UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika - uporabna smer (UNI)

Matej Mislej

HOMOMORFIZMI RAVNINSKIH GRAFOV Z VELIKIM NOTRANJIM OBSEGOM

Diplomsko delo

Ljubljana, 2006

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju doc. dr. Ristetu Škrekovskemu za vso strokovno pomoč pri pisanju diplome in ker je bil, kljub natrpanemu urniku, vedno na voljo za moja vprašanja. Zahvala gre tudi domačim za vso podporo.

Kazalo

Program dela

V delu naj bodo predstavljeni osnovni rezultati homomorfizmov in barvanja, ki se dajo predstaviti kot homomorfizmi grafov. Posebej naj bodo obdelani krožno barvanje ter nikjer-ničelni krožni pretoki. Poudarek naj bo na krožnem kromatičnem številu ravninskih grafov z velikim notranjim obsegom. Kot osnovna literatura naj služi članek [6].

Mentor: doc. dr. Riste Škrekovski

Osnovna literatura:

[6] O. V. Borodin, S.-J. Kim, A. V. Kostochka, D. B. West. Homomorphisms from sparse graphs with large girth. *J. Combin. Theory Ser. B* **90**(1) (2004), 147–159.

Ljubljana, junij 2006

Povzetek

V delu so podrobneje predstavljeni homomorfizmi grafov in uporaba le-teh pri barvanju grafov ter osnovne lastnosti krožnega kromatičnega števila grafa. Obdelani so tudi krožni pretoki in njihova povezava s krožnim barvanjem, predstavljena pa so tudi nekatera druga grafovska barvanja. Ključni del diplomskega dela predstavlja izrek, ki pravi, da ima ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$ krožno kromatično število kvečjemu $2+\frac{1}{t}$, kar je bolje od dosedanjih rezultatov. Dobljeni rezultat sledi iz splošnejšega dognanja, v katerem grafe homomorfno preslikujemo v posebne slike, pri čemer imamo dan notranji obseg grafa in največjo povprečno stopnjo vozlišč. V ostalih primerih uporabe se dotaknemo še deljenega, orientiranega in acikličnega barvanja ter homomorfizmov v mešane grafe z obarvanimi povezavami.

Abstract

This paper shows in detail how graph homomorphisms can be used to present the colouring of graphs. It also gives a close look at circular chromatic number of a graph and its basic properties. Circular flows and their connection with circular colouring are also mentioned, as well as some of the other variants of colouring. The main part of the paper represents a theorem which says that a planar graph with girth at least $\frac{20t-2}{3}$ has circular chromatic number at most $2+\frac{1}{t}$, improving earlier result. This follows from a general result establishing homomorphisms into special targets for graphs with given girth and given maximum average degree. Other applications concern fractional, oriented and acyclic colouring and homomorphisms into mixed graphs with colored edges.

Math. Subj. Class. (2000): 05C15

Ključne besede: barvanje grafa, homomorfizem grafa, ravninski graf, krožno barvanje, orientirano barvanje, prenašanje naboja, t-lepi grafi

Keywords: graph coloring, graph homomorphism, planar graph, circular coloring, oriented coloring, discharging, t-nice graphs

1 Homomorfizmi grafov

1.1 Osnovne definicije

Graf je urejen par (V, E), kjer je V množica *vozlišč* ali *točk*, E pa množica *povezav* grafa. Množico vozlišč grafa $G = (V, E)$ označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. *Red* grafa G je definiran kot število vozlišč grafa G.

Vsako povezavo $e \in E(G)$ lahko zapišemo kot neurejen par $\{x, y\}$ njenih krajišč (v tem primeru sta to $x, y \in V(G)$). Vozlišči x in y sta *sosednji* (oz. sta *soseda*), če je $\{x, y\}$ povezava v grafu G. Povezavi $e \neq f$ sta *sosednji*, če imata skupno krajišče. Povezavi, ki ima obe krajišči v istem vozlišču, rečemo *zanka*. *Enostavni* grafi so grafi brez zank in večkratnih povezav med dvema vozliščema (oz. vzporednih povezav). Grafu, kjer dovoljujemo večkratne povezave rečemo *multigraf*. Če so v grafu G vsa vozlišča med seboj sosednja, potem je G *poln* graf. Poln graf na n vozliščih označimo s K_n. *Stopnja* vozlišča v je število povezav, ki imajo za krajišče vozlišče v. Označimo jo z $d(v)$. V primeru enostavnih grafov je stopnja vozlišča v enaka številu njegovih sosedov. *Izolirano vozlišče* je vozlišče s stopnjo 0. Z $\delta_G := \min\{d(v); v \in V(G)\}$ označimo *minimalno stopnjo* grafa G, z $\Delta_G := \max\{d(v); v \in V(G)\}$ pa *maksimalno stopnjo* grafa G. Če imajo vsa vozlišča grafa G stopnjo r, potem je G r-regularen graf. Označimo z $d(G) = \sum_{x \in V(G)} d_G(x)$. V vsakem grafu je $d(G) = 2|E(G)|$, to pa zato, ker pri vsoti stopenj $d(G)$ vsako povezavo štejemo dvakrat (vsaka povezava ima namreč dve krajišči). Iz zgornje enačbe se lahko hitro prepričamo, da je v grafu vedno lahko le sodo vozlišč lihe stopnje.

Graf G je *r-delen*, če lahko množico $V(G)$ razbijemo na r disjunktnih podmnožic, tako da ima vsaka povezava $e \in E(G)$ krajišči v različnih podmnožicah. Če je $r = 2$, pravimo grafu G *dvodelen* graf.

Komplement G^C grafa G ima ista vozlišča kot G, pri čemer sta vozlišči u in v sosednji v G^C, če in samo če nista sosednji v G. *Spoj* disjunktnih grafov G in H je graf, ki ga dobimo, če povežemo vsako vozlišče grafa G z vsakim vozliščem grafa H. Spoj grafov G in H označimo z $G + H$. Bolj na kratko ga definiramo takole: $G + H = (G^C \cup H^C)^C$.

Graf je *ravninski*, če ga lahko v ravnini narišemo tako, da se njegove povezave sekajo le v skupnih krajiščih. Če je graf narisan na tak način, potem vsakemu območju, ki ga omejujejo povezave tega grafa, rečemo *lice*. Natanko eno lice je neomejeno. Pravimo mu *zunanje* ali *neomejeno lice*. Dve lici v ravninskem grafu sta *sosednji*, če imata skupno povezavo. *Dualni graf* ravninskega grafa G je graf G^*, v katerem vozlišča predstavljajo lica grafa G, pri čemer sta dve vozlišči v G^* sosednji, če in samo če sta sosednji tudi lici v grafu G, ki ustrezata tema dvema vozliščema. Graf je *zunanje ravninski*, če ga lahko narišemo tako, da so vsa vozlišča na zunanjem licu.

Graf je *povezan*, če za poljubni vozlišči obstaja pot med njima, kjer je pot v grafu tako zaporedje različnih vozlišč $v_0, v_1, \ldots, v_k$, da sta v_{i-1} in v_i sosednji za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. *Komponenta* grafa G je maksimalen povezan podgraf grafa G. Vozlišče $x \in V(G)$ je *prerezno vozlišče*, če ima podgraf $G - x$ več komponent kot graf G. Povezavi, ki ima za krajišči prerezni vozlišči, rečemo *prerezna povezava* ali *most*. Graf G je *k-povezan* ($k \in \mathbb{N}$), če ima G vsaj $k+1$ vozlišč in je $G - X$ povezan za vsako množico vozlišč $X \subset V(G)$, za katero je $|X| < k$. Največji k, za katerega je graf G k-povezan, je *povezanost* grafa. Graf G je *povezavno k-povezan*, če ima G vsaj $k+1$ povezav in je $G - X$ povezan za vsako množico povezav $X \subset E(G)$, za katero je $|X| < k$.

Znana je *Eulerjeva formula*, ki pravi, da za vsak povezan graf G, vložen v ravnino, velja $n - m + f = 2$, kjer je n število vozlišč, m število povezav, f pa število lic grafa G. Oziroma za grafe vložene v bolj splošne ploskve: $n - m + f = \chi$, kjer je s χ označen *Eulerjev rod* ploskve. Za ravnino očitno velja $\chi = 2$. Eulerjev rod nekaterih drugih ploskev bomo srečali v 5. poglavju, ko bomo dokazovali naš glavni izrek.

Na začetku definiran graf G je *neusmerjen* graf, saj so bile povezave neurejeni pari njenih krajišč, kar pomeni, da zapis $\{x, y\}$ pomeni isto kot $\{y, x\}$. Ko pa imamo urejene pare vozlišč, govorimo o *usmerjenih* grafih ali *digrafih*. Tem urejenim parom vozlišč rečemo *loki* ali *usmerjene povezave* in jih označimo z (x, y). Lok $e = (x, y)$ je usmerjen od vozlišča x proti vozlišču y. V tem primeru rečemo, da je x *rep* loka e, y pa *glava* loka e.

Imejmo digraf G. *Temeljni graf* digrafa G je graf z istimi vozlišči kot G, kjer je $\{u, v\}$ povezava, če je bodisi (u, v) bodisi (v, u) lok v digrafu G.

V nadaljevanju tega diplomskega dela bomo uporabljali poenostavljeno označevanje lokov in povezav, kjer bo zapis uv predstavljal bodisi lok (u, v) bodisi povezavo $\{u, v\}$, kar pa bo razvidno iz konteksta. Zanko v vozlišču u bomo zapisali z uu. Rekli smo, da če sta vozlišči u in v sosednji v neusmerjenem grafu, potem je $uv = vu$. Če je uv lok v digrafu, rečemo, da sta vozlišči u in v *sosednji v smeri od u proti v*, oziroma da je vozlišče u *vhodni sosed* vozlišča v in v *izhodni sosed* vozlišča u. V vsakem primeru sta vozlišči u in v sosednji v digrafu, če je vsaj eden od uv in vu lok. Tudi v tem primeru rečemo, da sta vozlišči u in v *soseda* in številu sosedov vozlišča v (različnih od v) rečemo *stopnja* vozlišča v. Vendar pa v primeru digrafov lahko gledamo stopnjo vozlišča tudi glede na usmeritev lokov. Število vhodnih sosedov oziroma izhodnih sosedov vozlišča v je imenovano *vhodna stopnja* oziroma *izhodna stopnja* vozlišča v.

Graf G je *podgraf* grafa H in H je *nadgraf* grafa G, če je $V(G) \subseteq V(H)$ in $E(G) \subseteq E(H)$. G je *induciran podgraf* grafa H, če je podgraf grafa H in vsebuje vse povezave (oziroma loke) grafa G med vozlišči v grafu G. *Klika* v grafu G je poln podgraf grafa G. Velikost največje klike v grafu G označimo z $\omega(G)$.

Vsi v nadaljevanju omenjeni grafi bodo končni. Če bomo govorili o neskončnih grafih, bomo to posebej poudarili. Prav tako bodo naši grafi (razen redkih izjem) enostavni, torej brez vzporednih povezav oziroma večih lokov v isti smeri. Navedene definicije sicer dopuščajo, da je množica vozlišč prazna, vendar se v formulacijah izrekov načeloma ne bomo ukvarjali s primeri grafov s prazno množico vozlišč.

Homomorfizem iz grafa G v graf H je preslikava $f : V(G) \to V(H)$, za katero je $f(u)f(v) \in E(H)$, če je $uv \in E(G)$. Tak homomorfizem f označimo z $f : G \to H$. Homomorfizmu iz grafa G v graf H pravimo tudi *H-barvanje* grafa G (glej trditev 1.6). Če obstaja homomorfizem $f : G \to H$, pišemo $G \to H$, oziroma $G \nrightarrow H$, če tak homomorfizem ne obstaja. Če je $G \to H$, rečemo, da je graf G *homomorfen* grafu H, oziroma da je graf G *H-obarvljiv*. Kompozitum $f \circ g$ homomorfizmov $g : G \to H$ in $f : H \to K$ je homomorfizem iz G v K. Torej je binarna relacija homomorfnosti na množici digrafov tranzitivna. S $\mathrm{HOM}(G, H)$ označimo množico vseh homomorfizmov $f : G \to H$, s $\hom(G, H)$ pa število elementov množice $\mathrm{HOM}(G, H)$. *Izomorfizem* je bijektivni homomorfizem. *Avtomorfizem* je izomorfizem grafa nase. Graf G je *vozliščno tranzitiven*, če za poljubni vozlišči $u, v \in G$ obstaja avtomorfizem ϕ grafa G, da je $\phi(u) = v$.

Zgornja definicija homomorfizma velja tako za neusmerjene grafe, kot tudi za digrafe, le da v prvem primeru z $f(u)f(v)$ in uv označujemo povezave, v drugem pa loke. Torej homomorfizmi neusmerjenih grafov ohranjajo sosednost, medtem ko homomorfizmi digrafov ohranjajo tudi usmerjenost lokov. Torej je homomorfizem digrafov $G \to H$ tudi homomorfizem ustreznih temeljnih grafov, ne pa tudi obratno.

1.2 Homomorfizmi in sosednost

Omejimo se za začetek le na neusmerjene grafe.

Dejstvo, da so homomorfizmi preslikave vozlišč, ki ohranjajo sosednost, ima nekaj zanimivih načinov uporabe, na primer pri homomorfizmih poti in ciklov. *Sprehod* v grafu G je zaporedje vozlišč $v_0, v_1, \ldots, v_k$ v grafu G, tako da sta v_{i-1} in v_i sosednji za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. Tak sprehod označimo z $v_0 v_1 \ldots v_k$. Sprehod je *sklenjen*, če je $v_0 = v_k$. Sklenjenemu sprehodu rečemo tudi *obhod*. *Pot* v grafu G je sprehod, v katerem so vsa vozlišča različna. Naravnemu številu k rečemo *dolžina* sprehoda oziroma poti.

Grafu z vozlišči $0, 1, \ldots, k$ in povezavami $01, 12, \ldots, (k-1)k$ pravimo *pot* P_k. Pot P_k vsebuje $k+1$ vozlišč in k povezav (glej sliko 1.2).

Trditev 1.1 *Preslikava $f : V(P_k) \to V(G)$ je homomorfizem iz grafa P_k v graf G, če in samo če je zaporedje $f(0)f(1)\ldots f(k)$ sprehod v grafu G.*

Homomorfizmi iz grafa G v graf H torej slikajo poti v grafu G v sprehode v grafu H in tako ne povečajo razdalj. Če z $d_G(u, v)$ označimo *razdaljo* (t.j. dolžino najkrajše poti) med vozliščema u in v v grafu G, pridemo do naslednjega dejstva:

Posledica 1.2 *Če je $f : G \to H$ homomorfizem, potem je $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ za vsak par vozlišč u, v grafa G.*

Dokaz. Označimo $u = v_0$, $v = v_k$ in $f(u) = f(v_0)$, $f(v) = f(v_k)$. Če je $v_0 v_1 \ldots v_k$ pot v grafu G, potem je $f(v_0)f(v_1)\ldots f(v_k)$ sprehod enake dolžine v grafu H, t.j. dolžine k. Ker vsak sprehod od $f(u)$ do $f(v)$ vsebuje tudi pot od $f(u)$ do $f(v)$, mora veljati $d_H(f(u), f(v)) \leq k$. ■

Cikel v grafu G je zaporedje različnih vozlišč $v_1 v_2 \ldots v_k$ grafa G, tako da je vsak v_i soseden v_{i-1} za $i = 2, 3, \ldots, k$ ter v_1 soseden v_k. Kot vidimo, je cikel sklenjena pot, torej lahko tudi na ciklih uporabimo definicijo dolžine.

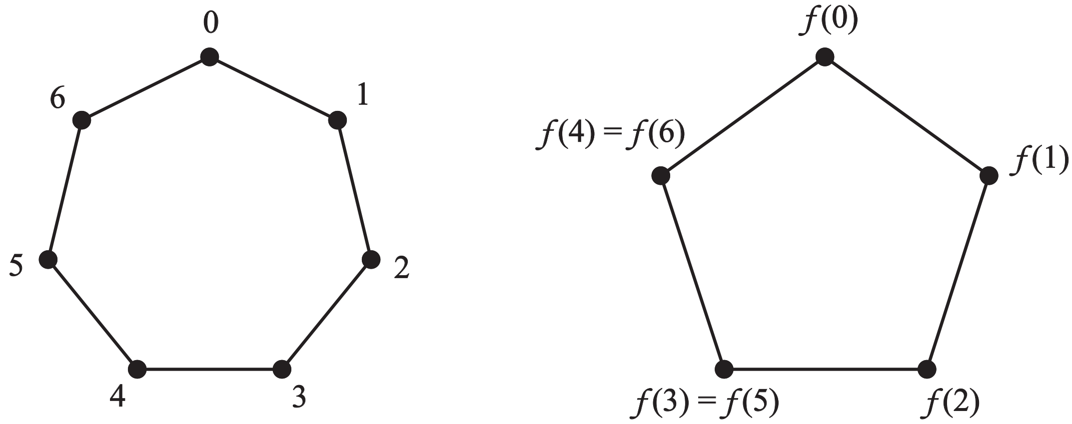
Grafu z vozlišči $0, 1, \ldots, k-1$ ter povezavami $i(i+1)$ za $i = 0, 1, \ldots, k-1$ (seštevamo po modulu k) rečemo *cikel* C_k. Kot vidimo je C_k sestavljen iz k vozlišč in k povezav.

Trditev 1.3 *Preslikava $f : V(C_k) \to V(G)$ je homomorfizem iz grafa C_k v graf G, če in samo če je $f(0)f(1)\ldots f(k-1)$ sklenjen sprehod v grafu G.*

Posledica 1.4 *$C_{2k+1} \to C_{2l+1}$, če in samo če je $l \leq k$.*

Dokaz. Lih cikel nima sklenjenega sprehoda, ki bi bil krajši od njegove dolžine, ima pa sklenjen sprehod katerekoli lihe dolžine, večje ali enake dolžini cikla. ■

Slika 1.1 prikazuje homomorfizem $f : C_7 \to C_5$. Slike $f(v)$ vozlišč $v \in V(C_7)$ so prikazane na grafu C_5, tako da lahko razberemo sklenjen sprehod $f(0)f(1)\dots f(6)f(0)$ v tem grafu.



Slika 1.1: Homomorfizem $f : C_7 \to C_5$

Rekli smo, da z $f : G \to H$ označimo preslikavo iz množice $V(G)$ v množico $V(H)$. Vemo tudi, da homomorfizem ohranja sosednost. Homomorfizem torej lahko definiramo tudi kot preslikavo $f^{\#}$ iz množice $E(G)$ v množico $E(H)$, tako da velja $f^{\#}(uv) = f(u)f(v)$ za vse povezave $uv \in E(G)$.

Homomorfizmu $f : G \to H$ bomo rekli *vozliščno injektiven* (oz. *vozliščno surjektiven*, oz. *vozliščno bijektiven*), če je preslikava $f : V(G) \to V(H)$ injektivna (oz. surjektivna, oz. bijektivna). Podobno bomo homomorfizmu rekli *povezavno injektiven* (oz. *povezavno surjektiven*, oz. *povezavno bijektiven*), če je preslikava $f^{\#} : E(G) \to E(H)$ injektivna (oz. surjektivna, oz. bijektivna). Homomorfizmu f bomo rekli *injektivni homomorfizem* (oz. *surjektivni homomorfizem*, oz. *bijektivni homomorfizem*), če je tako vozliščno- kot tudi povezavno- injektiven (oz. surjektiven, oz. bijektiven). Homomorfizem, ki je vozliščno injektiven, je tudi povezavno injektiven, ne pa tudi obratno. Prav tako velja, da če graf H ne vsebuje izoliranih vozlišč in je homomorfizem povezavno surjektiven, potem je tudi vozliščno surjektiven. Tudi tu obrat ne velja. Z drugimi besedami, injektivni homomorfizmi so isto kot vozliščno injektivni homomorfizmi, medtem ko so surjektivni homomorfizmi, ko nimamo izoliranih vozlišč, isto kot povezavno surjektivni homomorfizmi.

Z $\mathrm{INJ}(G, H)$ označimo množico vseh injektivnih homomorfizmov iz grafa G v graf H, z $\mathrm{inj}(G, H)$ pa število elementov množice $\mathrm{INJ}(G, H)$. Analogno definiramo množici $\mathrm{SUR}(G, H)$ in $\mathrm{BIJ}(G, H)$ ter števili $\mathrm{sur}(G, H)$ in $\mathrm{bij}(G, H)$.

Eulerjev sprehod v grafu G je sprehod $v_0 v_1 \dots v_k$ v grafu G, tako da $v_{i-1}v_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, vsebuje vsako povezavo grafa G natanko enkrat. *Eulerjev obhod* je sklenjen Eulerjev sprehod.

Trditev 1.5 *Naj bo G graf z m povezavami. Potem velja:*

- *Eulerjev sprehod je povezavno bijektiven homomorfizem $P_m \to G$;*
- *Eulerjev obhod je povezavno bijektiven homomorfizem $C_m \to G$.*

Dokaz. V trditvah 1.1 in 1.3 je prikazano, kako lahko take homomorfizme gledamo kot ustrezne sledi. ■

Oglejmo si sedaj, kako je z digrafi. Definicije injektivnosti, surjektivnosti in bijektivnosti ostanejo enake kot pri neusmerjenih grafih. Večino ostalih definicij tudi lahko razširimo z neusmerjenih grafov na digrafe. Beseda *soseden* tu pomeni sosednost v vsaj eni smeri. Torej na digrafih lahko uporabimo že navedene definicije sprehodov, poti, ciklov (in njihovih dolžin), saj smo jih navedli v smislu sosednosti. Omenimo še, da za sprehode, poti in cikle v digrafih ne zahtevamo, da so njihove povezave usmerjene v isto smer. Imenovali jih bomo *orientirani sprehodi* (oz. *orientirane poti*, oz. *orientirani cikli*).

Bolj natančno je orientiran sprehod v digrafu G zaporedje vozlišč $v_0 v_1 \dots v_k$ iz grafa G, tako da sta v_{i-1} in v_i sosednja v G za vsak $i = 1, 2, \dots, k$. Če je lok usmerjen od vozlišča v_{i-1} proti vozlišču v_i (torej je v_{i-1} rep loka, v_i pa glava loka), rečemo, da je lok $v_{i-1}v_i \in E(G)$ *naprej usmerjen lok* sprehoda, medtem ko je $v_i v_{i-1}$ *nazaj usmerjen lok* sprehoda. *Usmerjen sprehod* v digrafu G je orientiran sprehod, v katerem so vsi loki naprej usmerjeni. Analogno definiramo orientirane in usmerjene poti oziroma cikle. Orientirane in usmerjene sprehode uporabljamo pri definiciji povezanosti digrafov. Digraf je *povezan*, če sta poljubni vozlišči digrafa povezani z orientiranim sprehodom in je *krepko povezan*, če sta poljubni vozlišči digrafa povezani z usmerjenim sprehodom (v vsaki od obeh smeri). Vsak krepko povezan digraf je očitno tudi povezan, vsak povezan digraf pa ni nujno tudi krepko povezan.

Usmerjene poti $\vec{P}_k$ in *usmerjene cikle* $\vec{C}_k$ definiramo tako kot grafa P_k in C_k, le da so tokrat $i(i+1)$ loki in ne povezave (glej sliko 1.2).

Slika 1.2: Poti P_2 in $\vec{P}_2$

Večino tega, kar smo dejali za neusmerjene grafe, velja tudi za digrafe, seveda z ustreznimi spremembami. Omenimo recimo, da so homomorfizmi iz $\vec{P}_k$ usmerjeni sprehodi, saj homomorfizmi ne ohranjajo samo sosednosti, ampak tudi usmerjenost lokov. Eulerjevi sprehodi v digrafu so usmerjeni sprehodi, ki vsebujejo vsakega od lokov natanko enkrat, in ustrezajo povezavno bijektivnemu homomorfizmu grafa $\vec{P}_k$. Podobno Eulerjev obhod ustreza povezavno bijektivnemu homomorfizmu grafa $\vec{C}_m$, torej enako kot v trditvi 1.5, le da imamo tu usmerjene povezave.

1.3 Barvanje grafov

Za boljšo predstavo o homomorfizmih si poglejmo povezavo z barvanjem vozlišč v grafu. Definirajmo *k-barvanje* grafa G kot dodelitev k barv vozliščem grafa G, tako da sta sosednji vozlišči obarvani različno. Pri tem vsakemu vozlišču dodelimo natanko eno barvo. Označimo s K_k poln graf na vozliščih $1, 2, \ldots, k$ in označimo z istimi števili tudi "barve" v k-barvanju. V tem primeru lahko k-barvanje grafa G gledamo kot preslikavo $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Zahteva, da so sosednja vozlišča različno obarvana, pomeni, da je $f(u) \neq f(v)$, če je $uv \in E(G)$. Videti moramo le še, da je pogoj $f(u) \neq f(v)$ ekvivalenten pogoju $f(u)f(v) \in E(K_k)$ in pridemo do naslednje trditve:

Trditev 1.6 *Homomorfizmi $f : G \to K_k$ so natanko k-barvanja grafa G.*

Ta trditev nam, med drugim, omogoča, da izpeljemo naslednjo posledico, ki govori o kromatičnih številih. *Kromatično število* grafa G, $\chi(G)$, je definirano kot najmanjše naravno število k, za katero obstaja k-barvanje grafa G. Grafu s $\chi(G) = k$ rečemo *k-kromatičen* graf.

Posledica 1.7 *Če je $G \to H$, potem je $\chi(G) \leq \chi(H)$.*

Dokaz. Naj bo $h : G \to H$ homomorfizem. Če za graf H obstaja k-barvanje $f : H \to K_k$, potem je $f \circ h$ k-barvanje grafa G. Torej za graf G obstaja $\chi(H)$-barvanje in velja $\chi(G) \leq \chi(H)$. ■

Omenimo še posledico, podobno prejšnji, le da ta govori o lihih notranjih obsegih. *Notranji obseg* grafa G je dolžina najkrajšega cikla v grafu G. Podobno je *lihi notranji obseg* grafa G, ki ni dvodelen, dolžina najkrajšega lihega cikla v grafu G.

