

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA MATEMATIKO

Rok Erman

**BARVANJA RAVNINSKIH IN SORODNIH
DRUŽIN GRAFOV**

Doktorska disertacija

MENTOR: prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2012

Povzetek

V disertaciji bomo predstavili določene posebne podzvrsti barvanja grafov: seznamsko barvanje, realno označevanje in linearno barvanje.

Predstavili bomo štiri rezultate v naslednjem vrstnem redu: seznamsko barvanje kvadrata ravninskih grafov, realno označevanje poddružine Kneserjevih grafov, linearno barvanje ravninskih grafov in navadno barvanje skoraj ravninskih grafov.

Najprej bomo podali zgornje meje za izbirno število kvadrata ravninskega grafa z maksimalno stopnjo $\Delta \leq 4$. V posebnem je G^2 5-, 6-, 7-, 8-, 9-, 12-, 14- ali 15-izbiren, če je ožina grafa G vsaj 20, 15, 10, 8, 7, 5, 4 ali 3.

Določili bomo lambda funkcijo λ za poddružino Kneserjevih grafov.

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + (\ell - 1)x & \text{za } x \in \langle 0, 1/\ell \rangle, \\ (2\ell^2 + \ell - 1)x & \text{za } x \in \langle 1/\ell, 1 \rangle, \\ 2\ell^2 + \ell - 1 & \text{za } x \in \langle 1, 3 \rangle, \\ (2\ell - 2)x + 2\ell^2 - 5\ell + 5 & \text{za } x \geq 3, \end{cases}$$

in

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + 3\ell x & \text{za } x \in \langle 0, 1/\ell \rangle, \\ (2\ell^2 + 3\ell)x & \text{za } x \in \langle 1/\ell, 1 \rangle, \\ 2\ell^2 + 3\ell & \text{za } x \in \langle 1, 3 \rangle, \\ (2\ell - 1)x + 2\ell^2 - 3\ell + 3 & \text{za } x \geq 3. \end{cases}$$

Dokazali bomo, da za ravninski graf G z ožino $g \geq 8$ in maksimalno stopnjo $\Delta \geq 7$, za njegovo linearno kromatično število $lc(G)$ velja neenakost $lc(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$.

Pokazali bomo tudi, da za vsak graf s prekriznim številom največ 4 in kličnim številom največ 5 obstaja 5-barvanje. Prav tako bomo dokazali, da je graf s kličnim številom največ 5, ki mu lahko odstranimo 3 povezave in s tem postane ravninski, nujno 5-obarvljiv.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15.

Ključne besede: izberljivost; kvadrat grafa; ožina; maksimalna stopnja; kromatično število; prekrizno število; klično število; linearno barvanje.

Abstract

In the disertation we will present some special subtypes of graph colourings: list-colouring, real labelings and linear colouring.

We will present four results in the order: list-colouring of the square of planar graphs, real labeling of a subfamily of Kneser graphs, linear colouring of planar graphs and ordinary colouring of near planar graphs.

We will give upper bounds for the choice number of the square of a planar graph with maximum degree $\Delta \leq 4$. In particular G^2 is 5-, 6-, 7-, 8-, 9-, 12-, 14-, 15-choosable if the girth of G is at least 20, 15, 10, 8, 7, 5, 4, 3 respectively.

We will determine the lambda function λ for a subfamily of Kneser graphs.

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + (\ell - 1)x & \text{for } x \in (0, 1/\ell), \\ (2\ell^2 + \ell - 1)x & \text{for } x \in (1/\ell, 1), \\ 2\ell^2 + \ell - 1 & \text{for } x \in (1, 3), \\ (2\ell - 2)x + 2\ell^2 - 5\ell + 5 & \text{for } x \geq 3, \end{cases}$$

and

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + 3\ell x & \text{for } x \in (0, 1/\ell), \\ (2\ell^2 + 3\ell)x & \text{for } x \in (1/\ell, 1), \\ 2\ell^2 + 3\ell & \text{for } x \in (1, 3), \\ (2\ell - 1)x + 2\ell^2 - 3\ell + 3 & \text{for } x \geq 3. \end{cases}$$

We will prove that for a graph G with girth $g \geq 8$ and maximum degree $\Delta \geq 7$ the inequality on its linear colouring number $\text{lc}(G)$ holds: $\text{lc}(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$. This improves the girth assumption of a previously known bound of Raspaud and Wang [63].

We show that every graph with crossing number at most 4 and clique number at most 5 is 5-colourable. We will also prove that if a graph with clique number at most 5 has three edges whose removal leaves the graph planar, then it is 5-colourable.

Math. Subj. Class. (2010): 05C15.

Keywords: Choosability; Square of a graph; Girth; Maximum degree; Chromatic number; Crossing number; Clique number; Linear colouring.

Kazalo

1	Uvod	9
1.1	Zgodovina	10
1.2	Barvanje grafov	11
1.3	Načrt disertacije	12
1.4	Osnovne definicije	12
2	Izberljivost kvadrata ravninskega grafa z $\Delta = 4$	15
2.1	Uvod	15
2.2	Reducibilne konfiguracije	17
2.3	Dokaz izreka	23
3	Razdaljna barvanja Kneserjevih grafov	27
3.1	Uvod	27
3.2	Dodeljevanje frekvenc	27
3.3	Definicije	28
3.4	Domneva Δ^2	29
3.5	Razdaljno barvanje Kneserjevih grafov	31
3.5.1	Definicije	31
3.5.2	Barvanje $L(x, 1)$ za majhne vrednosti x	32
3.5.3	Barvanje $L(x, 1)$ za velike vrednosti x	36
3.5.4	Osrednji rezultat	39
4	Linearno barvanje ravninskih grafov	41
4.1	Uvod	41
4.2	Dokaz izreka	42
4.2.1	Reducibilne konfiguracije	42
4.2.2	Začetni naboj	48
4.2.3	Pravila prenosa naboja	48
4.2.4	Končni naboj	49
5	5-barvanje grafov s štirimi križanji	51
5.1	Uvod	51
5.2	Predpostavke	52
5.2.1	Risbe grafov	52
5.2.2	Lastnosti 6-kritičnih grafov	54
5.2.3	6-kritični grafi vloženi v torus ali Kleinovo steklenico	56

5.3	6-kritični grafi s prekržnim številom 5	58
5.4	Barvanje grafov, katerih križanja so pokrita z malo povezavami	58
5.5	5-barvanje grafov s 4 križanji	63
5.6	Bodoče raziskovanje	70
5.6.1	Razširitev rezultatov	70
5.6.2	Kritični grafi in obarvljivost	71
5.6.3	Izberljivost	72
5.6.4	Grafi z majhnim ključnim številom ali veliko ožino	73

Literatura		75
-------------------	--	-----------

Poglavje 1

Uvod

Matematika je veda, ki začuda nima dobre definicije. Za to področje je to zelo neznačilno a po drugi strani razumljivo, saj se je matematika razširila v čisto vsak del naših življenj in se tako prepleta z vsemi drugimi vedami. En način razdelitve matematike je glede na to, kaj posamezno vejo zanima: količina, sprememba, struktura, prostor, diskretni objekti, osnove, uporabnost.

Količina	Sprememba	Struktura	Prostor
naravna števila	analiza	teorija števil	geometrija
realna števila	vektorska analiza	algebra	topologija
kompleksna števila	diferencialne enačbe		algebraična geometrija

Diskretna matematika	Osnove in filozofija	Uporabna matematika
teorija grafov	logika	numerika, finance
kombinatorika	teorija množic	verjetnost, statistika
kriptografija	teorija kategorij	teorija iger, optimizacija

Tabela 1.1: Osnovne veje matematike in nekaj primerov.

Seveda se področja močno prepletajo med sabo in je zato težko točno razmejiti, kaj spada kam. Tako teorijo grafov praviloma uvrščamo v diskretno matematiko. Ta predstavlja nasprotje zvezno matematiki, saj proučuje največ števne množice objektov. Po drugi strani pa študij izomorfizmov grafa spada v teorijo grup in s tem v algebro, vložljivost grafov na ploskve pa v topologijo. Prav tako se teorija grafov uporablja v kriptografiji, kemiji, optimizaciji, teoriji iger in tako krepko posega v področje uporabne matematike.

Sam koncept grafa je relativno mlad, saj se je formalno pojavil šele v dvajsetem stoletju. Enostaven graf sestavljajo točke, ki so povezane s povezavami. Preproste primere najdemo v vsakdanjem življenju.

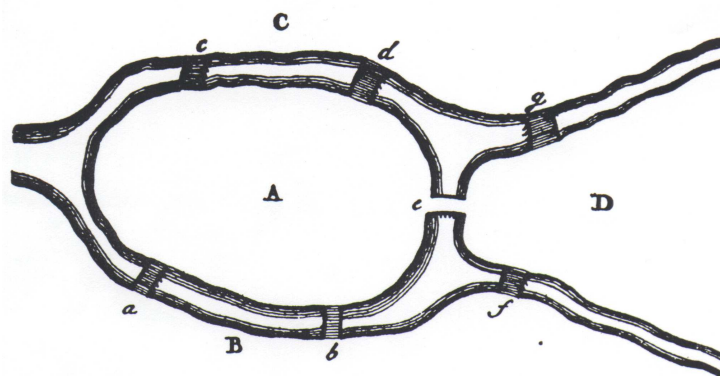
Študij grafov zajema barvanja grafov, povezanost, velikost, ravninskost in drugo.

Točke	Povezave
ljudje	prijateljstva
mesta	ceste
računalniki	omrežje
atomi	molekularne vezi
delnice	medsebojna odvisnost
letališča	zračne linije
atomi	molekulske vezi
polja šahovnice	možne poteze

Tabela 1.2: Enostavni primeri grafov.

1.1 Zgodovina

Začetek teorije grafov predstavljata objava članka Leonharda Eulerja [13] o mostovih v Königsbergu leta 1736. Problem mostov v Königsbergu je sledeč: Skozi takrat prusko mesto Königsberg (danes Kaliningrad) teče reka, ki ga razdeli na štiri dele, ti pa so med seboj povezani s sedmimi mostovi (glej sliko 1.1).



Slika 1.1: Eulerjeva skica Königsberga iz njegovega članka.

Prebivalci so nedeljske popoldneve preživljali tako, da so se sprehajali po mestu. Pri tem so poskušali prečkati vse mostove v mestu, ne da bi preko katerega morali dvakrat. Nikakor niso našli takšne poti, po drugi strani pa tudi niso znali dokazati, da takšna pot ne obstaja. Tako je naloga prišla pred znanega matematika Leonharda Eulerja. Na razočaranje meščanov je dokazal, da taka pot ni možna.

Začetki teorije grafov so skromni, celo trivialni. Medtem, ko so druga področja matematike nastala zaradi fundamentalnih problemov računanja, gibanja ali meritev, so bili problemi, ki so vodili do razvoja teorije grafov, pogosto le malo več kot uganke in jih lahko predstavimo otroku. Ampak kljub navidezni trivialnosti so vzbudile zanimanje matematikov in tako je teorija grafov postala bogato področje z mnogimi teoretičnimi rezultati presenetljive raznolikosti in globine. Tekom časa je teorija grafov postala pomembno področje s širokim spektrom uporabe.

V kemiji predstavlja teorija grafov način za preučevanje velikih molekul in kemijskih struktur. Molekule predstavimo kot grafe in nato s teorijo dokažemo določene strukturne

lastnosti. Iz tega lahko nato sklepamo, kakšne fizikalne in kemijske lastnosti bo imela neka molekula - dober primer so nanocevkke in fulereni. Pri tem se med drugim preučuje Wienerjev indeks, obstoj ter velikost ciklov in različne vrste povezanosti.

V optimizaciji predstavlja klasičen problem tako imenovani problem trgovskega potnika. Model zanj je graf z uteženimi povezavami, ki predstavljajo razdalje med kraji. Našli bi radi pot, po kateri potnik obiše vse kraje vsaj enkrat in je najcenejša oziroma najkrajša med vsemi takimi potmi. Problem trgovskega potnika je NP-poln problem, kar pomeni, da zanj ne poznamo algoritma, ki bi v polinomskem času za dan graf vrnil najcenejšo pot. V področje optimizacije lahko uvrstimo tudi določanje optimalnih urnikov in dodeljevanje frekvenc, ki si ga bomo podrobneje ogledali v poglavju 3.

Grafi so se izkazali kot odlično orodje za modeliranje mnogih problemov, ki jih srečamo v vsakdanjem in poklicnem življenju. Tako s teorijo grafov rešujemo raznolike probleme. Primeri tovrstnih problemov so iskanje učinkovitih algoritmov v računalništvu, dodeljevanje frekvenc oddajnikom v brezžičnih omrežjih, reševanje raznih diskretnih problemov podobnih Eulerjevim mostovom, iskanje optimalnih urnikov in seveda še veliko več.

1.2 Barvanje grafov

Kot že omenjeno so za teorijo grafov značilni problemi, ki so navidezno zelo preprosti, vendar se pri reševanju izkaže, da so zelo težki.

Eden takih problemov je barvanje grafa. Točke grafa poskušamo pobarvati s čimmanj barvami tako, da so sosedne točke pobarvane različno. Za ta problem vemo, da je v splošnem NP-težak problem, kar je seveda zelo daleč od njegove preproste formulacije. Uradna formulacija tega NP-polnega problema je:

Problem 1.2.1. *Ali ima dan graf G dobro barvanje s k barvami?*

Obstoj rešitve tega problema v polinomskem času bi posledično predstavljal obstoj polinomskih algoritmov za vse NP-polne probleme. To bi med drugim pomenilo konec varne komunikacije preko spleta, ki je osnovana na ideji NP-polnih problemov.

Področje je leta 1852 začel Francis Guthrie, ko je opazil, da za barvanje grofij na zemljevidu Anglije vedno zadostujejo štiri barve, če želimo da so sosedne grofije pobarvane različno. S tem je osnoval domnevo o štirih barvah, ki je ostala nedokazana 150 let.

Appel in Haken [7, 8, 6] sta s pomočjo računalnika tako dokazala izrek o štirih barvah:

Izrek 1.2.2. *Vsak ravninski graf lahko pobarvamo s štirimi barvami.*

Drugi pomembni problemi v barvanju grafov so:

- krepki izrek o perfektnih grafih (rešen komaj po tridesetih letih),
- domneva Erdős–Faber–Lovász (neresena),
- domneva o totalnem barvanju (neresena),
- domneva o seznamskem barvanju (neresena) in
- Hadwigerjeva domneva (neresena).

1.3 Načrt disertacije

Tekom časa je barvanje grafov postalo eno večjih in pomembnejših področij teorije grafov. V disertaciji bomo predstavili določene posebne podzvrsti barvanja grafov: seznamsko barvanje, realno označevanje in linearno barvanje.

Seznamsko barvanje je posebno zaradi predhodne izbire seznama dopustnih barv za vsako točko posebej. To nam omogoča, da točkam predpišemo različne sezname in s tem dosežemo želene lastnosti barvanja. To vrsto barvanja lahko uporabimo naprimer za reševanje problema urnikov.

Pri realnem označevanju so barve, za razliko od večine ostalih barvanj, realna števila. Posebnost tega barvanja pa je dejstvo, da upoštevamo omejitve tudi glede na točke na večjih razdaljah in ne samo tistih, ki so sosede. Taka barvanja so odličen model za brezžična telekomunikacijska omrežja, uporabljamo pa jih tudi za druge namene.

Linearno barvanje vsebuje predpostavko, da unija točk poljubnih dveh barv tvori množico disjunktih poti.

Pri barvanju se bomo omejili tudi na posebne družine grafov, kot so Kneserjevi grafi, ravninski grafi, skoraj ravninski grafi in podobno.

Poglavje 2 tako obravnava seznamsko barvanje kvadratov ravninskih grafov in poda nove zgornje meje za izbirno število kvadrata ravninskega grafa z maksimalno stopnjo. V poglavju 3 si ogledamo realno razdaljno barvanje grafov, ki je model za rešitev problema dodeljevanja frekvenc. Tukaj določimo lambda funkcije za posebno družino grafov. Nadaljujemo s študijem linearnega barvanja v poglavju 4 in določimo novo zgornjo mejo za linearno kromatično število ravninskih grafov s predpisanimi mejami za ožino in maksimalno stopnjo. Poglavje 5 pa obravnava odvisnost navadnega kromatičnega števila od prekriznega števila in poda nov rezultat, da za vsak graf s prekriznim številom največ 4 in kličnim številom največ 5 obstaja 5-barvanje.

1.4 Osnovne definicije

V tem razdelku bomo podali osnovne definicije, s katerimi bomo postavili temelje za nadaljnje delo.

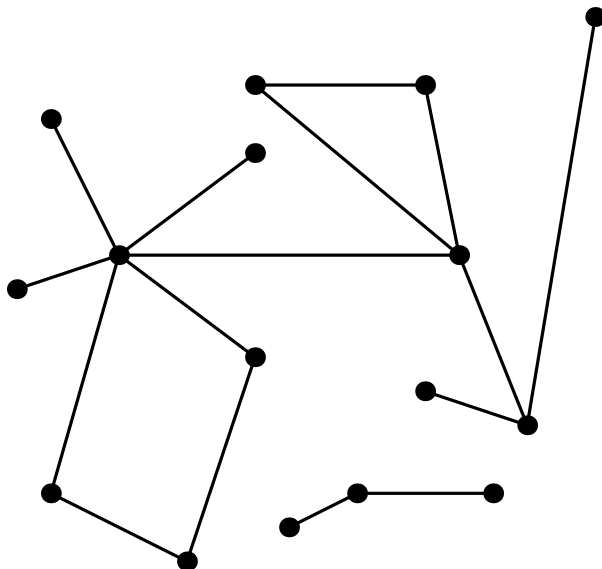
Oznaka *n-točka* pomeni točko stopnje n . Podobno z *$\leq n$ -točka* in *$\geq n$ -točka* označimo točki s stopnjo največ n oziroma z najmanj n .

Osnovni pojem, s katerim se ukvarjamo v teoriji grafov, je seveda graf. Graf G je par množic $G = (V, E)$, kjer velja $V \neq \emptyset$ in $E \subset V \times V$. Množica V predstavlja *točke* ali *vozlišča* grafa, množica E pa *povezave* grafa. Povezava v grafu je torej predstavljena s parom točk, med katerima ta povezava poteka. Množico točk grafa G označimo z $V(G)$, množico povezav pa z $E(G)$. Za dve točki $u, v \in V$ označimo povezavo med njima pogosto kar z uv .

Definicija je seveda zelo intuitivna, saj točke, ko graf rišemo, dejansko so geometrijske točke in so povezave črte med točkami, kot vidimo na sliki 1.2.

Vsi grafi v disertaciji so neusmerjeni, enostavni in končni. Za standardne definicije bralcu priporočamo [21].

