[47] V. G. Vizing, Coloring the vertices of a graph in prescribed colors, *Metody Diskret. Analiz.* **29** (1976), 3–10.

[48] M. Voigt, List colourings of planar graphs, *Discrete Math.* **120** (1993), 215–219.

[49] K. Wagner, Ű́ber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.* **114** (1937), 570–590.

[50] W. F. Wang, K. W. Lih, Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two, *SIAM J. Discrete Math.* **17**(2) (2004), 264–275.

[51] G. Wegner, Graphs with given diameter and a coloring problem, *Techical Report*, University of Dortmund, Germany (1977).

[52] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma (1997).