Posledica 1.8 *Če je $G \to H$, potem je dolžina lihega notranjega obsega grafa G vsaj tolikšna kot dolžina lihega notranjega obsega grafa H.*

S pomočjo posledic 1.7 in 1.8 lahko skonstruiramo grafa G in H, ki sta *neprimerljiva* v smislu, da je $G \nrightarrow H$ in $H \nrightarrow G$. Denimo, da sta G in H taka grafa, da je kromatično število grafa G večje od kromatičnega števila grafa H in da je lihi notranji obseg grafa G večji od lihega notranjega obsega grafa H. Potem je $G \nrightarrow H$ po posledici 1.7 in $H \nrightarrow G$ po posledici 1.8. Ta konstrukcija se pri delu s homomorfizmi pogosto uporablja, vendar pa je odvisna od obstoja grafov s poljubno velikimi kromatičnimi števili in lihimi notranjimi obsegi. Naslednji pomemben izrek, ki ga je formuliral veliki madžarski matematik Paul Erdős, nam zagotavlja, da obstaja graf s poljubno velikim kromatičnim številom in poljubno velikim notranjim obsegom (in zaradi tega tudi poljubno velikim lihim notranjim obsegom). Dokaz tega izreka je naveden v [23, 14].

Izrek 1.9 *Za poljubni naravni števili k, l obstaja graf s kromatičnim številom k in notranjim obsegom vsaj l.*

Pogosteje srečamo definicijo k-barvanja grafa kot particijo množice $V(G)$ na k neodvisnih množic. Množica vozlišč je *neodvisna* v G, če nobeni dve vozlišči te množice nista sosednji. Če z f označimo zgoraj definirano k-barvanje, torej kot preslikavo iz množice vozlišč $V(G)$ v množico barv $\{1, 2, \ldots, k\}$, potem lahko preslikavi f priredimo particijo θ_f množice $V(G)$ na neodvisne množice $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k)$. Obratno lahko vsaki particiji θ množice $V(G)$ na neodvisne množice $S_1, S_2, \ldots, S_k$ priredimo preslikavo f, ki obarva vsako vozlišče množice S_i z barvo i.

To je standardna povezava med preslikavami in particijami in jo lahko uporabimo tudi pri homomorfizmih. Če sta G in H grafa (bodisi neusmerjena bodisi usmerjena) in je $f : G \to H$ homomorfizem, potem prirejena particija θ_f vsebuje praslike preslikave

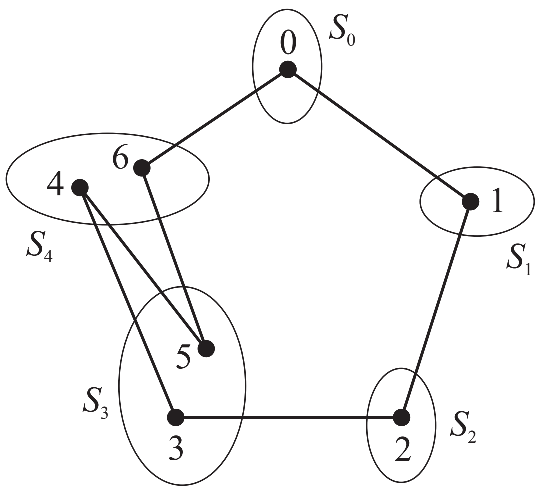
f, torej množice $f^{-1}(x)$, $x \in V(H)$. Če na vozlišču x ni zanke, potem je množica S_x neodvisna. Če je H graf brez zank, so torej vsi deli prirejene particije neodvisni. Če $xy \notin E(H)$, potem $uv \notin E(G)$ za poljubni vozlišči $u \in f^{-1}(x)$, $v \in f^{-1}(y)$. Velja pa tudi obrat, torej lahko rečemo, da je preslikava $f : V(G) \to V(H)$ homomorfizem iz grafa G v graf H, če in samo če prirejena particija θ_f ustreza dvema prej navedenima lastnostima (množica $f^{-1}(x)$ je neodvisna, če xx ni zanka v grafu H in $uv \notin E(G)$, če $xy \notin (H)$ in sta $u \in f^{-1}(x)$, $v \in f^{-1}(y)$).

Strnimo to v naslednjo trditev:

Trditev 1.10 *Naj bosta G in H grafa (bodisi neusmerjena bodisi usmerjena). Potem je $G \to H$, če in samo če lahko vozlišča grafa G razdelimo v množice S_x, $x \in V(H)$, tako da sta izpolnjena naslednja pogoja:*

- *če xx ni zanka v grafu H, potem je množica S_x neodvisna v grafu G;*
- *če $xy \notin E(H)$, potem $uv \notin E(G)$, kjer sta $u \in S_x$ in $v \in S_y$.*

Če sta G in H neusmerjena grafa, nam navedena pogoja povesta, da je θ_f particija množice vozlišč $V(G)$ na neodvisne množice, za katere velja, da ni povezav med dvema množicama, katerih indeksa sta nesosednji vozlišči v grafu H. Na sliki 1.3 je predstavljena particija θ_f, ki je prirejena homomorfizmu $f : C_7 \to C_5$ s slike 1.1.



Slika 1.3: Prirejena particija za homomorfizem s slike 1.1

Glede na zgornjo formulacijo je f injektivni homomorfizem, če in samo če je θ_f trivialna particija, kjer so vsi deli particije singletoni. Preslikava f je surjektivni homomorfizem, če in samo če so vsi deli particije θ_f neprazni in velja $uv \in E(G)$ za neki vozlišči $u \in f^{-1}(x)$, $v \in f^{-1}(y)$, če in samo če je $xy \in E(H)$.

Oglejmo si sedaj to še v obratni smeri. Denimo, da imamo poljubno particijo θ množice vozlišč $V(G)$ na neprazne dele S_i, $i \in I$. Definirajmo *kvocient* grafa G *glede na* θ kot graf G/θ na množici vozlišč I, v katerem obstaja zanka $ii \in E(G/\theta)$, samo če S_i vsebuje neki vozlišči u in v, za kateri velja $uv \in E(G)$, in v katerem je $ij \in E(G/\theta)$, samo če za nek $uv \in E(G)$ velja $u \in S_i$ in $v \in S_j$. Potem je kanonična preslikava, ki vsakemu vozlišču $u \in V(G)$ priredi enoličen i, tako da je $u \in S_i$, ravno surjektivni homomorfizem $f : G \to G/\theta$.

Če je f katerikoli homomorfizem iz G v H, potem grafu z vozlišči $f(v)$, $v \in V(G)$, in povezavami $f(v)f(w)$, $vw \in E(G)$, rečemo *homomorfna slika* grafa G *glede na* f in ga označimo z $f(G)$. Pri tem je $f(G)$ podgraf grafa H in $f : G \to f(G)$ je surjektivni homomorfizem. V naslednji posledici bomo navedli povezavo med kvocienti in homomorfnimi slikami.

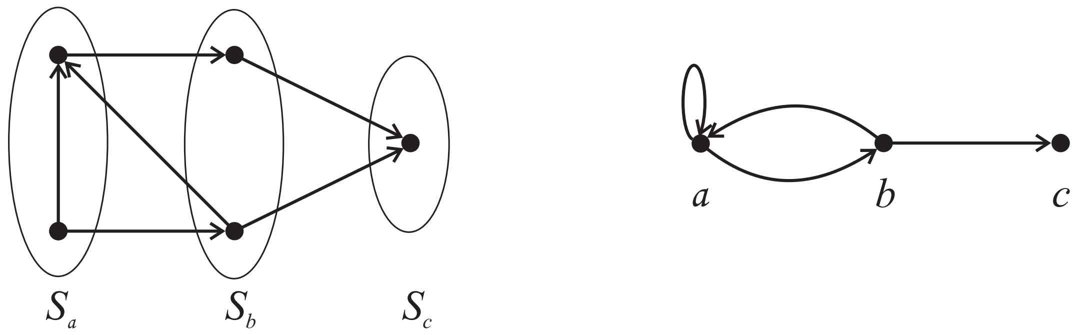
Posledica 1.11 *Vsak kvocient grafa G je homomorfna slika grafa G, in obratno, vsaka homomorfna slika grafa G je izomorfna kvocientu grafa G.*

Dokaz. Denimo, da je θ particija množice $V(G)$ na neprazne dele S_i, $i \in I$. Potem je zgoraj definirana kanonična preslikava $f : V(G) \to I$ surjektivni homomorfizem grafa G v njegov kvocient G/θ in je zato G/θ homomorfna slika grafa G glede na f. Obratno pa s pomočjo particije θ_f, ki je prirejena surjektivnemu homomorfizmu $f : G \to H$, definiramo kvocient G/θ_f, ki je izomorfen grafu H, saj obstaja izomorfizem, ki vsakemu delu $f^{-1}(x)$ particije θ_f priredi vozlišče x grafa H. ■

Analogno prejšnjim navedkom obravnavamo digrafe. V nadaljevanju (slika 1.4) je prikazan še primer particije θ in njej ustreznega kvocienta (homomorfne slike).

Omenimo še pojem minorja grafa, ki ga prav tako lahko povežemo s kvocientom. Naj bo G graf in θ particija množice $V(G)$, tako da vsak del inducira povezan podgraf grafa G. Grafu G', ki ga dobimo iz kvocienta G/θ, tako da odstranimo vse zanke, rečemo *skrčitev* grafa G. *Minor* grafa G je skrčitev nekega podgrafa grafa G.

Surjektivnemu homomorfizmu grafa G v poln graf K_k pravimo *polno k-barvanje.* Torej vsakemu polnemu k-barvanju ustreza particija množice $V(G)$ na k nepraznih množic, ki so



Slika 1.4: Particija in njen kvocient v primeru digrafa

paroma povezane z vsaj eno povezavo. Vsako k-barvanje grafa G s kromatičnim številom $\chi(G) = k$ je polno.

V nadaljevanju omenimo *Barvni interpolacijski izrek*, ki ga je najlažje dokazati prav z uporabo particij.

Izrek 1.12 *Če za graf G obstajata polno k-barvanje in polno l-barvanje, potem obstaja tudi polno i-barvanje za vse i med k in l.*

Dokaz. Naj bo $A_1, A_2, \ldots, A_k$ particija množice $V(G)$ na k neodvisnih množic in naj bo $B_1, B_2, \ldots, B_l$ particija množice $V(G)$ na l neodvisnih množic, kjer je $k < l$. Očitno je dovolj najti polno $(k+1)$-barvanje grafa G. Za vsak $i = 0, 1, 2, \ldots, l$ naj bo $C_i = \cup_{1 \leq j \leq i} B_j$ in naj bo θ_i particija množice $V(G)$ na tiste množice izmed $B_1, B_2, \ldots, B_i, A_1 \setminus C_i, A_2 \setminus C_i, \ldots, A_k \setminus C_i$, ki so neprazne. Pri tem je θ_0 particija na dele $A_1, A_2, \ldots, A_k$, θ_l pa particija na dele $B_1, B_2, \ldots, B_l$ (saj so ostali deli prazni). Torej je G/θ_l izomorfen K_l in obstaja indeks i, $i = 0, 1, 2, \ldots, l$, tako da G/θ_i ni k-obarvljiv. Iz minimalnosti i-ja sledi, da je G/θ_i $(k+1)$-obarvljiv, saj B_i preprosto pobarvamo s $(k+1)$-to barvo. Potem je G/θ_i homomorfna slika grafa G, za katero obstaja polno $(k+1)$-barvanje, torej obstaja polno $(k+1)$-barvanje tudi za graf G. ■

Največje naravno število k, za katerega obstaja polno k-barvanje grafa G, je *akromatično število* grafa G. Barvni interpolacijski izrek torej pravi, da za graf G obstaja polno k-barvanje za vsak k med kromatičnim in akromatičnim številom grafa G.

1.4 Homomorfizmi grafov z obarvanimi povezavami

Začnimo z nekaj definicijami. *Drevo* je povezan graf, ki ne vsebuje ciklov. Z drugimi besedami je drevo graf, v katerem sta poljubni vozlišči povezani z natanko eno potjo. Vozlišča s stopnjo 1 v drevesu imenujemo *listi*. *Gozd* je graf, v katerem sta poljubni vozlišči povezani z največ eno potjo. Gozd je torej disjunktna unija dreves. Grafu brez ciklov (gozdu) rečemo tudi *acikličen graf*. V primeru usmerjenih povezav je digraf acikličen, če ne vsebuje nobenega usmerjenega cikla. *Zvezda* (oziroma *n-zvezda*) je graf na $n+1$ vozliščih, med katerimi ima eno vozlišče stopnjo n, ostala pa so listi.

Naj bosta $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ enostavna grafa z obarvanimi povezavami. Preslikava $\phi : V_1 \to V_2$ je *homomorfizem*, če sta za vsak par sosednjih vozlišč u in v grafa G_1 vozlišči $\phi(u)$ in $\phi(v)$ sosednji v G_2 in je barva povezave $\phi(u)\phi(v)$ enaka barvi povezave uv. V nadaljevanju tega razdelka si bomo ogledali nekaj opažanj glede obstoja grafa G, čigar povezave so obarvane z barvami iz množice C, v katerega se homomorfno preslika vsak graf iz danega razreda grafov, ki so prav tako povezavno obarvani z barvami iz množice C. Ob vsakem od teh primerov bomo predstavili zgornjo mejo za število vozlišč grafa G. Ideja barvanja povezav je bolj detajlno predstavljena v [2], kjer najdemo tudi sledeče izreke in njihove dokaze.

Izrek 1.13 *Za vsako naravno število $n \geq 1$ obstaja končni graf G_n, čigar povezave so obarvane z barvami iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, tako da iz vsakega ravninskega grafa, povezavno obarvanega s temi barvami, obstaja homomorfizem v graf G_n.*

Zanimalo nas bo, kako majhne grafe G_n lahko sestavimo, da bo izrek še veljal. Označimo z λ_n najmanjše možno število vozlišč grafa G_n. Potem velja:

Trditev 1.14 *Za vsako naravno število n velja*

$$n^3 + 3 \leq \lambda_n \leq 5n^4.$$

Zgornjo mejo trditve bomo dokazali kot posledico bolj splošnega dognanja. Za družino grafov $\mathcal{G}$ in naravno število $n \geq 1$, označimo z $\lambda(\mathcal{G}, n)$ najmanjše možno število vozlišč v grafu H z obarvanimi povezavami, tako da lahko vsakega člana družine $\mathcal{G}$, čigar povezave so obarvane z barvami iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, homomorfno preslikamo v graf H. Pri tem je $\lambda(\mathcal{G}, n) = \infty$, če tak končen graf H ne obstaja.

Aciklično kromatično število grafa G je minimalno število barv v pravilnem barvanju (vozlišč) grafa G, tako da so vozlišča vsakega cikla obarvana z vsaj tremi različnimi barvami. Takšno barvanje je uvedel Grünbaum [20]. Borodin je v [9] dokazal, da je aciklično kromatično število vsakega ravninskega grafa največ 5. Zgornja meja trditve 1.14 sledi iz splošnejšega izreka (1.15), ki ga bomo dokazali v nadaljevanju.

Izrek 1.15 *Naj bo $\mathcal{G}_k$ družina vseh grafov z acikličnim številom ne večjim od k. Potem za vsak lih n velja $\lambda(\mathcal{G}_2, n) = n+1$ in za vsaki naravni števili k in n velja $\lambda(\mathcal{G}_k, n) \leq k \cdot n^{k-1}$.*

Omenimo, da ni težko pokazati, da je družina $\mathcal{G}'_{k-1}$ vseh polnih dvodelnih grafov s $k-1$ vozlišči na eni strani sestavljena iz grafov z acikličnim kromatičnim številom kvečjemu k. Če je $n \geq 2$, velja

$$\lambda(\mathcal{G}'_{k-1}, n) = n^{k-1} + k - 1,$$

kar kaže, da je meja zgornjega izreka skoraj ostra.

V 4. poglavju si bomo ogledali nekaj dokazov, ki uporabljajo zelo podobne ideje kot v tem razdelku. Ubadali se bomo namreč s homomorfizmi med usmerjenimi grafi. Raspaud in Sopena sta v [36] pokazala, na primer, da obstaja usmerjen graf H z 80 vozlišči, ki ne vsebuje nobenega cikla dolžine 2, tako da lahko vsako orientacijo ravninskega grafa homomorfno preslikamo v graf H. Dokaz temelji, kot v tem razdelku, na acikličnem barvanju. Čeprav rezultatov, dobljenih v tem razdelku, ne moremo prevesti v rezultate v omenjenem delu (in našem 4. poglavju), pa očitno lahko enak način dokazovanja uporabimo pri obeh.

Za dokaz izreka 1.15 potrebujemo še dve preprosti lemi.

Lema 1.16 *Če je $\mathcal{T}$ družina vseh gozdov, potem za vsak lih n velja $\lambda(\mathcal{T}, n) = n + 1$.*

Dokaz. V družino gozdov spada tudi zvezda. Zaradi zvezde z n povezavami različnih barv velja $\lambda(\mathcal{T}, n) \geq n + 1$. Poln graf na $n + 1$ vozliščih K_{n+1} s pravilnim n-barvanjem povezav pa nam da $\lambda(\mathcal{T}, n) \leq n + 1$. Vozlišča iz vsakega gozda lahko enega za drugim preslikamo v vozlišča grafa K_{n+1}, tako da po vrsti preslikujemo vozlišča, ki imajo med že preslikanimi vozlišči največ enega soseda. Upoštevamo pa še dejstvo, da imajo povezave poljubne barve krajišča v vseh vozliščih grafa K_{n+1}, saj je $n + 1$ sodo število. ∎

Lema 1.17 *Naj bo U poln dvodelen graf na množicah vozlišč $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ in $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ s pravilnim barvanjem povezav z n barvami. Potem za vsak gozd*

T, katerega povezave so obarvane z istim naborom n barv, in za vsako particijo množice vozlišč gozda T na množici V in W, pri čemer ni nobeno vozlišče iz V sosednje vozlišču iz W, obstaja homomorfizem iz T v U, ki preslika V v A in W v B.

Dokaz. Za dokaz bo zadostovalo preslikati poljubno povezano komponento gozda T. To bomo storili tako kot v prejšnjem dokazu, s preslikovanjem vozlišč komponente T v U, enega za drugim, pri čemer bomo vozlišča preslikovali v ustrezno množico vozlišč grafa U in po vrsti preslikovali vozlišča, ki imajo med že preslikanimi vozlišči enega soseda. Ker so z vsako barvo povezana vsa vozlišča iz U, lahko to preslikavo pravilno dokončamo. ■

Dokaz izreka 1.15. Iz leme 1.16 sledi, da je $\lambda(\mathcal{G}_2, n) = n + 1$. Da bi dokazali izrek, naj bo U poln dvodelen graf na množicah vozlišč $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ in $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, tako da med tema dvema množicama obstaja pravilno barvanje povezav z n barvami.

Definirajmo graf G' z obarvanimi povezavami na naslednji način. Vozlišča grafa G' so k-terice oblike

$$(i, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k),$$

kjer je $1 \leq i \leq k$ in $1 \leq x_j \leq n$ za vse j. Povezava grafa G' ima za krajišči vozlišči

$$(i, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

in

$$(j, y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_k),$$

če in samo če je $i \neq j$. Taka povezava, kjer je $i < j$, je obarvana z isto barvo kot povezava $a_{x_j} b_{y_i}$ v grafu U.

Trdimo, da lahko vsak graf, katerega povezave so obarvane z barvami $\{1, 2, \ldots, n\}$ in z acikličnim kromatičnim številom ne večjim od k, homomorfno preslikamo v graf G'. Da bi to dokazali, naj bo G tak graf in $V_1, \ldots, V_k$ particija vozlišč grafa G, ki predstavlja barvne razrede acikličnega barvanja. Vsak induciran podgraf $G_{i,j} = G[V_i \cup V_j]$, kjer je $1 \leq i \leq j \leq k$, je potem gozd, tako da po lemi 1.17 obstaja homomorfizem $\phi_{i,j}$ iz vsakega $G_{i,j}$ v U, ki preslika V_i v A in V_j v B. Denimo, da je $\phi_{i,j}(v) = a_{\psi_{i,j}(v)}$ za vse $v \in V_i$ in podobno $\phi_{i,j}(w) = b_{\psi_{i,j}(w)}$ za vse $w \in V_j$.

Definirajmo preslikavo ϕ iz vozlišč grafa G v vozlišča grafa G', tako da pošljemo $v \in V_i$ v vozlišče

$$(i, \psi_{1,i}(v), \psi_{2,i}(v), \ldots, \psi_{i-1,i}(v), \psi_{i,i+1}(v), \ldots, \psi_{i,k}(v))$$

grafa G'.

Naj bosta sedaj $v \in V_i$ in $w \in V_j$ sosednji vozlišči v grafu G, $i < j$. Potem je vozlišče w preslikano s preslikavo ϕ v vozlišče

$$(j, \psi_{1,j}(w), \psi_{2,j}(w), \ldots, \psi_{j-1,j}(w), \psi_{j,j+1}(w), \ldots, \psi_{j,k}(w))$$

grafa G'. Po definiciji grafa G' sta vozlišči $\phi(v)$ in $\phi(w)$ sosednji in povezani s povezavo iste barve kot povezava $a_{\psi_{i,j}(v)} b_{\psi_{i,j}(w)} = \phi_{i,j}(v)\phi_{i,j}(w)$ iz grafa U. Ker je $\phi_{i,j}$ homomorfizem, je z isto barvo obarvana tudi povezava vw v grafu G. S tem smo pokazali, da je ϕ homomorfizem. Graf G' ima $k \cdot n^{k-1}$ vozlišč, torej je dokaz zaključen. ■

Da bi zaključili dokaz trditve 1.14, moramo dokazati še spodnjo mejo za λ_n. To bomo napravili tako, da bomo definirali nov razred grafov, ki jih bomo poimenovali *trikotni grafi* in jih označili z Δ. Definiramo jih induktivno na naslednji način:

- 3-cikel je v Δ;
- če je $G \in \Delta$, potem je v Δ tudi graf, ki ga dobimo, če v eno od lic dodamo novo vozlišče in ga povežemo s tremi vozlišči, ki določajo to lice.

Očitno so vsi trikotni grafi ravninski. Dokažimo sedaj naslednjo lemo:

Lema 1.18 $\lambda(\Delta, n) \geq n^3 + 3$.

Dokaz. Naj bo H graf, katerega povezave so obarvane z barvami iz množice barv $\{1, 2, \ldots, n\}$ in v katerega se homomorfno preslika vsak trikotni graf, ki ima povezave obarvane z barvami iz iste množice. Privzemimo nasprotno, torej da ima graf H manj kot $n^3 + 3$ vozlišč.

Za vsak $G \in \Delta$ naj $h(G)$ označuje množico homomorfizmov iz grafa G v graf H (tu barv ne upoštevamo), $c(G)$ pa naj označuje množico barvanj povezav grafa G z barvami iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vsaka preslikava $\phi \in h(G)$ inducira enolično barvanje grafa G, za katero je ϕ tudi homomorfizem obarvanih grafov. S tem dobimo preslikavo $h(G) \to c(G)$, ki je po predpostavki surjektivna. Torej imamo

$$|c(G)| \leq |h(G)|. \tag{1.1}$$

Skonstruirajmo sedaj graf $G' \in \Delta$ s subdivizijo lica grafa G. Homomorfizem iz $h(G)$ lahko razširimo do G' na največ $n^3 - 1$ načinov (slika novega vozlišča se mora razlikovati od slike svojih treh sosedov), tako da je $|h(G')| \leq (n^3 - 1)|h(G)|$. Vsako izmed treh novih povezav v grafu G' lahko obarvamo na n načinov, tako da velja $|c(G')| = n^3|c(G)|$. Torej lahko s ponavljanjem subdivizije dobimo graf $G'' \in \Delta$, za katerega je $|c(G'')| > |h(G'')|$, kar pa je v nasprotju z (1.1). ∎

2 Krožno kromatično število

2.1 Ekvivalentne definicije

V tem poglavju si bomo podrobneje ogledali enega od načinov barvanja grafov, to je krožno barvanje, in prikazali nekaj lastnosti krožnega kromatičnega števila. Definicijo krožnega kromatičnega števila je leta 1988 vpeljal Vince [41], vendar takrat pod imenom *zvezdno kromatično število*. Avtor je krožno kromatično število definiral v smislu (p, q)-barvanja grafov, ki ga bomo predstavili v podrazdelku 2.1.2. Kot bomo videli v naslednjih podrazdelkih, lahko krožno kromatično število definiramo na več različnih, vendar medsebojno ekvivalentnih načinov. Navedimo torej za začetek nekaj najpogosteje uporabljenih definicij, ki jih bomo, nekatere bolj, druge manj pogosto, uporabljali v nadaljevanju poglavja.