Podajmo osnovno definicijo barvanja točk:



Slika 1.2: Primer grafa.

Barvanje točk grafa G je preslikava $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, kjer elementom \mathbb{N} rečemo barve. Barvanje je *pravo* oziroma *dobro*, če imata poljubni povezani točki u in v različni barvi. Torej za $vu \in E(G)$ mora veljati $c(v) \neq c(u)$.

Seznamsko barvanje je prvi študiral Vizing [73] in je definirano v sledeči obliki: Naj bo G enostaven graf. *Izbira barv* $L : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ je prireditev seznamov barv vsaki točki v grafu. *Seznamsko barvanje* je potem barvanje, kjer vsaki točki v priredimo barvo iz $L(v)$. Graf G je *L -izberljiv*, če obstaja dobro L -seznamsko barvanje. Če ima G seznamsko barvanje za vsako izbiro barv, kjer je $|L(v)| = k$ za vsako točko $v \in V$ pravimo, da je graf G *k -izberljiv*.

Uporabljali bomo naslednje notacije. Naj bo $N(v)$ nabor sosedov točke v in $N_2(v)$ sosede točke v stopnje dva. Z $l(f)$ bomo označili dolžino lica f .

Poglavje 2

Izberljivost kvadrata ravninskega grafa z $\Delta = 4$

2.1 Uvod

V tem poglavju bomo formulirali izrek 2.1.3, ki podaja nove zgornje meje za izbirno število kvadrata ravninskega grafa z maksimalno stopnjo $\Delta = 4$. Najprej bomo podali nekaj potrebnih definicij in hipotezo, ki se ji poskušamo približati. Za dokaz izreka bomo uporabili metodo prenosa naboja, ki jo je prvič uporabil Wernicke [75]. Metoda prenosa naboja je tehnika za dokazovanje strukturnih trditev v teoriji grafov in se pogosto uporablja v kontekstu ravninskih grafov. Najbolj znana je zaradi svoje bistvene vloge v dokazu izreka o štirih barvah. Zato da lahko uporabimo metodo prenosa naboja, moramo dokazati reducibilnost potrebnih konfiguracij, kar storimo v razdelku 2.2. Definirali bomo začetni naboj, katerega vsota bo negativna. Pravila prenosa naboja skupaj z reducibilnimi konfiguracijami bodo zagotovila, da bo končni naboj vseh struktur nenegativen, kar je protislovje in dokazuje izrek.

Kvadrat grafa G , ki ga označimo z G^2 , je graf z $V(G^2) = V(G)$ in $E(G^2) = \{uv \mid d_G(u, v) \leq 2\}$. To pomeni, da sta dve točki sosedni v G^2 , če sta na razdalji največ dva v G . Barvanje kvadrata G^2 grafa G je ekvivalentno barvanju grafa G , kjer pa poleg omejitve na različnost barv sosednih točk upoštevamo še, da morajo biti barve različne tudi za točke, ki so na razdalji dva. Tako je seveda očitno, da velja $\chi(G^2) \geq \chi(G)$. Če je Δ maksimalna stopnja grafa G , je za barvanje njegovega kvadrata G^2 potrebnih vsaj $\Delta + 1$ barv, pri čemer je zgornja meja $\Delta^2 + 1$, če uporabimo požrešni algoritem. Ta zgornja meja je tudi dosežena recimo pri Petersenovem grafu.

Glede ravninskih grafov je Wegener [74] leta 1977 podal domnevo:

Domneva 2.1.1 (Wegner). *Za ravninski graf G z maksimalno stopnjo Δ velja:*

$$\chi(G^2) \leq \begin{cases} 7, & \Delta = 3; \\ \Delta + 5, & 4 \leq \Delta \leq 7; \\ \lceil \frac{3}{2}\Delta \rceil + 1, & \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Nit med dvema točkama stopnje vsaj tri je pot med njima, ki je sestavljena le iz 2-točk. *Jedro* $K(G)$ grafa G je graf, ki ga dobimo iz grafa G z zamenjavo celotnih niti s povezavami. Z $l(f)$ bomo označili dolžino lica f in z $\deg(v)$ stopnjo točke v .

Kostochka in Woodall [52] sta podala domnevo, da sta za vsak kvadrat grafa G njegovo kromatično in izbirno število enaki:

Domneva 2.1.2 (Kostochka and Woodall). *Naj bo G enostaven graf. Potem je*

$$\chi_l(G^2) = \chi(G^2).$$

Izberljivost kvadratov subkubičnih ravninskih grafov je bila v preteklosti precej obravnavana. Dvořák, Škrekovski in Tancer [24], Montassier in Raspaud [61], Thomassen [72], Havet [41] ter Cranston in Kim [20] so opravili veliko dela na tem področju. Za primere, ko je $\Delta \geq 4$, pa do sedaj ni bilo rezultatov. Podali bomo nekaj zgornjih mej za izbirno število ravninskih grafov s predpisano ožino:

Izrek 2.1.3. *Naj bo G ravninski graf z največjo stopnjo $\Delta = 4$. Potem držijo sledeče trditve:*

- (a) *Graf G^2 je 5-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 20.*
- (b) *Graf G^2 je 6-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 15.*
- (c) *Graf G^2 je 7-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 10.*
- (d) *Graf G^2 je 8-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 8.*
- (e) *Graf G^2 je 9-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 7.*
- (f) *Graf G^2 je 12-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 5.*
- (g) *Graf G^2 je 14-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 4.*
- (h) *Graf G^2 je 15-izberljiv, če je ožina grafa G vsaj 3.*

Izrek je povzet v naslednji tabeli:

$\chi_l \leq$	5	6	7	8	9	12	14	15
$g \geq$	20	15	10	8	7	5	4	3

Tabela 2.1: Zgornje meje za izbirno število ravninskih grafov z $\Delta = 4$ in predpisano spodnjo mejo za ožino.

Vsako od trditev bomo dokazali s pomočjo protislovja, saj bomo študirali najmanjši možni protiprimer za dano trditev glede na število točk. Če odstranimo eno ali več točk iz tega grafa, vemo, da lahko njegov kvadrat dobro obarvamo z danimi seznanimi barv za točke. To dejstvo bomo uporabljali v dokazih trditev.

2.2 Reducibilne konfiguracije

Konfiguracija je induciran podgraf C grafa G . Pravimo, da je konfiguracija *reducibilna*, če ne more nastopati v najmanjšem protiprimeru. Da bi dokazali reducibilnost iz minimalnosti, sklepamo, da lahko $G - H$ dobro obarvamo, in nato dokažemo, da lahko to barvanje razširimo do dobrega barvanja celotnega grafa G , kar je protislovje. Konfiguracija je *k -reducibilna*, če je reducibilna v okviru k -izberljivosti. Očitno je, da je k -reducibilna konfiguracija tudi $(k + 1)$ -reducibilna.

Reducibilnost vsake konfiguracij bomo dokazali v posamezni lemi. Implicitno bomo privzeli, da take konfiguracije niso prisotne v minimalnih protiprimerih za izrek 2.1.3.

Da so konfiguracije reducibilne bomo dokazali z enakim načinom razmišljanja: odstranimo nekaj točk in obarvamo preostali graf zaradi minimalnosti. Nato, če je to potrebno, razbarvamo nekaj točk in na koncu razširimo obstoječe barvanje do dobrega barvanja celotnega grafa. Ti dokazi delujejo za poljubno ožino. Če je nekaj točk, ki lahko znižajo število barv v določenem seznamu, enakih, potem seveda to povzroči manj omejitev pri barvanju.

Da bi poenostavili predstavitev dokazov bomo uporabljali slike in na njih sledeče označbe:

- Odstranjene točke bodo označene s kvadratom okoli njih. Imenovali jih bomo kvadratne točke.
- Razbarvane točke bodo označene s krogcem okoli njih. Imenovali jih bomo krožne točke.
- Najmanjše število barv, ki so na voljo v seznamu neobarvane točke bo označeno poleg dane točke.

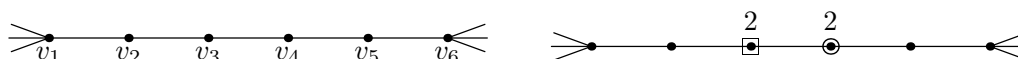
Na ta način lahko bralec hitro preveri veljavnost trditev.

Vsi dokazi bodo sledili istemu postopku, ki ga bomo imenovali *redukcijski postopek*:

- Odstranimo kvadratne točke.
- Obarvamo preostali graf po minimalnosti.
- Razbarvamo krožne točke, da zagotovimo, da imajo točke na razdalji dva različne barve.

V prvih nekaj dokazih bomo podali vse potrebne korake razmišljanja, po nekaj primerih pa bomo predstavili le pripadajočo sliko in nekoliko skrajšano razlago za razširitev barvanja na celoten graf.

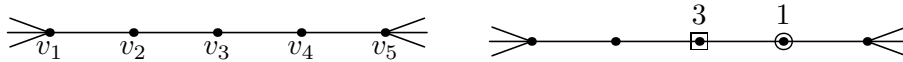
Lema 2.2.1. ($Q1$) *Nit dolžine 4 je 5-reducibilna (glej sliko 2.1).*



Slika 2.1: Reducibilna konfiguracija $Q1$.

Dokaz. Privzamemo lahko, da imata točki v_1 in v_6 stopnjo 4. Odstranimo točko v_3 iz G in pobarvamo preostanek grafa po minimalnosti G . Nato razbarvamo točko v_4 in barvanje razširimo na celoten graf G . V ta namen preverimo, koliko barv zagotovo ostane v seznamih nepobarvanih točk. Točka v_3 ima tri pobarvane točke na razdalji največ dva – točke v_1 , v_2 in v_5 . Primer v_4 je simetričen. To pomeni, da sta velikosti seznamov za točki v_3 in v_4 vsaj 2, kar je enostavno pobarvati. \square

Lema 2.2.2. (Q2) Nit dolžine 3 je 6-reducibilna (glej sliko 2.2).



Slika 2.2: Reducibilna konfiguracija Q2.

Dokaz. Privzamemo lahko, da imata točki v_1 in v_5 stopnjo 4. Odstranimo točko v_3 iz G in pobarvamo preostanek grafa po minimalnosti G . Nato razbarvamo točko v_4 in barvanje razširimo na celoten graf G . V ta namen preverimo, koliko barv zagotovo ostane v seznamih nepobarvanih točk. Opazimo, da le v_2 , v_5 in preostali trije sosedi točke v_5 lahko zmanjšajo število barv, ki so na voljo v $L(v_4)$. Primer v_4 je simetričen. To pomeni, da sta velikosti seznamov za točki v_3 in v_4 vsaj 2, kar je enostavno pobarvati.

Točka v_3 ima tri pobarvane točke na razdalji največ dva – točke v_1 , v_2 in v_5 . Torej sta velikosti seznamov barv za točki v_3 in v_4 vsaj 3 in 1 v tem vrstnem redu, kar je enostavno pobarvati. \square

Lema 2.2.3. (Q3) Nit dolžine 2 je 7-reducibilna (glej sliko 2.3).



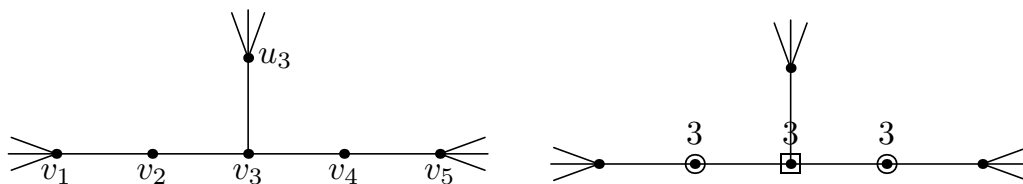
Slika 2.3: Reducibilna konfiguracija Q3.

Dokaz. Privzamemo lahko, da imata točki v_1 in v_4 stopnjo 4. Odstranimo točko v_2 iz G in pobarvamo preostanek grafa po minimalnosti G in razbarvamo točko v_3 . Sedaj barvanje razširimo na celoten graf G .

Točki v_2 lahko le v_1 , njeni preostali trije sosedi ter točka v_4 zmanjšajo število barv, ki so na voljo v $L(v_2)$. Primer za v_3 je simetričen. Tako sklepamo, da sta velikosti seznamov za točki v_2 in v_3 vsaj 2, kar lahko enostavno pobarvamo. \square

Lema 2.2.4. (Q5) Konfiguracija Q5 iz slike 2.4 je 8-reducibilna.

Dokaz. Privzamemo lahko, da imajo točke v_1 , v_5 in u_3 stopnjo 4. Odstranimo točko v_3 in pobarvamo preostanek grafa zaradi minimalnosti grafa G in razbarvamo točki v_2 in v_4 . Sedaj razširimo barvanje na celoten graf G . Za točko v_2 lahko le v_1 , njeni preostali trije sosedi ter točka u_3 zmanjšajo število barv, ki so na voljo v $L(v_2)$. Sedaj pogledimo točko

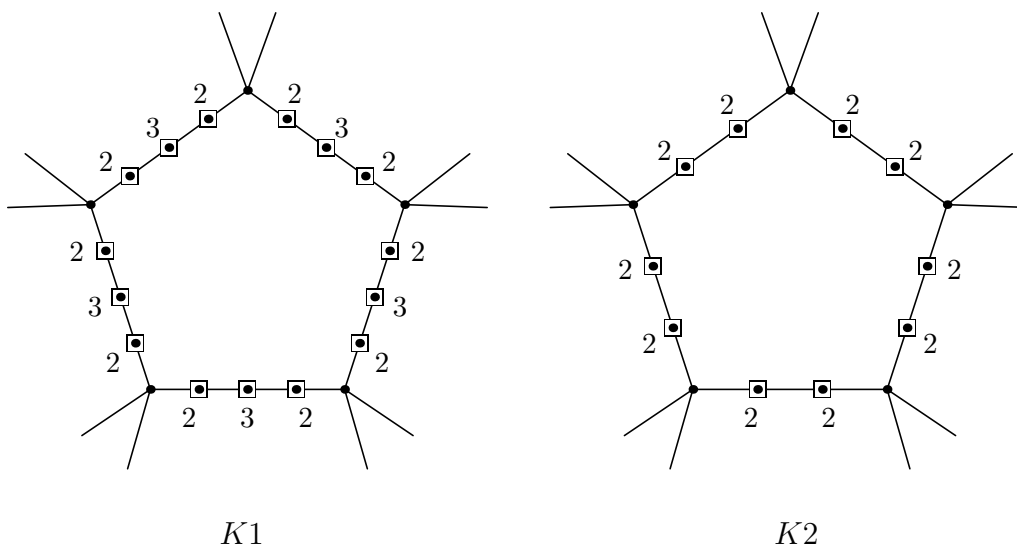
Slika 2.4: Reducibilna konfiguracija $Q5$.

v_3 . Tukaj lahko u_3 , njeni ostali trije sosedi, v_1 in v_5 zmanjšajo število barv, ki so na voljo v $L(v_3)$. Enako razmišljanje je potrebno za v_4 . Velikosti seznamov točko v_2 , v_3 in v_4 so potem 3, 2 in 3 v tem vrstnem redu, kar je očitno obarvljivo. \square

Za preostanek reducibilnih konfiguracij bomo izpustili celotne dokaze, saj sledijo enakemu načrtu kot dokazi do sedaj. Bralec lahko hitro preveri njihovo reducibilnost iz dodanih slik z uporabo podane notacije. Podali bomo le leme in kratke skice dokazov.

Lema 2.2.5. *(K1) Konfiguracija K1 iz slike 2.5 je 5-reducibilna.*

Dokaz. Odstranimo kvadratne točke kot na sliki 2.5 (K1). Varno lahko predpostavimo, da so točke, ki jih ne odstranimo, stopnje 4. Preostanek grafa ima barvanje zaradi minimalnosti in tako nadaljujemo ter razširimo barvanje na cel graf. Sredinske 2-točke imajo 2 pobarvani točki na razdalji največ dva, preostale točke pa imajo 3. Sedaj pobarvamo točke, ki imajo dve barvi na voljo po vrsti okoli cikla. Ker jih je sodo mnogo je to možno, saj vemo, da je sod cikel 2-izberljiv. Sedaj imamo neodvisno množico nepobarvanih točk z vsaj eno barvo v njihovih seznamih in smo končali. \square

Slika 2.5: Reducibilni konfiguraciji $K1$ in $K2$.

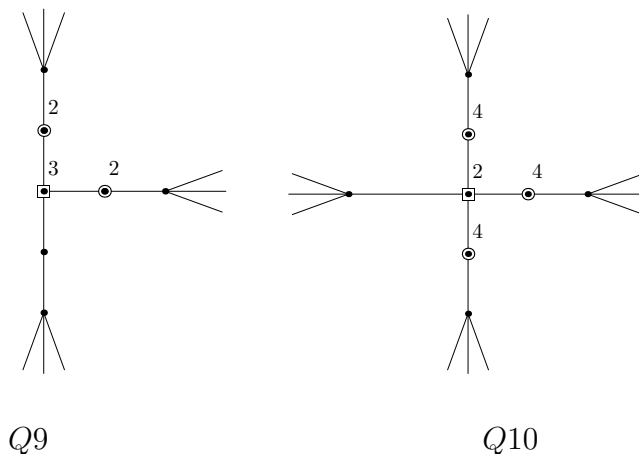
Lema 2.2.6. *(K2) Konfiguracija K2 iz slike 2.5 je 6-reducibilna.*

Dokaz. Po tem, ko odstranimo kvadratne točke in pobarvamo preostanek grafa zaradi minimalnosti, pridemo v situacijo, kot je vidna na sliki 2.5 ($K2$). Privzamemo, da so neodstranjene točke stopnje 4. Ker imamo na začetku sezname velikosti 6, se ti po odstranitvi zmanjšajo na 2, saj ima vsaka kvadratna točka 4 pobarvane točke na razdalji največ 2. Ta situacija je ekvivalentna sodemu ciklu s sezname velikosti 2. Ker je sod cikel 2-izberljiv, smo trditev dokazali. \square

Lema 2.2.7. ($Q9$) Konfiguracija $Q9$ iz slike 2.6 je 7-reducibilna.

Dokaz. Privzamemo, da so najbolj zunanje točke stopnje 4, kot je prikazano na sliki 2.6 ($Q9$). Ko odstranimo sredinsko kvadratno točko in razbarvamo krožni točki, najprej pobarvamo krožni točki, saj imata sezname velikosti 2. Nato pobarvamo kvadratno točko, kar je očitno možno in smo dokazali zeleno trditev. \square

Lema 2.2.8. ($Q10$) Konfiguracija $Q10$ iz slike 2.6 je 9-reducibilna.



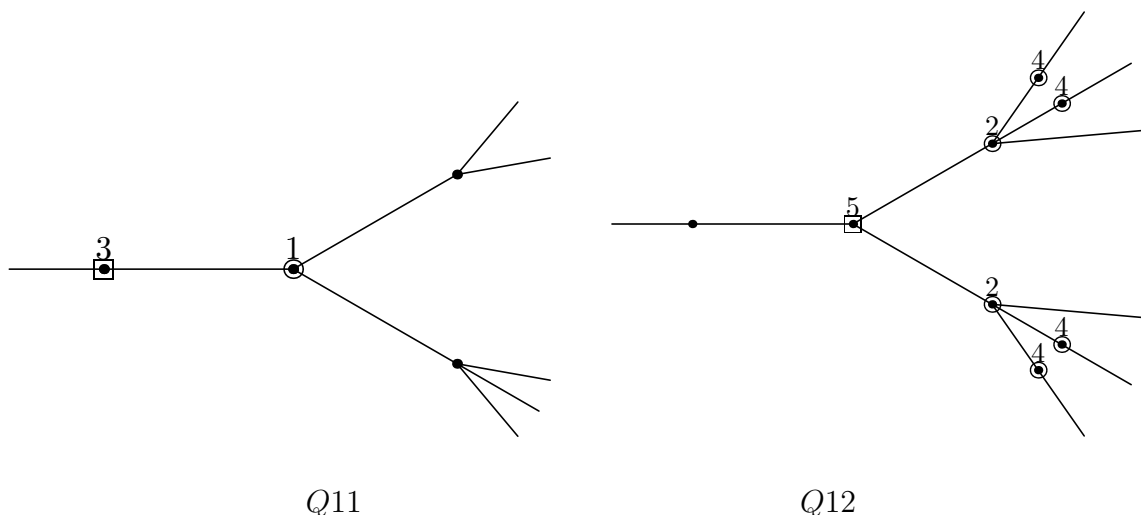
Slika 2.6: Reducibilni konfiguraciji $Q9$ in $Q10$.

Dokaz. Privzamemo, da so najbolj zunanje točke stopnje 4, kot je prikazano na sliki 2.6 ($Q10$). Odstranimo kvadratno točko, pobarvamo preostanek zaradi minimalnosti in razbarvamo tri sosedne kvadratne točke. Nepobarvane točke tvorijo kliko v kvadratu in tri od njih imajo v svojih seznamih na voljo 4 barve, kar dokazuje, da lahko barvanje razširimo na cel graf. To dokazuje trditev. \square

Od sedaj naprej bomo privzeli, da so točke, ki niso narisane v sledečih slikah maksimalne stopnje (to je stopnje 4).

Lema 2.2.9. ($Q11$) Konfiguracija $Q11$ iz slike 2.7 je 9-reducibilna.

Dokaz. Po odstranitvi kvadratne točke dobimo barvanje zaradi minimalnosti in razbarvamo krožno točko kot na sliki 2.7 ($Q11$). Vidimo, da imata ti dve točki sezname velikosti vsaj 3 in 1 in lahko barvanje razširimo. To dokazuje, da je konfiguracija reducibilna. \square

Slika 2.7: Reducibilni konfiguraciji $Q11$ in $Q12$.

Lema 2.2.10. ($Q12$) Konfiguracija $Q12$ iz slike 2.7 je 9-reducibilna.

Dokaz. Po odstranitvi kvadratne točke ter barvanju zaradi minimalnosti in razbarvanju krožnih točk imamo stanje kot na sliki 2.7 ($Q12$). Najprej pobarvamo 4-točke, ki imajo 2 barvi v svojem seznamu, saj so v kvadratu sosedne. Nato pobarvamo kvadratno točko (sedaj ima v svojem seznamu na voljo 3 barve). Sedaj imamo dva para 2-točk, ki imajo vsaj dve barvi v svojih seznamih, pri čemer je en par neodvisen od drugega. Tako lahko para pobarvamo in s tem dobimo barvanje celega grafa, kar dokazuje lemo. □

Lema 2.2.11. ($Q13$) Konfiguracija $Q13$ iz slike 2.8 je 12-reducibilna.

Dokaz. Dokaz je spet direkten. Odstranimo kvadratno točko, pobarvamo ostalo zaradi minimalnosti in nato razbarvamo sosedna odstranjene 2-točke. Vidimo, da imata točki vsaj 1 in 5 barv v svojem seznamu, kar je obarvljivo. □

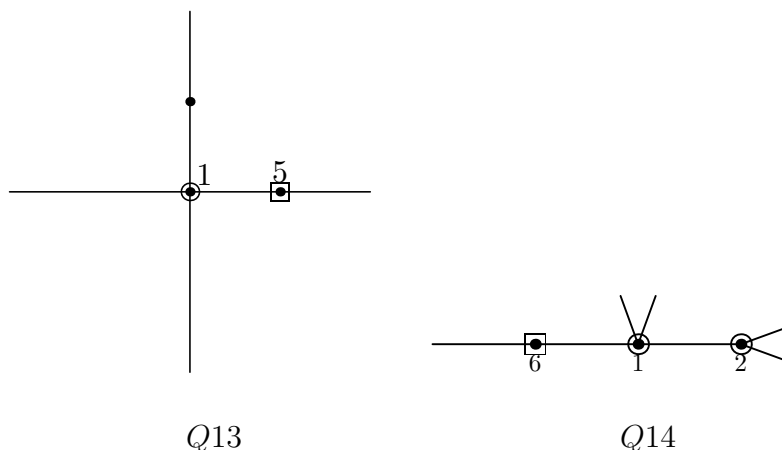
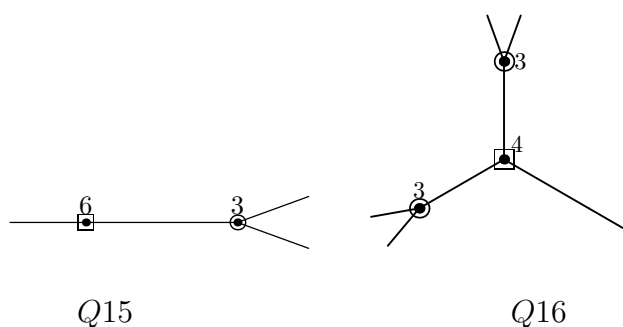
Od tod dalje ne bomo več razlagali faze odstranjevanja in razbarvanja, saj sta jasno razvidni iz slik. Prav tako ne bomo podajali potrebnega sklepanja za navajanje števila barv, ki ostanejo v posameznih seznamih nepobarvanih točk, saj je ta postopek preprosto štetje pobarvanih točk na razdalji največ dva.

Lema 2.2.12. ($Q14$) Konfiguracija $Q14$ iz slike 2.8 je 12-reducibilna.

Dokaz. Po redukcijskem postopku najprej pobarvamo srednjo točko, nato desno in na koncu levo. □

Lema 2.2.13. ($Q15$) Konfiguracija $Q15$ iz slike 2.9 je 12-reducibilna.

Dokaz. Redukcijski postopek da seznama velikosti 6 in 3, kar je očitno obarvljivo. □

Slika 2.8: Reducibilni konfiguraciji $Q13$ in $Q14$.Slika 2.9: Reducibilni konfiguraciji $Q15$ in $Q16$.

Lema 2.2.14. ($Q16$) Konfiguracija $Q16$ iz slike 2.9 je 12-reducibilna.

Dokaz. Opravimo redukcijski postopek in točke pobarvamo v poljubnem vrstnem redu, saj v kvadratu tvorijo trikotnik in imajo vsaj 3 barve v svojih seznamih. □

Lema 2.2.15. ($G1$) Konfiguracija $G1$ iz slike 2.10 je 14-reducibilna.

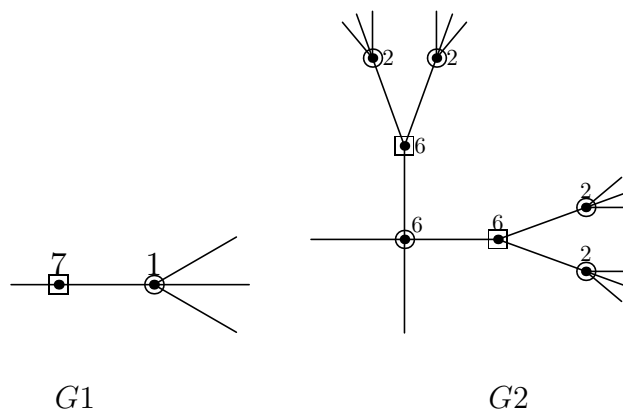
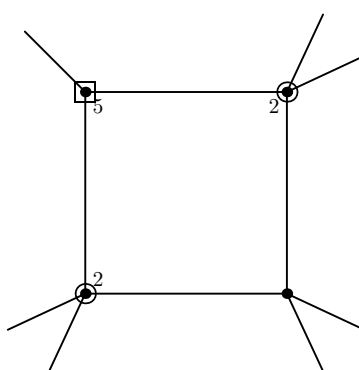
Dokaz. Redukcijski postopek da seznama velikosti 7 in 1, kar je obarvljivo. □

Lema 2.2.16. ($G2$) Konfiguracija $G2$ iz slike 2.10 je 14-reducibilna.

Dokaz. Redukcijski postopek da situacijo na sliki 2.10 ($G2$) in najprej pobarvamo točke z dvema barvama v seznamih. Kvadratni točki imata potem vsaj 4 barve v svojih seznamih in osrednja krožna točka ima vsaj 2. To je preprosto obarvljivo, če najprej pobarvamo krožno točko. □

Lema 2.2.17. ($G3$) Konfiguracija $G3$ iz slike 2.11 je 14-reducibilna.

Dokaz. Po redukcijskem postopku (glej sliko 2.11 ($G3$)) preprosto pobarvamo najprej krožni točki in nato kvadratno točko. □

Slika 2.10: Reducibilni konfiguraciji $G1$ in $G2$.Slika 2.11: Reducibilna konfiguracija $G3$.

2.3 Dokaz izreka

Dokaz. V dokazu bomo smatrali, da je graf G minimalen protiprimer za posamezno trditev izreka glede na število točk. To pomeni, da graf ni k -izberljiv, a vsak pravi podgraf je. Za nekatere dokaze bomo uporabili metodo prenosa naboja. Sedaj bomo dokazali vsako izmed trditev (a)-(h) posebej.

- (a) Ker je konfiguracija $Q1$ reducibilna, je ožina grafa $K(G)$ vsaj ≥ 5 . Ampak 5-cikel v $K(G)$ lahko nastopi le iz situacije na sliki 2.5 ($K1$). To je konfiguracija $K1$, ki pa je prav tako reducibilna. To pomeni, da v $K(G)$ ni ciklov dolžine 5, kar ožino premakne na vsaj 6. Eulerjeva formula nam v tem primeru pravi, da imamo v $K(G)$ vsaj eno 2-točko, kar pa je protislovje z definicijo jedra grafa, kar dokazuje trditev.
- (b) Ker je konfiguracija $Q2$ reducibilna je najkrajši možen cikel v $K(G)$ petkotnik, ki pa lahko nastane le iz situacije na sliki 2.5 ($K2$), kar je reducibilna konfiguracija $K1$. To pomeni, da v $K(G)$ ni ciklov dolžine 5 in Eulerjeva formula spet pravi, da imamo v $K(G)$ vsaj eno 2-točko, kar pa je protislovje in dokazuje trditev.
- (c) Naj bo prvotni naboj:

- $c_0(f) = 3l(f) - 30$ za vsako lice f in

- $c_0(v) = 12 \deg(v) - 30$ za vsako točko v .

Le 2-točke imajo negativen prvotni naboj enak -6 . Eulerjeva formula nam pove, da je vsota prvotnega naboja enaka -60 . Pravila prenosa naboja so sledeča:

- **R1**: vsaka 4-točka pošlje 3 naboja vsaki sosedni 2-točki,
- **R2**: vsaka 3-točka pošlje 3 naboja vsakemu incidenčnemu 4-licu.

Ker je konfiguracija $Q9$ 7-reducibilna, ima 3-točka največ dve sosedni 2-točki. Tudi 7-reducibilnost konfiguracije $Q3$ pomeni, da ima 2-točka le ≥ 3 -točke za sosedne.

Tako vemo, da 3-točka s svojim začetnim nabojem 6 lahko pošlje 3 naboja vsaki izmed dveh možnih sosednih 2-točk. Tako je končni naboj 3-točke vsaj 0. Prav tako lahko 4-točka s svojim začetnim nabojem 18 pošlje 3 naboja vsaki od svojih sosednih 2-točk in bo njen končni naboj vsaj 6. Pokazali smo, da je končni naboj vseh točk in lic nenegativen, kar je protislovje z dejstvom, da je na začetku bila vsota nabojev enaka -60 , kar dokazuje našo trditev.

(d) Naj bo prvotni naboj:

- $c_0(f) = 3 l(f) - 24$ za vsako lice f in
- $c_0(v) = 9 \deg(v) - 24$ za vsako točko v .

Le 2-točke imajo negativen prvotni naboj enak -6 . Eulerjeva formula nam pove, da je vsota prvotnega naboja enaka -48 . Pravila prenosa naboja so sledeča:

- **R1**: vsaka 4-točka pošlje 3 naboja vsaki sosedni 2-točki,
- **R2**: vsaka 3-točka pošlje 3 naboja vsaki sosedni 2 točki.

Ker je konfiguracija $Q5$ 8-reducibilna, ima 3-točka največ eno sosedno 2-točko. Tako 3-točka pošlje ves svoj naboj velikosti 3 svoji največ eni sosedni 2-točki in ima tako končni naboj vsaj 0. Točka stopnje 4 ima začetni naboj enak 12 in lahko vsaki sosedni 2-točki pošlje 3 naboja. Tako ima končni naboj vsaj 0. Tako smo dokazali, da imajo vse točke in lica nenegativen končni naboj, kar je protislovje z dejstvom, da je vsota nabojev enaka -48 in dokazuje našo trditev.

(e) Naj bo prvotni naboj:

- $c_0(f) = 6 l(f) - 43$ za vsako lice f in
- $c_0(v) = 15 \deg(v) - 42$ za vsako točko v .

Le 2-točke imajo negativen prvotni naboj enak -12 . Eulerjeva formula nam pove, da je vsota prvotnega naboja enaka -84 . Pravila prenosa bomo tukaj razdelili na dva koraka:

Faza 1:

- **R1**: vsaka 4-točka pošlje 9 naboja vsaki sosedni 2-točki,
- **R2**: vsaka 3-točka pošlje 3 naboja vsaki sosedni 2-točki.

Faza 2:

- **R3**: vsaka 4-točka z manj kot dvema sosednima 2-točkama pošlje 3 naboja vsaki sosedni 3-točki,
- **R4**: vsaka 3-točka, ki je v tej fazi prejela naboj od 4-točke, pošlje 3 naboja vsaki sosedni 2-točki.

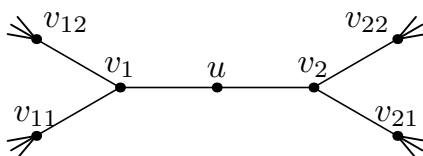
Tukaj 9-reducibilnost konfiguracije $Q3$ pomeni, da so sosede 2-točke vsaj stopnje 3. Ker sta konfiguraciji $Q5$ in $Q10$ 9-reducibilni, ima 3-točka največ eno 2-točko za soseda in 4-točka največ dve sosedni 2-točki.

Z začetnim nabojem 18 lahko 4-točka pošlje 9 naboja vsaki izmed največ dveh sosednih 2-točk in bo njen naboj vsaj 0.

Potem 3-točka z začetnim nabojem 3 lahko pošlje ves naboj svoji največ eni sosedni 2-točki in ima nenegativen naboj.

Če sta sosedi 2-točke stopnje ≥ 3 in 4, ima ta 2-točka po prvi fazi nenegativen naboj. Tako imajo po prvi fazi negativen naboj le še 2-točke, ki imajo obe sosedi stopnje 3.

Naj bo u taka 2-točka in naj bosta v_1 in v_2 njena soseda kot na sliki 2.12.



Slika 2.12: Slika 2-točke z dvema sosednima 3-točkama.

Ker je konfiguracija $Q11$ 9-reducibilna so točke v_{11} , v_{12} , v_{21} in v_{22} stopnje 4. Zaradi 9-reducibilnosti konfiguracije $Q12$ ima vsaj ena od točk v_{11} in v_{12} sosede stopnje 2. Enako drži za točki v_{21} in v_{22} . To pomeni, da v_1 in v_2 prejmeta 3 naboja v drugi fazi od svojih sosednih 4-točk in tako pošljeta 3 naboja točki u .

To dokazuje, da imajo po obeh fazah prenosa naboja vse točke in lica nenegativen naboj, kar je protislovje z negativno vsoto začetnega naboja in dokazuje trditev.

(f) Naj bo prvotni naboj:

- $c_0(f) = 6 l(f) - 30$ za vsako lice f in
- $c_0(v) = 9 \deg(v) - 30$ za vsako točko v .

V tem primeru imajo negativen naboj 2-točke enak -12 in 3-točke enak -3 . Eulerjeva formula nam pove, da je vsota prvotnega naboja enaka -30 . Pravila prenosa naboja so sledeča:

- **R1**: vsaka 4-točka pošlje 6 naboja vsaki sosedni 2-točki,
- **R2**: vsaka 4-točka pošlje 2 naboja vsaki sosedni 3-točki.

Ker je konfiguracija $Q15$ 12-reducibilna, to pomeni, da so sosede 2-točk stopnje 4 in da 3-točke nimajo sosednih 2-točk.

Tako 12-reducibilnost konfiguracije $Q14$ povzroči, da 4-točke s sosedno 2-točko nimajo 3-točk za sosede.

Konfiguracija $Q16$ je 12-reducibilna in tako imajo 3-točke vsaj 2 sosedni 4-točki. Konfiguracija $Q13$ je 12-reducibilna in tako imajo 4-točke največ eno sosedno 2-točko.

Točka stopnje 2 ima dve sosedni 4-točki in vsaka ji pošlje 6 naboja. Točka stopnje 3 ima vsaj dva soseda stopnje 4 in vsak pošlje 2 naboja.

To pokaže, da imajo točke in lica po prenosu naboja nenegativen naboj, kar je protislovje in dokazuje trditev.

(a) Naj bo prvotni naboj:

- $c_0(f) = 6 l(f) - 30$ za vsako lice f in
- $c_0(v) = 9 \deg(v) - 30$ za vsako točko v .

Ker so 2-točke 14-reducibilne, opazimo, da so edini elementi z negativnim začetnim nabojem 3-točke z nabojem -3 in 4-lica z nabojem -6 . Eulerjeva formula pravi, da je vsota prvotnega naboja enaka -60 .

Pravila prenosa naboja so sledeča:

- **R1**: vsaka 4-točka pošlje 3 naboja vsaki sosedni 3-točki,
- **R2**: vsaka 4-točka pošlje $\frac{3}{2}$ naboja vsakemu incidenčnemu 4-licu.