2.1.1 r-krožno barvanje

Naj bo C krožnica z obsegom r. Definirajmo *r-krožno barvanje* grafa G kot preslikavo c, ki vsakemu vozlišču x grafa G priredi odprti krožni lok enotske dolžine na krožnici C, označen s $c(x)$, tako da za vsako povezavo xy grafa G velja $c(x) \cap c(y) = \emptyset$. Če obstaja r-krožno barvanje grafa G, rečemo, da je graf G *r-krožno obarvljiv*. *Krožno kromatično število* grafa, označimo ga s $\chi_c(G)$, je definirano kot

$$\chi_c(G) = \inf\{r\colon\ G \text{ je } r\text{-krožno obarvljiv}\}.$$

2.1.2 (p, q)-barvanje

Naslednja uporabna definicija krožnega kromatičnega števila uporablja koncept (p, q)-barvanja, kjer uporabimo le končno mnogo barv. Naj bosta p, q naravni števili, za kateri velja $p \geq 2q$. Definirajmo *(p, q)-barvanje grafa* $G = (V, E)$ kot preslikavo $f : V \to \{0, 1, \ldots, p - 1\}$, tako da za vsako povezavo xy grafa G velja $q \leq |f(x) - f(y)| \leq p - q$. Oglejmo si povezavo med obema definicijama. Če je f (p, q)-barvanje grafa G, potem s preslikavo $g(x) = f(x)/q$ definiramo $\frac{p}{q}$-barvanje grafa G. In obratno, če je g $\frac{p}{q}$-barvanje grafa G, potem je s preslikavo $f(x) = \lfloor g(x)q \rfloor$ definirano (p, q)-barvanje. Torej za vsak graf G velja

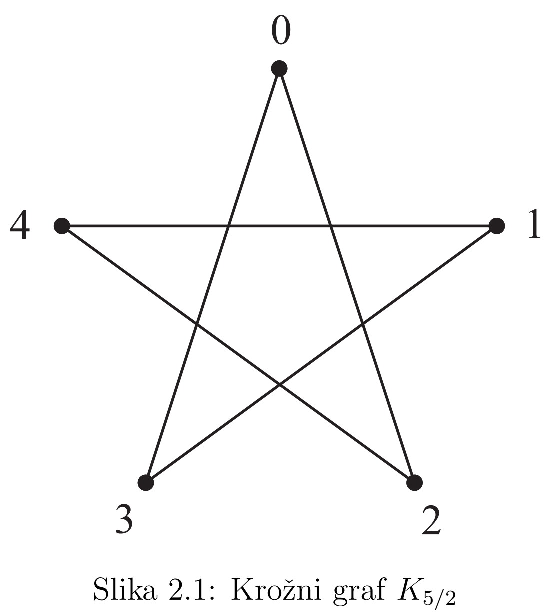
$$\chi_c(G) = \inf\{\frac{p}{q} : \ G \text{ je } (p,q)\text{-obarvljiv}\}.$$

Če je graf G končen, potem lahko infimum zamenjamo z minimumom. Vendar pa imajo neskončni grafi lahko krožno kromatično število, ki je iracionalno in tako infimuma ne moremo zamenjati z minimumom.

2.1.3 Definicija s pomočjo homomorfizmov

V prejšnjem poglavju smo spoznali, da je *homomorfizem* iz grafa G v graf H preslikava $f : V(G) \to V(H)$, tako da za vsako povezavo xy grafa G velja, da je $f(x)f(y)$ povezava v grafu H. Grafa G in H sta *homomorfno ekvivalentna*, $G \sim H$, če obstaja homomorfizem iz enega v drugega in obratno. Za naravni števili $p \geq 2q$ naj $K_{p/q}$ označuje graf z množico vozlišč $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, kjer je ij povezava, če in samo če velja $q \leq |i-j| \leq p-q$. To enačbo lahko zapišemo tudi $|i-j|_p \geq q$, grafu pa rečemo *krožni graf.* V tem primeru je (p,q)-barvanje grafa G kar homomorfizem iz grafa G v krožni graf $K_{p/q}$. *Krožno kromatično število* grafa G lahko definiramo kot

$$\chi_c(G) = \inf\{p/q : \ \text{obstaja homomorfizem iz } G \text{ v } K_{p/q}\}.$$



Slika 2.1: Krožni graf $K_{5/2}$

Spomnimo se, da smo v razdelku 1.3 definirali običajno barvanje grafa kot homomorfizem v nek poln graf. Torej lahko rečemo, da so polni grafi za običajno barvanje natanko to, kar so krožni grafi za krožno barvanje.

2.1.4 Definicija s pomočjo orientacije

Naslednjo interpretacijo krožnega kromatičnega števila je podal Hoffman [24] in predstavlja zvezo med kromatičnim številom grafa G in orientacijo grafa G. *Orientacijo* D grafa G dobimo tako, da vsaki povezavi iz grafa G dodelimo eno izmed usmeritev (s tem dobimo namesto povezave lok). Naj bo torej D orientacija grafa G in C cikel v tem grafu. *Neuravnoteženost* cikla C iz grafa G glede na orientacijo D je

$$\mathrm{Imb}_D(C) = \max\left\{\frac{|C|}{|C^+|}, \frac{|C|}{|C^-|}\right\},$$

kjer sta C^+ in C^- množici naprej oziroma nazaj usmerjenih lokov cikla C. *Ciklična neuravnoteženost* orientacije D je definirana kot

$$\mathrm{CycImb}(D) = \sup\{\mathrm{Imb}_D(C) : C \text{ je cikel grafa } G\}.$$

Hoffmanova lema pravi, da za vsak graf G velja

$$\chi(G) = \inf\{\lceil \mathrm{CycImb}(D)\rceil, D \text{ je aciklična orientacija grafa } G\}.$$

V [17] je dokazano, da če vzamemo nezaokroženo vrednost $\mathrm{CycImb}(D)$, dobimo ravno *krožno kromatično število* grafa G, torej

$$\chi_c(G) = \inf\{\mathrm{CycImb}(D), D \text{ je aciklična orientacija grafa } G\}.$$

Da bi dokazali, da ima graf G krožno kromatično število $\chi_c(G) \leq p/q$, je dovolj najti orientacijo D, pri kateri za vsak cikel C velja $|C|/|C^+| \leq p/q$ in $|C|/|C^-| \leq p/q$. V [46] je dokazano, da je dovolj preveriti tiste cikle C, za katere velja, da produkt $q\,|C|$ po modulu p zavzame vrednosti iz množice $\{1, 2, \ldots, 2q-1\}$.

2.1.5 Definicija s pomočjo napetosti

Naj bo G graf z orientacijo D. *Napetost* je preslikava $f : E(D) \to \mathbb{R}$, ki vsakemu loku e orientacije D priredi realno število $f(e)$, tako da za vsak cikel C grafa G velja

$$\sum_{e\in C^+} f(e) = \sum_{e\in C^-} f(e).$$

Za realno število $r \geq 2$ je *r-napetost* grafa G taka napetost f, da za vsak lok e velja $1 \leq |f(e)| \leq r-1$. Vsako r-barvanje ϕ grafa G ustreza r-napetosti f grafa G, definirani z $f(e) = \phi(y) - \phi(x)$, kjer je $e = xy$ lok. Obratno, imejmo r-napetost f grafa G. Naj bo x^* fiksno vozlišče grafa G. Za vsako vozlišče x grafa G označimo z W_x poljuben x^*x-sprehod. Potem s $\phi(x) \equiv [\sum_{e \in W_x^+} f(e) - \sum_{e \in W_x^-} f(e)] \pmod r$ definiramo r-barvanje grafa G. Torej je krožno kromatično število definirano s

$$\chi_c(G) = \min\{r : \text{ obstaja } r\text{-napetost grafa } G\}.$$

2.2 Osnovne lastnosti krožnega kromatičnega števila

Že iz definicije je razvidno, da če je $\chi_c(G) = r$, potem za vsak $r' \geq r$ obstaja tudi r'-krožno barvanje grafa G. Prav tako zlahka vidimo, da za vsak podgraf H grafa G velja $\chi_c(H) \leq \chi_c(G)$.

Prerežimo krožnico C v poljubni točki. S tem dobimo interval dolžine r, ki ga bomo zapisali kot interval $[0, r)$. Za vsak krožni lok $c(x)$ krožnice C naj $c'(x)$ označuje začetno točko krožnega loka $c(x)$, kjer $c(x)$ teče vzdolž krožnice C v smeri urinega kazalca. Potem je c' taka preslikava iz $V(G)$ v $[0, r)$, da za vsako povezavo xy grafa G velja $1 \leq |c'(x) - c'(y)| \leq r - 1$. Zgornji postopek, s katerim dobimo preslikavo c' iz preslikave c, lahko izvedemo tudi v obratni smeri. Torej lahko definiramo r-krožno barvanje grafa G tudi s pomočjo preslikave $c' : V \to [0, r)$, za katero velja $1 \leq |c'(x) - c'(y)| \leq r - 1$ za vsako povezavo xy grafa G.

Definirajmo *r-intervalno barvanje* grafa G kot preslikavo g, ki vsakemu vozlišču x grafa G priredi enotski podinterval $g(x)$ intervala $[0, r)$, tako da je presek podintervalov, ki jih priredimo sosednjima vozliščema, prazen. Vemo, da je kromatično število $\chi(G)$ grafa G najmanjše realno število r, za katero je graf G še r-intervalno obarvljiv [18]. Podobno r-intervalno barvanje grafa G ustreza preslikavi f iz množice V na interval $[0, r]$, tako da velja $1 \leq |f(x) - f(y)| \leq r - 1$ za vsako povezavo xy grafa G ter velja še $f(x) \leq r - 1$ za vsako vozlišče $x \in V$. Torej vsako r-intervalno barvanje grafa G ustreza r-krožnemu barvanju grafa G. Po drugi strani bomo za r-krožno barvanje $c' : V \to [0, r)$ definirali $s = \max\{c'(x) : x \in V\}$. V tem primeru lahko c' gledamo kot $(s+1)$-intervalno barvanje grafa G. Ker je $s < r$, dobimo naslednjo neenačbo:

Trditev 2.1 *Za vsak končen graf G velja $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.*

Trditev 2.1 velja tudi za neskončne grafe, vendar pa zgornji dokaz za take grafe ne velja več, saj množica $\{c'(x) : x \in V\}$ ne more imeti maksimuma, supremum te množice pa bi bil lahko enak 1. Razlog, zakaj je $\chi(G) - 1 < \chi_c(G)$ za neskončne grafe G (s končnim kromatičnim številom), je v tem, da če je $\chi_c(G) \leq n-1$, potem je $\chi(H) \leq n-1$ za vsak končen podgraf grafa G, iz česar sledi, da je $\chi(G) \leq n-1$.

Po trditvi 2.1 vidimo, da nam $\chi_c(G)$ pove več o grafu G kot $\chi(G)$. Če poznamo krožno kromatično število končnega grafa, potem lahko preprosto razberemo njegovo kromatično število in sicer tako, da navzgor zaokrožimo celi del krožnega kromatičnega števila. Po drugi strani pa imata lahko dva grafa z istim kromatičnim številom različni krožni kromatični števili. Krožno kromatično število torej natančneje določa strukturo grafa kot običajno kromatično število, medtem ko je kromatično število aproksimacija krožnega kromatičnega števila.

Vzemimo za ponazoritev 3-kromatičen graf. Ta seveda ni 2-obarvljiv, vendar če je njegovo krožno kromatično število blizu 2, potem je "skoraj" 2-obarvljiv. Vzemimo kot primer cikle lihe dolžine C_{2t+1}. V tem ciklu lahko z dvema barvama obarvamo vsa vozlišča razen enega in ravno zaradi tega enega vozlišča je kromatično število lihega cikla enako 3, pa čeprav je skoraj 2. S pomočjo krožnega kromatičnega števila pa pridemo do željene približne vrednosti. Ta je, kot bomo pokazali v nadaljevanju, $\chi_c(C_{2t+1}) = 2 + \frac{1}{t}$. Če nek graf G vsebuje lih cikel C_{2t+1}, potem je $\chi_c(G) \geq 2 + \frac{1}{t}$.

Trditev 2.2 *Naj bo G graf z vsaj eno povezavo. Potem je $\chi_c(G) \geq 2$, pri čemer enakost velja natanko tedaj, ko je G dvodelen graf.*

Dokaz. Iz definicije (p, q)-barvanja sledi, da je $\chi_c(G) \geq 2$, saj je $p \geq 2q$. Naj bo G dvodelen graf. Po trditvi 2.1 velja ocena $\chi_c(G) \leq \chi(G) = 2$, torej je $\chi_c(G) = 2$. Obratno, če je $\chi_c(G) = 2$, po trditvi 2.1 velja $2 = \chi_c(G) > \chi(G) - 1$. Zato velja $\chi(G) < 3$, torej $\chi(G) = 2$. To pa pomeni, da je graf G dvodelen. ∎

Lema 2.3 *Naj bosta G in K poljubna grafa in H vozliščno tranzitiven graf ter označimo z $v(G, K)$ največje število vozlišč podgrafa v G, iz katerega obstaja homomorfizem v graf K. Če obstaja homomorfizem $f : G \to H$, velja*

$$\frac{v(G, K)}{|G|} \geq \frac{v(H, K)}{|H|}.$$

Dokaz. Naj bodo $H_1, H_2, \ldots, H_s$ največji podgrafi grafa H, iz katerih obstaja homomorfizem v graf K. Ker je H vozliščno tranzitiven graf, je vsako vozlišče grafa H v istem številu grafov H_i. Označimo to število z r. Zato je

$$s \cdot v(H, K) = r \cdot |H|.$$

Označimo z G_i podgraf grafa G, induciran z množico točk $f^{-1}(V(H_i))$. Potem vsako vozlišče grafa G pripada natanko r podgrafom G_i in iz vsakega G_i obstaja homomorfizem v graf K. Zato velja

$$s \cdot v(G, K) \geq r \cdot |G|$$

in tako

$$\frac{r}{s} = \frac{v(H, K)}{|H|} \leq \frac{v(G, K)}{|G|}.$$

■

V posebnem primeru, ko je $K = K_1$, rečemo vrednosti $v(X, K)/|X|$ *razmerje neodvisnosti* in ga označimo z $i(X)$. Poleg tega označimo z $\alpha(X)$ velikost največje neodvisne množice grafa X. Torej je $i(X)$ razmerje med $\alpha(X)$ in številom vseh vozlišč grafa X. Omenimo v nadaljevanju tako imenovano lemo o ne-homomorfizmu, ki je posebni primer zgornje leme.

Lema 2.4 (Lema o ne-homomorfizmu) *Naj bo H vozliščno tranzitiven graf. Če je $G \to H$, potem je $i(G) \geq i(H)$.*

Za določene razrede grafov velja, da homomorfizmi vedno obstajajo. Tako nam izrek o štirih barvah [37] zagotavlja, da so vsi ravninski grafi homomorfni polnemu grafu K_4. Podobno Grötzschev izrek [19] pravi, da so vsi ravninski grafi brez 3-ciklov homomorfni polnemu grafu K_3.

S pomočjo leme o ne-homomorfizmu bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek 2.5 *Za poljuben graf $K_{p/q}$ velja $\chi_c(K_{p/q}) = \frac{p}{q}$.*

Dokaz. Ker za graf $K_{p/q}$ obstaja (p, q)-barvanje, moramo le še pokazati, da ne obstaja homomorfizem $f : K_{p/q} \to K_{p'/q'}$, kjer je $\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}$. Zamenjajmo G iz leme 2.4 s $K_{p/q}$, H pa s $K_{p'/q'}$. Ker je v poljubnem grafu $K_{x/y}$ moč največje neodvisne množice enaka y in je vsak graf $K_{x/y}$ vozliščno tranzitiven, velja $v(K_{x/y}, K_1) = y$. Tako po lemi 2.4 velja

$$\frac{p}{q} = \frac{|K_{p/q}|}{v(K_{p/q}, K_1)} \leq \frac{|K_{p'/q'}|}{v(K_{p/q}, K_1)} = \frac{p'}{q'}.$$

■

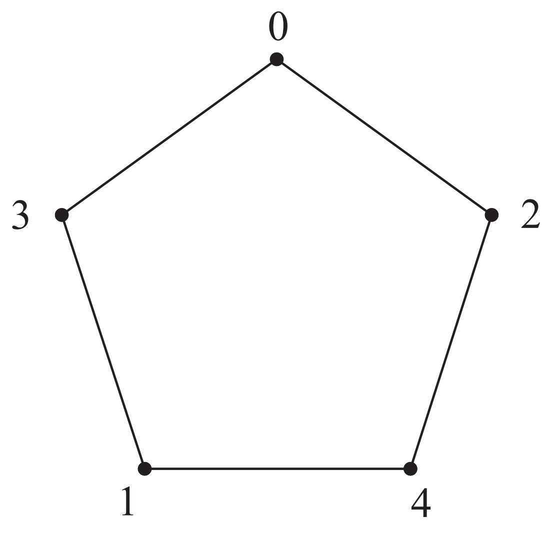
Trditev 2.6 *Če je $G \to H$, potem je $\chi_c(G) \leq \chi_c(H)$.*

Dokaz. Po definiciji je $\chi_c(G)$ infimum po vseh ulomkih p/q, tako da je $G \to K_{p/q}$. Če je $G \to H$, potem iz $H \to K_{p/q}$ sledi $G \to K_{p/q}$, kar dokazuje trditev. ■

Če hkrati velja $G \to H$ in $H \to G$, dobimo enakost $\chi_c(G) = \chi_c(H)$. Če upoštevamo, da je $K_{k/1}$ izomorfen K_k ter da je $K_{(2k+1)/k}$ izomorfen lihemu ciklu C_{2k+1}, lahko zapišemo naslednjo posledico:

Posledica 2.7 *Za polne grafe K_k in lihe cikle C_{2k+1} velja*

- $\chi_c(K_k) = k$,
- $\chi_c(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k}$.



Slika 2.2: (5/2)-barvanje grafa C_5

Pomembna lastnost krožnega kromatičnega števila končnih grafov je ta, da infimum iz definicije vedno dosežemo in ga tako lahko zamenjamo z minimumom.

Da bi prišli do tega zaključka, si bomo najprej ogledali, kaj se dogaja s krožnim kromatičnim številom grafa $K_{p/q}$, če iz njega odstranimo poljubno vozlišče. Ko je $q = 1$ in odstranimo vozlišče iz grafa K_p, dobimo poln graf K_{p-1}, kar pomeni, da se je kromatično število (pa tudi krožno kromatično število) zmanjšalo za 1. Grafom G, za katere velja $\chi(G) = k$ in $\chi(G - v) = k - 1$ za vsako vozlišče $v \in V(G)$, rečemo k-*kritični* grafi. Graf G je *krožno-kritičen*, če je $\chi_c(G - v) < \chi_c(G)$ za vsako vozlišče $v \in G$. Za poljubne vrednosti naravnega števila q lahko število, za katero se krožno kromatično število zmanjša, izračunamo na naslednji način. Če sta si naravni števili p in q tuji ter je $q > 1$ in $p \geq 2q$, potem obstajata enolični naravni števili p' in q', $0 < p' < p$, $0 < q' < q$, tako da je $pq' - qp' = 1$. To enačbo po deljenju s qq' lahko zapišemo tudi

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} - \frac{1}{qq'}.$$

Izkaže se, da se po odstranitvi enega vozlišča iz grafa $K_{p/q}$ njegovo krožno kromatično število zmanjša natanko za vrednost $1/qq'$. Vozlišče, ki ga odstranimo, imenujmo ga x, je povsem poljubno, saj je graf $K_{p/q}$ vozliščno tranzitiven. Torej je vsak krožni graf $K_{p/q}$ krožno-kritičen.

Lema 2.8 *Naj bosta p in q tuji naravni števili in naj velja $p/q \geq 2$. Naj bosta p' in q' enolični naravni števili, za kateri velja $pq' - qp' = 1$, kjer je $0 < p' < p$ in $0 < q' < q$. Potem je za vsako vozlišče x graf $K_{p/q} - x$ homomorfno ekvivalenten grafu $K_{p'/q'}$. To pa pomeni, da je*

$$\chi_c(K_{p/q} - x) = \frac{p'}{q'}.$$

Dokaz. Dovolj je pokazati le prvi del izreka, torej da je graf $K_{p/q} - x$ homomorfno ekvivalenten grafu $K_{p'/q'}$, saj vemo, da imajo homomorfno ekvivalentni grafi enako krožno kromatično število, prav tako pa smo že pokazali, da je $\chi_c(K_{p'/q'}) = p'/q'$. Oglejmo si najprej zaporedje vozlišč

$$0, q + 1, 2q + 1, \dots, (p' - 1)q + 1,$$

grafa $K_{p/q}$, kjer gledamo vrednosti po modulu p. Narišimo vozlišča grafa $K_{p/q}$ v obliki krožnice kot je bilo prikazano na slikah. Če po vrsti obiskujemo vozlišča iz zaporedja, se q'-krat zavrtimo okoli krožnice, saj je $p'q + 1 = pq'$. Po drugi strani pa z zaporedjem

$$0, q', 2q', \dots, (p' - 1)q'$$

oštevilčimo (tokrat po modulu p') vsa vozlišča grafa $K_{p'/q'}$. Tudi v tem primeru se q'-krat zavrtimo okoli krožnice, če sledimo zaporedju. Priredimo zdaj i-temu vozlišču iz prvega zaporedja i-to vozlišče iz drugega zaporedja in obratno. Tako dobimo izomorfizem med grafom $K_{p'/q'}$ in podgrafom grafa $K_{p/q}$, induciranim z množico vozlišč X, ki jo sestavljajo vozlišča $0, q+1, 2q+1, \ldots, (p'-1)q+1$. Opazimo, da $q \notin X$. Skonstruirajmo zožitev grafa $K_{p/q} - q$ na podgraf, induciran z množico vozlišč X. To bo pomenilo, da je graf $K_{p/q} - q$ (oziroma katerikoli graf $K_{p/q} - x$) homomorfno ekvivalenten grafu $K_{p'/q'}$. Zožitev f priredi vsakemu vozlišču y grafa $K_{p/q}$, ki je različno od q, največje število iz X, ki je manjše ali enako vrednosti y. Brez težav lahko preverimo, da če za vozlišči $y < y'$ velja $y + q \leq y' \leq y + p - q$, potem velja tudi $f(y) + q \leq f(y') \leq f(y) + p - q$, torej se sosednost ohranja. Ker je $f(y) = y$ za $y \in X$, je to res zožitev. ∎

Poglejmo si posledico dejstva, da je poljuben graf $K_{p/q}$ krožno-kritičen.

Posledica 2.9 *Naj za graf G velja $\chi_c(G) = \frac{p}{q}$ in naj $c : V(G) \to \mathbb{Z}_p$ predstavlja (p,q)-barvanje grafa G. Potem je c surjektivna preslikava in velja $|V(G)| \geq p$.*

Dokaz. Vsako (p,q)-barvanje grafa G je homomorfizem grafa G v graf $K_{p/q}$. Če c ni surjektivna preslikava, je c tudi homomorfizem grafa G v graf $K_{p/q} - v$ za neko vozlišče $v \in V(K_{p/q})$. Zato velja

$$\chi_c(G) \leq \chi_c(K_{p/q} - v) < \frac{p}{q},$$

kar je v nasprotju s predpostavko, da je $\chi_c(G) = \frac{p}{q}$. ∎

Ker je $p'/q' < p/q$ iz leme 2.8, si lahko ogledamo še eno posledico o krožni kritičnosti krožnih grafov.

Posledica 2.10 *Če obstaja (p,q)-barvanje grafa G, ki ne uporabi vseh barv $0, 1, \ldots, p-1$, potem obstaja (p',q')-barvanje grafa G, $p'/q' < p/q$, ki uporabi vse barve.*

Dokaz. Imejmo (p,q)-barvanje grafa G, ki ne uporabi vseh barv. To barvanje lahko predstavimo kot homomorfizem $f : G \to K_{p/q} - x$ za neko vozlišče x. Kompozicija homomorfizma f s homomorfizmom $g : K_{p/q} - x \to K_{p'/q'}$ je (p',q')-barvanje grafa G, kjer je $p'/q' < p/q$ in $p' < p$. Če tudi to barvanje ne uporabi vseh barv, potem še nadalje zmanjšamo kvocient p'/q'. Ker se naravno število p' ob vsakem koraku strogo zmanjša, moramo priti do vrednosti, ko barvanje uporabi vse barve. ∎

Če imamo graf z n vozlišči in hočemo določiti njegovo krožno kromatično število, imamo torej po posledici 2.10 na voljo (p, q)-barvanja, za katera velja $q \leq p \leq n$. Ker je parov (p, q), ki zadoščajo tej neenakosti končno mnogo, je infimum vedno dosežen in ga lahko zamenjamo z minimumom.

Posledica 2.11 *Za graf G z n vozlišči velja*

$$\chi_c(G) = \min \left\{ \frac{p}{q} : p \leq n, G \to K_{p/q} \right\}.$$

Za zaključek tega razdelka podajmo še en dokaz lastnosti, da je za končne grafe G infimum iz definicije krožnega kromatičnega števila vedno dosežen ter da je krožno kromatično število $\chi_c(G)$ vselej racionalno, le da se bomo v tej različici naslonili na nekatere druge pojme kot smo jih navedli v prejšnjih lemah in posledicah. Potrebovali bomo spodaj navedeno lemo, ki je ekvivalentna lemi, ki jo je dokazal Guichard [21] in je implicitno uporabljena v [47, 49].

Naj bo c r-krožno barvanje grafa G. Definirajmo usmerjen graf $D = D_c(G)$ na naslednji način: imejmo množico vozlišč $V(D) = V(G)$ in usmerjeno povezavo od vozlišča x do vozlišča y, če in samo če je $xy \in E(G)$ in je levo krajišče krožnega loka $c(y)$ enako desnemu krajišču krožnega loka $c(x)$. Pri tem gledamo intervale $c(v)$ v smeri urinega kazalca in je levo (oziroma desno) krajišče krožnega loka $c(v)$ začetna (oziroma končna) točka krožnega loka $c(v)$.

Lema 2.12 *Naj bo G končen graf in naj bo c r-krožno barvanje grafa G. Če je $D_c(G)$ acikličen, potem obstaja r'-krožno barvanje c' grafa G, za katerega velja $r' < r$ in $D_{c'}(G)$ vsebuje usmerjen cikel.*

Dokaz. Denimo, da je $D_c(G)$ acikličen. Za vsako vozlišče x definirajmo *nivo* $l(x)$ kot dolžino najdaljše usmerjene poti v D, ki se konča v vozlišču x. Ker je $D_c(G)$ acikličen, taka pot obstaja. Naj bo x_0 vozlišče z maksimalnim nivojem. Potem lahko interval (oziroma krožni lok) $c(x_0)$ za malenkost premaknemo v desno (t.j. v smeri urinega kazalca), ne da bi kršili pogoj, da priredimo sosednjima vozliščema disjunktna intervala. Po premiku postane vozlišče x_0 izolirano vozlišče v ustreznem digrafu. S ponavljanjem tega postopka dobimo še eno r-krožno barvanje c'', tako da digraf $D_{c''}(G)$ nima lokov. Torej lahko vsak interval $c''(x)$ raztegnemo v daljši interval, recimo v interval dolžine $s > 1$, ki še vedno ustreza pogoju, da sosednjima vozliščema priredimo disjunktna intervala. Sedaj skrčimo celo krožnico C v krožnico C' z obsegom r/s. Vsak interval (oziroma krožni lok) dolžine s na krožnici C je torej skrčen na interval dolžine 1 na krožnici C'. Tako dobimo r/s-krožno barvanje grafa G.

Ta postopek lahko ponovimo, da dobimo tako r'-krožno barvanje c', da je $r' < r$ in $D_{c'}(G)$ vsebuje usmerjen cikel. (To lahko dosežemo v enem samem koraku, če postopek pravilno uporabimo, vendar ni nič narobe, če uporabimo več korakov.) S tem smo zaključili dokaz leme 2.12. ∎

Denimo, da je c r-krožno barvanje grafa G in da je $x_0 x_1 \dots x_{p-1} x_0$ usmerjen cikel v $D_c(G)$. Iz definicije $D_c(G)$ sledi, da lahko unijo intervalov $c(x_0), c(x_1), \dots, c(x_{p-1})$ ovijemo okoli krožnice C natanko q-krat za neko naravno število q. Ker je obseg krožnice C enak r, je torej vsota dolžin teh intervalov enaka $q\,r$. Po drugi strani pa je vsak izmed p intervalov $c(x_i)$ dolžine 1, torej $p = q\,r$, iz česar sledi $r = p/q$. V tem primeru graf G vsebuje cikel dolžine p in vsako vozlišče grafa G je vsebovano v neodvisni množici velikosti q (ker se unija intervalov $c(x_i)$ ovije okoli krožnice C natanko q-krat, je zato vsaka točka krožnice C "pokrita" z neodvisno množico velikosti q).

Če sedaj uporabimo lemo 2.12, pridemo do zaključka [44], da če ima graf G r-krožno barvanje, potem ima G r'-barvanje, za katerega velja $r' \leq r$ in $r' = p/q$ za naravni števili p, q, kjer je p kvečjemu dolžina najdaljšega cikla grafa G, q pa kvečjemu velikost največje neodvisne množice grafa G. Da bi določili krožno kromatično število $\chi_c(G)$ grafa G, je torej dovolj, da ugotovimo, ali je graf G r-krožno obarvljiv, za vsako racionalno število $r = p/q$, kjer je $q \leq \alpha(G)$ in $p \leq c(G) \leq |V(G)|$ in je s $c(G)$ označena dolžina najdaljšega cikla, z $\alpha(G)$ pa velikost največje neodvisne množice grafa G. Ker je takih racionalnih števil le končno mnogo, vedno pridemo do infumuma iz definicije in je $\chi_c(G)$ racionalno število p/q, kjer je $p \leq c(G)$ in $q \leq \alpha(G)$ [44].

Problem krožnega barvanja neskončnih grafov je obravnavan v [4, 49]. Krožno kromatično število neskončnega grafa je lahko iracionalno. Vendar je bilo v [4] pokazano, da je infimum iz prve definicije krožnega kromatičnega števila dosežen tudi za neskončne grafe. Z drugimi besedami, če je $\chi_c(G) = r$, potem je graf G r-krožno obarvljiv.

Lema 2.12 velja tudi v drugo stran. Zapišimo to v naslednji lemi:

Lema 2.13 *Če je graf G r-krožno obarvljiv in če za vsako r-krožno barvanje c grafa G digraf $D_c(G)$ vsebuje usmerjen cikel, potem je $\chi_c(G) = r$. Torej ima graf G krožno* *kromatično število $\chi_c(G) = r$, če in samo če je G r-krožno obarvljiv in za vsako r-krožno barvanje c grafa G digraf $D_c(G)$ vsebuje usmerjen cikel.*

Za (p, q)-barvanje ϕ grafa G naj bo $D_\phi(G)$ digraf z množico vozlišč $V(G)$, kjer je xy usmerjena povezava, če in samo če velja $\phi(y) - \phi(x) \equiv q \pmod{p}$. Digraf $D_\phi(G)$ je analogen digrafu $D_c(G)$ za p/q-krožno barvanje, imata pa tudi podobne lastnosti. Lema 2.13 velja tudi za $D_\phi(G)$, kar bomo zapisali v naslednji lemi, ki je dokazana v [21].

Lema 2.14 *Za graf G je $\chi_c(G) = p/q$, če in samo če je G (p, q)-obarvljiv in če za vsako (p, q)-barvanje grafa G digraf $D_\phi(G)$ vsebuje usmerjen cikel.*

Lemi 2.13 in 2.14 sta zelo uporabni pri določanju krožnega kromatičnega števila grafa. Naslednji izrek prikazuje uporabo leme 2.14.

Izrek 2.15 *Naj bo G graf in $X \subset V(G)$ podmnožica množice vozlišč grafa G. Če je G (p, q)-obarvljiv, če je za vsako (p, q)-barvanje f grafa G $f(X) = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ in če je zožitev $f|X$ enolična do permutacije barv, potem je $\chi(G) = p/q$.*

Dokaz. Privzemimo, da je G graf, ki ustreza pogojem iz izreka. Ker je G (p, q)-obarvljiv, je $\chi_c(G) \leq p/q$. Privzemimo nasprotno, da je $\chi_c(G) < p/q$. Lema 2.14 potem pravi, da ima G takšno (p, q)-barvanje, da je $D_\phi(G)$ acikličen. Kot prej definirajmo nivo vozlišča v digrafa $D_\phi(G)$ kot dolžino najdaljše usmerjene poti, ki se konča v vozlišču v (takšna pot obstaja, ker je $D_\phi(G)$ acikličen). Naj bo v^* vozlišče iz X z maksimalnim nivojem. Naj bo ϕ' preslikava, definirana na naslednji način: če obstaja usmerjena pot v $D_\phi(G)$ od vozlišča v^* do vozlišča x, potem je $\phi'(x) = \phi(x) + 1 \pmod{p}$. Sicer je $\phi'(x) = \phi(x)$. Brez težav se prepričamo, da je ϕ' tudi (p, q)-barvanje grafa G. Še več, velja $\phi'|X = \phi|X$, z izjemo, da je $\phi'(v^*) \neq \phi(v^*)$. Torej $\phi'|X$ ne moremo dobiti iz $\phi|X$ s permutacijo barv (ker so nekatera vozlišča, ki so pobarvana z različnimi barvami pri barvanju ϕ sedaj pobarvana z enakimi barvami pri barvanju ϕ'). To pa je v nasprotju z našo predpostavko. ∎

2.3 Grafi, za katere velja $\chi_c(G) = \chi(G)$

Izrek 2.16 *Naj bo $\chi(G) = n$. Naj obstaja netrivialna podmnožica A množice V (t.j. $A \neq V$ in $A \neq \emptyset$), tako da je za vsako n-barvanje c grafa G poljuben barvni razred S barvanja c vsebovan bodisi v množici A bodisi v njenem komplementu (torej bodisi $S \subset A$ bodisi $S \cap A = \emptyset$). Potem je $\chi_c(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. Privzemimo, da je A podmnožica množice V, ki zadošča pogojem, navedenim v izreku, nasprotno pa privzemimo, da je $\chi_c(G) = r < n$. Naj bo c r-krožno barvanje grafa G. Najprej bomo pokazali, da za vsak $x \in A$ in vsak $y \in V \setminus A$ velja $c(x) \cap c(y) = \emptyset$. Sicer naj bo $p \in c(x) \cap c(y)$ za neki vozlišči $x \in A$ in $y \in V \setminus A$. Vzemimo točko p in razporedimo na krožnico C enakomerno n točk $p = p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dolžina krožnega loka med točkama p_i in p_{i+1} je torej $r/n < 1$, to pa pomeni, da vsak krožni lok $c(z)$ enotske dolžine vsebuje najmanj eno od točk $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pobarvajmo vozlišče z v grafu G z barvo i za nek $p_i \in c(z)$, vozlišči x in y pa z barvo 1. To je n-barvanje grafa G, ki vsebuje barvni razred, in sicer razred z barvo 1, ki pa ni niti v celoti vsebovan v množici A niti v njenem komplementu, kar nasprotuje naši predpostavki.

Označimo $P = \{p \in C : p \in c(x) \text{ za nek } x \in A\}$. Potem je $c(y) \cap P = \emptyset$ za vsak $y \in V \setminus A$. Ker je A netrivialna podmnožica množice V, vemo, da je P netrivialna podmnožica C. Naj bo q robna točka množice P. Lahko je videti, da $q \notin c(z)$ za katerokoli vozlišče $z \in V$ (pri tem je vsak krožni lok $c(z)$ odprta podmnožica C). Torej lahko krožnico C prerežemo v točki q in tako dobimo r-intervalno barvanje grafa G, kar je v nasprotju z našo predpostavko, da je $\chi(G) = n > r$. ■

Recimo, da je G k-kromatičen graf. Če G vsebuje k-kromatičen podgraf H, za katerega je $\chi_c(H) = \chi(H) = k$, potem velja

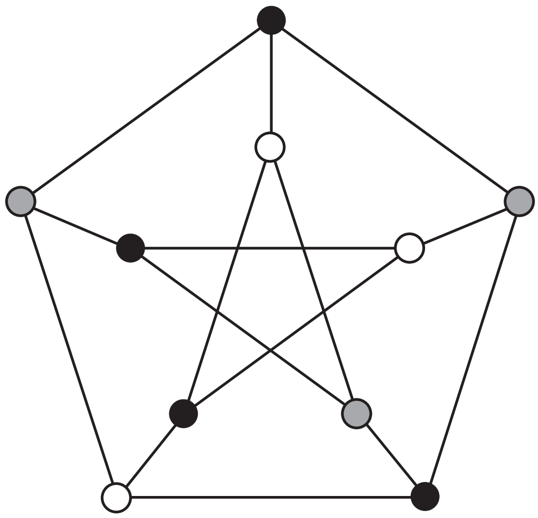
$$k = \chi(G) \geq \chi_c(G) \geq \chi_c(H) = k.$$

Torej je $\chi_c(G) = \chi(G) = k$. Vendar pa je Petersenov graf P primer grafa, ki ne zadošča pogojem izreka, pa vseeno velja $\chi_c(P) = \chi(P) = 3$.

Lema 2.17 *Naj bo P Petersenov graf. V množici $V(P)$ ne obstaja takšna netrivialna podmnožica A, da bi za vsako 3-barvanje grafa G in za poljuben barvni razred S tega barvanja veljalo $S \subset A$ ali $S \cap A = \emptyset$.*

Dokaz. Če za poljuben par nepovezanih točk grafa P obstaja 3-barvanje grafa, ki točki obarva z isto barvo, sta poljubni nepovezani točki v istem barvnem razredu kakega 3-barvanja P. Zato je $A = \emptyset$ ali $A = V(P)$, saj je komplement grafa P povezan graf.

Ker je P točkovno tranzitiven graf, je dovolj pokazati, da za izbrano vozlišče v in za poljubno vozlišče u, ki ni sosednje v, obstaja 3-barvanje grafa P, ki vozlišči u in v obarva z isto barvo.



Slika 2.3: 3-barvanje Petersenovega grafa

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da leži vozlišče v na zunanjem ciklu grafa P (slika 2.4) in da poljubno 3-barvanje grafa P obarva vozlišče v z barvo 1. Vozlišče v ni sosednje s šestimi vozlišči, ker pa je P simetričen graf, je dovolj pokazati trditev za vozlišča x, y in z na sliki 2.4. Na sliki 2.3 vidimo primer 3-barvanja grafa P, ki hkrati obarva s črno barvo (t.j. barva 1) vozlišča x, y, z in v, kar dokazuje lemo. ■

Pokažimo še, da je res $\chi_c(P) = \chi(P) = 3$. Lahko je preveriti, da je Petersenov graf 3-kromatičen. Ker je cikel C_5 njegov podgraf, velja $\chi_c(P) \geq \frac{5}{2}$. Prav tako je cikel C_6 podgraf Petersenovega grafa, zato P ni homomorfen C_5, torej velja

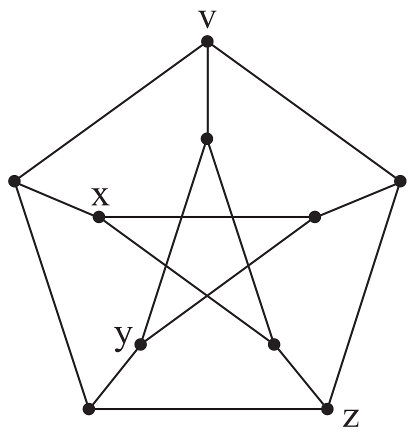
$$\frac{5}{2} < \chi_c(P) \leq 3.$$

Zaradi posledice 2.9 lahko $\chi_c(P)$ zavzame le še vrednosti $\frac{8}{3}$ ali 3.

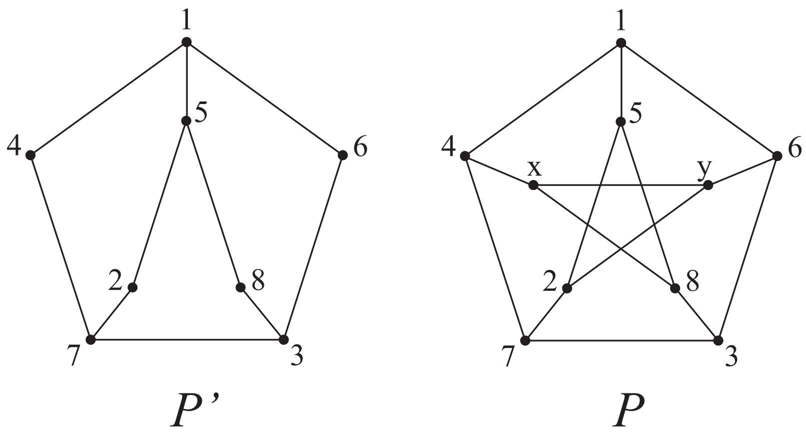
Naj bo P' podgraf Petersenovega grafa na 8 vozliščih (slika 2.5). Graf P' je podgraf grafa $K_{8/3}$, zato je $(8,3)$-obarvljiv (slika 2.5). Vidimo tudi, da je pri izbranem začetnem vozlišču in smeri barvanja $(8,3)$-barvanje grafa P' enolično določeno. Če sedaj uporabimo to $(8,3)$-barvanje na Petersenovem grafu (slika 2.5), vidimo, da ne moremo določiti barv vozliščema x in y. Torej Petersenov graf ni $(8,3)$-obarvljiv, zato je

$$\chi_c(P) = 3 = \chi(P).$$

Pogoji iz izreka 2.16 torej niso potrebni in zadostni. Obstajajo še drugi pogoji, ki



Slika 2.4: Vozlišča, ki bodo obarvana z isto barvo



Slika 2.5: Poskus $(8, 3)$-barvanja Petersenovega grafa

prav tako implicirajo $\chi_c(G) = \chi(G)$. Izkaže se, da se da vse do sedaj znane zadostne pogoje izpeljati iz izreka 2.16.

Posledica 2.18 *Če je komplement grafa G nepovezan, potem je $\chi_c(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. Če je komplement grafa G nepovezan, obstajata takšna grafa X in Y, da je $G = X + Y$. Torej dobimo G iz disjunktne unije grafov X in Y tako, da povežemo vsako vozlišče grafa X z vsakim vozliščem grafa Y. Potem očitno za nobeno barvanje grafa G ne ostaja barvni razred, ki bi vseboval vozlišča tako iz $V(X)$ kot tudi iz $V(Y)$. Množici $V(X)$ in $V(Y)$ torej zadoščata pogojem izreka 2.16. ■

Poseben primer te posledice je graf G, ki ima univerzalno vozlišče, to je vozlišče, ki je sosednje vsem ostalim vozliščem grafa G. Ta poseben primer je dokazal Zhu [49], kasneje pa tudi Guichard [21].

Posledica 2.19 *Če ima graf G univerzalno točko, potem je $\chi_c(G) = \chi(G)$.*

Posledica 2.20 *Če k-kromatičen graf G vsebuje enolično k-obarvljiv podgraf, potem je $\chi_c(G) = \chi(G) = k$.*

Dokaz. Če je $H \subseteq G$ enolično k-obarvljiv podgraf grafa G, že vsak barvni razred k-barvanja grafa H zadošča pogojem izreka 2.16. Ker velja

$$k = \chi(H) = \chi_c(H) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G) = k,$$

je $\chi_c(G) = \chi(G) = k$. ∎

Posledica 2.21 *Za vsaki naravni števili $n \geq 1$ in $g \geq 3$ obstaja graf G z notranjim obsegom vsaj g in za katerega velja $\chi_c(G) = \chi(G) = n$.*

Posebna različica posledice 2.21 odgovori na vprašanje, ki sta ga zastavila Abbott in Zhou [1]: *Ali obstaja graf G brez 3-ciklov, za katerega velja $\chi_c(G) = \chi(G) = n$?*

S konstrukcijo takih grafov se je v preteklosti ukvarjalo precej avtorjev, ki so za dokazovanje uporabili zelo različne metode oziroma prijeme. V tem delu bomo predstavili drugačno metodo konstruiranja grafov z danim krožnim kromatičnim številom. Z uporabo te metode bomo prikazali preprost način konstruiranja grafov G z notranjim obsegom vsaj g in krožnim kromatičnim številom $\chi_c(G) = r$ za vsako racionalno število $r \geq 2$.

Naj bo $r = p/q > 2$ racionalno število (kjer sta si p in q tuji števili), Q naj bo graf, a in b pa naj predstavljata dve različni vozlišči grafa Q. Trojici $(Q; a, b)$ rečemo *krepka r-krožna nadpovezava*, če sta izpolnjena naslednja pogoja:

- za vsak $|i - j|_p \geq q$ obstaja (p, q)-barvanje c grafa Q, tako da je $c(a) = i$ in $c(b) = j$;
- za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsako $(r - \varepsilon)$-krožno barvanje f grafa Q, velja $f(a) \cap f(b) = \emptyset$.

Imejmo sedaj graf G, povezavo $e = xy$ v grafu G ter trojico $(Q; a, b)$, kjer sta a in b različni vozlišči grafa Q. Če rečemo, da *zamenjamo* povezavo e s $(Q; a, b)$, s tem mislimo, da vzamemo disjunktno unijo grafov $G - e$ in Q ter identificiramo vozlišče x z vozliščem a, vozlišče y pa z vozliščem b. Dobljeni graf označimo z $G(e, (Q; a, b))$.

Izrek 2.22 *Naj bo $\chi_c(G) = r$, $e = xy$ naj bo povezava v grafu G, $(Q; a, b)$ pa krepka r-krožna nadpovezava. Če zamenjamo povezavo e s $(Q; a, b)$, ima dobljeni graf $G(e, (Q; a, b))$ krožno kromatično število še vedno enako r.*

Dokaz. Naj bo f (p, q)-barvanje grafa G. Torej je $|f(x)-f(y)|_p \geq q$. Po definiciji krepke r-krožne nadpovezave lahko barvanje f razširimo do (p, q)-barvanja grafa $G(e, (Q; a, b))$. Velja torej $\chi_c(G(e, (Q; a, b))) \leq p/q$.

Pokazati moramo še, da je $\chi_c(G(e, (Q; a, b))) \geq p/q$. Dokažimo s protislovjem. Denimo, da imamo $\varepsilon > 0$ in obstaja $(r-\varepsilon)$-krožno barvanje c grafa $G(e, (Q; a, b))$. Po definiciji krepke r-krožne nadpovezave vemo, da je $c(a) \cap c(b) = \emptyset$. Torej je c $(r-\varepsilon)$-krožno barvanje grafa G, kar je v protislovju s predpostavko, da je $\chi_c(G) = r$. ■

Izrek 2.23 *Za vsako racionalno število $r = p/q \geq 2$ in vsako naravno število $g \geq 3$ obstaja graf G z notranjim obsegom vsaj g in $\chi_c(G) = r$.*

Dokaz. Če imamo tako krepko r-krožno nadpovezavo $(Q; a, b)$, da ima graf Q notranji obseg vsaj g in razdaljo med vozliščema a in b vsaj g, potem zamenjamo vsako povezavo grafa $K_{p/q}$ s $(Q; a, b)$. Dobljeni graf označimo z G. Iz izreka 2.22 sledi, da je $\chi_c(G) = p/q$. Prav tako se lahko prepričamo, da ima graf G notranji obseg vsaj g.

Pokazati moramo torej še, da obstaja taka krepka r-krožna nadpovezava $(Q; a, b)$, kjer ima graf Q notranji obseg vsaj g, razdalja med vozliščema a in b pa je vsaj g.

Omejili se bomo le na primer, kjer je $r = n$ naravno število. Dokaz, kjer r ni naravno število, je zahtevnejši, vendar gre za podobno idejo.

Naj bo H graf z notranjim obsegom vsaj g in $\chi(H) = n + 1$. Poleg tega naj za vsako povezavo $e = aa'$ grafa H velja $\chi(H - e) = n$. (Obstaja kar nekaj postopkov konstrukcije takšnega grafa.) Dodajmo novo vozlišče b in povežimo vozlišči b in a'. Dobljeni graf označimo s Q. Pokazali bomo, da je $(Q; a, b)$ iskana krepka n-krožna nadpovezava. Graf Q ima očitno notranji obseg vsaj g, pa tudi razdalja med vozliščema a in b je vsaj g. Ker graf H ni n-obarvljiv, graf $H - e$ pa je, zaključimo, da obstaja n-barvanje f grafa $H - e$, tako da je $f(a) = f(a')$. Torej za dve različni barvi i, j obstaja n-barvanje f grafa Q, tako da velja $f(a) = i$ in $f(b) = j$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo še, da če je f $(n - \varepsilon)$-krožno barvanje grafa Q, potem je $f(a) \cap f(b) = \emptyset$. To bo veljalo, če dokažemo, da je $f(a) = f(a')$, saj je $f(b) \cap f(a') = \emptyset$ po definiciji. Privzemimo nasprotno, da za $(n - \varepsilon)$-krožno barvanje f grafa Q velja $f(a) \neq f(a')$. Spomnimo se, da f preslika vsako vozlišče v grafa Q v lok enotske dolžine na krožnici C dolžine $n - \varepsilon$. Naj bo p_0 točka na krožnici C, ki leži na krožnem loku $f(a) - f(a')$. Začenši s p_0 postavimo na krožnico C v smeri urinega kazalca zaporedoma n točk $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, tako da je razdalja med točkama p_i in p_{i-1} enaka $(n - \varepsilon)/n < 1$ za vse i. Za vsako vozlišče v je $f(v)$ lok enotske dolžine, zato vsak $f(v)$ vsebuje najmanj eno izmed točk p_i. Definirajmo n-barvanje c grafa Q na naslednji način: $c(v) = i$ če in samo če je $p_i \in f(v)$ in $p_j \notin f(v)$ za vsak $j < i$. To je res n-barvanje grafa Q, saj je vsako vozlišče grafa Q obarvano z eno od n barv, poljubni dve sosednji vozlišči pa sta obarvani z različnima barvama. Ampak $c(a) = 0$ in $c(a') \neq 0$, kar pomeni, da je c n-barvanje grafa H, to pa je v nasprotju s predpostavko, da ima graf H kromatično število enako $n + 1$. ■

Primer, ko $r = p/q$ ni naravno število, je bolj zapleten. Če sledimo zgornjemu postopku, se lahko prepričamo, da je dovolj dokazati obstoj trojice $(Q; a, a')$, za katero velja, da ima graf Q notranji obseg vsaj g, razdalja med vozliščema a in a' je vsaj $g - 1$, s tem da je graf H (p, q)-obarvljiv, in za vsako (p, q)-barvanje c grafa Q velja $f(a) = f(a')$.

Vidimo, da lahko brez težav konstruiramo graf H z notranjim obsegom vsaj g, tako da H ni (p, q)-obarvljiv, $H - e$ pa je (p, q)-obarvljiv za vsako povezavo e. (Vzamemo lahko kar graf H z notranjim obsegom vsaj g in kromatičnim številom $\lceil r \rceil + 1$ in nato, če je potrebno, odstranimo nekaj povezav tega grafa.) Naj bo sedaj $Q = H - e$, kjer je $e = aa'$ povezava grafa H. Dobimo trojico $(Q; a, a')$, kjer je graf Q (p, q)-obarvljiv, pa tudi, da za vsako (p, q)-barvanje f grafa Q velja $|f(a) - f(a')|_p \leq q - 1$. Označimo

$$m(Q; a, b) = \max\{|f(a) - f(a')|_p : \ f \text{ je } (p, q)\text{-barvanje grafa } Q\}.$$

Če je $m(Q; a, b) = 0$, končamo. Sicer s pomočjo trojice $(Q; a, b)$ skonstruiramo novo trojico $(Q'; a', b')$, za katero velja $m(Q'; a', b') < m(Q; a, b)$. Konstrukcija je precej zapletena in je podrobneje predstavljena v [34], kjer je s pomočjo dobljenih trojic dokazan naslednji močnejši izrek.

Izrek 2.24 *Naj bo $r = p/q \geq 3$, kjer sta p in q tuji naravni števili, naj bo $g \geq 3$ naravno število, X naj bo končna množica in $\{f_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ množica preslikav iz množice X v barve $\{0, 1, \ldots, p - 1\}$. Potem obstaja graf G z množico vozlišč $V \supset X$, ki ima naslednje lastnosti:*

1. *Notranji obseg grafa G je vsaj g.*

2. $\chi_c(G) = p/q$.

3. *Obstaja natanko m (p, q)-barvanj (do izomorfizma barv) $c_1, c_2, \ldots, c_m$ grafa G in za vsak i je zožitev barvanja c_i na X enaka f_i.*

2.4 Grafi, katerih $\chi_c(G)$ je blizu $\chi(G) - 1$

Pokazali smo že, da za vsak graf G velja $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$. V prejšnjem razdelku smo obravnavali primere, ko je $\chi_c(G) = \chi(G)$. V tem razdelku se bomo dotaknili druge skrajnosti, t.j. primerov, ko je $\chi_c(G)$ blizu spodnje meje $\chi(G) - 1$.