Ker je konfiguracija $G2$ 14-reducibilna, vemo, da ima vsaka 4-točka največ eno sosedno 3-točko. Dejstvo, da je konfiguracija $G2$ 14-reducibilna, pomeni, da na 4-licih ni 3-točk. Tako ločimo dva primera glede na izbrano 4-točko v :

- v ima sosedno 3-točko u . To pomeni, da dve lici, ki sta incidenčni v , ne moreta biti 4-lici zaradi $G3$. Tako v pošlje 3 naboja točki u in največ $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ dvema možnima 4-licema, ki sta lahko incidenčni v . Tako je končni naboj točke v vsaj 0.
- v nima sosedne 3-točke. V tem primeru v pošlje največ $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ svojim incidenčnim 4-licem in je tako njen končni naboj vsaj 0.

To nam pove, da je končni naboj točk in lic nenegativen, kar je protislovje z negativno vsoto naboja in dokaže trditev.

(h) Ker so trikotniki, 2-točke in 3-točke vsi 15-reducibilni, imamo takojšnje protislovje z znanim dejstvom, da ima graf brez trikotnikov točko stopnje največ 3. To protislovje dokazuje trditev.

□

Poglavje 3

Razdaljna barvanja Kneserjevih grafov

3.1 Uvod

Najprej bomo v razdelku 3.2 pogledali kaj je problem dodeljevanja frekvenc, ki predstavlja poglavitno motivacijo za študij razdaljnih realnih barvanj. V nadaljevanju bomo navedli potrebne definicije in podali osrednjo domnevo na tem področju. V razdelku 3.5 bomo predstavili dokaz izreka 3.5.9, ki točno določi lambda funkcije posebne poddružine Kneserjevih grafov.

3.2 Dodeljevanje frekvenc

Problem dodeljevanja frekvenc se je pojavil s prvimi oddajniki za brezžična omrežja. Med oddajniki, ki so blizu, pride do interference in tako do motenega signala. Da bi to preprečili, je treba bližnjim oddajnikom dodeliti dovolj različne frekvence, da ne pride do interference. To na začetku ni bil problem, saj so bile vse frekvence proste. Danes pa je zaradi zelo hitre rasti brezžičnih omrežij postal frekvenčni spekter zelo iskana in redka dobrina. Frekvenčni pasovi so omejeni zaradi fizikalnih omejitev oddajnikov. Pojavi se tudi finančna omejitev, kajti zakup frekvenčnega pasu je zelo drag. Tako se je pojavila potreba po učinkovitih algoritmih za dodeljevanje frekvenc.

Na tem mestu se takoj ponudi model za brezžično omrežje z grafi. Oddajnike predstavimo s točkami v grafu in bližnje oddajnike povežemo s povezavami. V teoriji grafov lahko modele za dodeljevanje radijskih frekvenc oddajnikom prvič zasledimo v zgodnjih osemdesetih letih v članku Halea [40]. Od tedaj so razvili več različnih oblik barvanja grafov, s katerimi lahko modeliramo tak problem. Tako poznamo recimo T -barvanja grafov, kjer so med posameznimi oddajniki (točkami) prepovedane nekatere razlike med frekvencami [64]. Prav tako je bilo objavljenih več študij na to temo [1, 17], ki dajejo pregled nad različnimi pristopi k problemu in rezultati iz tega področja.

Leta 1988 je Roberts predlagal nov model za dodeljevanje frekvenc z dvema nivojema interference [65], ki sta ga Griggs in Yeh prilagodila v bolj splošen model razdaljnih barvanj [37]: Za nenegativna cela števila p_1, \dots, p_k , je $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje grafa G takšno barvanje s celimi števili pri katerem točke natanko na razdalji i dobijo barve, ki se razliku-

jejo vsaj za p_i . Cilj je seveda najti tako barvanje, da bo razlika med največjo in najmanjšo uporabljeno barvo najmanjša, saj bo s tem frekvenčni pas najmanjši. Zaradi primerov iz prakse se je sprva privzelo, da pogoji na razliko med barvami padajo z razdaljo [12], na primer $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_k \geq 1$, čeprav teorija tega ne zahteva. Sedaj pa vemo, da so zelo pomembni tudi ostali primeri, recimo $p_1 = 0$ in $p_2 = 1$, ki prav tako nastopa v praksi [11, 47]. Primer $p_1 = 0, p_2 = 1$ nam da tako imenovano injektivno barvanje.

Ideja tega modela je naslednja. Točke predstavljajo oddajnike, sosedni oddajniki pa so povezani s povezavami. Največ interference se seveda ustvari med oddajniki, ki so zelo blizu in so zato v grafu povezani. Kljub temu pa se nekaj interference pojavi tudi med oddajniki na razdalji dva, tri in tako naprej. Za učinkovito dodeljevali frekvence v takem omrežju iščemo dodelitev frekvenc znotraj čim manjšega intervala, kjer se frekvence, dodeljene bližnjim oddajnikom, zelo razlikujejo. Frekvence dodeljene oddajnikom, ki so srednje oddaljeni, pa se razlikujejo za manj. To nas takoj vodi do definicije razdaljnega barvanja iz prejšnjega odstavka.

3.3 Definicije

V praksi seveda ni nobenega razloga, da bi frekvence morale biti celoštevilске, saj jih lako izbiramo iz celega zveznega spektra elektromagnetnega valovanja. Tako je teorija kmalu naravno prešla na barvanje z realnimi števili, oznake pa ostanejo kar enake.

Imejmo končen graf G in nenegativna realna števila p_1, \dots, p_k . $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje ($L(p_1, \dots, p_k)$ -labeling) grafa G je preslikava $c : V(G) \rightarrow [0, \infty)$, kjer za točki u in v na razdalji $d(u, v) = i$, $i \leq k$, velja $|c(u) - c(v)| \geq p_i$. Razpon (*span*) $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanja je razlika med največjo in najmanjšo barvo.

Tukaj velja omeniti, da lahko brez izgube za splošnost najmanjšo barvo vedno postavimo na nič, kar večinoma kar privzamemo. To je očitno, saj lahko od poljubnega $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanja odštejemo najmanjšo barvo in tako dobimo barvanje z najmanjšo barvo nič. Tako razpon postane največja barva v našem grafu. Naš cilj je seveda najti $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje z najmanjšim možnim razponom. Najmanjši možen razpon označimo z $\lambda_{p_1, \dots, p_k}(G)$ ali z $\lambda(G; p_1, \dots, p_k)$. Pogosto srečamo tudi izraz *lambda funkcija*, ko gledamo na razpon kot funkcijo argumentov p_1, \dots, p_k . Vsako barvanje z razponom $\lambda(G; p_1, \dots, p_k)$ je *optimalno*.

Tukaj opazimo *lastnost razmerja* (*scaling property*):

Trditev 3.3.1. Za vsako realno število $\alpha > 0$ velja:

$$\alpha \lambda(G; p_1, \dots, p_k) = \lambda(G; \alpha p_1, \dots, \alpha p_k).$$

Dokaz. Naj bo f $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje grafa G z razponom $\lambda(G; p_1, \dots, p_k)$. Če ga pomnožimo z α , očitno dobimo $L(\alpha p_1, \dots, \alpha p_k)$ -barvanje f' z najmanjšim možnim razponom $\alpha \lambda(G; p_1, \dots, p_k)$, saj smo največjo barvo pomnožili z α . Če razpon ne bi bil najmanjši možen, bi imeli barvanje z manjšim razponom, ki bi ga delili z α in dobili $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje z manjšim razponom, kar pa je protislovje. Dokaz v drugo smer je podoben, le da sedaj delimo z α . \square

V posebnem primeru, ko je $k = 2$, lahko vrednost $\lambda(G; p_1, p_2)$ določimo že s funkcijo za $p_2 = 1$. Torej se lahko pri študiju $L(p, q)$ -barvanja osredotočimo kar na $L(x, 1)$ -barvanje.

Največja pozornost pri raziskovanju je bila namenjena osnovnemu primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$, torej $L(2, 1)$ -barvanju, saj je to eden najosnovnejših primerov, ki se pojavljajo v praksi. Iz tega primera zelo preprosto sledijo rešitve za perturbirane probleme, ki so blizu optimalne rešitve.

Izrek 3.3.2 (Izrek o D -množici za končen primer, $p = 2$). *Naj bo $D(k_1, k_2) = \{a_1 k_1 + a_2 k_2; a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$, torej množica vseh linearnih kombinacij k_1 in k_2 s celimi koeficienti. Naj bo $G = (V, E)$ končen graf in naj bosta $p, q \geq 0$ realni števili. Potem obstaja tako optimalno $L(p, q)$ -barvanje $f : V(G) \rightarrow [0, \infty)$, da je najmanjša barva nič in vse barve (in razpon $\lambda(G; p, q)$) pripadajo množici $D(p, q)$ in za vsoto koeficientov velja $a_1 + a_2 < |V|$.*

Očitno je najmanjši možen razpon nepadajoča funkcija svojih argumentov, saj velja, da če je c dobro $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje za neke p_1, \dots, p_k , je ta isti c tudi dobro $L(p'_1, \dots, p'_k)$ -barvanje, če za vsak par p'_i in p_i velja $p'_i \leq p_i$. Velja pa še veliko več. Griggs in Jin [36] sta dokazala, da je $\lambda(G; x, 1)$ zvezna, odsekoma linearna funkcija s končno mnogo odseki. To pomeni, da obstaja končna particija definicijskega območja lambda funkcije na odseke, kjer velja, da je funkcija na vsakem odseku linearna. Velja celo, da so koeficienti linearne funkcije na nekem odseku prav tako v D -množici.

To nam je v veliko pomoč pri določanju lambda funkcij. Predstavljajmo si $L(p, q)$ -barvanje. Kot vemo, je lambda funkcija $\lambda(G; p, q)$ natanko določena z enoparametrično funkcijo $\lambda(G; x, 1)$, kar pa nam zelo olajša dokazovanje spodnjih in zgornjih mej za to funkcijo. Če recimo vemo, da lambda funkcija zavzame enako vrednost v dveh točkah x_0 in x_1 , iz tega sledi, da lambda funkcija zavzema to vrednost tudi v vseh točkah $x \in [x_0, x_1]$.

Razdaljna barvanja so povezana z navadnim barvanjem točk. Če je $k = 1$ in $p_1 = 1$, je to navadno barvanje točk in velja $\lambda(G; 1) = \chi(G) - 1$. Če je recimo $p_1 = \dots = p_k = 1$, se naš problem prevede na navadno barvanje točk k -te potence našega grafa G . Povezava uv je torej v grafu G^k , če velja, da sta točki u in v v grafu G na razdalji manjši ali enaki k . Tako velja $\lambda(G; p_1, \dots, p_k) = \chi(G^k) - 1$. Mnogo rezultatov barvanja potenc grafov se tako prevede na razdaljna barvanja in obratno. Kot primer si bralec lahko ogleda delo Molloya in Salavatipourja [59, 60].

3.4 Domneva Δ^2

Kot smo že rekli, je bilo daleč največ dela opravljenega na primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$. Ena najpomembnejših domnev na tem področju, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [37], je domneva Δ^2 :

Domneva 3.4.1. *Vsak graf G z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 2$ ima $L(2, 1)$ -barvanje z razponom največ Δ^2 .*

Domneva še skoraj petnajst let po njeni objavi ni ne potrjena ne ovržena, kljub temu, da ji je bila posvečena dobršna mera pozornosti. To dejstvo kaže zahtevnost in težo domneve. V zaporedju člankov [37, 18, 55, 35] so prvo mejo $\Delta^2 + 2\Delta$, ki jo bomo dokazali kasneje, zmanjševali do trenutno najboljše meje $\Delta^2 + \Delta - 2$, ki jo je dokazal Gonçalves [35]. Uspešno so jo dokazali le za nekatere posebne razrede grafov, kot so ravninski grafi z najvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$, Hamiltonski kubični grafi [49], grafi z najvišjo stopnjo dva, ravninski grafi z najvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$ [10] in drugi. Zaradi uporabe razdaljnih barvanj

v praksi ni presenetljivo, da se pojavlja vedno več člankov z algoritemskim pogledom na taka barvanja [2, 31, 33, 53, 57].

Dokažimo sedaj prvo zgornjo mejo za razpon $L(2, 1)$ -barvanja poljubnega grafa G , ki sta jo postavila Griggs in Yeh [37].

Trditev 3.4.2. *Naj bo G graf z najvišjo stopnjo Δ . Potem velja $\lambda(G; 2, 1) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.*

Dokaz. Vemo, da obstaja optimalno barvanje z barvami v $D(2, 1)$. Torej lahko brez škode za splošnost upoštevamo samo celoštevilске barve ≥ 0 . Poljubno uredimo točke grafa in jih po vrsti barvamo z najnižjo dovoljeno barvo. Točka $v \in V(G)$ ima največ Δ sosedov in tako največ $\Delta(\Delta - 1)$ točk na razdalji dva. Vzemimo neko točko v našega grafa in jo poskušajmo pobarvati. Točka, ki je pobarvana z barvo c , nam za x prepoveduje barve $c - 1$, c in $c + 1$, če je od v oddaljena za dva, in barvo c , če je od v oddaljena za ena. Tako je za barvo točke v prepovedanih največ $3\Delta + \Delta^2 - \Delta$ barv. Torej je razpon kvečjemu $\Delta^2 + 2\Delta$, saj začnemo z barvo 0 in imamo tako na voljo $\Delta^2 + 2\Delta + 1$ barv. \square

Očitna spodnja meja pa je $\Delta + 1$, ki jo dosežemo z grafom $K_{\Delta, 1}$ za $\Delta \geq 2$.

Definicija 3.4.3. *Končna projektivna ravnina reda n z oznako $Pi(n)$ je množica $n^2 + n + 1$ točk s sledečimi lastnostmi:*

1. *poljubni dve točki tvorita premico,*
2. *poljubni dve premici se sekata v eni točki,*
3. *v vsaki točki se seka $n + 1$ premic in*
4. *vsaka premica vsebuje $n + 1$ točk.*

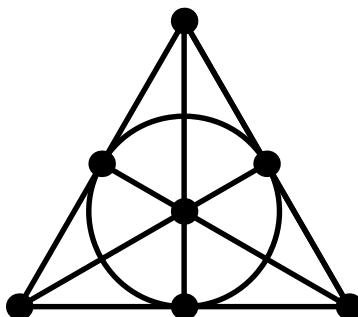
Taka projektivna ravnina obstaja, če je n potenca praštevila. Znana domneva pravi, da so to edine končne projektivne ravnine, ki obstajajo. Dokaz te domneve pa je eden izmed pomembnejših nerešenih problemov v diskretni matematiki.

Definicija 3.4.4. *Graf G je incidenčni graf projektivne ravnine $\Pi(n)$ reda n , če je $G = (A, B, E)$ tak dvodelen graf, da velja:*

- (1) $|A| = |B| = n^2 + n + 1$,
- (2) *vsak $a \in A$ predstavlja točko p_a v $\Pi(n)$ in vsak $b \in B$ predstavlja premico l_b v $\Pi(n)$,*
- (3) $E = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B, \text{ da velja } t_a \in p_b \text{ v } \Pi(n)\}$.

Iz definicije $\Pi(n)$ vemo, da je incidenčni graf $(n + 1)$ -regularen. Za vsak $x, y \in A$ je $d_G(x, y) = 2$ in za vsak $u, v \in B$ je $d_G(u, v) = 2$. Prav tako velja, da če $a \in A$ in $b \in B$ nista sosedna, sta na razdalji $d_G(a, b) = 3$. V [37] imamo sledeči izrek.

Izrek 3.4.5. *Če je $G = (A, B, E)$ incidenčni graf projektivne ravnine reda n , je $\lambda(G; 2, 1) = n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$, kjer je $\Delta = n + 1$ maksimalna stopnja grafa G .*



Slika 3.1: Končna projektivna ravnina reda 2 (Fanova ravnina).

Dokaz. Pokažimo najprej spodnjo mejo. V A imamo $n^2 + n + 1$ točk in poljubni dve sta na razdalji dve. Torej morata poljubni dve točki biti pobarvani različno. Torej je razpon $\lambda(G; 2, 1) \geq n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$.

Za nadaljevanje dokaza bomo uporabili Hallov pogoj.

Definicija 3.4.6. *Prيرهjanje (matching) grafa G je množica disjunktnih povezav. To je množica povezav, za katero velja, da poljubni dve povezavi nimata skupne točke. Popolno prirejanje (perfect matching) je prirejanje z $\frac{n}{2}$ povezavami, torej največje možno. To seveda pomeni, da imajo lahko le grafi s sodo mnogo točkami popolna prirejanja.*

Bralec lahko dokaz naslednjega izreka najde v [9], mi pa ga bomo tukaj izpustili.

Izrek 3.4.7 (Hallov pogoj). *Naj bo A neka množica točk in množica $N(A)$ množica sosedov točk iz A . Dvodelen graf G s particijama X in Y ima popolno prirejanje natanko tedaj, ko velja $|N(A)| \geq |A|$ za vse podmnožice $A \subset X$.*

Sedaj lahko nadaljujemo z dokazom izreka 3.4.5. Za zgornjo mejo si oglejmo komplementarni dvodelen graf $G' = K_{n,n} - E(G)$. Ta graf je dvodelen in n^2 regularen, saj je G $(n+1)$ -regularen. Hallov pogoj je izpolnjen, torej ima G' popolno prirejanje. To pomeni, da imamo $n^2 + n + 1$ povezanih parov točk. Graf je dvodelen, torej ima vsak tak par eno točko v A in drugo v B . Vsakega od teh parov točk lahko v originalnem grafu G pobarvamo z isto barvo, saj tam te točke niso povezane in hkrati niso na razdalji dve. Iz dokaza spodnje meje vidimo, da bo barvanje pravo, če bodo te barve paroma različne in tako smo dokazali še zgornjo mejo. \square

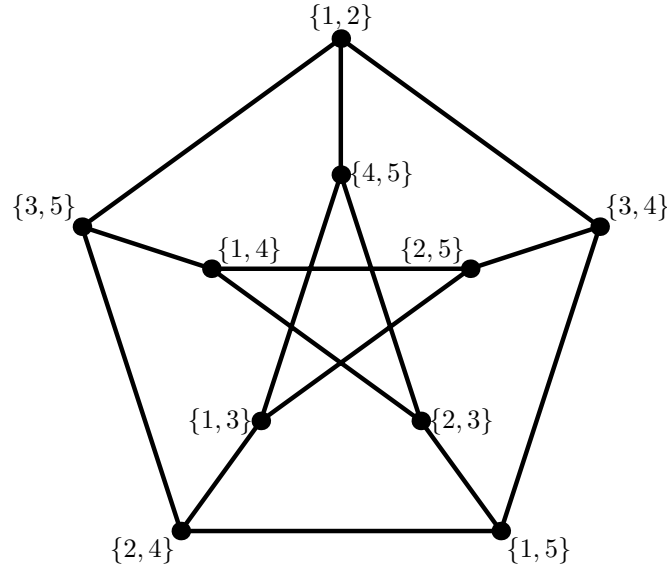
3.5 Razdaljno barvanje Kneserjevih grafov

V tem razdelku bomo določili lambda funkcijo za poddružino Kneserjevih grafov. Najprej pa moramo postaviti osnovne definicije, ki jih bomo potrebovali.

3.5.1 Definicije

Poglejmo najprej, kaj je Kneserjev graf:

Definicija 3.5.1. *Kneserjev graf $K(n, k)$, $n > 2k$, je graf na $\binom{n}{k}$ točkah, definiran sledeče: vsaka točka ustreza podmnožici množice $\{1, \dots, n\}$ s k elementi in točki sta sosedni natanko tedaj, ko sta njuni množici disjunktni. Kneserjev graf $K(5, 2)$ je Petersenov graf.*



Slika 3.2: Petersenov graf.

Najbolj znan Kneserjev graf je $K(5, 2)$, ki je Petersenov graf, ki je prikazan na sliki 3.2.

Določitev lambda funkcij vseh Kneserjevih grafov vsebuje določitev njihovih kromatičnih števil in določitev kromatičnih števil njihovih kvadratov kot poseben primer. Mi bomo tukaj določili lambda funkcije za vse Kneserjeve grafe $K(n, 2)$, $n \geq 5$ (izrek 3.5.9).

Kot primer so lambda funkcije Kneserjevih grafov $K(n, 2)$, $n = 5, 6, 7, 8$, na sliki 3.3.

Poglejmo si sedaj nekaj posebnih lastnosti grafov $K(n, 2)$. Graf $K(n, 2)$ je izomorfen komplementu grafa povezav K_n . Vsako točko $K(n, 2)$ lahko asociiramo s povezavo v K_n . Taka povezava naravno ustreza dvoelementni podmnožici množice z n elementi, ki jo predstavljajo točke K_n . Dve točki $K(n, 2)$ sta sosedni natanko tedaj, ko sta njuni množici disjunktni. To je ekvivalentno zahtevi, da sta povezavi v grafu povezav K_n disjunktni. Izkaže se, da je premišljevanje v naslednjih razdelkih veliko lažje, če $n - 1$ točk grafa K_n identificiramo s števili $0, \dots, n - 2$ in zadnjo točko z zvezdico $*$.

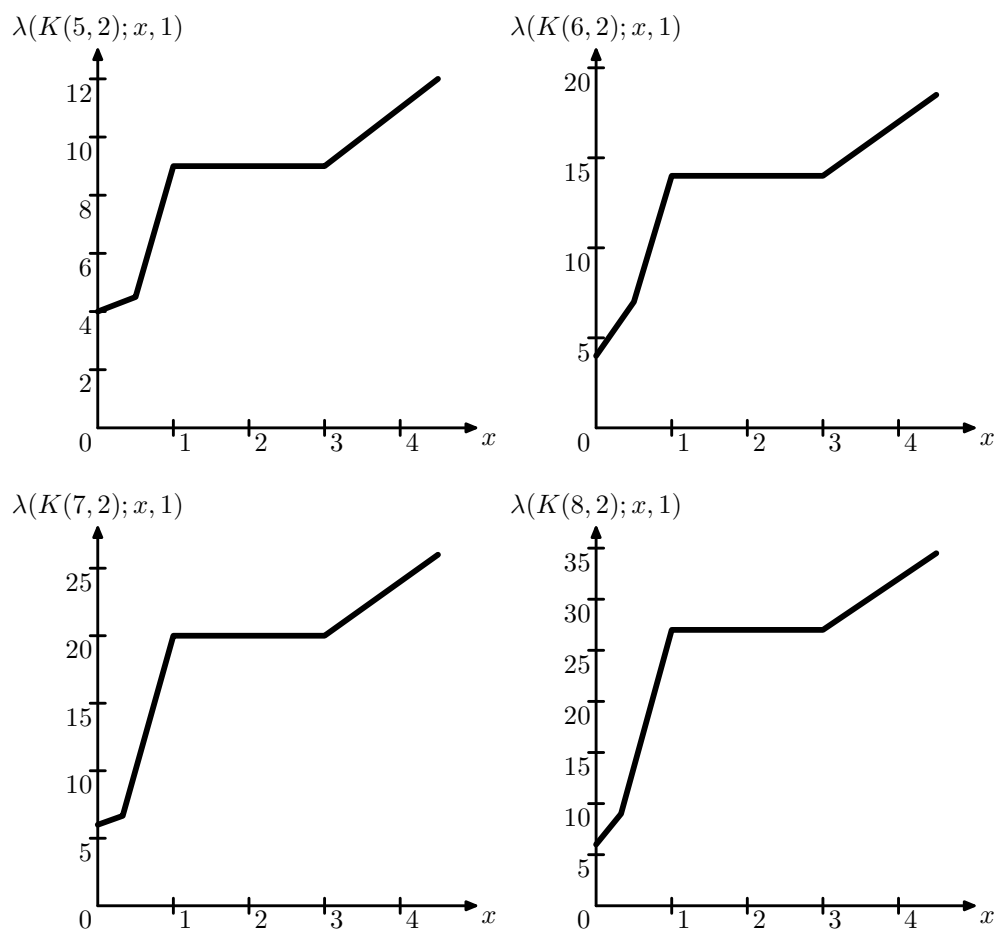
Posledica opažene korespondence med $K(n, 2)$ in grafom povezav K_n je dejstvo, da je največja klika v $K(n, 2)$ velikosti $\lfloor n/2 \rfloor$ (velikost maksimalnega prirejanja v K_n).

Uporabno bo tudi dejstvo, da je kvadrat $K(n, 2)$ poln graf za vsak $n \geq 5$, saj sta poljubni točki v $K(n, 2)$ na razdalji največ dve. V posebnem, $\lambda(K(n, 2); 1, 1) = \chi(K(n, 2)^2) - 1 = \binom{n}{2} - 1$.

3.5.2 Barvanje $L(x, 1)$ za majhne vrednosti x

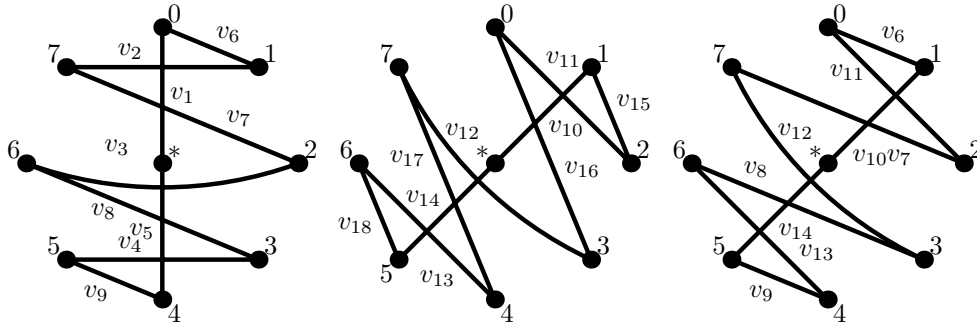
Lema 3.5.2. Za vsak $\ell \geq 2$ obstaja tako zaporedje točk v_1, \dots, v_m , $m = \binom{2\ell+1}{2}$ v $K(2\ell + 1, 2)$, da za vsak $i = 1, \dots, m - (\ell - 1)$ točke $v_i, \dots, v_{i+\ell-1}$ tvorijo kliko velikosti ℓ v $K(2\ell + 1, 2)$.

Dokaz. Tvorimo zaporedje točk v $K(2\ell + 1, 2)$, sestavljeno iz ℓ blokov, $B_0, \dots, B_{\ell-1}$, kjer vsakega sestavlja $2\ell + 1$ zaporednih točk. Prva točka $v_{k(2\ell+1)+1}$ v B_k ustreza množici $\{*, k\}$ (glej sliko 3.4), i -ta točka $v_{k(2\ell+1)+i}$, $i = 2, \dots, \ell$, je točka, ki ustreza množici $\{(-(i-1)+k) \bmod 2\ell, ((i-1)+k) \bmod 2\ell\}$, $(\ell + 1)$ -ta točka $v_{k(2\ell+1)+\ell+1}$ je točka, ki ustreza množici

Slika 3.3: Lambda funkcije Kneserjevih grafov $K(5, 2)$, $K(6, 2)$, $K(7, 2)$ in $K(8, 2)$.

$\{*, k + \ell\}$, in i -ta točka $v_{k(2\ell+1)+i}$, $i = \ell + 2, \dots, 2\ell + 1$, je točka, ki ustreza množici $\{((i - \ell - 1) + k) \bmod 2\ell, (-(i - \ell - 2) + k) \bmod 2\ell\}$.

To zaporedje točk ima zelo lepo interpretacijo v povezavni reprezentaciji Kneserjevih grafov. Na sliki polnega grafa z zvezdico na sredini in ostalimi oštevilčenimi točkami na ciklu okoli nje vsak blok ustreza Hamiltonovemu ciklu in vsakih ℓ zaporednih točk v B_i tvori prirejanje, kar kaže slika 3.4. Zaporedne bloke potem dobimo tako, da Hamiltonov cikel zavrtimo za $360/2\ell$ stopinj v negativni smeri.



Slika 3.4: Povezave, ki ustrezajo točkam v_1, \dots, v_9 , vsebovanim v bloku B_1 , in točkam v_{10}, \dots, v_{18} , vsebovanim v bloku B_2 , iz vrstnega reda točk grafa $K(9, 2)$, kot smo ga konstruirali v dokazu leme 3.5.2 (leva in sredinska slika). Na desni sliki je prikazan podgraf, ki ga tvorijo zadnje štiri povezave prvega bloka in prvih pet povezav drugega bloka.

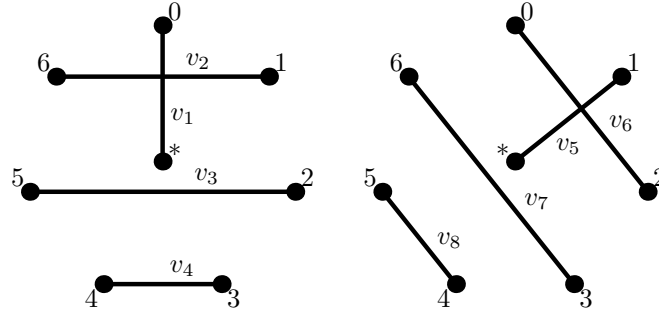
Preverimo sedaj, da poljubnih ℓ zaporednih točk tvori kliko v $K(2\ell + 1, 2)$ oziroma, da so množice, ki jim pripadajo, paroma disjunktne. To je najlažje videti, če uporabimo korespondenco s Hamiltonovimi cikli v $K_{2\ell+1}$ iz prejšnjega odstavka. Opazimo, da zadnjih ℓ povezav v bloku B_i , $i = 0, \dots, \ell - 2$, skupaj s prvimi $\ell + 1$ povezavami bloka B_{i+1} prav tako tvori Hamiltonov cikel in celo poljubnih ℓ zaporednih povezav izmed teh tvori prirejanje (glej sliko 3.4). Poljubnih ℓ zaporednih povezav leži v enem bloku ali pa v dveh blokih B_i in B_{i+1} za nek $i = 0, \dots, \ell - 2$ in tako vsakih ℓ zaporednih povezav tvori prirejanje v polnem grafu in tako ustrezajoče točke tvorijo kliko v $K(2\ell + 1, 2)$. Trditev iz leme sedaj sledi. \square

Poglejmo si sedaj Kneserjeve grafe $K(n, 2)$ pri sodem n .

Lema 3.5.3. *Za vsak $\ell \geq 2$ obstaja zaporedje točk v_1, \dots, v_m , $m = \binom{2\ell+2}{2}$, grafa $K(2\ell + 2, 2)$ takih, da za vsak $i = 1, \dots, m - (\ell - 1)$ točke $v_i, \dots, v_{i+\ell-1}$ tvorijo kliko velikosti ℓ v $K(2\ell + 2, 2)$ in za vsak $i = 1, \ell + 2, 2\ell + 3, \dots, m - \ell$ točke $v_i, \dots, v_{i+\ell}$ tvorijo kliko velikosti $\ell + 1$.*

Dokaz. Tvorimo zaporedje točk v $K(2\ell + 2, 2)$, sestavljeno iz $2\ell + 1$ blokov z $\ell + 1$ točkami v vsakem izmed njih. Bloke oštevilčimo od 0 do 2ℓ . Prva točka $v_{k(\ell+1)+1}$ v k -tem bloku naj bo točka, ki ustreza množici $\{*, k\}$ in i -ta točka $v_{k(\ell+1)+i}$, $i = 2, \dots, \ell + 1$, naj bo točka, ki ustreza množici $\{(-(i - 1) + k) \bmod (2\ell + 1), ((i - 1) + k) \bmod (2\ell + 1)\}$. Očitno vsak blok tvori kliko velikosti $\ell + 1$, kot smo želeli.

To zaporedje točk ima tudi zelo lepo interpretacijo v povezavni reprezentaciji Kneserjevega grafa. Na sliki vidimo poln graf z zvezdico na sredini in oštevilčenimi točkami



Slika 3.5: Povezave, ki ustrezajo prvemu in drugemu bloku v zaporedju, ki smo ga konstruirali za $K(8, 2)$ v dokazu leme 3.5.3.

na ciklu okoli zvezdice. Vsak blok ustreza popolnemu prirejanju, ki ga sestavlja povezava od zvezdice do neke druge točke v grafu in vse povezave, ki so pravokotne na njo (glej sliko 3.5). Sledeče bloke potem dobimo tako, da popolno prirejanje zavrtimo okoli zvezdice za $360/(2\ell + 1)$ stopinj v negativni smeri.

Preverimo sedaj, da poljubnih ℓ zaporednih točk tvori kliko v $K(2\ell + 2, 2)$ oziroma, da so množice, ki ustrezajo tem točkam, paroma disjunktne. Vzemimo točko $v_{k(\ell+1)+i}$, $k = 0, \dots, 2\ell$ in $i = 1, \dots, \ell + 1$. Množica, ki ustreza tej točki, je disjunktna z vsemi ostalimi množicami, ki ustrezajo točkam v istem bloku, to je množicam, ki ustrezajo točkam $v_{k(\ell+1)+i'}$ za $i' = 1, \dots, \ell + 1$ in $i' \neq i$. Za $k > 0$ je zadnja točka v prejšnjem bloku, katere množica ni disjunktna z množico, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, točka $v_{(k-1)(\ell+1)+i+1}$ za $i < \ell + 1$ (ni nam treba obravnavati primera $i = \ell + 1$). Podobno je za $k < 2\ell + 1$ prva točka v naslednjem bloku, katere množica ni disjunktna z množico, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, točka $v_{(k-1)(\ell+1)+i-1}$ za $i > 0$. Torej je množica, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, disjunktna z vsemi množicami, ki ustrezajo točkam $v_{k(\ell+1)+i+j}$ za $j = \pm 1, \dots, \pm(\ell - 1)$. Trditev iz leme sledi. \square

Preostanek tega razdelka bomo posvetili določanju spodnjih mej lambda funkcij $K(n, 2)$ za $x \in [0, 1/\ell]$. Ponovno moramo razlikovati med dvema primeroma glede na parnost n .

Lema 3.5.4. *Sledeča ocena velja za vsak $\ell \geq 2$ in $x \in (0, 1/\ell)$:*

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) \geq 2\ell + (\ell - 1)x .$$

Dokaz. Naj bo c $L(x, 1)$ -barvanje grafa $K(2\ell + 1, 2)$ in naj bo v_1, \dots, v_m , $m = \binom{2\ell+1}{2}$, tako zaporedje točk, da velja $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \dots \leq c(v_m)$.

Pokazali bomo, da je $c(v_{i\ell+1}) \geq i$ za vsak $i = 0, \dots, 2\ell$. Neenakost očitno velja za $i = 0$. Za $i > 0$ imamo med $v_{(i-1)\ell+1}, \dots, v_{i\ell+1}$ dve nesosedni točki, saj $K(2\ell + 1, 2)$ ne vsebuje klike velikosti $\ell + 1$. Torej se barvi teh dveh točk razlikujeta vsaj za ena. Iz $c(v_{(i-1)\ell+1}) \leq \dots \leq c(v_{i\ell+1})$ sledi $c(v_{i\ell+1}) \geq c(v_{(i-1)\ell+1}) + 1 \geq (i - 1) + 1 = i$, iz česar sklepamo, da je $c(v_{2\ell^2+1}) \geq 2\ell$.

Ker je razlika med poljubnima barvama vsaj x , sledi naslednja ocena:

$$c(v_m) \geq c(v_{2\ell^2+1}) + (m - (2\ell^2 + 1))x \geq 2\ell + (\ell - 1)x .$$

To dokazuje lemo. \square

Razdelek zaključujemo s spodnjo mejo lambda funkcije za $K(n, 2)$ pri sodem n . Rešitev za sode n se je izkazala kot precej kompleksnejša od rešitve za lihe n .

Lema 3.5.5. *Za vsak $\ell \geq 2$ in $x \in (0, 1/\ell)$ velja:*

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) \geq 2\ell + 3\ell x .$$

Dokaz. Naj bo c $L(x, 1)$ -barvanje grafa $K(2\ell + 2, 2)$ in naj bo v_1, \dots, v_m , $m = \binom{2\ell+2}{2}$, tako zaporedje točk, da velja $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \dots \leq c(v_m)$.

Rekurzivno definirajmo indekse $i_0, \dots, i_{2\ell}$. Postavimo $i_0 = 1$. Za $j > 0$ naj bo i_j največji tak indeks, da točke od i_{j-1} -te do $(i_j - 1)$ -te, oz. $v_{i_{j-1}}, \dots, v_{i_j-1}$, tvorijo kliko. Ker je največja klika v $K(2\ell + 2, 2)$ velikosti $\ell + 1$, $K(2\ell + 2, 2)$ ne moremo po točkah pokriti z manj kot $2\ell + 1$ klikami in tako so indeksi $i_0, \dots, i_{2\ell}$ dobro definirani.

Naj bo sedaj C_j , $j = 0, \dots, 2\ell - 1$, klika v $K(2\ell + 2, 2)$, ki jo tvorijo točke $v_{i_j}, \dots, v_{i_{j+1}-1}$ in naj bo γ_j , $j = 0, \dots, 2\ell$, število klik velikosti $\ell + 1$ med C_0, \dots, C_{j-1} . V posebnem velja $\gamma_0 = 0$ in $\gamma_j \leq j$.