Kot smo že dejali, krožno kromatično število vsebuje več podatkov o strukturi grafa kot kromatično število. Posledica 2.20 iz prejšnjega razdelka je lep primer tega. Če je graf enolično n-obarvljiv, potem ne moremo "prihraniti" nobene barve. Torej je $\chi_c(G) = \chi(G)$. Vendar pa po drugi strani, če je graf n-kritičen (t.j. $\chi(G) = n$ in $\chi(G - v) = n - 1$ za vsako vozlišče v grafa G), potem n-te barve skoraj ne potrebujemo. V tem primeru bi torej lahko "prihranili" nekaj barve, če to gledamo v smislu krožnega kromatičnega števila in ne običajnega kromatičnega števila. Guichard je pokazal [21], da če je graf G n-kritičen in ima notranji obseg vsaj $n + 1$, potem je $\chi_c(G) < \chi(G)$. Naslednji izrek [39] prikazuje povezavo med notranjim obsegom in krožnim kromatičnim številom n-kritičnega grafa.

Izrek 2.25 *Naj bosta $m \geq 1$ in $t \geq 1$ naravni števili. Če v grafu G obstaja vozlišče x, tako da je $G - x$ m-obarvljiv, in če je vsak cikel grafa G, ki vsebuje vozlišče x, dolžine vsaj $m(t - 1) + 2$, potem je $\chi_c(G) \leq m + 1/t$.*

Dokaz. Naj bo c m-barvanje grafa $G - x$ z barvami $1, 2, \ldots, m$. Usmerimo povezave grafa G na naslednji način. Recimo, da je uv povezava v grafu G. Povezavo usmerimo od u proti v, če velja bodisi $u = x$ bodisi $c(u) < c(v)$. Ko smo definirali krožno kromatično število s pomočjo orientacije, smo rekli, da je za dokaz, da je krožno kromatično število enako p/q, dovolj najti orientacijo, pri kateri za vsak cikel C velja $|C|/|C^+| \leq p/q$ in $|C|/|C^-| \leq p/q$. Da bi dokazali izrek 2.25, je torej dovolj pokazati, da za vsak orientiran cikel C velja $|C|/|C^-| \leq m + 1/t$ in $|C|/|C^+| \leq m + 1/t$. Če cikel C ne vsebuje vozlišča x, potem je to res, saj $G - x$ ne vsebuje nobene usmerjene poti dolžine m. Če cikel C vsebuje vozlišče x, potem je $|C| \geq m(t - 1) + 2$. Torej je $C - x$ pot dolžine vsaj $m(t - 1)$. To pot bomo označili s P. Ker P ne vsebuje nobene usmerjeni poti dolžine m, imamo

$$|P^+| \leq (m - 1)(|P^-| + 1) \quad \text{in} \quad |P^-| \leq (m - 1)(|P^+| + 1),$$

kjer P^+ in P^- označujeta množico naprej oziroma nazaj usmerjenih povezav poti P. Ker je $|P| = |P^+|+|P^-| \geq m(t-1)$, lahko sklepamo, da je $|P^+| \geq t-1$ in $|P^-| \geq t-1$. Torej je $|C|/|C^-| = (|P|+2)/(|P^-|+1) \leq m+1/t$ in $|C|/|C^+| = (|P|+2)/(|P^+|+1) \leq m+1/t$, s čimer smo zaključili dokaz. ■

Posledica 2.26 *Denimo, da je graf G $(n+1)$-kritičen in da je notranji obseg grafa G vsaj $n(t-1)+2$. Potem je $\chi_c(G) \leq n + 1/t$.*

Meja iz posledice 2.26 je najboljša meja za krožno kromatično število kritičnih grafov v odvisnosti od notranjega obsega. Oglejmo si naslednji primer. Pri $n = 3$ so 3-kritični grafi kar lihi cikli in $\chi_c(C_{2t+1}) = 2 + 1/t$. Po drugi strani pa naslednji problem ostaja odprt.

Problem 2.27 *Za vsako naravno število n naj $g(n)$ označuje najmanjše naravno število, tako da za vsak n-kritičen graf G z notranjim obsegom večjim od $g(n)$ velja $\chi_c(G) < \chi(G)$. Kolikšna je vrednost $g(n)$?*

Vsekakor je $g(n) \geq 3$. Po drugi strani po posledici 2.26 velja $g(n) \leq n$. Če ima n-kritičen graf G notranji obseg večji od n, potem iz posledice 2.26 sledi, da je $\chi_c(G) \leq n - 1/2$. Torej je $g(3) = 3$. Vemo tudi, da je $g(4) = 4$. Za vsa ostala naravna števila n poznamo le meji $3 \leq g(n) \leq n$. Ne vemo niti tega, ali je funkcija $g(n)$ morda nepadajoča.

Rezultat $g(4) = 4$ je izpeljan v [10] kot del študije Mycielskijevih grafov. Če imamo graf G z množico vozlišč $V(G) = V$ in množico povezav $E(G) = E$, je *konstrukcija Mycielskega* na grafu G graf $M(G)$ z množico vozlišč $V \cup V' \cup \{u\}$, kjer je $V' = \{x' : x \in V\}$, in množico povezav $E \cup \{xy' : xy \in E\} \cup \{y'u : y' \in V'\}$. Vozlišču x' rečemo dvojček vozlišča x (seveda je po drugi strani tudi vozlišče x dvojček vozlišča x').

Splošno znano je (glej [29]), da za vsak graf G z vsaj eno povezavo velja $\omega(M(G)) = \omega(G)$ in $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$. Poleg tega lahko zlahka vidimo, da je, če je graf G k-kritičen, graf $M(G)$ $(k+1)$-kritičen. Naslednji izrek je dokazan v [10].

Izrek 2.28 *Če je $\chi(G) = 3$, potem je $\chi_c(M(G)) = 4$.*

Oglejmo si lih cikel C_{2m+1}, ki je 3-kritičen graf. Potem je $M(C_{2m+1})$ 4-kritičen graf s krožnim kromatičnim številom 4. Iz tega sledi, da je $g(4) \geq 4$. Ker pa velja $g(n) \leq n$, zaključimo, da je $g(4) = 4$.

Naslednji izrek, ki obravnava krožno kromatično število Mycielskijevih grafov, je bil dokazan v [25].

Izrek 2.29 *Denimo, da je $\chi_c(G) \leq \chi(G) - 1/d$. Potem za vsako naravno število $k \geq 1$ velja $\chi_c(M^{2k}(G)) \leq \chi(M^{2k}(G)) - 1/d$.*

$M^k(G)$ v izreku je definiran rekurzivno kot $M^k(G) = M(M^{k-1}(G))$. Če torej začnemo z grafom G, katerega $\chi_c(G)$ je blizu $\chi(G)-1$, in na njem zaporedoma uporabimo konstrukcijo Mycielskega, dobimo neskončno mnogo grafov G', katerih $\chi_c(G')$ je blizu $\chi(G') - 1$. Če je graf G barvno kritičen, potem so tudi grafi G', ki jih dobimo z zaporedno uporabo konstrukcije Mycielskega na grafu G, barvno kritični.

Izrek 2.25 namiguje, da imajo n-kritični grafi G krožno kromatično število blizu $n-1$. Vendar pa obstaja mnogo n-kritičnih grafov G, za katere velja $\chi_c(G) = \chi(G)$. Naj bo $n \geq 4$. Za vsako naravno število $1 \leq r \leq n - 3$ lahko vzamemo r-kritičen graf H in $(n - r)$-kritičen graf H'. Potem je $H + H'$ n-kritičen graf, za katerega velja $\chi_c = \chi$ (glej posledico 2.18). Tako skonstruirani grafi vedno vsebujejo vozlišče visoke stopnje. Zhou je v [44] zastavil vprašanje, ali obstaja poljubno velik n-kritičen graf G z majhno maksimalno stopnjo, za katerega velja $\chi_c(G) = \chi(G)$. Pokazal je, da obstajajo poljubno veliki 4-kritični 4-regularni grafi G, za katere velja $\chi_c(G) = \chi(G) = 4$. Vendar pa za $n \geq 5$ ostaja odprt problem, ali obstajajo poljubno veliki n-kritični grafi G, za katere velja $\chi_c(G) = \chi(G) = n$ in katerih maksimalna stopnja vozlišč grafa, $\Delta(G)$, je omejena s funkcijo števila n.

2.5 Krožni pretoki

Naj bo G graf in naj D označuje orientacijo tega grafa. *Pretok* grafa G (glede na orientacijo D) je preslikava $f : E(D) \to \mathbb{R}$, ki vsakemu loku $e = xy$ v orientaciji D priredi realno število $f(e)$, tako da za vsak prerez B grafa G velja

$$\sum_{e \in B^+} f(e) = \sum_{e \in B^-} f(e).$$

Tu smo z B označili množico povezav med podmnožicama množice vseh vozlišč grafa G. Označili ju bomo z S in $\overline{S}$, kjer je $S \in V(G)$ in $\overline{S} = V(G)\backslash S$. V enačbi je z B^+ označena množica povezav, usmerjenih od S proti $\overline{S}$, medtem ko B^- označuje množico povezav, usmerjenih od $\overline{S}$ proti S. Za realno število $r \geq 2$ je *r-pretok* grafa G glede na orientacijo D tak pretok f, da za vsak lok e velja $1 \leq |f(e)| \leq r-1$. Naj bo f r-pretok grafa G glede na orientacijo D in naj bo D' orientacija, ki jo dobimo iz orientacije D, če zamenjamo lok $e = xy$ z nasprotnim lokom $e^{-1} = yx$. Če označimo $f(e^{-1}) = -f(e)$, dobimo r-pretok grafa G glede na D'. Torej, če ima neka orientacija grafa G r-pretok, potem ima r-pretok vsaka orientacija in lahko preprosto rečemo, da ima graf G r-pretok. *Krožno pretočno število* $\phi_c(G)$ grafa brez prereznih povezav G je definirano kot

$$\phi_c(G) = \min\{r : \ G \text{ ima } r\text{-pretok}\}.$$

Ekvivalentno lahko za naravni števili $p \geq 2q \geq 2$ definiramo (p, q)*-pretok* kot preslikavo $f : E(D) \to \{\pm q, \pm(q + 1), \ldots, \pm(p - q)\}$, tako da za vsak prerez B grafa G velja

$$\sum_{e \in B^+} f(e) = \sum_{e \in B^-} f(e).$$

V tem primeru je krožno pretočno število grafa brez prereznih povezav definirano kot

$$\phi_c(G) = \min\{p/q : \ G \text{ ima } (p, q)\text{-pretok}\}.$$

Če je $q = 1$, potem $(p, 1)$-pretok f imenujemo *nikjer-ničelni* p-pretok. *Pretočno število* $\phi(G)$ grafa G brez prereznih povezav je definirano kot

$$\phi(G) = \min\{p : \ \text{obstaja nikjer-ničelni } p\text{-pretok grafa } G\}.$$

Iz definicije sledi, da za vsak graf G velja

$$\phi(G) - 1 \leq \phi_c(G) \leq \phi(G).$$

Krožno pretočno število grafa lahko definiramo tudi s pomočjo orientacij. Naj bo D orientacija grafa G in C cikel v G. *Neuravnoteženost* prereza B (glede na D) je

$$\mathrm{Imb}_D(C) = \max\left\{\frac{|B|}{|B^+|}, \frac{|B|}{|B^-|}\right\}.$$

Prerezna neuravnoteženost orientacije D je definirana kot

$$\mathrm{CutImb}(D) = \max\{\mathrm{Imb}_D(B) : B \text{ je prerez grafa } G\}.$$

Ko smo definirali krožno kromatično število, smo omenili, da če vzamemo nezaokroženo vrednost ciklične neuravnoteženosti (glej podrazdelek 2.1.4), dobimo ravno krožno kromatično število grafa. Podobno imamo v tem primeru

$$\phi_c(G) = \min\{\mathrm{CutImb}(D) : \ D \text{ je aciklična orientacija grafa } G\}.$$

2.5.1 Hipoteze o pretokih

Eno od osnovnih vprašanj glede pretočnega števila in krožnega pretočnega števila so možne vrednosti pretočnega števila in krožnega pretočnega števila grafa glede na povezanost po povezavah. Če ima graf G prerezno povezavo, potem G nima r-pretoka za noben r in $\phi(G)$ ter $\phi_c(G)$ nista definirana (oziroma jima damo vrednost ∞). Omenimo tri znane Tutteove hipoteze [40], pri katerih se pretočno število grafa nanaša na njegovo povezavno povezanost.

Hipoteza o 5-pretoku. *Vsak graf G brez prerezne povezave ima $\phi(G) \leq 5$.*

Hipoteza o 4-pretoku. *Vsak graf G brez prerezne povezave in brez Petersenovega minorja ima $\phi(G) \leq 4$.*

Hipoteza o 3-pretoku. *Vsak povezavno 4-povezan graf G ima $\phi(G) \leq 3$.*

Vse tri hipoteze so že dolgo časa odprte, imamo pa naslednji izrek, ki je skupek dognanj iz [30, 35, 48].

Izrek 2.30 (a) *Za vsako racionalno število $r \in [2, 5]$ obstaja graf G s krožnim pretočnim številom $\phi_c(G) = r$.*

(b) *Za vsak $r \in [2, 4]$ obstaja ravninski graf (in zato tudi graf brez Petersenovega minorja) G s krožnim pretočnim številom $\phi_c(G) = r$.*

(c) *Za vsak $r \in [2, 3]$ obstaja povezavno 4-povezan (ravninski) graf G s krožnim pretočnim številom $\phi_c(G) = r$.*

Naslednja pomembna hipoteza, ki jo je predstavil Jaeger [26], je posplošitev hipoteze o 5-pretoku ter hipoteze o 3-pretoku in povezuje krožno pretočno število in povezanost grafa:

Hipoteza o $(2+1/k)$-pretoku. *Vsak povezavno $4k$-povezan graf G ima $\phi_c(G) \leq 2+1/k$.*

Hipoteza pravi, da imajo grafi brez majhnih prerezov majhno krožno pretočno število. Da bi imel graf majhno krožno pretočno število, je očitno pomembno, da v grafu ni majhnih lihih prerezov. Definirajmo *liho povezanost po povezavah* grafa G kot najmanjše liho število k, za katero obstaja prerezna povezava moči k. Glede na lihe povezanosti je Zhang [42] nadgradil Jaegerjevo hipotezo v močnejšo verzijo:

Hipoteza o $(2+1/k)$-pretoku (močnejša različica). *Vsak graf G z liho povezanostjo po povezavah vsaj $4k+1$ ima $\phi_c(G) \leq 2+1/k$.*

Pri $k=1$ je ta hipoteza kar hipoteza o 3-pretoku, pri $k=2$ pa pridemo do hipoteze o 5-pretoku. Da bi to pokazali, denimo, da je hipoteza o $(2+1/k)$-pretoku veljavna za $k=2$. Da bi dokazali, da je hipoteza o 5-pretoku veljavna, je dovolj pokazati, da ima vsak povezavno 3-povezan kubični graf G nikjer-ničelni 5-pretok [43]. Zamenjajmo vsako povezavo grafa G s tremi vzporednimi povezavami. Dobljeni graf G' je povezavno 9-povezan in ima zato krožno pretočno število $\phi_c(G') \leq 5/2$. Naj bo D orientacija grafa G in D' orientacija grafa G', ki jo dobimo iz D, tako da zamenjamo vsak lok orientacije D s tremi loki, usmerjenimi v isto smer. Naj bo f $(5,2)$-pretok na D'. Za vsak lok a orientacije D naj a_1, a_2, a_3 označujejo tri vzporedne loke orientacije D', s katerimi zamenjamo lok a. Potem je $g(a) \equiv [f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)] \pmod{p}$ nikjer-ničelni $\mathbb{Z}_5$-pretok na D, iz česar sledi $\phi(G) \leq 5$ [43].

Kljub temu, da so hipoteze o 5-pretoku, 4-pretoku in 3-pretoku še odprte, pa so njihove zožitve na ravninske grafe dokazane. Hipoteza o 5-pretoku se namreč prevede na izrek o petih barvah [14], hipoteza o 4-pretoku se prevede na izrek o štirih barvah [37], medtem ko se hipoteza o 3-pretoku prevede na Grötzschev izrek [19]. Za hipotezo o $(2+1/k)$-pretoku pa njena zožitev na ravninske grafe ostaja odprt problem. Za ravninske grafe je krožno pretočno število grafa G enako krožnemu kromatičnemu številu njegovega geometrijskega duala G^*. Liha povezanost po povezavah grafa G je ekvivalentna lihemu notranjemu obsegu grafa G^*. Torej je zožitev močnejše verzije hipoteze o $(2+1/k)$-pretoku na ravninske grafe ekvivalentna naslednji hipotezi:

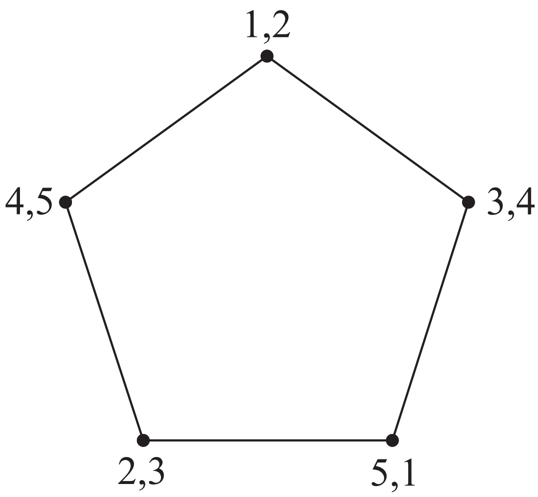
Hipoteza o $(2+1/k)$-pretoku za ravninske grafe (močnejša različica). *Vsak ravninski graf G z lihim notranjim obsegom vsaj $4k+1$ ima $\chi_c(G) \leq 2+1/k$.*

Krožno kromatično število ravninskih grafov z velikim notranjim obsegom ali velikim lihim notranjim obsegom je preučevano v večih študijah. Najboljši znani rezultat je naslednji izrek, ki ga bomo dokazali v nadaljevanju diplomskega dela:

Izrek 2.31 *Če je G ravninski graf z lihim notranjim obsegom vsaj $\frac{20k-2}{3}$, potem je $\chi_c(G) \leq 2 + 1/k$.*

3 Deljeno barvanje

Oglejmo si sedaj eno od posplošitev običajnega barvanja grafov. Vendar pa tokrat posameznemu vozlišču ne bomo dodelili ene barve, temveč bomo vsakemu vozlišču dodelili množico k barv, ob tem pa bomo zahtevali še, da sta sosednjima vozliščema dodeljeni disjunktni množici barv. Takemu dodeljevanju barv rečemo *k-terno barvanje*, oziroma *k-terno n-barvanje*, če izbiramo med n barvami. (Pri tem bomo vedno privzeli, da je $0 < k \leq n$.) Po tej definiciji je 1-terno n-barvanje očitno kar običajno n-barvanje. Slika 3.1 prikazuje 2-terno 5-barvanje cikla C_5.

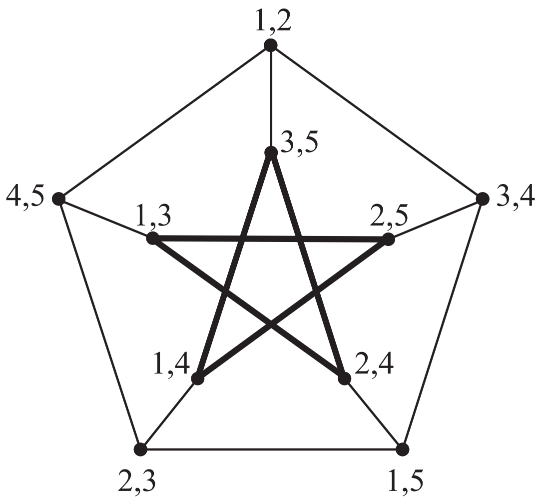


Slika 3.1: 2-terno 5-barvanje cikla C_5

Spet lahko vidimo, da so taka multibarvanja homomorfizmi v ustrezne ciljne grafe. Označimo s $K(n,k)$ graf, čigar množica vozlišč so ravno vse različne podmnožice množice $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ s k elementi, kjer sta dve vozlišči sosednji, če in samo če sta jima dodeljeni disjunktni podmnožici. To pomeni, da je k-terno n-barvanje grafa G natanko homomorfizem iz grafa G v graf $K(n,k)$. Tem grafom $K(n,k)$ rečemo *Kneserjevi grafi*. Naslednja trditev nam pove, da Kneserjevi grafi vsebujejo ustrezne krožne grafe. Tako spet pridemo do zaključka, da so Kneserjevi grafi za deljeno barvanje ravno to, kar so polni grafi za običajno barvanje in krožni grafi za krožno barvanje.

Trditev 3.1 *Krožni graf $K_{p/q}$ je izomorfen induciranemu podgrafu Kneserjevega grafa $K(p,q)$.*

Dokaz. Sestavimo graf $K(p,q)$ iz množice $X = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Iz definicij grafov $K_{p/q}$ in $K(p,q)$ sledi, da je preslikava, ki vsakemu vozlišču $x = 0, 1, \ldots, p-1$ grafa $K_{p/q}$ priredi q-terico $\{x, x+1, \ldots, x+q-1\}$ grafa $K(p,q)$, izomorfizem grafa $K_{p/q}$ v podgraf grafa $K(p,q)$, ki je induciran s temi "krožno zaporednimi" podmnožicami s q elementi. Na sliki 3.2 je prikazano, da je graf $K_{5/2}$ (označen je s temnejšimi povezavami) podgraf grafa $K(5,2)$. ■



Slika 3.2: Petersenov graf $K(5,2)$ vsebuje $K_{5/2}$ kot induciran podgraf

Deljeno kromatično število grafa G, označimo ga s $\chi_f(G)$, je infimum po vseh ulomkih n/k, za katere v grafu G obstaja k-terno n-barvanje. S slike 3.1 je razvidno, da je deljeno kromatično število cikla C_5 največ $5/2$. Kasneje bomo s posledico 3.7 pokazali, da je deljeno kromatično število cikla C_5 natanko $5/2$. Za fiksno število k je najmanjše število n, za katero v grafu G obstaja k-terno n-barvanje, imenovano *k-terno kromatično število* grafa G in ga označimo s $\chi^k(G)$. Torej je $\chi_f(G) = \inf \chi^k(G)$.

Trditev 3.1 nas pripelje do naslednjega zaključka o spodnji meji krožnega kromatičnega števila $\chi_c(G)$ (zgornjo mejo poznamo že iz trditve 2.1):

Posledica 3.2 *Za vsak graf G velja $\chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$.*

Ker je $\chi_f(G)$ infimum po ulomkih n/k, za katere obstaja homomorfizem $G \to K(n,k)$, tudi tu velja monotonost deljenega kromatičnega števila glede na homomorfizme, podobno kot smo videli že v trditvi 2.6 in posledici 1.7.

Trditev 3.3 *Če je $G \to H$, potem je $\chi_f(G) \leq \chi_f(H)$.*

Deljeno kromatično število je v bistvu rešitev linearnega programa. Formulirajmo za začetek običajno kromatično število kot 0,1 linearni program. Naj bo G graf in naj bo x_I 0,1 spremenljivka za vsako neodvisno množico vozlišč $I \subset V(G)$. Potem lahko n-barvanje grafa G predstavimo kot množico n neodvisnih množic I, ki predstavljajo particijo množice $V(G)$. Če določimo vrednosti $x_I = 1$ za neke množice I in vrednosti $x_I = 0$ za ostale množice I, imamo rešitev naslednjega sistema:

$$\begin{aligned} \sum_I x_I &= n \\ \sum_{v \in I} x_I &= 1, \text{ za vse } v \in V(G). \end{aligned}$$

Prva enačba pravi, da je bilo izbranih natanko n neodvisnih množic I, druga pa, da je vsako vozlišče v grafa G vsebovano v natanko eni izmed izbranih neodvisnih množic. Velja pa tudi obratno: vsaka 0,1 rešitev zgornjih enačb določa n-barvanje grafa G. Zapišimo vse to v naslednjem izreku.

Izrek 3.4 *Kromatično število $\chi(G)$ grafa G je enako optimalni vrednosti celoštevilskega linearnega programa*

$$\begin{aligned} &\min \sum_I x_I \\ &\sum_{v \in I} x_I = 1, \ \textit{za vse } v \in V(G) \\ &x_I = 0, 1, \ \textit{za vse neodvisne množice } I. \end{aligned}$$

Oglejmo si sedaj zvezno posplošitev tega celoštevilskega linearnega programa. Kaj bi se zgodilo, če bi možne vrednosti spremenljivke $x_I = 0, 1$ posplošili do $x_I \geq 0$? Očitno vrednost spremenljivke x_I ne sme biti večja od 1, torej nam vrednost x_I pomeni "stopnjo izbranosti" neodvisne množice I. To lahko podkrepimo še z dejstvom, da ima linearni program s celoštevilskimi koeficienti optimum z racionalnimi vrednostmi svojih spremenljivk

[11]. Denimo torej, da imamo racionalni optimum x_I našega linearnega programa, kjer je I neodvisna množica. Naš program je omejen, zato optimum obstaja. Privzamemo lahko, da imajo vsi ulomki x_I isti imenovalec k. Če enačbo pomnožimo s tem številom k, dobimo celoštevilske vrednosti spremenljivk x_I. Če ima vsota

$$\sum_I x_I$$

vrednost n, to pomeni, da smo izbrali n neodvisnih množic (isto množico lahko izbremo tudi večkrat), ki pokrijejo vsako vozlišče grafa G natanko k-krat, kar pomeni, da imamo k-terno n-barvanje grafa G. Ker smo enačbo pomnožili s k, ima originalna rešitev vrednost n/k. Po drugi strani pa je očitno, da vsako k-terno n-barvanje grafa G predstavlja rešitev linearnega programa, saj k-terno n-barvanje ustreza n neodvisnim množicam I, ki k-krat pokrijejo vsako od vozlišč. Torej, če vsaki spremenljivki x_I dodelimo vrednost $1/k$, imamo rešljiv program, katerega rešitev ima vrednost n/k. Zberimo vse to v naslednjem izreku.