Dokažimo sedaj naslednjo trditev:

Pomožna trditev: *Za vsak $j = 0, \dots, 2\ell$ velja $c(v_{i_j}) \geq j + \gamma_j x$.*

Postopamo z indukcijo po j . Trditev očitno velja za $j = 0$. Naj bo sedaj $j > 0$. Naj bo $k \in \{0, \dots, |C_{j-1}| - 1\}$ največji tak k , da točka $v_{i_{j-1}+k}$ v C_{j-1} ni sosedna točki v_{i_j} . Če je klika C_{j-1} velikosti $\ell + 1$, potem povezave v polnem grafu, ki ustrezajo točkam v C_{j-1} tvorijo prirejanje in točka v_{i_j} ni sosedna vsaj dvema točkama v C_{j-1} . V posebnem je $k \geq 1$. Ker je razlika med barvama poljubnih dveh točk vsaj x (in vemo, da je $x \leq 1$) in v_{i_j} ni sosedna $v_{i_{j-1}+k}$, dobimo:

$$c(v_{i_j}) \geq c(v_{i_{j-1}+k}) + 1 \geq c(v_{i_{j-1}}) + 1 + kx \geq j + \gamma_{j-1}x + kx .$$

Če je $\gamma_j = \gamma_{j-1}$, smo dobili zeleno neenakost. Sicer je C_{j-1} velikosti $\ell + 1$, torej $k \geq 1$ in neenakost prav tako sledi. S tem smo pomožno trditev dokazali.

Klike $C_0, \dots, C_{2\ell-1}$ vsebujejo največ $2\ell \cdot \ell + \gamma_{2\ell}$ točk grafa $K(2\ell + 2, 2)$. Torej $i_{2\ell} \leq 2\ell^2 + 1 + \gamma_{2\ell}$. Sledi naslednja ocena:

$$\begin{aligned} c(v_m) &\geq c(v_{i_{2\ell}}) + (m - i_{2\ell})x \\ &\geq 2\ell + \gamma_{2\ell}x + ((2\ell^2 + 3\ell + 1) - (2\ell^2 + 1 + \gamma_{2\ell}))x \\ &\geq 2\ell + 3\ell x . \end{aligned}$$

S tem je lema dokazana. □

3.5.3 Barvanje $L(x, 1)$ za velike vrednosti x

V tem razdelku bomo poiskali spodnje in zgornje meje za lambda funkcije grafa $K(n, 2)$ za $x \geq 1$. Začnimo z zgornjo mejo za $x \in (1, 3)$.

Lema 3.5.6. *Za vsak $n \geq 5$ in $x \in (1, 3)$ obstaja $L(x, 1)$ -barvanje z razponom $\binom{n}{2} - 1$ tako, da sta poljubni dve barvi različni celi števili in da sta največji dve $\binom{n}{2} - 2$ in $\binom{n}{2} - 1$.*

Dokaz. Lemo bomo dokazali z indukcijo po n . Za $n = 5$ pobarvamo točke grafa $K(5, 2)$ z barvami $0, 1, \dots, 9$ v vrstnem redu, ki ustreza sledečemu vrstnemu redu množic:

$$\{*, 0\}, \{*, 1\}, \{*, 2\}, \{*, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 1\}, \{3, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\} \text{ in } \{1, 2\} .$$

Ker točki, ki ustrezata množicama $\{0, 2\}$ in $\{1, 2\}$, nista sosedni, to barvanje zadosti tudi drugi trditvi v lemi.

Naj bo sedaj $n > 5$. Po indukciji torej vemo, da obstaja $L(x, 1)$ -barvanje podgrafa $K(n, 2)$, imenujmo ga G , ki ga inducirajo točke, katerih množice ne vsebujejo zvezdice. To barvanje ima razpon $\binom{n-1}{2} - 1$ in dve nesosedni točki v G sta pobarvani z $\binom{n-1}{2} - 2$ in $\binom{n-1}{2} - 1$. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da točki, pobarvani z barvama $\binom{n-1}{2} - 2$ in $\binom{n-1}{2} - 1$, pripadata množicama $\{0, 2\}$ in $\{0, 1\}$ v tem vrstnem redu.

Z barvo $\binom{n-1}{2} + i$ sedaj pobarvamo točko, ki ustreza množici $\{*, i\}$ za $i = 0, \dots, n - 2$. Lahko je preveriti, da je tako dobljeno barvanje dejansko $L(x, 1)$ -barvanje grafa $K(n, 2)$ in da sta nesosedni točki $\{*, n - 3\}$ in $\{*, n - 2\}$ pobarvani z barvama $\binom{n}{2} - 2$ in $\binom{n}{2} - 1$. \square

Določimo sedaj zgornjo mejo za $x \geq 3$.

Lema 3.5.7. *Za vsak $n \geq 5$ in $x \geq 3$ obstaja $L(x, 1)$ -barvanje grafa $K(n, 2)$ z razponom $(n - 3)(x - 3) + \binom{n}{2} - 1$ tako, da so tri največje barve $(n - 3)(x - 3) + \binom{n}{2} - 3$, $(n - 3)(x - 3) + \binom{n}{2} - 2$ in $(n - 3)(x - 3) + \binom{n}{2} - 1$.*

Dokaz. Postopali bomo podobno kot v dokazu leme 3.5.6. Najprej pobarvamo točke grafa $K(5, 2)$ z barvami

$$0, 1, 2, 3, x + 1, x + 2, x + 3, 2x + 1, 2x + 2 \text{ in } 2x + 3$$

v vrstnem redu, ki ustreza sledečemu vrstnemu redu množic:

$$\{*, 0\}, \{*, 1\}, \{*, 2\}, \{*, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 1\}, \{3, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\} \text{ in } \{1, 2\} .$$

To barvanje zadosti tudi drugi trditvi v lemi.

Naj bo $n > 5$. Oglejmo si sedaj $L(x, 1)$ -barvanje podgrafa $K(n, 2)$, ki ga inducirajo točke, katerih množice ne vsebujejo zvezdice, pri katerem so največje tri barve $(n - 4)(x - 3) + \binom{n-1}{2} - 3$, $(n - 4)(x - 3) + \binom{n-1}{2} - 2$ in $(n - 4)(x - 3) + \binom{n-1}{2} - 1$.

Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je točka, ki ustreza množici $\{0, 2\}$, pobarvana z barvo $(n - 4)(x - 3) + \binom{n-1}{2} - 2$ in točka, ki ustreza množici $\{0, 1\}$, pobarvana z barvo $(n - 4)(x - 3) + \binom{n-1}{2} - 1$. Za $i = 0, \dots, n - 2$ pobarvajmo točko, ki ustreza $\{*, i\}$ z barvo $(n - 3)(x - 3) + \binom{n-1}{2} + i$. Lahko je preveriti, da dobljeno barvanje zadosti trditvi iz leme. \square

Zaključimo ta razdelek z določitvijo spodnje meje za $x \geq 3$, ki se ujema z zgornjo mejo, ki smo jo dokazali v zgornji lemi.

Lema 3.5.8. *Sledeča neenakost velja za vsak $n \geq 5$ in $x \geq 3$:*

$$\lambda(K(n, 2); x, 1) \geq (n - 3)(x - 3) + \binom{n}{2} - 1 .$$

Dokaz. Imejmo $L(x, 1)$ -barvanje c grafa $K(n, 2)$ in naj bo v_1, \dots, v_m , $m = \binom{n}{2}$ zaporedje točk tako, da velja $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \dots \leq c(v_m)$. Naj bo i_1 največji takšen indeks, da točke v_1, \dots, v_{i_1} tvorijo neodvisno množico v $K(n, 2)$, i_2 največji takšen indeks, da točke $v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}$ tvorijo neodvisno množico, i_3 največji takšen indeks, da točke $v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3}$ tvorijo neodvisno množico in tako naprej.

Končno naj bo $A_j = \{v_{i_{j-1}+1}, \dots, v_{i_j}\}$ za $j = 1, 2, \dots$ (postavimo $i_0 = 0$) in naj bo k število množic A_j .

Imamo dve vrsti neodvisnih množic A_j : tiste, ki ustrezajo zvezdam (poln dvodelen graf z eno točko v eni particiji) v povezavni interpretaciji $K(n, 2)$ in tiste, ki ustrezajo trikotnikom. Naj bo k_s število množic prve vrste. Ker je k_s točk polnega grafa velikosti n sosednih s $\frac{k_s(2n-1-k_s)}{2}$ povezavami in vsaka neodvisna množica druge vrste vsebuje tri povezave, dobimo sledečo mejo za k :

$$k \geq k_s + \frac{\binom{n}{2} - \frac{k_s(2n-1-k_s)}{2}}{3} = \frac{k_s^2 - (2n-7)k_s + n^2 - n}{6}.$$

S pomočjo osnovnih analitičnih orodij je preprosto preveriti, da je izraz najmanjši za $k_s \in \{n-4, n-3\}$. Torej velja:

$$k \geq \frac{(n-3)^2 - (2n-7)(n-3) + n^2 - n}{6} = \frac{6n-12}{6} = n-2.$$

Dokažimo sedaj naslednjo trditve:

Pomožna trditev: Če je točka v_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, vsebovana v A_j , je $c(v_i) \geq (j-1)(x-3) + i - 1$.

Postopamo z indukcijo po i . Trditev trivialno drži za $i = 1$, saj je $v_1 \in A_1$. Vzemimo točko v_i , $i > 1$. Če sta točki v_{i-1} in v_i vsebovani v isti množici A_j , velja

$$c(v_i) \geq c(v_{i-1}) + 1 \geq (j-1)(x-3) + i - 1,$$

saj se poljubni dve barvi razlikujeta vsaj za ena. Torej lahko za preostanek dokaza privzamemo, da je $v_{i-1} \in A_{j-1}$ in $v_i \in A_j$.

Trdimo, da obstaja $1 \leq i' \leq \min\{3, |A_{j-1}|\}$ tak, da sta točki $v_{i-i'}$ in v_i sosedni (očitno je $v_{i-i'} \in A_{j-1}$). Če je $|A_{j-1}| \leq 3$, trditev sledi direktno iz izbire množice A_{j-1} . Za $|A_{j-1}| > 3$ pa morajo povezave, ki ustrezajo točkam množice A_{j-1} , tvoriti zvezdo v polnem grafu in povezava, ki ustreza v_i , je sosedna največ dvema takima povezavama. Torej mora v_i v $K(n, 2)$ biti sosedna eni od točk v_{i-3} , v_{i-2} in v_{i-1} .

Naj bo i' definiran kot v prejšnjem odstavku. Ker sta točki $v_{i-i'}$ in v_i sosedni, se njuni barvi razlikujeta za vsaj $x \geq 3$ in tako dobimo spodnjo mejo za $c(v_i)$:

$$\begin{aligned} c(v_i) &\geq c(v_{i-i'}) + x \\ &= x + (j-2)(x-3) + (i-i') - 1 \\ &\geq (j-1)(x-3) + i - 1 + 3 - i' \geq (j-1)(x-3) + i - 1. \end{aligned}$$

S tem smo končali dokaz pomožne trditve.

Končno, ker je $c(v_m)$ vsaj

$$(k-1)(x-3) + m - 1 \geq (n-3)(x-3) + \binom{n}{2} - 1,$$

trditev iz leme direktno sledi. □

3.5.4 Osrednji rezultat

Sedaj smo pripravljeni, da dokažemo osrednji izrek.

Izrek 3.5.9. *Za vsak $\ell \geq 2$ so lambda funkcije grafov $K(2\ell + 1, 2)$ in $K(2\ell + 2, 2)$ sledeče:*

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + (\ell - 1)x, & \text{za } x \in [0, 1/\ell), \\ (2\ell^2 + \ell - 1)x, & \text{za } x \in [1/\ell, 1), \\ 2\ell^2 + \ell - 1, & \text{za } x \in [1, 3), \\ (2\ell - 2)x + 2\ell^2 - 5\ell + 5, & \text{za } x \geq 3 \end{cases}$$

in

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) = \begin{cases} 2\ell + 3\ell x, & \text{za } x \in [0, 1/\ell), \\ (2\ell^2 + 3\ell)x, & \text{za } x \in [1/\ell, 1), \\ 2\ell^2 + 3\ell, & \text{za } x \in [1, 3), \\ (2\ell - 1)x + 2\ell^2 - 3\ell + 3, & \text{za } x \geq 3. \end{cases}$$

Dokaz. Najprej poiščimo lambda funkcije za $x \geq 1$. Naj bo m število točk grafa $K(n, 2)$, kjer je n enak $2\ell + 1$ ali $2\ell + 2$. Ker je $n \geq 5$, sta poljubni dve točki v $K(n, 2)$ na razdalji največ dva. Torej je $\lambda(K(n, 2); x, 1) \geq m - 1$. Ta preprosta spodnja meja in lema 3.5.6 določata lambda funkcijo za $x \in [1, 3]$. Za $x \geq 3$ imamo zgornjo in spodnjo mejo v lemah 3.5.7 in 3.5.8, ki se ujemata.

Dalje postopamo ločeno za primera $K(2\ell + 1, 2)$ in $K(2\ell + 2, 2)$. Začnimo z določitvijo preostanka lambda funkcije za $K(2\ell + 1, 2)$. Spomnimo se, da je v tem primeru $m = \binom{2\ell+1}{2}$. Za $x \in [0, 1/\ell)$ je vrednost $\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1)$ vsaj $2\ell + (\ell - 1)x$ po lemi 3.5.4. Za zgornjo mejo konstruirajmo zaporedje točk v_1, \dots, v_m , kot je opisano v lemi 3.5.2, in pobarvajmo točko v_i z barvo $(i - 1)x + \lfloor (i - 1)/\ell \rfloor (1 - \ell x)$. To barvanje si lahko predstavljamo takole: točke v zaporedju tvorijo ℓ klik velikosti $2\ell + 1$ in i -ta točka v k -ti kliku je pobarvana z barvo $k + (i - 1)x$.

Dalje trdimo, da je to barvanje pravo. Vzemimo dve točki v_i in v_j , $1 \leq i < j \leq m$. Za $j - i < \ell$ sta točki v_i in v_j sosedni, saj smo konstruirali tako zaporedje. Ker se njuni barvi razlikujeta vsaj za x , je povezava $v_i v_j$ dobro pobarvana. Sicer je $j - i \geq \ell$ in barvi se razlikujeta za vsaj ena in spet je povezava dobro pobarvana. Iz

$$c(v_m) = (m - 1)x + \left\lfloor \frac{m - 1}{\ell} \right\rfloor (1 - \ell x) = (2\ell^2 + \ell - 1)x + 2\ell(1 - \ell x) = 2\ell + (\ell - 1)x,$$

sledi zgornja meja.

Naj bo $x \in [1/\ell, 1)$. Ker se morata barvi poljubnih dveh točk razlikovati za vsaj x , velja:

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) \geq (m - 1)x = (2\ell^2 + \ell - 1)x.$$

Za zgornjo mejo vzemimo zaporedje točk v_1, \dots, v_m kot v lemi 3.5.2 in obarvajmo točko v_i z barvo $(i - 1)x$. Dokaz, da je to barvanje pravo, je enak dokazu v prejšnjem odstavku.

Določiti moramo še preostanek lambda funkcije za $K(2\ell + 2, 2)$. V tem primeru je $m = \binom{2\ell+2}{2}$. Za $x \in [0, 1/\ell)$ je vrednost $\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1)$ vsaj $2\ell + 3\ell x$ po lemi 3.5.5. Za zgornjo mejo vzemimo zaporedje točk v_1, \dots, v_m , kot smo ga opisali v lemi 3.5.3, in obarvajmo točko v_i z barvo $(i - 1)x + \lfloor (i - 1)/(\ell + 1) \rfloor (1 - \ell x)$. Barvanje lahko predstavimo glede na dokaz leme 3.5.3 tako: i -ta točka v bloku B_k je obarvana z barvo $k(1 + x) + (i - 1)x$ (tako kot v dokazu leme).

Oglejmo si dobljeno barvanje. Za $1 \leq i < j \leq m$ se barvi dveh točk v_i in v_j razlikujeta vsaj za ena, če je $j - i > \ell$. Če je $j - i < \ell$, sta točki v_i in v_j sosedni in zaradi izbire vrstnega reda se njuni barvi razlikujeta vsaj za x . Torej je povezava $v_i v_j$ dobro obarvana. Za $j - i = \ell$ in $i \equiv 1 \pmod{\ell + 1}$ sta točki v_i in v_j prav tako sosedni in povezava $v_i v_j$ je spet dobro obarvana. Končno, če je $i \not\equiv 1 \pmod{\ell + 1}$, se barvi v_i in v_j razlikujeta vsaj za ena. Torej lahko zaključimo, da je to barvanje dobro $L(x, 1)$ -barvanje grafa $K(2\ell + 1, 2)$. Iz

$$c(v_m) = (m - 1)x + \left\lfloor \frac{m - 1}{\ell + 1} \right\rfloor (1 - \ell x) = (2\ell^2 + 3\ell)x + 2\ell(1 - \ell x) = 2\ell + 3\ell x$$

sledi zgornja meja.

Oglejmo si še primer, ko je $x \in [1/\ell, 1)$. Ker se barvi poljubnih dveh točk razlikujeta vsaj za x , lahko sklepamo, da velja

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) \geq (m - 1)x = (2\ell^2 + 3\ell)x .$$

Za zgornjo mejo vzamemo zaporedje točk v_1, \dots, v_m iz leme 3.5.3 in točki v_i dodelimo barvo $(i - 1)x$. Dokaz, da je to barvanje dobro, je enak dokazu v prejšnjem odstavku. \square

Poglavje 4

Linearno barvanje ravninskih grafov

4.1 Uvod

Najprej bomo podali ozadje in motivacijo za študij linearnih barvanj. V razdelku ?? bomo dokazali izrek 4.1.1, ki poda najboljšo zgornjo mejo za linearno barvanje ravninskega grafa glede na ožino in maksimalno stopnjo. Dokaz bo izveden s pomočjo metode prenosa naboja in bo razdeljen na dele: reducibilne konfiguracije, začetni naboj, pravila prenosa naboja in končni naboj.

Dobro barvanje točk imenujemo *linearno barvanje*, če je podgraf induciran na poljubnih dveh barvnih razredih množica disjunktnih poti. Najmanjše število barv linearnega barvanja grafa G je *linearno kromatično število* $lc(G)$. Dokazujemo, da za graf G z ožino $g \geq 8$ in maksimalno stopnjo $\Delta \geq 7$ velja neenakost o linearnem kromatičnem številu $lc(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$. S tem izboljšamo prejšnjo oceno za ožino, ki sta jo dokazala Raspaud in Wang [63].

Izraz linearno barvanje je prvi predstavil Yuster [77], ki je dokazal, da velja $lc(G) = O(\Delta^{3/2})$, kjer je Δ maksimalna stopnja. Prav tako je skonstruiral grafe z $lc(G) = \Omega(\Delta^{3/2})$, s čimer je pokazal, da je njegova meja najboljša možna.

V delu [63] sta Raspaud in Wang dokazala, da je $lc(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ za ravninske grafe, ki zadoščajo naslednjim pogojem: (1) $g \geq 13$ and $\Delta \geq 3$; (2) $g \geq 11$ in $\Delta \geq 5$; (3) $g \geq 9$ in $\Delta \geq 7$; (4) $g \geq 7$ in $\Delta \geq 13$. V širšem smislu to izboljša Yusterjevo mejo za ravninske grafe z dovolj veliko ožino in maksimalno stopnjo na $lc(G) = O(\Delta)$.

Da dokažemo naš izrek, bomo spet uporabili metodo prenosa naboja [75].

Linearno barvanje je poseben primer acikličnega barvanja, pri katerem zahtevamo, da je podgraf, induciran na poljubnih dveh barvnih razredih, gozd. Takšno barvanje je prvi predstavil Grünbaum [39], kasneje pa je bilo raziskovano v [14, 16, 51, 58]. Očitno je, da je $lc(G) \geq A(G)$, kjer je $A(G)$ aciklično kromatično število grafa G . Aciklično barvanje so Esperet et al. [30] razširili na aciklično seznamsko barvanje. Podoben koncept so obravnavali Hind et al. [45], kjer so študirali k -varčno barvanje, kjer je graf k -varčen, če ga lahko dobro pobarvamo tako, da se v soseščini vsake točke nobena barva ne pojavi več kot k -krat. Očitno je, da je linearno barvanje 3-varčno barvanje, vendar obratno ni nujno res.

Naj bo c barvanje grafa. Barve, ki se pojavijo dvakrat v okolici točke v , označimo s $c_2(v)$.

Omenili smo že, da sta Raspaud in Wang dokazala, da za ravninski graf z ožino $g \geq 9$

in maksimalno stopnjo $\Delta \geq 7$ obstaja linearno barvanje z največ $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ barvami. Z izboljšanjem omejitve za ožino dobimo naslednji izrek:

Izrek 4.1.1. *Naj bo G ravninski graf z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 7$ in ožino $g \geq 8$. Potem za G obstaja linearno barvanje z največ $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ barvami.*

4.2 Dokaz izreka

V dokazu bomo uporabili metodo prenosa naboja. Da dobimo protislovje bomo predpostavili, da imamo minimalen protiprimer G za izrek 4.1.1 glede na število točk. Najprej bomo dokazali, da so nekatere ravninske konfiguracije reducibilne, t.j. se ne morejo pojaviti v minimalnem protiprimeru. Vsem točkam in vsem licem določimo še začetni naboj z negativno skupno vsoto. Začetni naboj prerazporedimo tako, da je končni naboj vseh vozlišč in lic nenegativen. To bo protislovje, ki dokazuje izrek.

4.2.1 Reducibilne konfiguracije

V dokazu bomo uporabili naslednje reducibilne konfiguracije:

- (Q1): 1-točka;
- (Q2): 2-točka sosedna še eni 2-točki in točki s stopnjo kvečjemu šest;
- (Q3): 2-točka sosedna 3-točki in točki s stopnjo kvečjemu štiri;
- (Q4): 2-točka sosedna ≤ 5 -točki in 3-točki, ki je sosedna še eni 2-točki in ≤ 5 -točki (glej sliko 4.3);
- (Q5): 7-točka sosedna s sedmimi 2-točkami, kjer je 5 od njih sosednih z 2-točkami in sta preostali dve povezani s točkami stopnje kvečjemu 3 (glej sliko 4.4);
- (Q6): 7-točka sosedna petim 2-točkam, kjer je vsaka med njimi sosedna z 2-točkami, in dvema točkama stopnje kvečjemu 3, ki imata za preostale sosede 2-točke (glej sliko 4.5).

Reducibilnost vsake od zgoraj navedenih reducibilnih konfiguracij bomo dokazali v posebni lemi. Leme podajajo dokaz samo za primer, ko so stopnje točk maksimalne glede na \leq pogoj v konfiguraciji. Kot bo jasno iz dokazov, je sklepanje pri dokazovanju reducibilnosti pri nižjih stopnjah še bolj enostavno. Implicitno bomo predpostavili, da takšne konfiguracije niso prisotne v možnih minimalnih protiprimerih v izreku 4.1.1.

Lema 4.2.1. *(Q1), to je 1-točka, je reducibilna.*

Dokaz. Tukaj je 1-točka v sosedna x -u očitno reducibilna, saj z njeno odstranitvijo dobimo manjši graf G' , ki ga lahko pobarvamo po minimalnosti. To barvanje lahko razširimo, če lahko pobarvamo točko v z barvo, ki se ne pojavi dvakrat v okolici točke x ali na točki x . Število prepovedanih barv za v je potem največ $c_2(x) + 1 = \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. Tako imamo na voljo vsaj eno barvo za v .

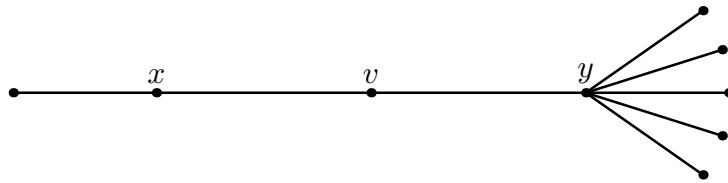
□

Lema 4.2.2. (Q2), to je 2-točka, sosedna 2-točki in točki stopnje največ šest, je reducibilna.

Dokaz. Naj bo v 2-točka s sosedama 2-točko x in točko y , ki je stopnje < 7 . Po odstranitvi v imamo manjši graf, ki ima linearno barvanje c po minimalnosti G . Sedaj bomo to barvanje razširili na v z upoštevanjem dveh primerov:

- **Primer 1:** $c(x) = c(y)$. Če pobarvamo v z barvo različno od $c(x)$, ki se ne pojavlja dvakrat v $N(y)$ ali na drugem sosedu x , očitno daje linearno barvanje grafa G . Tako je število prepovedanih barv za v kvečjemu $|c_2(y)| + 1 + 1 = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor + 1 + 1 \leq \lfloor \frac{6-1}{2} \rfloor + 2 = 4$. Ampak, ker je $\Delta \geq 7$, imamo vsaj 5 barv in lahko izberemo barvo za v .
- **Primer 2:** $c(x) \neq c(y)$. Če pobarvamo v z barvo različno od $c(x)$ in $c(y)$, ki se ne pojavlja dvakrat v $N(y)$, je to spet linearno barvanje. Število prepovedanih barv v tem primeru je največ $|c_2(x)| + 2 \leq \lfloor \frac{6-1}{2} \rfloor + 2 = 4$ in še enkrat z vsaj 5 barvami lahko izberemo barvo za v .

□



Slika 4.1: Reducibilna konfiguracija (Q2).

Lema 4.2.3. (Q3), to je 2-točka, sosedna s 3-točko in točko stopnje največ 4, je reducibilna.

Dokaz. Naj bo v 2-točka sosedna s 3-točko x in z y , točko s stopnjo < 5 . Naj bosta x_1 in x_2 druga dva soseda x . Odstranitev v daje manjši graf z linearnim barvanjem c (zaradi minimalnosti G). Ločimo dva primera:

- **Primer 1:** $c(x) = c(y)$. Če pobarvamo v z barvo ki ni v

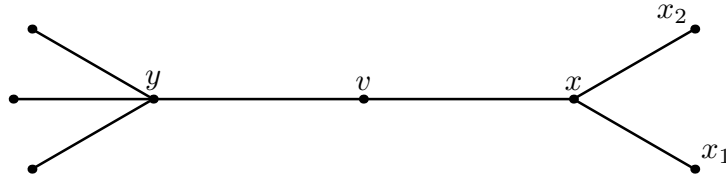
$$c_2(y) \cup \{c(x), c(x_1), c(x_2)\},$$

je rezultat linearno barvanje grafa G . Ta množica vsebuje

$$|c_2(y)| + |\{c(x), c(x_1), c(x_2)\}| \leq \lfloor \frac{4-1}{2} \rfloor + 3 = 4$$

barv, ampak ker imamo vsaj 5 dovoljenih barv, lahko pobarvamo v .

- **Primer 2:** $c(x) \neq c(y)$. Dodelitev barve v , različne od barv $c_2(y)$, $c(x)$, $c(y)$ in $c(x_1)$, da linearno barvanje. Neenakost $|c_2(y)| + |\{c(x), c(x_1), c(y)\}| \leq \lfloor \frac{4-1}{2} \rfloor + 3 = 4$ zagotavlja, da imamo na voljo vsaj eno barvo za v .



Slika 4.2: Reducibilna konfiguracija (Q3).

□

Lema 4.2.4. (Q4), to je 2-točka, sosedna s 5-točko in 3-točko, katere druga dva soseda sta stopnje 2 in kvečjemu 5, je reducibilna.

Dokaz. Ker je $\Delta \geq 7$, je število barv, ki jih uporabljamo, najmanj 5. Naj bo v 2-točka, sosedna s 3-točko x in 5-točko y . Naj bosta x_1 in x_2 še drugi dve sosedi x . Naj bo x_1 stopnje 2 in x_2 stopnje ≤ 5 . Naj bo x'_1 druga soseda x_1 . Za poenostavitev dokaza bomo opredelili množici $S = N(y) \setminus \{v\} \cup \{x_1, x_2\}$ in $T = N(x_2) \setminus \{x\} \cup \{x'_1\}$. Odstranimo v in pobarvamo preostali graf po minimalnosti G . Lahko predpostavimo da je $c(y) = 1$. Ločimo dva primera:

- **Primer 1:** $c(x) = 1$. Upoštevamo, da se ena od preostalih barv pojavi največ enkrat v množici S , ker je $|S| = 6$. Dodelimo to barvo v in s tem pridobimo linearno barvanje grafa G .
- **primer 2:** $c(x) \neq 1$. Recimo, da je $c(x) = 2$. Če barvanja c ni mogoče razširiti na v , lahko predpostavimo naslednje:

- $c(x_1) = c(x_2) = 3$,
- vsaka od barv 4 in 5 se pojavi dvakrat v $N(y) \setminus \{v\}$.

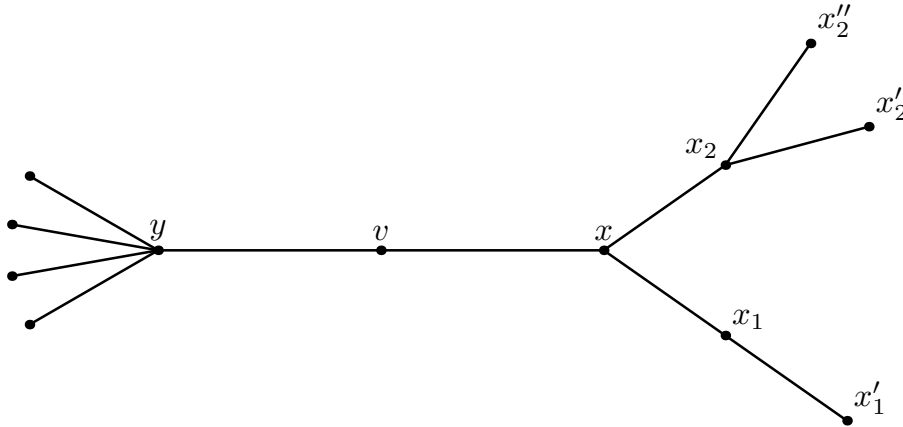
Odbarvamo x in dodelimo barvo 2 točki v . Zdaj moramo pobarvati x z 1, 4 ali 5. Če to ni mogoče, se vsaka od barv 1, 4 in 5 pojavi dvakrat v T . To je nemogoče, ker je $|T| = 5$.

□

Lema 4.2.5. (Q5), to je 7-točka, ki je sosedna sedmim 2-točkam, kjer je 5 od njih spet sosednih 2-točkam, drugi 2 pa sta sosedni 3-točkam, je reducibilna.

Dokaz. Naj bodo $v, x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7, z_1, \dots, z_7$ in z'_6, z'_7 točke kot na sliki 4.4. Če odstranimo zvezdo $S = \{v, x_1, \dots, x_7\}$, ima novi graf linearno barvanje c zaradi minimalnosti G . Sedaj želimo razširiti to barvanje na celi graf G . Naj bo seznam vseh možnih barv $\text{col} = \{1, \dots, \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil\}$. Ker je $\Delta \geq 7$, vemo, da velja $|\text{col}| \geq 5$.

Označimo sezname razpoložljivih barv za točke x_i z $L(x_i) = \text{col} \setminus \{c(y_i), c(z_i)\}$ za tiste x_i , ki so sosedni 2-točkam, in z $L(x_i) = \text{col} \setminus \{c(y_i), c(z_i), c(z'_i)\}$ za tiste x_i , ki so sosedni 3-točkam.



Slika 4.3: Reducibilna konfiguracija (Q4).

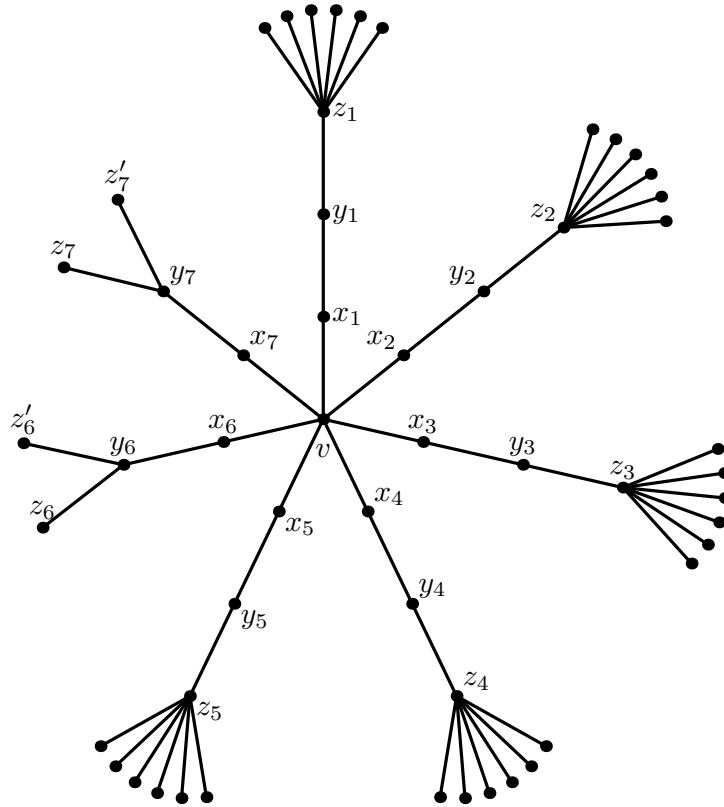
Upoštevajmo, da sta največ 2 x_j lahko pobarvana z enako barvo. Naš problem se zdaj lahko interpretira kot iskanje prirejanja v dvodelnem grafu H , konstruiranem kot sledi: V particiji A bomo imeli točke x_1, \dots, x_7 in v particiji B točke $u_1, \dots, u_5, u'_1, \dots, u'_5$. Tukaj (v particiji B) indeksi ustrezajo 5 barvam, ki jih imamo na razpolago. Vsaka točka x_j s svojim seznamom sprejemljivih barv $L(x_j)$ je povezana s točkami v particiji B , ki imajo indekse v $L(x_j)$. To pomeni, da imajo vse točke iz A stopnjo 6 ali 4. Če najdemo prirejanje v H , ki pokriva A , bo to ustrezalo dobremu barvanju x_1, \dots, x_7 , kjer se vsaka barva pojavlja največ dvakrat. Barva, ki jo priredimo x_j , je preprosto indeks k točke u_k ali u'_k , ki je v prirejanju povezana z x_j . Če lahko potem ustrezno obarvamo tudi v , bo rezultat linearno barvanje. Pokažimo, da je to res mogoče.

Hallov izrek trdi, da lahko najdemo prirejanje v dvodelnem grafu, ki pokriva particijo A , če za vsako $S \subset A$ velja neenakost $|S| \geq |N(S)|$. V našem primeru pogoj očitno velja za vsak $|S| \leq 6$, ker ima vsaka točka v A stopnjo 6 ali 4 in imata le 2 točki stopnjo 4. Brez škode za splošnost je edini primer, kjer imamo lahko težave, ko je $S = A$ in so sezname oblike: $L(x_i) = \{1, 2, 3\}$, če je y_i 2-točka in $L(x_i) \subset \{1, 2, 3\}$, če je y_i 3-točka.

Naj bo ω velikost unije vseh seznamov, torej $\omega = |\cup(L(x_i))|$. Sedaj lahko imamo težave le, ko je $\omega = 3$. To pomeni, da so sezname za tiste x_i , ki so sosedni 2-točkam, enaki in so sezname tistih x_i , ki so sosedni 3-točkam, podmnožice tega seznama. V tem primeru imamo $|S| = 7$ in $N(S) = 6$. Ta primer bomo rešili kasneje.

Predpostavimo sedaj, da je $\omega \geq 4$ in poskušajmo pobarvati v . Če katera barva ne nastopa na x_1, \dots, x_7 , jo uporabimo za v in dokaz je končan. Predpostavimo sedaj, da vse barve nastopajo na točkah x_1, \dots, x_7 . Brez škode za splošnost so barve, ki nastopajo na x_1, \dots, x_7 , kar $\{1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\}$ in lahko predpostavimo, da barva 3 ni uporabljena za x_6 ali x_7 . Sedaj ponovno pobarvamo točko x_t , ki je pobarvana z barvo 3, bodisi z barvo 4 ali 5 glede na to, katera od teh dveh barv ni uporabljena na njenem sosedu y_t . Ni nam treba skrbeti za z_t , saj se nam zgodi le to, da ustvarimo daljšo pot v grafu, induciranim z barvnima razredoma barv $c(x_t)$ in $c(y_t)$. Končno v pobarvamo z barvo 3.