Izrek 3.5 *Deljeno kromatično število grafa G je najmanjši ulomek n/k, tako da za graf G obstaja k-terno n-barvanje. Poleg tega je $\chi_f(G)$ vedno racionalno število.*

Preden zaključimo z linearnimi programi, vidimo, da lahko naš program preuredimo v program

$$\begin{aligned}
&\min \sum_I x_I \\
&\sum_{v \in I} x_I \geq 1, \text{ za vse } v \in V(G) \\
&x_I \geq 0, \text{ za vse neodvisne množice } I,
\end{aligned}$$

ne da bi s tem spremenili njegovo rešitev. Vsako rešitev tega spremenjenega programa namreč lahko spremenimo v rešitev originalnega programa na naslednji način: če za vozlišče v velja $\sum_{v \in I} x_I > 1$, zmanjšamo vrednost nekaterih spremenljivk x_I, kjer je I neodvisna množica in $v \in I$, po drugi strani pa za isto vrednost povečamo vrednost spremenljivk x_{I-v} (podmnožica neodvisne množice je spet neodvisna). Za naš spremenjeni program lahko formuliramo dual na naslednji način:

$$\begin{aligned}
&\max \sum_v y_v \\
&\sum_{v \in I} y_v \leq 1, \text{ za vse neodvisne množice } I \\
&y_v \geq 0, \text{ za vse } v \in V(G).
\end{aligned}$$

V tem linearnem programu dodelimo nenegativne vrednosti y_v vozliščem grafa G, tako da je vsota vrednosti po vseh neodvisnih množicah največ 1, pri tem pa skušamo maksimizirati vsoto po vseh vrednostih vozlišč. Če so vse vrednosti y_v celoštevilske (v našem primeru bi bilo to ali 0 ali 1), je z množico vseh vozlišč v z $y_v = 1$ definirana maksimalna klika grafa G. Rešitev tega linearnega programa zato imenujemo *deljeno klično število* grafa G.

Deljeno klično število smo definirali zato, ker si z njim pomagamo pri določevanju spodnje meje deljenega kromatičnega števila $\chi_f(G)$. Vsaka rešitev y_v (kjer je $v \in V(G)$) dualnega linearnega programa nam da spodnjo mejo $\sum_v y_v \leq \chi_f(G)$.

Posledica 3.6 *Naj bo G graf z n vozlišči in velikostjo največje neodvisne množice α. Potem velja*

$$\chi_f(G) \geq \frac{n}{\alpha}.$$

Posledica 3.7 *Za vsako naravno število k velja*

$$\chi_f(C_{2k+1}) = 2 + 1/k.$$

Dokaz. Ker je $C_{2k+1} = K_{(2k+1)/k}$, velja $\chi_f(C_{2k+1}) \leq \chi_c(C_{2k+1}) = 2 + 1/k$ (k-terno $2k+1$-barvanje cikla C_{2k+1} je za primer $k = 2$ prikazano na sliki 3.1). Po drugi stani pa je $\chi_f(C_{2k+1}) \geq (2k+1)/k$ po posledici 3.6. ■

4 Orientirano in aciklično barvanje

V tem poglavju se bomo ukvarjali z usmerjenimi grafi (oz. digrafi) brez večkratnih povezav (t.j. lokov) med vozlišči. *Orientacija* (neusmerjenega) grafa G je digraf, ki ga dobimo iz grafa G, če vsaki povezavi dodelimo eno izmed dveh možnih usmeritev. Kot v primeru običajnega barvanja grafov lahko tudi barvanje usmerjenih grafov predstavimo s pomočjo homomorfizmov. *Orientirano k-barvanje* usmerjenega grafa H je particija množice $V(H)$ na k barvnih razredov, tako da velja:

(i) nobeni dve sosednji vozlišči ne pripadata istemu barvnemu razredu;

(ii) vsi loki med dvema barvnima razredoma morajo biti enako usmerjeni.

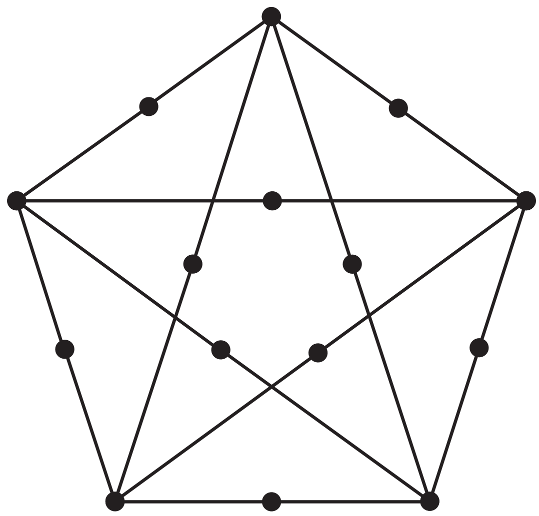
Orientirano kromatično število usmerjenega grafa H, označeno z $\chi_o(H)$, definiramo kot najmanjše naravno število k, za katerega obstaja orientirano k-barvanje grafa H, oziroma ekvivalentno, kot najmanjše število vozlišč usmerjenega grafa H', za katerega obstaja homomorfizem $H \to H'$. To idejo lahko razširimo na neusmerjene grafe G na naslednji način. Orientirano kromatično število grafa G (tudi tega označimo s $\chi_o(G)$) je definirano kot maksimum orientiranih kromatičnih števil $\chi_o(G')$ po vseh orientacijah G' grafa G. Orientirano kromatično število grafa G je torej orientirano kromatično število "najslabše" izmed orientacij grafa G.

Opazimo lahko, da iz pogojev (i) in (ii) sledi, da morata biti dve poljubni vozlišči, ki sta povezani z usmerjeno potjo dolžine 1 ali 2, obarvani z različnima barvama v kateremkoli orientiranem barvanju. Tako dobimo, na primer, da je orientirano kromatično število usmerjenega cikla na petih vozliščih ravno 5. Po drugi strani pa je $\chi_o(\vec{C}_6) = 3$. To lastnost lahko drugače povemo s tem, da rečemo, da homomorfizmi usmerjenih grafov "ohranjajo" usmerjene poti dolžine 2 (slika take poti je spet usmerjena pot dolžine 2).

Imejmo graf z n vozlišči in m povezavami, njegovo orientirano kromatično število pa naj bo največ k. Obstaja 2^m različnih orientacij tega grafa, vsaka od particij vozlišč v k razredov pa je lahko orientirano k-barvanje za največ $2^{\binom{k}{2}}$ teh orientacij. Ker je takih particij največ k^n, dobimo neenačbo

$$2^m \leq 2^{\binom{k}{2}} \cdot k^n. \tag{4.1}$$

Oglejmo si naslednji primer. Na sliki 4.1 vidimo graf, ki ga dobimo iz polnega grafa K_n, če vsako povezavo tega grafa razpolovimo z novim vozliščem (na sliki 4.1 je primer za $n = 5$). Kromatično število dobljenega grafa je 2, saj je graf dvodelen, vendar pa je njegovo orientirano kromatično število vsaj n, saj lahko povezave v grafu usmerimo tako, da je vsak par začetnih vozlišč (to so vozlišča, ki določajo graf K_n) povezan z usmerjeno potjo dolžine 2 in morajo biti zato obarvana z različnimi barvami.



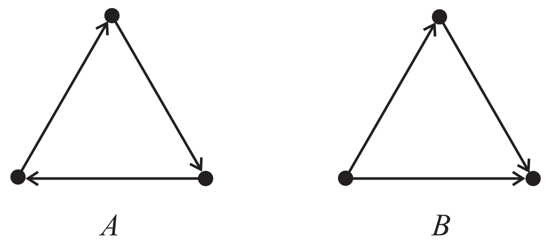
Slika 4.1: Dvodelen graf z orientiranim kromatičnim številom večjim od 4

Trditev 4.1 *Če je G drevo, potem je $\chi_o(G) \leq 3$.*

Dokaz. Iz vsakega drevesa z usmerjenimi povezavami obstaja homomorfizem v $\vec{C}_3$ (t.j. usmerjen 3-cikel). Poljubno si izberemo sliko enega izmed vozlišč drevesa, nato pa po definiciji homomorfizma rekurzivno določimo ostale slike. Denimo, da vozlišče v preslikamo v vozlišče i cikla $\vec{C}_3$. Če je vw lok v drevesu G, potem preslikamo vozlišče w v vozlišče $i + 1$ (po modulu 3). Podobno, če je uv lok v grafu G, preslikamo vozlišče u v vozlišče $i - 1$ (po modulu 3). ∎

Z enakim dokazom se prepričamo, da iz vsakega drevesa z usmerjenimi povezavami obstaja homomorfizem v usmerjen 4-cikel, t.j. $\vec{C}_4$. Še več, iz drevesa z usmerjenimi povezavami, ki je obarvano z dvema barvama (kjer sta sosednji vozlišči vedno obarvani z različnima barvama), obstaja homomorfizem v $\vec{C}_4$, tako da preslikamo vozlišča, ki so obarvana z eno barvo v vozlišči 0 oziroma 2, vozlišča druge barve pa v vozlišči 1 oziroma 3 (kjer so z $0, 1, 2, 3$ označena vozlišča usmerjenega cikla $\vec{C}_4$).

V splošnem ni res, da je orientirano kromatično število grafa G kvečjemu enako največjemu orientiranemu kromatičnemu številu njegovih komponent. Kot primer vzemimo usmerjen 3-cikel A in tranzitivno trojico B. Ta dva grafa sta prikazana na sliki 4.2. Orientirano kromatično število vsakega od njiju je 3, vendar pa je orientirano kromatično število njune disjunktne unije enako 4. Po drugi strani pa iz zgornje trditve in sledečih opazk sledi, da za vsak gozd z usmerjenimi povezavami obstaja orientirano 3-barvanje in da iz vsakega gozda z usmerjenimi povezavami, obarvanega z dvema barvama, obstaja homomorfizem v $\vec{C}_4$, kjer slikamo vozlišča ene barve v soda vozlišča, vozlišča druge barve pa v liha.



Slika 4.2: Digraf z orientiranim kromatičnim številom 4

Oglejmo si sedaj povezavo med orientiranim barvanjem in naslednjo obliko barvanja. *Aciklično k-barvanje* grafa G je k-barvanje grafa G v običajnem smislu, kjer je vsak cikel obarvan z vsaj tremi barvami. Z drugimi besedami, barvanje grafa G je aciklično, če je vsak podgraf grafa G, induciran z dvema barvnima razredoma, gozd. Aciklično kromatično število, $\chi_a(G)$, grafa G je najmanjše naravno število k, za katerega obstaja aciklično k-barvanje grafa G.

V [9] je dokazano, da v vsakem ravninskem grafu obstaja aciklično 5-barvanje. Ta dokaz je zelo obsežen, zato ga bomo spustili. Dokazano je tudi, da je ocena o acikličnem 5-barvanju najboljša možna. To pomeni, da obstajajo ravninski grafi, za katere ne obstaja aciklično 4-barvanje.

Izrek 4.2 *Če v grafu G obstaja aciklično k-barvanje, potem je $\chi_o(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$.*

Dokaz. Označimo s c aciklično k-barvanje grafa G. Vzemimo poljubni barvi i in j, $i < j$. Množica vozlišč v iz grafa G, za katere velja $c(v) = i$ ali $c(v) = j$, inducira gozd v grafu G.

Označimo ga z $F_{i,j}$. Vsaka orientacija G' grafa G določa ustrezno orientacijo $F'_{i,j}$ gozda $F'_{i,j}$. Pri tem so vozlišča grafa $F'_{i,j}$ obarvana z i in j, tako da sta sosednji vozlišči obarvani z različnima barvama. Kot smo že ugotovili, obstaja homomorfizem $c_{i,j} : F'_{i,j} \to C_4$, ki vsa vozlišča v, za katera je $c(v) = i$, preslika v soda vozlišča cikla C_4, vsa vozlišča, za katera je $c(v) = j$ pa v liha vozlišča cikla C_4.

Definirajmo sedaj preslikavo na množici vozlišč orientacije G'. Vsako vozlišče v iz G' pripada $k-1$ gozdovom, ki so obarvani z dvema barvama. Naj bo $c(v) = l$. Potem vozlišče v leži v orientiranih gozdovih

$$F'_{1,l}, F'_{2,l}, \ldots, F'_{l-1,l}, F'_{l,l+1}, \ldots, F'_{l,k}.$$

Definirajmo

$$f(v) = (l; c_{1,l}(v), c_{2,l}(v), \ldots, c_{l-1,l}(v), c_{l,l+1}(v), \ldots, c_{l,k}(v)).$$

Število vrednosti, ki jih lahko zavzame f, je $k \cdot 2^{k-1}$, saj imamo k možnih vrednosti za l, za vsakega od teh pa lahko vsaka druga komponenta $f(v)$ zavzame le eno izmed dveh možnih vrednosti (za $c_{i,l}$ sta ti vrednosti 0 ali 2, za $c_{l,j}$ pa 1 ali 3).

Trdimo, da je f orientirano barvanje grafa G'. Jasno je, da so sosednja vozlišča različno obarvana, saj so različno obarvana že pri barvanju c. Preveriti moramo torej še, da je homomorfna slika $f(G')$ usmerjen graf, t.j. ne obstajata loka $xy, zt \in E(G')$, za katera bi veljalo $f(x) = f(t)$ in $f(y) = f(z)$. Privzemimo nasprotno, da sta xy in zt takšna loka. Potem je $c(x) = c(t)$ in $c(y) = c(z)$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je $c(x) = c(t) = i < j = c(y) = c(z)$. Potem so x, y, z, t vozlišča grafa $F'_{i,j}$ in $c_{i,j}$ homomorfizem iz $F'_{i,j}$ v C_4. To pa je nemogoče, saj iz tega sledi, da sta $c_{i,j}(x)c_{i,j}(y)$ in $c_{i,j}(z)c_{i,j}(t) = c_{i,j}(y)c_{i,j}(x)$ loka v orientiranem ciklu C_4. ∎

Posledica 4.3 *Vsak usmerjen ravninski graf je orientirano 80-obarvljiv.*

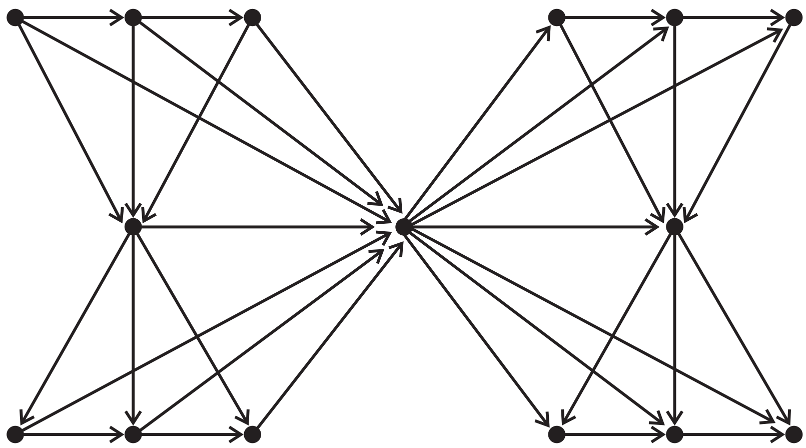
Dokaz. Omenili smo že, da je v [9] dokazano, da v vsakem ravninskem grafu obstaja aciklično 5-barvanje. Če $k = 5$ vstavimo v izrek 4.2, dobimo $\chi_o(G) \leq 80$. ∎

V naslednji posledici omenimo nekaj grafov z omejenim orientiranim kromatičnim številom. Pojmov drevesna širina in rod, ki se pojavljata v posledici, v nadaljevanju ne bomo več srečali, zato jih ne bomo posebej definirali. Definiciji teh dveh pojmov si lahko ogledate v [14].

Posledica 4.4 *Grafi z omejeno stopnjo vozlišč, omejeno drevesno širino ali omejenim rodom, imajo omejeno orientirano kromatično število.*

Dokaz. Iz [12] vemo, da imajo grafi z omejeno stopnjo vozlišč, omejeno drevesno širino ali omejenim rodom, omejeno aciklično kromatično število, torej je po izreku 4.2 omejeno tudi njihovo orientirano kromatično število. ∎

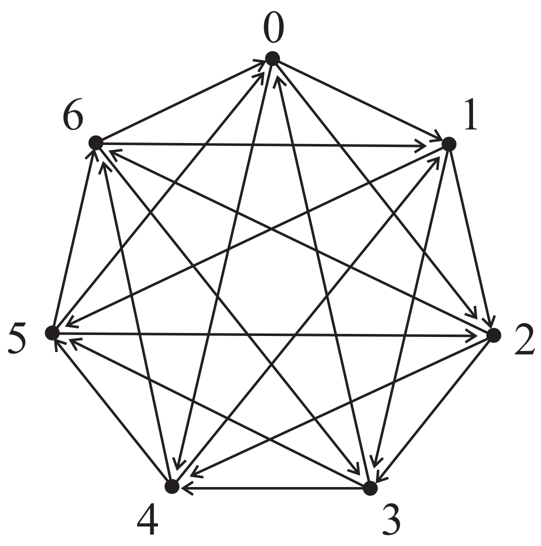
Znano je, da obstajajo usmerjeni ravninski grafi z orientiranim kromatičnim številom vsaj 16 [38]. Konstrukcija takih grafov je precej zapletena, zato bomo na sliki 4.3 predstavili usmerjen graf z orientiranim kromatičnim številom 15. Zlahka se lahko prepričamo, da med dvema nesosednjima vozliščema obstaja usmerjena pot dolžine 2. Torej ne obstaja homomorfizem v manjši usmerjen graf. Orientirano kromatično število tega grafa je zato enako številu njegovih vozlišč, to pa je 15.



Slika 4.3: Ravninski graf z orientiranim kromatičnim številom 15

Izrek 4.5 *Vsak usmerjen zunanje ravninski graf je orientirano 7-obarvljiv.*

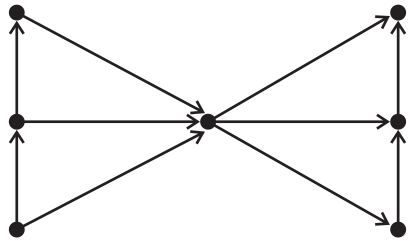
Dokaz. Pokazali bomo, da iz vsakega usmerjenega zunanje ravninskega grafa obstaja homomorfizem v turnir kvadratičnih ostankov T na sedmih vozliščih, ki je prikazan na sliki 4.4. Vozlišča so $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, loki pa ij, za katere velja, da je $j-i$ kongruentno 1, 2 ali 4 po modulu 7. Privzemimo nasprotno, da je G minimalni protiprimer, torej usmerjen zunanje ravninski graf, za katerega ne obstaja homomorfizem v T in ima najmanjše število vozlišč. Privzamemo lahko, da je G maksimalen zunanje ravninski graf. Torej G vsebuje



Slika 4.4: Turnir kvadratičnih ostankov T na sedmih vozliščih

vozlišče x, ki je sosednje z natanko dvema vozliščema y, z. Označimo z G' usmerjen graf, ki ga dobimo iz G, če odstranimo vozlišče x in dodamo lok yz, če $yz, zy \notin E(G)$. Potem je G' tudi zunanje ravninski graf in obstaja homomorfizem v T. Sliki vozlišč y in z sta dve različni vozlišči grafa T. Graf T ima to lepo lastnost, da za poljubni dve različni vozlišči in poljubno izbiro smeri obstaja vozlišče, ki je z izbranima vozliščema povezano v izbranih smereh. Torej lahko homomorfizem iz G' v T razširimo do G. ■

Na sliki 4.5 je predstavljen zunanje ravninski graf G z orientiranim kromatičnim številom $\chi_o(G) = 7$. (Opazimo lahko, da je ravninski graf s slike 4.3 sestavljen iz dveh kopij tega grafa G.)



Slika 4.5: Zunanje ravninski digraf z orientiranim kromatičnim številom 7

Med orientiranim in acikličnim kromatičnim številom obstaja zelo močna povezava. Ne samo, da je orientirano kromatično število omejeno s funkcijo acikličnega kromatičnega števila, ampak velja tudi obrat. Tudi aciklično kromatično število grafa je omejeno z njegovim orientiranim kromatičnim številom.

Prikažimo za začetek mejo v smislu orientiranega kromatičnega števila. Pri tem bomo privzeli, da lahko povezave grafa pokrijemo z omejenim številom dreves.

Trditev 4.6 *Naj bo G graf. Denimo, da je $\chi_o(G) \leq k$ in da lahko $E(G)$ razbijemo na q gozdov. Potem je $\chi_a(G) \leq k^{q+1}$.*

Dokaz. Privzemimo, da so $T_1, T_2, \ldots, T_q$ gozdovi, katerih množice povezav predstavljajo particijo množice $E(G)$. Naj bo G_0 poljubna orientacija grafa G in naj bo G_i orientacija, dobljena iz G_0, če obrnemo vse loke v T_i, $i = 1, 2, \ldots, q$. Naj bo f_i orientirano k-barvanje orientacije G_i. Sedaj lahko definiramo aciklično barvanje grafa G, tako da vsakemu vozlišču x dodelimo barvo $(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_q(x))$. Sosednji vozlišči grafa G sta očitno obarvani z različnima barvama, saj jima vsak f_i dodeli različno sliko. Privzemimo, da v grafu G obstaja cikel C, katerega vozlišča so alternirajoče obarvana z dvema barvama, na primer z barvama

$$(a_0, a_1, \ldots, a_q) \quad \text{in} \quad (b_0, b_1, \ldots, b_q).$$

Ker je f_0 orientirano barvanje grafa G_0, so vse povezave (oziroma v našem primeru loki) med vozlišči iz G_0, ki so obarvana z barvo a_0, in tistimi, ki so obarvana z barvo b_0, usmerjene v isto smer. Torej je cikel C v G_0 orientiran, vendar ne vsebuje nobene usmerjene poti dolžine 2. Enako lahko ponovimo za vsak G_i, vendar pa to ne more držati, saj obstaja gozd T_j, ki vsebuje (in zato obrne) nekatere loke v C, ne pa vseh. ∎

Iz Nash-Williamsovega prispevka [31] vemo, da najmanjše število gozdov, ki pokrivajo povezave grafa G enako maksimumu izraza

$$\left\lceil \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1} \right\rceil$$

po vseh podgrafih H grafa G.

Izrek 4.7 *V vsakem grafu G s $\chi_o(G) = k$ lahko njegove povezave pokrijemo s kvečjemu $\lceil \log_2 k + k/2 \rceil$ gozdovi.*

Dokaz. Naj bo H podgraf grafa G z n vozlišči in m povezavami. Če je $n \leq k$, potem je $m/(n-1) \leq n/2 \leq k/2$. Torej lahko privzamemo, da je $n > k$. Ker je $\chi_o(H) \leq \chi_o(G) \leq$

k, lahko uporabimo neenakost $2^{\binom{k}{2}} k^n \geq 2^m$ iz (4.1). Dobimo, da je $\log_2 k \geq m/n - \binom{k}{2}/n$. Torej imamo

$$\begin{aligned}
\log_2 k &\geq \frac{m}{n} - \frac{k(k-1)}{2n} \\
&> \frac{m}{n-1} - \frac{m}{n(n-1)} - \frac{k-1}{2} \\
&\geq \frac{m}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{k-1}{2} \\
&\geq \frac{m}{n-1} - \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Torej je $m/(n-1) \leq \log_2 k + k/2$. ■

Posledica 4.8 *Če za graf G obstaja orientirano k-barvanje, potem je*

$$\chi_a(G) \leq k^{1+\lceil k/2+\log_2 k \rceil}.$$

Meja iz posledice ni optimalna in bi jo lahko z nekaterimi dodatnimi prijemi še dodobra izboljšali, vendar smo želeli le pokazati, da je aciklično kromatično število χ_a omejeno s funkcijo orientiranega kromatičnega števila χ_o.

5 Grafi z velikim notranjim obsegom

Spomnimo se za začetek nekaterih dejstev iz prejšnjih poglavij. Rekli smo, da je krožno kromatično število lihega cikla $\chi_c(C_{2t+1}) = 2 + \frac{1}{t}$. Če nek graf G vsebuje lih cikel C_{2t+1}, potem je $\chi_c(G) \geq 2 + \frac{1}{t}$. Grötzschev izrek [19] pravi, da je vsak ravninski graf, ki ne vsebuje 3-ciklov, 3-obarvljiv. Kot posplošitev tega izreka na krožno kromatično število bi radi poiskali, kakšna mora biti omejitev za notranji obseg grafa, da bi bilo njegovo krožno kromatično število največ $2 + \frac{1}{t}$. V nadaljevanju navedimo posplošitev Jaegerjeve [27] hipoteze o nikjer-ničelnem pretoku za ravninske grafe:

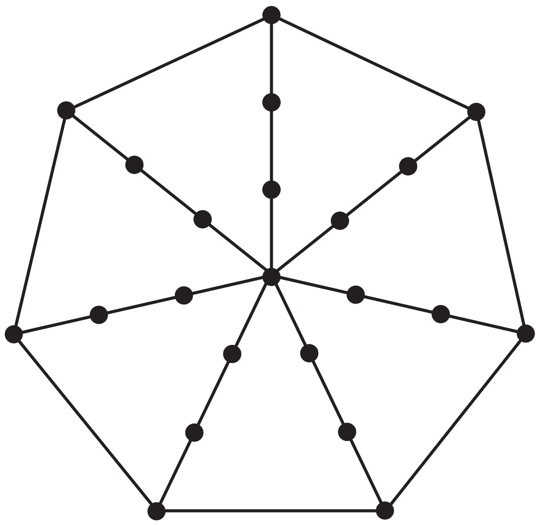
Hipoteza 5.1 *Za vsako naravno število t ima vsak ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $4t$ krožno kromatično število največ $2 + \frac{1}{t}$.*

Pri $t = 1$ je hipoteza 5.1 kar Grötzschev izrek. Če hipoteza velja, potem je $4t$ natančna meja za notranji obseg (torej za manjše notranje obsege hipoteza ne velja več), kar je pokazal DeVos [13]. Primer, ki ga je predstavil DeVos, sestoji iz $4t-1$ poti dolžine $2t-1$ s skupnim krajiščem ter cikla dolžine $4t-1$ skozi ostala krajišča poti. Graf ima notranji obseg dolžine $4t-1$, vendar nima $(2t+1, t)$-barvanja (barva središčnega vozlišča se ne more pojaviti na zunanjem ciklu in zaradi te omejitve tega cikla ne moremo pobarvati). Torej krožno kromatično število presega $2 + \frac{1}{t}$.

Nešetřil in Zhu [33] ter Galuccio, Goddyn in Hell [16] so dokazali, da ima vsak ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $10t-4$ krožno kromatično število največ $2 + \frac{1}{t}$. V [16] so analogno predstavljene tudi meje za vse ploskve. Omejimo se sedaj na lihe notranje cikle. Začnimo z navedbo naslednje leme, ki sta jo dokazala Klostermeyer in Zhang v [28]:

Lema 5.2 (Lema o stiskanju) *Naj bo G ravninski graf z lihim notranjim obsegom $g > 3$. Če je $C = v_0v_1 \dots v_{r-1}$ cikel v grafu G, ki določa neko lice, kjer $r \neq g$, potem obstaja celo število $i \in \{0, \dots, r-1\}$, tako da ima vsak graf G', ki ga dobimo iz grafa G, če identificiramo vozlišči v_{i-1} in v_{i+1} (indeksirani po modulu r), tudi lihi notranji obseg dolžine g.*

Klostermeyer in Zhang sta s pomočjo leme o stiskanju pokazala, da za krožno kromatično število največ $2 + \frac{1}{t}$ zadostuje, da vsebuje lihi notranji obseg dolžine vsaj $10t-4$.



Slika 5.1: DeVosov graf za $t = 2$

Zhu je izboljšal mejo z $10t - 4$ na $8t - 3$. Mi bomo to mejo še dodatno spustili na $\frac{20t-2}{3}$. Naš rezultat bomo predstavili z večjo splošnostjo, pri čemer bomo krožna barvanja obravnavali kot homomorfizme, tako da bo veljal tudi za orientirane homomorfizme ter za homomorfizme v mešane grafe z obarvanimi povezavami in loki. V ostalih primerih uporabe bomo med drugim predstavili novo zgornjo mejo za notranji obseg ravninskih grafov z orientiranim kromatičnim številom večjim od 5. Posebej bomo pokazali, da za vsako orientacijo ravninskega grafa z notranjim obsegom vsaj 13 obstaja homomorfizem v nek turnir s petimi vozlišči. To je bilo prej znano za notranje obsege dolžine vsaj 14 in je dokazano v [7]. Mi bomo to mejo izboljšali na 13, kar bo preprosta posledica glavnega izreka.

Naša osnovna motivacija je Zhujevo delo na hipotezi 5.1. Da bi pokazali, kako naš izrek izboljša njegovo mejo z $8t-3$ na $\frac{20t-2}{3}$, moramo najprej predstaviti pomemben način dokazovanja našega izreka. Za grafe z danim notranjim obsegom in dano zgornjo mejo povprečne stopnje vseh njegovih podgrafov, dokažemo obstoj homomorfizmov v posebne slike. V naslednjem primeru nas zanima slika $K_{(2t+1)/t}$.

Izrek 5.3 *Če je $g \geq 6t - 2$ in $d < 2 + \frac{3}{5t-2}$, potem je vsak graf z notranjim obsegom g, katerega podgrafi imajo povprečno stopnjo največ d, $(2 + \frac{1}{t})$-obarvljiv.*

Posledica 5.4 *Če je G ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$, potem je G $(2+\frac{1}{t})$-obarvljiv.*

Dokaz. Ker je $\frac{20t-2}{3} > 6t - 2$, je prvi pogoj iz izreka 5.3 že izpolnjen. Pokazati moramo le, da ima vsak podgraf grafa G povprečno stopnjo manjšo od $2+\frac{3}{5t-2}$. Dovolj bo pokazati to mejo za cel G, saj ima vsak podgraf vsaj tako velik notranji obseg kot G.

Privzamemo lahko, da je G 2-povezan, saj lahko združimo $(2t+1, t)$-barvanja blokov. Označimo z n, m, f število vozlišč, povezav in lic v neki ravninski vložitvi grafa G. Preštejmo povezave, ki določajo posamezna lica. Notranji obseg določa dolžino najkrajšega cikla, torej je število povezav okoli posameznega lica vsaj tolikšno. Če upoštevamo še dejstvo, da vsaka povezava predstavlja rob dveh lic, dobimo neenačbo $gf \leq 2m$, oziroma $f \leq 2m/g$, torej v našem primeru $f \leq 6m/(20t-2)$. Imamo pa še enačbo $m = dn/2$, kjer d označuje povprečno stopnjo vozlišč. Z uporabo Eulerjeve formule dobimo $2 = n - m + f \leq m(\frac{2}{d} - 1 + \frac{3}{10t-1})$. Izraz v oklepajih mora biti pozitiven, iz česar dobimo $d < 2 + \frac{3}{5t-2}$, kar je točno to, kar želimo. ■

Posledica 5.4 prav tako velja za grafe vložene v projektivno ravnino. Za grafe vložene v torus ali Kleinovo steklenico posledica velja, če je notranji obseg strogo večji kot $\frac{20t-2}{3}$.

V naslednjem razdelku bomo navedli nekaj definicij in opazk ter na koncu še naš glavni izrek. V razdelku 5.3 bomo ta izrek uporabili na grafih, vloženih v razne ploskve, na orientiranem kromatičnem številu, ter na homomorfizmih ravninskih grafov z obarvanimi povezavami. Glavni izrek bomo dokazali v razdelku 5.2 s pomočju metode prenašanja naboja.

5.1 t-razsežni s-grafi

Ker nas bo zanimala uporaba tako na neusmerjenih grafih kot tudi na digrafih, bomo uporabili pristop, ki vključuje oboje, obenem pa je še vedno dokaj splošen. *Mešani graf* je posplošitev multigrafov in multidigrafov, ki dovoljuje tako urejene pare (loke) kot tudi neurejene pare (povezave) vozlišč. Takšno strukturo lahko dopolnimo še z barvanjem povezav in lokov.

Naj s označuje par nenegativnih celih števil (s_1, s_2). Mešani graf brez zank je *s-graf*, če so loki obarvani iz nabora barv $\{-1, \ldots, -s_1\}$, povezave pa iz nabora $\{1, \ldots, s_2\}$ tako, da dve povezavi ali dva loka nista obarvana z isto barvo, če imata isti krajišči.

V razpravi v razdelku 5.3 se bomo omejili na primere, ko je s enak $(0, 1)$, $(1, 0)$ ali $(0, t)$. Pri tem je $(0, 1)$-graf običajen neusmerjen graf, medtem ko je $(1, 0)$-graf usmerjen.

Če govorimo, recimo, o $(1,2)$-grafu, je to graf, ki ima loke barve -1 ter povezave v barvah 1 in 2. Pojem homomorfizma lahko razširimo tudi na s-grafe; homomorfizem iz s-grafa G v s-graf H je taka preslikava iz $V(G)$ v $V(H)$, da je slika povezave oziroma naprej usmerjenega loka iz G, obarvanega z barvo c, prav tako povezava oziroma naprej usmerjeni lok iz H, obarvan z barvo c.

Sprehod (dolžine t) v s-grafu je seznam $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, kjer je e_i povezava ali lok. Za vsak i ima povezava e_i krajišči v_{i-1} in v_i. Povezave oziroma loki v sprehodu niso nujno različni, prav tako ni nujno, da so loki usmerjeni od repa proti glavi. Sprehod s prvim vozliščem v in zadnjim vozliščem w se imenuje *vw-sprehod*.

Vzorec sprehoda dolžine t je seznam $(C_1, \ldots, C_t)$, kjer je C_i par (c_i, σ_i), v katerem c_i predstavlja barvo povezave e_i, σ_i pa predznak, definiran takole:

$$\sigma_i = \begin{cases} +, & \text{če je bodisi } e_i \text{ neusmerjena bodisi je } v_i \text{ glava povezave } e_i; \\ -, & \text{če je } v_i \text{ rep povezave } e_i. \end{cases}$$

Tako recimo element “$(-2,-)$” v vzorcu sprehoda pomeni, da govorimo o loku barve -2, ki je usmerjen od glave proti repu. Vzorci dolžine t s-grafa G so t-terice $(C_1, \ldots, C_t)$, kjer je $C_i = (c_i, \sigma_i)$, pri čemer je $c_i \in \{-s_1, \ldots, -1, 1, \ldots, s_2\}$ in $\sigma_i = +$, če je $c_i > 0$, oziroma $\sigma_i \in \{+,-\}$, če je $c_i < 0$. Nabor vzorcev je določen z s.

s-graf G je *t-lep*, če za vsa vozlišča $v, w \in V(G)$ (ne nujno različna) in vsak vzorec dolžine t, obstaja v,w-sprehod s tem vzorcem.

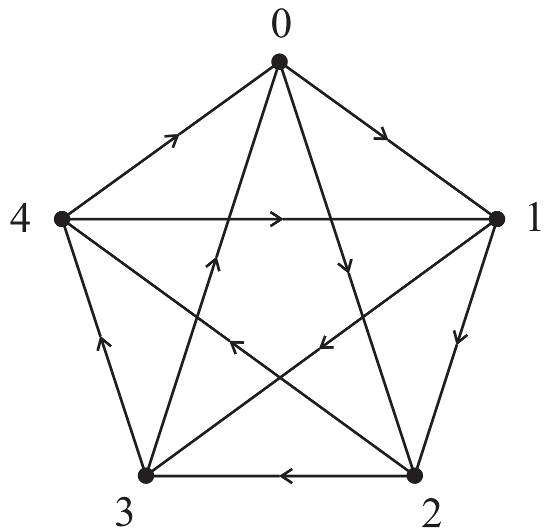
Pri $s = (0,1)$ je s-graf G zgolj neusmerjen graf. Za tak graf obstaja samo en vzorec dolžine t. Noben s-graf ni 1-lep, saj potrebujemo tudi v,v-sprehode. Poln (0,1)-graf K_n je 2-lep za $n \geq 3$. Dvodelni grafi niso t-lepi za noben t, saj v,w-sprehod dolžine t obstaja le, če ima t enako parnost kot razdalja med v in w. Na primer, lih cikel C_{2k+1} je $2k$-lep, ker lahko iz fiksnega vozlišča v dosežemo katerokoli vozlišče po poti sode dolžine, ne daljše od $2k$. Krajše sprehode lahko povečamo do $2k$, če se večkrat sprehodimo čez katero od povezav. Po drugi strani pa C_{2k+1} ni $(2k-1)$-lep, ker je pot lihe dolžine od vozlišča do samega sebe možna le čez cel cikel, torej bi morala biti pot dolžine vsaj $2k+1$.

Opomba 5.5 *Vsak t-lep s-graf je tudi $(t+1)$-lep.*

Dokaz. Naj bo G t-lep s-graf; seveda mora veljati $t \geq 2$. Vzemimo vozlišči v in w iz G ter vzorec $(C_1, \ldots, C_{t+1})$. Ker je G t-lep, obstaja sprehod dolžine 1 z vzorcem C_1 od vozlišča v do nekega vozlišča u. In ker je G t-lep, obstaja tudi u, w-sprehod z vzorcem $(C_2, \ldots, C_{t+1})$. Če ta dva sprehoda združimo, dobimo v, w-sprehod dolžine $t+1$ z vzorcem $(C_1, \ldots, C_{t+1})$. ∎

Graf je *lep*, če je t-lep za nek t. Lepi grafi so implicitno uporabljeni v [32]. Eksplicitno pa so študirani in okarakterizirani v [22]. V [22] je prikazano tudi, da so minimalni grafi, ki so homomorfne slike vseh ravninskih s-grafov z notranjim obsegom vsaj g, lepi.

Poglejmo si še en primer. Označimo s C_n^2 usmerjeni graf, katerega vozlišča so kongruentna po modulu n in katerega loki so urejeni pari oblike $(i, i+1)$ in $(i, i+2)$. To je s-graf za $s = (1, 0)$. Za ta graf obstaja 2^t različnih vzorcev dolžine t, vendar da bi pokazali, da C_n^2 ni $(n-2)$-lep, moramo najti le neskladnost enega vzorca s parom vozlišč. Sprehod, katerega vzorec vsebuje same pluse, sledi naprej usmerjenim lokom. Trdimo, da C_n^2 nima takega sprehoda dožine $n-2$ od vozlišča 0 do vozlišča $n-3$. Če sledimo smeri lokov, se lahko v $n-2$ korakih pomaknemo za najmanj $n-2$ vozlišč (t.j. ko se vedno pomikamo po lokih $(i, i+1)$) oziroma za največ $2n-4$ vozlišč (t.j. ko se vedno pomikamo po lokih $(i, i+2)$). Nobena vrednost na tem pa intervalu ni kongruentna $n-3$ po modulu n, torej iskani sprehod ne obstaja. Po drugi strani pa je C_n^2 $(n-1)$-lep. To najlažje pokažemo (glej primer 5.7) z uporabo pojmov, ki jih bomo uvedli v naslednji definiciji.



Slika 5.2: Graf C_5^2

Vozlišče $v \in V(H)$ je (c, σ)-*naslednik* množice vozlišč W v s-grafu H, če za nek $w \in W$ obstaja povezava ali lok s krajiščema w in v, ki ima barvo c in predznak σ v smeri od w

proti v. s-graf H z n vozlišči je *t-razsežen*, če je za vse neprazne podmnožice $W \subset V(H)$ in vsak par (c, σ) število (c, σ)-naslednikov množice W vsaj $\min\{n, |W| + \frac{n-1}{t}\}$.

Vozlišče iz W je tudi lahko (c, σ)-naslednik množice W. V $(0,1)$-grafu G je število naslednikov množice W enako številu vozlišč v G, ki imajo sosede v W. Dvodelni grafi niso t-razsežni, saj večja od dveh particij vozlišč nima dovolj naslednikov. Poglejmo si še, kako je s t-razsežnostjo na dveh že omenjenih primerih. Ti ugotovitvi bomo uporabili v nadaljevanju.

Primer 5.6 *Neusmerjen cikel C_{2k+1} kot $(0,1)$-graf je $2k$-razsežen.*

Dokaz. Ko je $|W| \leq 2k$, potrebujemo le $|W| + 1$ naslednikov. Naslednike vozlišč iz W bomo iskali le v smeri urinega kazalca, da bi s tem preprečili podvajanje katerega od naslednikov. S tem dobimo $|W|$ naslednikov. Ker je število vseh vozlišč v ciklu liho, potem, ko je $|W| < 2k+1$, obstaja vozlišče $v \notin W$, medtem ko vozlišče w, ki je oddaljeno za dve mesti v smeri urinega kazalca od v, pripada množici W. Skupni sosed vozlišč v in w je naslednik množice W, ki ga dotlej še nismo šteli. ■

Primer 5.7 *Digraf C_n^2 kot $(0,1)$-graf je $(n-1)$-razsežen.*

Dokaz. Spomnimo se, da so loki digrafa C_n^2 urejeni pari oblike $(i, i+1)$ ali $(i, i+2)$ po modulu n. V našem primeru je lahko (c, σ) bodisi $(-1, +)$ bodisi $(-1, -)$. V prvem primeru gledamo izhodne sosede množice W, v drugem pa vhodne sosede množice W. Zaradi simetrije se bomo omejili le na $(-1, +)$. Kot v primeru 5.6 tudi tu potrebujemo le $|W|+1$ naslednikov. Za vsak $i \in W$ je $i+1$ njegov naslednik. To nam da $|W|$ naslednikov. Če je $|W| < n$, potem obstaja tak i, da je i iz W, $i+1$ pa ne. V tem primeru je $i+2$ naslednik množice W, ki ga dotlej še nismo šteli. ■

Če začnemo z $W = \{v\}$ in t-krat uporabimo definicijo t-razsežnosti, dobimo, da lahko iz kateregakoli vozlišča v v t-razsežnem s-grafu dosežemo katerokoli vozlišče (vključno z v) s sprehodom dolžine t z določenim vzorcem. Torej je vsak t-razsežen s-graf t-lep. To razmišljanje bomo bolj detajlno navedli v naslednji opombi; ta spet izhaja direktno iz definicije t-razsežnosti.

Opomba 5.8 *Naj bo v vozlišče v t-razsežnem s-grafu H z n vozlišči. Za vsak vzorec $(C_1, \ldots, C_l)$ dolžine l je število takih vozlišč w, da H vsebuje vw-sprehod dolžine l z vzorcem $(C_1, \ldots, C_l)$, vsaj $1 + (n-1)l/t$.*

Za graf G smo rekli, da je H-obarvljiv, če obstaja homomorfizem iz G v H. Za s-grafe uporabljamo pojem H-obarvljivosti na enak način. Imejmo s-graf H. Potem je s-graf G *H-kritičen*, če G ni H-obarvljiv, vsak pravi podgraf grafa G pa je H-obarvljiv.

Skelet s-grafa G je multigraf, ki ga dobimo iz G, če zanemarimo orientacije lokov in odstranimo vse barve. Naša glavna ugotovitev je naslednja.

Izrek 5.9 *Naj bo H t-razsežen s-graf. Naj bo G s-graf katerega skelet ima notranji obseg g in nima nobenega podgrafa s povprečno stopnjo več kot d. Če je $g \geq 3t-2$ in $d < 2 + \frac{6}{5t-4}$, potem obstaja homomorfizem iz G v H.*

Ker je vsak podgraf H-obarvljivega s-grafa tudi H-obarvljiv, bi lahko ekvivalentno trditvi 5.9 dejali, da če je H t-razsežen s-graf in G H-kritičen s-graf katerega skelet ima notranji obseg vsaj $3t-2$, potem je povprečna stopnja vozlišč skeleta vsaj $2 + \frac{6}{5t-4}$.

5.2 Dokaz izreka 5.9

Izrek 5.9 bomo dokazali v nekaj korakih. Skozi celotni razdelek bo H predstavljal t-razsežen s-graf z n vozlišči, G pa H-kritičen s-graf, katerega skelet ima notranji obseg vsaj $3t-2$. Navedli bomo nekaj lastnosti, ki veljajo v skeletu, da bi s tem pokazali, da je povprečna stopnja vozlišč velika. Za začetek bomo uvedli nekaj oznak.

Označimo z $\widetilde{G}$ skelet grafa G. Z $\delta(\widetilde{G})$ bomo označili minimalno stopnjo grafa $\widetilde{G}$, z $d(v)$ pa stopnjo vozlišča v v grafu $\widetilde{G}$. Če je $d(v) = 1$, potem ima $\{v\}$ samo enega (c, σ)-naslednika. Ker je H t-razsežen, zaključimo, da je $\delta(\widetilde{G}) \geq 2$.

Nit v grafu $\widetilde{G}$ je pot, v kateri imajo notranja vozlišča stopnjo 2 v $\widetilde{G}$. Vozlišči sta *šibka soseda* oziroma sta *šibko sosednji*, če sta krajišči niti (sosednji vozlišči sta tudi šibko sosednji, saj so niti lahko tudi brez notranjih vozlišč).

Leme bomo dokazovali s protislovjem in sicer na naslednji način: če želeni zaključek ne velja, potem iz grafa G odstranimo nekaj vozlišč in s tem dobimo podgraf G'. Zaradi kritičnosti grafa G je G' H-obarvljiv. Z upoštevanjem t-razsežnosti razširimo dobljeni homomorfizem iz G' v H do H-barvanja grafa G, kar pa nas pripelje do protislovja.

Lema 5.10 *Vsaka nit v grafu $\widetilde{G}$ je dolžine največ $t-1$.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo P uv-nit dolžine t v grafu $\widetilde{G}$ in naj bo G' s-graf, ki ga dobimo iz grafa G, če v njem odstranimo vsa notranja vozlišča niti P. Ker je

$t \geq 2$, je G' pravi podgraf grafa G. Zaradi kritičnosti grafa G obstaja H-barvanje ϕ grafa G'. Naj bo $(C_1, \ldots, C_t)$ vzorec niti P. Po definiciji t-lep graf vsebuje sprehod s poljubnim vzorcem med poljubnima vozliščema, torej vsebuje graf H $\phi(u)\phi(v)$-sprehod z vzorcem $(C_1, \ldots, C_t)$. Če definiramo ϕ na notranjih vozliščih niti P, tako da si v zaporedju sledijo vozlišča iz tega sprehoda, potem lahko ϕ razširimo do H-barvanja grafa G, kar pa je nemogoče. ■

Posledica 5.11 *Nobena tri vozlišča iz grafa $\widetilde{G}$ s stopnjo vsaj 3 niso med seboj paroma šibko sosednja. Prav tako nimata nobeni dve niti istih krajišč.*

Dokaz. Posledica velja, saj bi v nasprotnem primeru po lemi 5.10 graf $\widetilde{G}$ vseboval cikel dolžine največ $3t-3$, vemo pa, da je dolžina najkrajšega cikla tega grafa vsaj $3t-2$. ■

Če sta vozlišči u in v šibko sosednji, bomo z l_{uv} označili dolžino najkrajše uv-niti. Definirajmo $Y = \{v \in V(G) : d(v) \geq 3\}$. Šibek sosed u vozlišča v je *šibek Y-sosed*, če je $u \in Y$. V nasprotnem primeru je u *šibek 2-sosed*.

Za $v \in V(\widetilde{G})$ naj $N_Y(v)$ označuje množico šibkih Y-sosedov vozlišča v v grafu $\widetilde{G}$. Za $v \in Y$ naj bo $f(v) = -t + \sum_{u \in N_Y(v)}(t - l_{vu})$.

V naslednjih dveh lemah bomo določili spodnjo mejo za $f(v)$ in $\sum_{u \in N_Y(v)} f(u)$. Zakaj pa sploh potrebujemo spodnjo mejo? Če je $f(v)$ majhen, to pomeni, da ima vozlišče v malo šibkih Y-sosedov ali pa ima do njih dolge niti. Oba pogoja pa nižata povprečno stopnjo vozlišč. Ker bi radi čim manjšo povprečno stopnjo vozlišč v grafu G, stremimo za tem, da je tudi vrednost f čim manjša.

Lema 5.12 *Če je $v \in Y$, potem je $f(v) \geq 1$.*

Dokaz. Naj bo G' s-graf, ki ga dobimo iz grafa G, če v njem odstranimo vozlišče v ter vse njegove šibke 2-sosede. Ker je G H-kritičen, obstaja H-barvanje ϕ njegovega podgrafa G'. Denimo, da neenakost iz leme ne velja. Razširimo ϕ do H-barvanja grafa G.

Vzemimo vozlišče $u \in N_Y(v)$. Naj bo P_u uv-nit v grafu G. Naj bo $W_0 = \{u\}$ ter naj bo za $i > 0$ W_i množica vozlišč, v kateri lahko i-to vozlišče niti P vložimo v razširitev ϕ vzdolž niti P_u. Ker je H t-razsežen, velja $|W_i| \geq 1 + \frac{n-1}{t}i$ (po opombi 5.8). Če je $i = l_{vu}$, lahko sklepamo, da kvečjemu $n - W_{l_{vu}} = \frac{n-1}{t}(t - l_{vu})$ vozlišč grafa H ne moremo uporabiti kot sliko vozlišča v v razširitvi ϕ na P_u.

Če lahko katero od vozlišč grafa H uporabimo na P_u za vse $u \in N_Y(v)$, potem lahko razširimo ϕ na graf G. Torej velja

$$\frac{n-1}{t} \sum_{u \in N_Y(v)} (t - l_{vu}) \geq n > n-1,$$

iz česar sledi $\sum_{u \in N_Y(v)}(t - l_{vu}) > t$ in zato $f(v) > 0$. To lahko zapišemo kot $f(v) \geq 1$, saj je $f(v)$ celo število. ■

Lema 5.13 *Če je $v \in Y$, potem velja $\sum_{u \in N_Y(v)} f(u) \geq t+1$.*

Dokaz. Rekli bomo, da je vozlišče $u \in N_Y(v)$ *v-prosto*, če je $f(u) \leq t - l_{uv}$. Naj bo G' podgraf grafa G, ki ga dobimo, če iz grafa G odstranimo vozlišče v, vsa v-prosta vozlišča ter vse njihove šibke 2-sosede. Zaradi kritičnosti grafa G obstaja H-barvanje ϕ grafa G'.

Po posledici 5.11 je ϕ definiran na celi množici $N_Y(u) \setminus \{v\}$ za vsak $u \in N_Y(v)$. Če je u v-prost, potem, kot v lemi 5.12, vozlišča iz množice $N_Y(u) \setminus \{v\}$ izključujejo kvečjemu $\frac{n-1}{t}\sum_{y \in N_Y(u)-\{v\}}(t - l_{yu})$ vozlišč iz grafa H kot možne slike vozlišča u v razširitvi ϕ vzdolž niti od vozlišča iz množice $N_Y(u) \setminus \{v\}$ do vozlišča u. Po definiciji funkcije f je ta vrednost enaka $\frac{n-1}{t}(f(u)+l_{vu})$. Ker je u v-prost, velja po definiciji $f(u)+l_{vu} \leq t$. Od tod dobimo, da je število vozlišč, ki so izključena kot možne slike vozlišča u, kvečjemu $n-1$. To po drugi strani pomeni, da je vsaj eno vozlišče na voljo. V primeru, ko je $f(u) + l_{vu}$ strogo manj kot t, izračunamo, da imamo vsaj $1 + \frac{n-1}{t}(t - l_{vu} - f(u))$ vozlišč grafa H, ki so nam na voljo kot možne slike vozlišča u.

Ob razširitvi homomorfizma vzdolž niti od u do v se število možnih slik trenutnega vozlišča poveča za vsaj $\frac{n-1}{t}$ z vsakim l_{vu} korakom, saj je graf H t-razsežen. To pomeni, da bomo imeli v trenutku, ko dosežemo vozlišče v, vsaj $1 + \frac{n-1}{t}(t - f(u))$ vozlišč, ki so na voljo kot možne slike vozlišča v v razširitvi ϕ na vse šibke sosede vozlišča u. Število vozlišč, ki ne morejo biti uporabljena kot slika, je kvečjemu $n - 1 - \frac{n-1}{t}(t - f(u))$, kar je enako $\frac{n-1}{t} f(u)$.

V primeru, ko $u \in N_Y(v)$ ni v-prost, je $\phi(u)$ fiksen. Kot v lemi 5.12, imamo tudi v tem primeru vsaj $1 + \frac{n-1}{t} l_{vu}$ vozlišč grafa H, ki so lahko slika vozlišča v v razširitvi ϕ na uv-nit, kvečjemu $\frac{n-1}{t}(t - l_{vu})$ vozlišč pa je iz te možnosti izključenih. Ker je $t - l_{vu} < f(u)$, je izključenih manj kot $\frac{n-1}{t} f(u)$ vozlišč.

Ker graf G nima H-barvanja, mora biti vsako vozlišče iz grafa H izključeno kot možna slika vozlišča v v vsaj eni od teh razširitev. Da bi bilo to res, mora veljati

$\frac{n-1}{t}\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq n$, oziroma $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq \frac{n}{n-1}t$. Ker je vsak $f(u)$ celo število, $\frac{n}{n-1}$ pa več kot 1, lahko zapišemo $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq t+1$. ■

Dokaz bomo zaključili z uporabo *metode prenašanja naboja.* Začetni "naboj" na vozlišču $v \in V(\widetilde{G})$ bo $d(v)$. Naboj bomo premikali od vozlišča do vozlišča, ne da bi spremenili celoto, in s tem dobili nov naboj $d^*(v)$, za katerega bo veljalo

$$d^*(v) \geq 2 + \frac{4d(v)-2}{5t} \quad \text{za vse } v \in V(\widetilde{G}). \tag{5.1}$$

Označimo $p = |V(\widetilde{G})|$ in $m = |E(\widetilde{G})|$. Če je pogoj (5.1) izpolnjen, potem je

$$2m = \sum_{v\in V(\widetilde{G})} d^*(v) \geq \sum_{v\in V(\widetilde{G})} \left(2 + \frac{4d(v)-2}{5t}\right) = \left(1-\frac{1}{5t}\right)2p + \frac{4}{5t}2m,$$

torej $\frac{5t-1}{5t}p \leq \frac{5t-4}{5t}m$, oziroma $m \geq \frac{5t-1}{5t-4}p$. Poznamo enačbo $2m = p\,d$, torej je povprečna stopnja grafa $\widetilde{G}$ vsaj $\frac{2(5t-1)}{5t-4}$, kar je enako $2 + \frac{6}{5t-4}$. Torej je dovolj najti tak d^*, da velja (5.1).

Pravila za prenašanje naboja. Dan imamo multigraf $\widetilde{G}$, kjer $d(u)$ označuje stopnjo vozlišča u in ga uporabimo kot začetni naboj. Definiramo prilagojen naboj $d^*(u)$ za vsak $u \in V(\widetilde{G})$ z naslednjima operacijama:

Pravilo P1. *Vsak $v \in Y$ pošlje vsakemu šibkemu 2-sosedu vrednost $\frac{3}{5t}$.*

Pravilo P2. *Vsak $v \in Y$ pošlje vsakemu šibkemu Y-sosedu vrednost $\frac{3f(v)+(t+1)(d(v)-3)}{5td(v)}$.*

Lema 5.14 *Vsak $v \in Y$ dobi od svojih šibkih Y-sosedov vsaj $\frac{t+1}{5t}$.*

Dokaz. Če vsak $u \in N_Y(v)$ pošlje vozlišču v vsaj $\frac{f(u)}{5t}$, potem v od $N_Y(v)$ prejme vsaj $\frac{1}{5t}\sum_{u\in N_Y(v)} f(u)$. Po lemi 5.13 je $\sum_{u\in N_Y(v)} f(u) \geq t+1$.

Denimo sedaj, da velja $\frac{3f(u)+(t+1)(d(u)-3)}{5td(u)} < \frac{f(u)}{5t}$ za nek $u \in N_Y(v)$. Da bi to veljalo, mora biti $d(u) \geq 4$. Množimo zgornjo enačbo s $5td(u)$ in dobimo

$$3f(u) + (t+1)(d(u)-3) < f(u)d(u),$$

oziroma

$$f(u)(d(u)-3) > (t+1)(d(u)-3).$$

Ker je $d(u) \geq 4$, lahko enačbo delimo z $d(u) - 3$ in dobimo

$$f(u) > t + 1.$$

Če vstavimo $f(u) \geq t + 1$ v izraz iz pravila P2, dobimo

$$\frac{3f(u) + (t+1)(d(u) - 3)}{5td(u)} \geq \frac{(t+1)(3 + d(u) - 3)}{5td(u)} = \frac{t+1}{5t},$$

kar pomeni, da že samo vozlišče u pošlje vozlišču v vsaj $\frac{t+1}{5t}$. Za $y \in N_Y(v)$ velja $d(y) \geq 3$ in $f(y) \geq 1$ po lemi 5.12, torej so vse ostale vrednosti, ki jih vozlišče v prejme, nenegativne. ■

Lema 5.15 *Neenakost (5.1) je izpolnjena za končni naboj d^* grafa $\widetilde{G}$.*

Dokaz. Če je $d(v) = 2$, potem v ne pošlje ven ničesar, prejme pa $\frac{3}{5t}$ od vsakega od obeh svojih šibkih Y-sosedov. Torej je $d^*(v) = 2 + \frac{6}{5t} = 2 + \frac{4d(v)-2}{5t}$.

Dokažimo zdaj neenakost za $v \in Y$. Ker je $\delta(\widetilde{G}) \geq 2$ in (po posledici 5.11) nobeni dve niti nimata skupnih krajišč, to pomeni, da je vsaka povezava iz vozlišča v del niti s krajiščem v šibkem Y-sosedu vozlišča v. Teh je očitno $d(v)$. Šibkih 2-sosedov pa je natanko toliko kot je notranjih točk na omenjenih nitih. Teh je $l_{vw} - 1$ za posamezen $w \in N_Y(v)$. Vozlišče v torej pošlje $\frac{3}{5t} \sum_{w \in N_Y(v)} (l_{vw} - 1)$ svojim šibkim 2-sosedom. Poleg tega pošlje $\frac{3f(v)+(t+1)(d(v)-3)}{5td(v)}$ vsakemu od svojih Y-sosedov. Kot smo že omenili, je teh ravno $d(v)$, torej skupaj pošlje $\frac{3f(v)+(t+1)(d(v)-3)}{5t}$ svojim šibkim Y-sosedom. Po lemi 5.14 v prejme vsaj $\frac{t+1}{5t}$ od svojih šibkih Y-sosedov. Ker je po definiciji $f(v) = -t + \sum_{w \in N_Y(v)} (t - l_{vw})$, dobimo

$$\begin{aligned}
d^*(v) &\geq d(v) - \frac{3}{5t} \sum_{w \in N_Y(v)} (l_{vw} - 1) - \frac{3f(v) + (t+1)(d(v) - 4)}{5t} \\
&= d(v) - \frac{3}{5t} \left[-t + \sum_{w \in N_Y(v)} (t - l_{vw} + l_{vw} - 1) \right] - \frac{(t+1)(d(v) - 4)}{5t} \\
&= \frac{1}{5t} \left[5td(v) + 3t - 3d(v)(t-1) - d(v)(t+1) + 4(t+1) \right] \\
&= \frac{1}{5t} \left[d(v)(5t - 3(t-1) - (t-1)) + 3t + 4(t+1) \right] \\
&= \frac{(t+2)d(v) + 7t + 4}{5t}.
\end{aligned}$$

Ker je $d(v) \geq 3$ in $t \geq 2$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}(t+2)d(v)+7t+4 &= (t+2)d(v)-3(t-2)+(10t-2)\\ &= t(d(v)-3)+2d(v)+6+(10t-2)\\ &\geq 4d(v)+10t-2.\end{aligned}$$

Če obe strani neenačbe delimo s $5t$, dobimo $\frac{(t+2)d(v)+7t+4}{5t} \geq 2 + \frac{4d(v)-2}{5t}$, kar je točno to, kar smo iskali, s čimer smo dokazali lemo in s tem tudi glavni izrek. ■

5.3 Nekaj aplikacij izreka 5.9

V tem razdelku bomo predstavili nekaj načinov uporabe izreka 5.9. Začeli bomo z grafi vloženimi v ploskve. Vsi grafi vloženi v ravnini so prav tako vloženi v višjih ploskvah.

Posledica 5.16 *Naj bo H t-razsežen s-graf in G H-kritičen s-graf reda n. Če se da skelet grafa G vložiti v projektivno ravnino, potem je njegov notranji obseg manjši kot $\frac{10t-2}{3}$. Če se ga da vložiti v torus ali Kleinovo steklenico, potem je njegov notranji obseg največ $\frac{10t-2}{3}$.*

Dokaz. Naj bo m število povezav v skeletu grafa G. Dokažimo posledico s protislovjem. Denimo, da navedena implikacija ne velja, torej da je notranji obseg g skeleta vsaj $\frac{10t-2}{3}$ za grafe vložene v projektivno ravnino, oziroma več kot $\frac{10t-2}{3}$ za grafe vložene v torus ali Kleinovo steklenico. Za naravna števila t je $\frac{10t-2}{3}$ večje od $3t-2$ (torej je notranji obseg tudi "vsaj" $3t-2$), s čimer imamo izpolnjene predpostavke izreka 5.9 (oziroma omenjene ekvivalentne formulacije tega izreka). Izrek pravi, da je potem povprečna stopnja vozlišč vsaj $2 + \frac{6}{5t-4}$. Vemo, da velja $m = \frac{d}{2}n$, torej $m \geq (1 + \frac{3}{5t-4})n$, oziroma $m \geq \frac{5t-1}{5t-4}n$. Naj f označuje število lic v vložitvi skeleta v ploskev z Eulerjevim rodom χ. Ker velja $fg \leq 2m$, s pomočjo Eulerjeve formule dobimo

$$\chi = n - m + f \leq m\left(\frac{5t-4}{5t-1} - 1 + \frac{2}{g}\right) = m\left(\frac{2}{g} - \frac{3}{5t-1}\right)$$

Ploskve iz posledice imajo Eulerjevo karakteristiko $\chi \geq 0$ (za projektivno ravnino je $\chi = 1$, za torus in Kleinovo steklenico pa $\chi = 0$), torej mora biti izraz v oklepaju nenegativen, torej mora veljati $\frac{2}{g} \geq \frac{3}{5t-1}$, oziroma $g \leq \frac{10t-2}{3}$, pri čemer je enakost možna le pri $\chi = 0$. Ta rezultat pa je v protislovju z notranjim obsegom g, s katerim smo dokaz začeli. ■

Ponovimo dognanja o krožnem barvanju iz posledice 5.4, vendar tokrat z malce večjo splošnostjo.

Posledica 5.17 *Naj bo t naravno število. Če je G projektivni ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$ ali graf, vložen v torus ali Kleinovo steklenico, z notranjim obsegom večjim kot $\frac{20t-3}{3}$, potem je $\chi_c(G) \leq 2 + \frac{1}{t}$.*

Dokaz. Veljavnost posledice je ekvivalentna obstoju C_{2t+1}-barvanja grafa G. Primer 5.6 pravi, da je $(0,1)$-graf C_{2t+1} $2t$-razsežen. Ker podgrafi ne morejo imeti manjšega notranjega obsega kot graf sam, iz posledice 5.16 sledi, da v grafu G ne obstaja podgraf, ki ne bi bil C_{2t+1}-obarvljiv. ■

Omenjeno mejo iz posledice 5.17 lahko brez težav posplošimo tudi na druge ploskve. Uporabimo sedaj posledico 5.16 še na orientiranem barvanju.

Rekli smo, da je orientirano kromatično število enostavnega grafa G najmanjše število k, tako da za vsako orientacijo grafa G obstaja homomorfizem v nek enostaven digraf s k vozlišči. Ta ciljni digraf je lahko različen za različne orientacije grafa G. Privzamemo lahko, da v vsakem primeru preslikujemo v neko orientacijo K_k.

V [32, 7, 8] so omejevali orientirano kromatično število ravninskih grafov z danim notranjim obsegom. V [32] je dokazano, da obstajajo ravninski grafi s poljubno velikim notranjim obsegom, ki imajo orientirano kromatično število 5 in da ima vsak ravninski graf z notranjim obsegom vsaj 16 orientirano kromatično število največ 5. Omenjeno je tudi, da je orientirano kromatično število večje od 5 za nekatere ravninske grafe z notranjim obsegom 7. Postavlja se vprašanje, kolikšno je najmanjše naravno število g, za katerega imajo vsi ravninski grafi z notranjim obsegom vsaj g orientirano kromatično število največ 5. V [7] je spodnja meja g zmanjšana s 16 na 14. S pomočjo posledice 5.16 lahko mejo spustimo na 13, kar velja tudi za tri dodatne ploskve.

Posledica 5.18 *Vsak graf z notranjim obsegom vsaj 13, ki je vložen v torus ali Kleinovo steklenico, ima orientirano kromatično število največ 5. Velja še več: za vsako orientacijo takšnega grafa obstaja homomorfizem v isti regularni turnir na petih vozliščih C_5^2.*

Dokaz. Orientacije enostavnega grafa G so ravno $(1,0)$-grafi s skeletom G. Dokazovali bomo v obratni smeri. Če katera od orientacij grafa G ni C_5^2-obarvljiva, potem obstaja tak kritičen digraf D, čigar notranji obseg je tako velik kot notranji obseg grafa G. Opomba

5.7 pravi, da je C_5^2 4-razsežen. Po posledici 5.16 je torej notranji obseg digrafa D največ $\frac{40-2}{3}$, kar je manj kot 13. ■

Naj M_α označuje družino vseh grafov, katerih povprečna stopnja vseh podgrafov je strogo manjša od α. V [8] je naveden izrek, ki pravi, da za vsak graf iz $M_{16/7}$ z notranjim obsegom vsaj 11, obstaja homomorfizem v oktaeder $K_{2,2,2}$. Ravninski graf z n vozlišči in notranjim obsegom g ima lahko največ $\frac{g}{g-2}(n-2)$ povezav. Iz tega sledi, da ima vsak ravninski graf z notranjim obsegom vsaj 16 povprečno stopnjo manj kot 16/7 in je zato $K_{2,2,2}$-obarvljiv. Dokaz omenjenega izreka iz [8] je dolg čez tri strani in ga zaradi tega izpustimo. Mi bomo navedli močnejšo verzijo posledice tega izreka, ki velja za ravninske grafe. Ta sledi neposredno iz izreka 5.9.

Posledica 5.19 *Če je G ravninski graf z notranjim obsegom vsaj 13, potem je G $K_{2,2,2}$-obarvljiv.*

Dokaz. $K_{2,2,2}$ je 5-razsežen, $13 = 3 \cdot 5 - 2$ in $2 + \frac{6}{5t-4} = \frac{16}{7}$ za $t = 5$, torej so izpolnjeni pogoji izreka 5.9. ■

Oglejmo si še izrek 5.9 v smislu barvanja povezav. Alon in Marshall sta v [2] preučevala homomorfizme grafov z obarvanimi povezavami, mi pa smo del njune študije predstavili v razdelku 1.4. Imejmo t-barvanje povezav enostavnega grafa G. Naj bo $\lambda(G, c)$ najmanjše število vozlišč v grafu H z obarvanimi povezavami, tako da obstaja homomorfizem iz G v H, ki ohranja barve. V naši terminologiji je to homomorfizem s-grafa, kjer je $s = (0, t)$. Alon in Marshall v svojem delu iščeta maksimalno vrednost $\lambda(G, c)$, ko je G ravninski graf in kjer c uporabi največ t barv. Mi bomo ugotovili zgornjo mejo za ravninske grafe z dovolj velikim notranjim obsegom.

Posledica 5.20 *Naj bo G ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$. Za vsako barvanje grafa G z največ t barvami obstaja homomorfizem, ki ohranja barve, iz G v graf z obarvanimi povezavami z $2t+1$ vozlišči. Vedno zadostuje ista slika: barvanje grafa K_{2t+1}, v katerem je s posamezno barvo obarvan natanko vpet cikel.*

Dokaz. Znano je, da poln graf K_{2t+1} lahko razcepimo na t Hamiltonovih ciklov. Označimo s H $(0, t)$-graf, ki ga dobimo z barvanjem i-tega cikla v dekompoziciji grafa K_{2t+1} z barvo i. H je $2t$-razsežen, saj lahko za vsak element v vzorcu uporabimo opombo 5.6 na ciklu ustrezne barve. Posledica 5.16 pa pravi, da je vsak povezavno t-obarvan ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$ H-obarvljiv. ■

6 Zaključek

Sklenimo diplomsko delo s kratkim pregledom čez vsebino.

Začeli smo z definicijo pojmov, ki smo jih srečevali skozi celo diplomsko delo. V 1. poglavju smo definirali tudi homomorfizme grafov in so ogledali nekaj lastnosti. Posebej smo obravnavali koncept barvanja grafov, ki smo ga predstavili kot homomorfno preslikavo danega grafa v nek poln graf K_n. V zaključku poglavja smo predstavili še homomorfizme grafov, ki so imeli obarvane povezave in ne vozlišča, kot je to v navadi.

V 2. poglavju smo se osredotočili na poseben način barvanja grafov, to je krožno barvanje. Podobno kot smo pri običajnem barvanju definirali kromatično število grafa, smo v tem primeru vpeljali pojem krožnega kromatičnega števila. Podali smo kar pet različnih definicij krožnega kromatičnega števila, ki so medsebojno ekvivalentne. Te definicije smo, nekatere bolj, druge manj pogosto uporabljali v nadaljevanju, pri formulaciji izrekov, oziroma dokazovanju le-teh. V naslednjem razdelku smo omenili nekaj lastnosti krožnega kromatičnega števila. Prva pomembna lastnost je bila povezava med kromatičnim številom in krožnim kromatičnim številom grafa, ki smo jo podali v trditvi 2.1 in pravi: *Za vsak končen graf G velja $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leq \chi(G)$.* V naslednjih dveh razdelkih smo navedli nekaj primerov grafov, katerih krožno kromatično število je enako zgornji meji te neenakosti, oziroma grafov, katerih krožno kromatično število je blizu spodnje meje omenjene neenakosti. Poglavje smo sklenili z razdelkom o krožnih pretokih. Definirali smo krožno pretočno število in nikjer-ničelne pretoke. Navedli smo hipoteze o pretokih in njihove zožitve na ravninske grafe ter pokazali povezavo med krožnim pretočnim številom in krožnim kromatičnim številom.

V naslednjih dveh poglavjih smo si ogledali še nekatere druge načine barvanja grafov. V 3. poglavju je bilo govora o deljenem barvanju, ki smo ga predstavili kot homomorfizem v ustrezen Kneserjev graf $K(n, k)$. Sledili sta še definiciji orientiranega in acikličnega barvanja, nekaj njunih lastnosti ter povezava med obema barvanjema.

Najpomembnejši del diplomskega dela je 5. poglavje, v katerem smo dokazali, *da ima vsak ravninski graf z notranjim obsegom vsaj $\frac{20t-2}{3}$ krožno kromatično število kvečjemu $2 + \frac{1}{t}$.* To smo dokazali kot posledico močnejšega izreka (navedli smo ga kot izrek 5.9), kjer smo imeli dan notranji obseg in največjo povprečno stopnjo vozlišč grafa. Izrek smo dokazali v nekaj korakih. V dokazu smo uporabili metodo o prenašanju naboja, ki je uporabljena tudi v dokazu znanega izreka o štirih barvah. V zadnjem razdelku smo si za konec diplomskega dela ogledali še nekaj aplikacij našega glavnega izreka.

Literatura

[1] H. L. Abbott, B. Zhou. The star chromatic number of a graph. *J. Graph Theory* **17** (1993), 349–360.

[2] N. Alon, T. H. Marshall. Homomorphisms of edge-coloured graphs and Coxeter groups. *J. Algebraic Combin.* **8** (1998), 5–13.

[3] N. Alon, B. Mohar, D. P. Sanders. Acyclic colourings of graphs on surfaces. *Israel J. Math* **94** (1996), 273–283.

[4] B. Bauslaugh, X. Zhu. Circular coloring of infinite graphs. *Bulletin of the ICA* **24** (1998), 79–80.

[5] J. A. Bondy, P. Hell. A note on the star chromatic number. *J. Graph Theory* **14** (1990), 479–482.

[6] O. V. Borodin, S.-J. Kim, A. V. Kostochka, D. B. West. Homomorphisms from sparse graphs with large girth. *J. Combin. Theory Ser. B* **90**(1) (2004), 147–159.

[7] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetřil, A. Raspaud, E. Sopena. On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Math.* **206** (1999), 77–90.

[8] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, J. Nešetril, A. Raspaud, E. Sopena. On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth. *Discrete Math.* **188** (1998), 78–85.

[9] O. V. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.* **25** (1979), 211–236.

[10] G. J. Chang, L. Huang, X. Zhu. The circular chromatic number of Mycielski's graphs. *Discrete Math.* **205** (1999), 23–37.

[11] V. Chvátal. *Linear Programming.* W. H. Freeman and Company (1980).

[12] B. Courcelle. The monadic second order logic of graphs VI: On several representations of graphs by relational structures. *J. Combin. Theory Ser. B* **54** (1994), 117–149.

[13] M. DeVos. Communication at Workshop on Flows and Cycles. *Simon Fraser Univ.*, 2000.

[14] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[15] Z. Dvořák, R. Škrekovski, T. Valla. Planar graphs of odd-girth at least 9 are homomorphic to Petersen graph. *Preprint series* **44** (2006), 1001.

[16] A. Galuccio, L. Goddyn, P. Hell. High girth graphs avoiding a minor are nearly bipartite. *J. Combin. Theory Ser. B* **83** (2001), 1–14.

[17] L. A. Goddyn, M. Tarsi, C.-Q. Zhang. On (k, d)-colorings and fractional nowhere-zero flows. *J. Graph Theory* **28**(3) (1998), 155–161.

[18] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press, New York, 1980.

[19] H. Grötzsch. Ein Dreifarbensatz fur dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-U., Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reithe* **8** (1959), 109–120.

[20] B. Grünbaum. Acyclic coloring of planar graphs. *Israel J. Math.* **14** (1973), 390–408.

[21] D. R. Guichard. Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number. *J. Graph Theory* **17** (1993), 129–134.

[22] P. Hell, A. V. Kostochka, A. Raspaud, E. Sopena. On nice graphs. *Discrete Math.* **234** (2001), 39–51.

[23] P. Hell, J. Nešetřil. *Graphs and Homomorphisms.* Oxford University Press, Oxford, 2004.

[24] A. J. Hoffman. Some recent applications of the theory of linear inequalities to exremal combinatorial analysis. *Combinatorial Analysis: Proceedings of the Tenth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society. R. Bellman and M. Hall Jr., Eds.* (1960), 113–128.

[25] L. Huang, G. Chang. The circular chromatic number of Mycielskian of G_k^d. *J. Graph Theory* **32** (1999), 63–74.

[26] F. Jaeger. Nowhere-zero flow problems. *Selected topics in graph theory* **3** (1988), 71–95.

[27] F. Jaeger. On circular flows in graphs. *Finite and Infinite Sets* (*Eger*, 1981), *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai* **37** (1984), *North-Holland*, 391–402.

[28] W. Klostermeyer, C.-Q. Zhang. $(2+\epsilon)$-coloring of planar graphs with large odd girth. *J. Graph Theory* **33** (2000), 109–119.

[29] M. Larsen, J. Propp, D. Ullmann. The fractional chromatic number of Mycielski's graphs. *J. Graph Theory* **19** (1995) 411–416.

[30] D. Moser. The star-chromatic number of planar graphs. *J. Graph Theory* **24**(1) (1997), 33–43.

[31] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.* **39** (1964).

[32] J. Nešetřil, A. Raspaud, E. Sopena. Colorings and girth of oriented planar graphs. *Discrete Math.* **165-166** (1997), 519–530.

[33] J. Nešetřil, X. Zhu. On bounded tree-width duality of graphs. *J. Graph Theory* **23** (1996), 151–162.

[34] J. Nešetřil, X. Zhu. On Sparse Graphs with Given Colorings and Homomorphisms. *Rokopis*, 2000.

[35] Z. Pan, X. Zhu. Construction of graphs with given circular flow numbers. *J. Graph Theory* **43**(4) (2003), 304–318.

[36] A. Raspaud, E. Sopena. Good and semi-strong colorings of oriented planar graphs. *Inform. Proc. Letters* **51** (1994), 171–174.

[37] N. Robertson, D. Sanders, P. D. Seymour, R. Thomas. The four-colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B* **70** (1997), 2–44.

[38] E. Sopena. There exist oriented planar graphs with oriented chromatic number at least sixteen. *Inform. Proc. Letters* **81** (2002), 309–312.

[39] E. Steffen, X. Zhu. On the star chromatic number of graphs. *Combinatorica* **16** (1996), 439–448.

[40] W. T. Tutte. On the algebraic theory of graph colorings. *J. Combin. Theory* **1** (1966), 15–50.

[41] A. Vince. Star Chromatic Number. *J. Graph Theory* **12** (1988), 551–559.

[42] C. Q. Zhang. Circular flows of nearly Eulerian graphs and vertex-splitting. *J. Graph Theory* **40**(3) (2002), 147–161.

[43] C. Q. Zhang. Integer flows and cycle covers of graphs, *volume* 205 *of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York* (1997).

[44] B. Zhou. Some theorems concerning the star chromatic number of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B* **70** (1997), 245–258.

[45] X. Zhu. Circular chromatic number: a survey. *Discrete Math.* **229** (2001), 371–410.

[46] X. Zhu. Circular colouring and orientation of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, **86**(1) (2002), 109–113.

[47] X. Zhu. On the bounds for the ultimate independence ratio of a graph. *Discrete Math.* **156** (1996), 229–236.

[48] X. Zhu. Planar graphs with circular chromatic numbers between 3 and 4. *J. Combin. Theory Ser. B*, **76**(2) (1999), 170–200.

[49] X. Zhu. Star chromatic numbers and products of graphs. *J. Graph Theory* **16** (1992), 557–569.

[50] B. Zmazek. Zvezdno kromatično število grafov. *Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko* (1996).