Vse, kar manjka do dokaza, je primer, ko je $\omega = 3$. Spet brez izgube splošnosti predpostavimo, da so vsi sezname enaki ali vsebovani v $\{1, 2, 3\}$. Točki x_1 in x_2 pobarvamo z barvo 1, x_3 in x_4 z barvo 2 ter x_5 in x_6 z barvo 3. Potem x_7 pobarvamo z bodisi 4 ali 5, glede na to, katera od teh dveh barv je različna od barve točke y_7 . Drugo barvo (od 4



Slika 4.4: Reducibilna konfiguracija (Q5).

in 5) pa uporabimo za v . Podobno kot prej, na ta način ne kršimo pogojev za linearno barvanje. To zaključuje dokaz, da je ta konfiguracija reducibilna. \square

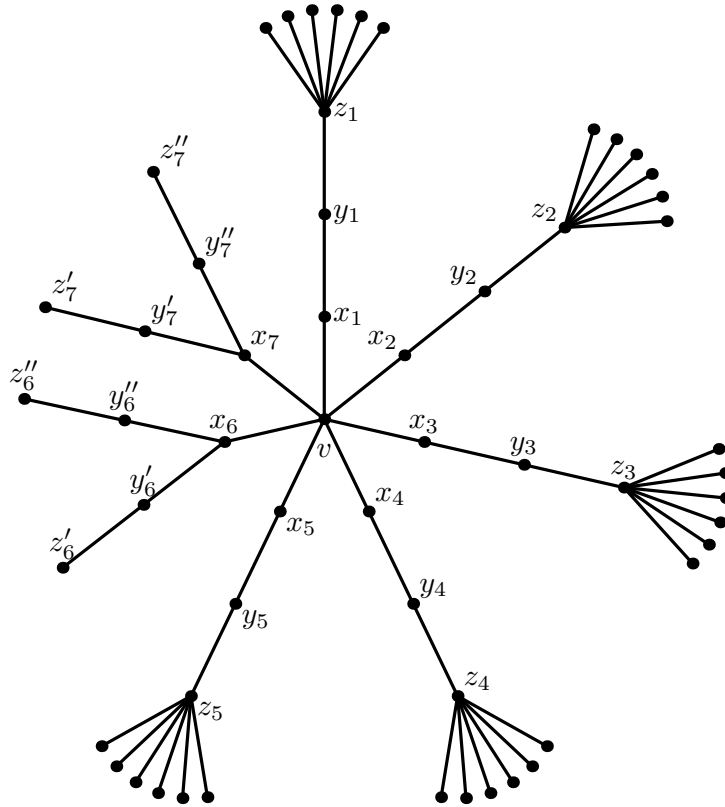
Lema 4.2.6. (Q6), to je 7-točka, sosedna petim 2-točkam, kjer je vsaka od njih spet sosedna 2-točki, ostali dve sosedni pa imata sosedni stopnje 3, ki imata le 2-točke za sosede, je reducibilna (glej sliko 4.5).

Dokaz. Dokaz te leme je podoben dokazu leme 4.2.5 in ga bomo zato nekoliko skrčili. Naj bodo $v, x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7, z_1, \dots, z_7, y'_6, y'_7$ in z'_6, z'_7 točke, kot je označeno na sliki 4.5. Če odstranimo zvezdo $S = \{v, x_1, \dots, x_7\}$, ima novi graf linearno barvanje c zaradi minimalnosti G . To barvanje želimo razširiti na ves graf G .

Naj bo $\text{col} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Seznam dovoljenih barv za x_i naj bo $L(x_i) = \text{col} \setminus \{c(y_i), c(z_i)\}$ za tiste x_i , ki so stopnje 2, in $L(x_i) = \text{col} \setminus \{c(y_i), c(z_i), c(y'_i), c(z'_i)\}$ za tiste x_i , ki so stopnje 3.

Spet lahko kršimo pogoje za linearno barvanje le znotraj zvezde S . Če lahko barvanje razširimo do dobrega barvanja S , kjer sta največ dva x_j pobarvana enako, je rezultat dobro linearno barvanje celotnega grafa G .

Podobno kot v prejšnji lemi lahko naš problem formuliramo v smislu iskanja prirejanja v dvodelnem grafu H , ki ga definiramo tako:

Slika 4.5: Reducibilna konfiguracija (Q_6).

- V particiji A imamo točke x_1, \dots, x_7 in v particiji B imamo točke $u_1, \dots, u_5, u'_1, \dots, u'_5$.
- V particiji B indeksi ustrezajo petim barvam, ki jih imamo na voljo.
- Vsaka točka x_j s svojim seznamom dovoljenih barv $L(x_j)$ je povezana s tistimi točkami v B , ki imajo indekse v $L(x_j)$.

To pomeni, da so vse točke v A stopnje 6 ali 2. Če najdemo prirejanje v H , ki pokrije A , bo to ustrezalo dobremu barvanju točk x_1, \dots, x_7 , kjer vsaka barva nastopa največ dvakrat. Ponovno je barva točke x_j preprosto indeks k točke u_k ali u'_k , s katero je x_j povezana v prirejanju. Če lahko potem še dobro pobarvamo v , bo rezultat linearno barvanje. Pokažimo, da je to res mogoče.

Pogoji Hallovega izreka so očitno izpolnjeni za vsak $|S| \leq 6$, saj je vsaka točka v A bodisi stopnje 6 ali 2 in le dve točki imata stopnjo 2. Edina težava nastopi, ko je $S = A$ in so sezname oblike $L(x_i) = \{1, 2, 3\}$, če je x_i 2-točka, in $L(x_i) \subset \{1, 2, 3\}$, če je x_i 3-točka. Naj bo ω velikost unije vseh seznamov $\omega = |\cup (L(x_i))|$. Predpostavimo, da je $\omega \geq 4$ in poskušajmo pobarvati v . Če katera barva ne nastopa na x_1, \dots, x_7 , jo uporabimo za v in dokaz je končan. Tako sedaj predpostavimo, da vse barve nastopajo na točkah x_1, \dots, x_7 . Brez izgube splošnosti so na x_1, \dots, x_7 uporabljene kar barve $\{1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\}$. Ena od barv 3, 4 in 5 nastopi na x_t , kjer je $t \notin \{6, 7\}$. Pobarvamo x_t ali z barvo 4 ali 5, kjer se izognemo barvi točke y_t , ki je soseda točke x_t .

Ko je $\omega = 3$ pobarvamo točke x_2, \dots, x_7 z barvami 1, 2 in 3, ne da bi katero uporabili dvakrat, kar je očitno mogoče. Potem pobarvamo x_1 z ali 4 ali 5 glede na njeno sosedo y_1 . Na koncu uporabimo preostalo barvo za v in dokaz je končan. \square

4.2.2 Začetni naboj

Vsem točkam v in vsem licem f grafa G določimo začetni naboj kot:

$$\text{ch}_0(v) = 3\text{deg}(v) - 8 \quad \text{in} \quad \text{ch}_0(f) = l(f) - 8.$$

Opazimo, da je po Eulerjevi formuli tako določen skupni naboj enak -4 . Takšna izbira začetnega naboja vsem licem določi nenegativen začetni naboj. Ker je $\delta(g) \geq 2$, imajo samo 2-točke negativen naboj.

$\text{deg}(v)$	$\text{ch}_0(v)$	$s(v)$
2	-2	
3	1	1/3
4	4	1
5	7	7/5
6	10	5/3
7	13	13/7
≥ 8	≥ 16	≥ 2

Tabela 4.1: Tabela prikazuje stopnjo točke, njen začetni naboj in količnik med začetnim nabojem in stopnjo.

4.2.3 Pravila prenosa naboja

Naboj prerazporedimo po naslednjih pravilih:

- \mathbf{R}_1 : Vsaka točka v stopnje najmanj 3 pošlje $s(v) = \frac{\text{ch}_0(v)}{\text{deg}(v)}$ naboja sosednim točkam stopnje 2.
- \mathbf{R}_2 : Točka v stopnje najmanj 3, ki ima za sosedo točko u stopnje najmanj 4, pošlje $\frac{\text{ch}_0(v)}{\text{deg}(v)(\text{deg}(u)-1)}$ naboja vsaki točki stopnje 2, ki so sosedne točke u .
- \mathbf{R}_3 : Naj bo $v_1v_2v_3v_4v_5$ takšna pot v grafu G , da je $\text{deg}(v_1) = \text{deg}(v_2) = \text{deg}(v_4) = 2$ in $\text{deg}(v_3) = 7$. Tedaj:
 - če je $\text{deg}(v_5) \geq 4$, potem v_4 pošlje $1/7$ naboja točki v_2 ;
 - če je $\text{deg}(v_5) = 3$, potem v_4 pošlje $1/21$ naboja točki v_2 .
- \mathbf{R}_4 : Če ima 7-točka pozitiven naboj po uporabi pravil \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 in \mathbf{R}_3 , ga enakomerno pošlje med sosedne točke stopnje 2.

4.2.4 Končni naboj

Po uporabi pravil prenosa naboja bomo sklepali, da ima vsako lice in vsaka točka negativen naboj, kar bo protislovje, saj je skupni naboj -4 . Ker je 1-točka reducibilna, moramo poskrbeti samo za 2-točke, saj so edine, ki imajo negativen začetni naboj.

Končni naboj točk s stopnjo vsaj 3 ostane nenegativen, saj:

$$\begin{aligned} \text{ch}(v) &= \text{ch}_0(v) - \frac{\text{ch}_0(v)}{\deg(v)} n_2(v) - \frac{\text{ch}_0(v)}{\deg(v)(\deg(u) - 1)} n_2(u)(\deg(v) - n_2(v)) \\ &\geq \text{ch}_0(v) - \frac{\text{ch}_0(v)}{\deg(v)} n_2(v) - \frac{\text{ch}_0(v)}{\deg(v)} (\deg(v) - n_2(v)) \\ &= \text{ch}_0(v) - \frac{\text{ch}_0(v)}{\deg(v)} \deg(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Naj bo v 2-točka ter x in y njeni sosedi. Če sta obe x in y stopnje ≥ 4 , po \mathbf{R}_1 sledi $\text{ch}(v) \geq -2 + 2 \cdot 1 = 0$. Recimo, da je $\deg(x) = 3$. Potem je $\deg(y) \geq 5$ po (Q3). Če je $\deg(y) \geq 6$, potem velja $\text{ch}(v) \geq -2 + \frac{1}{3} + \frac{5}{5} = 0$. Torej lahko predpostavimo, da je $\deg(y) = 5$. Sedaj lahko zaradi (Q4) sklepamo, da ima x ali eno sosedo stopnje ≥ 6 ali dve sosedi stopnje ≥ 3 . V prvem primeru je $\text{ch}(v) \geq -2 + \frac{1}{3} + \frac{7}{5} + \frac{5}{3 \cdot 2} > 0$, v drugem primeru pa $\text{ch}(v) \geq -2 + \frac{1}{3} + \frac{7}{5} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} > 0$ po \mathbf{R}_1 in \mathbf{R}_2 .

Sedaj predpostavimo, da ima v sosedo stopnje 2, recimo x . Potem je y stopnje ≥ 7 po reducibilnosti (Q2). V primeru, da je $\deg(y) \geq 8$, sledi $\text{ch}(v) \geq -2 + 2 = 0$ po \mathbf{R}_1 .

Torej predpostavimo, da je $\deg(y) = 7$. Po pravilu \mathbf{R}_1 je naboj točke v enak $\text{ch}(v) = -2 + \frac{13}{7} = -\frac{1}{7}$. Po (Q5) in (Q6) vemo, da velja eden od naslednjih primerov:

- (a) Ena od sosed točke y je ≥ 4 -točka.
- (b) Tri sosede točke y so 3-točke.
- (c) Natanko dve sosedi točke y so 4-točke in vsaj ena izmed njih ima še ≥ 3 -točko za sosedo.
- (d) Ena točka z , ki je od točke y oddaljena za 2, je ≥ 4 -točka.
- (e) Tri točke u_1, u_2 in u_3 , ki so za 2 oddaljene od točke y , so 3-točke.

To pomeni, da je v teh primerih končni naboj točke v enak:

- (a) $\text{ch}(v) = -\frac{1}{7} + \frac{1}{6} > 0$ po \mathbf{R}_2 .
- (b) $\text{ch}(v) = -\frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 6} > 0$ po \mathbf{R}_2 .
- (c) V tem primeru ostane po pravilih \mathbf{R}_1 in \mathbf{R}_2 točki y vsaj $\frac{13}{7 \cdot 2} = 13 - 5 \frac{13}{7} - 3 \frac{13}{7 \cdot 2}$ naboja, medtem ko pravilo \mathbf{R}_3 tukaj ne more biti uporabljeno - tak y odda vsaj $\frac{13}{7 \cdot 2 \cdot 5}$ naboja točki v in tako je $\text{ch}(v) = -\frac{1}{7} + \frac{13}{7 \cdot 2 \cdot 5} > 0$ po \mathbf{R}_4 .
- (d) Skupna soseda točk z in y odda $1/7$ naboja točki v po \mathbf{R}_3 in tako je $\text{ch}(v) = -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0$.

- (e) Skupne sosede točk u_1 in y , u_2 in y ter u_3 in y oddajo $1/21$ naboja točki v po \mathbf{R}_3 in tako $\text{ch}(v) = -\frac{1}{7} + \frac{3}{21} = 0$.

S tem zaključimo dokaz, da ima vsaka točka nenegativen naboj po prenosih naboja in dobimo protislovje, saj je bila vsota začetnega naboja enaka -4 . To protislovje ima za posledico izrek.

Poglavje 5

5-barvanje grafov s štirimi križanji

5.1 Uvod

V tem poglavju bomo obravnavali obarvljivost grafov z nizkim številom križanj. Glavni rezultat tega poglavja je izrek, ki pravi da ej vsak graf z največ štirimi križanji in ključnim številom največ 5 nujno 5-obarvljiv. Poakazli bomo tudi, da ta trditev ne velja, če število križanj povišamo na 5.

Risba grafa G je določena vložitev grafa G v ravnino. *Prekrižno število* grafa G , ki ga označimo z $cr(G)$, je minimalno število križanj povezav na poljubni risbi grafa G .

Izrek o štirih barvah trdi, da je graf, ki ima prekrižno število nič, 4-obarvljiv. Pojavi se vprašanje, kako je kromatično število odvisno od prekrižnega števila.

Za odgovor na to vprašanje je ključen koncept pokritja križanj. *Pokritje križanj* vložitve grafa je taka množica vozlišč C , da ima vsako križanje povezavo, ki je incidentna točki iz C . Če je C pokritje križanj, potem je $G - C$ ravninski in tako je $\chi(G) \leq 4 + \chi(G \setminus C) \leq 4 + |C|$. Izberemo lahko eno točko za vsako križanje in tako dobimo pokritje križanj moči največ $cr(G)$ in tako velja $\chi(G) \leq 4 + cr(G)$.

Ta zgornja meja je točna le za $cr(G) \leq 1$. Tako je naravno vprašati, katero je tisto najmanjše število $f(k)$, da je vsak graf s prekrižnim številom največ k potem $f(k)$ -obarvljiv?

Argument, podoben zgornjemu pokaže, da je $f(k+1) \leq f(k) + 1$. Schaefer [66] je rešil domnevo Albertsona [4], ko je pokazal, da je $f(k) = O(k^{1/4})$. Ta zgornja meja je točna do konstante, saj je $\chi(K_n) = n$ in $cr(K_n) \leq \binom{|E(K_n)|}{2} = \binom{n}{2} \leq \frac{1}{8}n^4$.

Poznamo le nekaj točnih vrednosti $f(k)$. Izrek o štirih barvah pravi, da je $f(0) = 4$ in iz njega preprosto sledi $f(1) \leq 5$. Ker je $cr(K_5) = 1$, velja $f(1) = 5$. Oporowski in Zhao [62] sta pokazala, da je $f(2) = 5$. Zaradi $cr(K_6) = 3$, velja $f(3) = 6$. Albertson et al. [5] so pokazali, da je $f(6) = 6$.

Graf G je r -kritičen, če je $\chi(G) = r$ in $\chi(G') < r$ za vsak netrivialen podgraf G' grafa G . Oporowski in Zhao [62] sta dokazala, da je K_6 edini 6-kritičen graf s prekrižnim številom 3.

Izrek 5.1.1 (Oporowski in Zhao [62]). *Za $cr(G) \leq 3$ in $\omega(G) \leq 5$ je $\chi(G) \leq 5$.*

Oporowski in Zhao [62] sta postavila tudi vprašanje: Ali sklep velja tudi za $cr(G) \in \{4, 5\}$?

Vprašanje 5.1.2 (Oporowski in Zhao [62]). *Naj bo $cr(G) \leq 5$ in $\omega(G) \leq 5$. Ali je graf G 5-obarvljiv?*

Mi odgovorimo negativno in pokažemo protiprimer. Pri dokazu sledečega izreka je bil v veliko pomoč Zdeněk Dvořák.

Izrek 5.1.3. *Obstaja graf G , da je $cr(G) = 5$, $\omega(G) \leq 5$ in $\chi(G) = 6$.*

Po drugi strani pa je odgovor na vprašanje 5.1.2 pozitiven, ko je $cr(G) = 4$.

Izrek 5.1.4. *Za $cr(G) \leq 4$ in $\omega(G) \leq 5$ je $\chi(G) \leq 5$.*

Ključni pojmi v dokazu izreka 5.1.4 so tako imenovana odvisna križanja. *Gruča* križanja so končne točke njegovih dveh povezav. Dve križanji sta *odvisni*, če imata njuni gruči neprazen presek.

Král' in Stacho [54] sta rešila domnevo Albertsona [4], ko sta pokazala spodnje.

Izrek 5.1.5 (Král' in Stacho [54]). *Za graf G , ki ima risbo, na kateri nobeni dve križanji nista odvisni, velja $\chi(G) \leq 5$.*

Ohlapno povedano ta izrek pravi, če so križanja daleč narazen, je graf 5-obarvljiv. Po drugi strani pa velja, da je graf prav tako 5-obarvljiv, če so križanja zelo blizu, to pomeni, da imajo njihove gruče skupno točko. Tako bomo dokazali, da je graf, kjer so križanja pokrita z $2k$ povezavami, $(4+k)$ -obarvljiv (izrek 5.4.1). V posebnem velja, da je graf, kjer lahko križanja pokrijemo s tremi povezavami, 6-obarvljiv. Ta meja 6 je točna, saj je $cr(K_6) = 3$ in iz K_6 lahko odstranimo 3 povezave, da postane ravninski. Pravzaprav s posplošitvijo izreka 5.1.1 pokažemo, da je K_6 v resnici edina ovira za graf, da bi bil 5-obarvljiv.

Izrek 5.1.6. *Če je $\omega(G) \leq 5$ in obstaja množica največ treh povezav F tako, da je $G \setminus F$ ravninski, je $\chi(G) \leq 5$.*

Sorodne odprte probleme bomo naslovili v zadnjem razdelku.

5.2 Predpostavke

5.2.1 Risbe grafov

Risba \tilde{G} grafa $G = (V, E)$ (v ravnini ali na sferi) je bijekcija D iz $V \cup E$ v množico $\tilde{V} \cup \tilde{E}$ tako, da:

- (i) Je \tilde{V} slika množice V in je \tilde{V} množica paroma različnih točk v ravnini.
- (ii) Za vsako povezavo $e = uv$ je $D(e) = \tilde{e}$ v \tilde{E} in je \tilde{e} slika zvezne injektivne preslikave ϕ_e iz $[0, 1]$ v ravnino, da velja $\phi_e(0) = D(u)$, $\phi_e(1) = D(v)$ in $\phi_e([0, 1]) \cap \tilde{V} = \emptyset$.
- (iii) Vsaka točka v ravnini je slika največ dveh povezav, razen če je v \tilde{V} .
- (iv) Za dve različni povezavi e_1 in e_2 v E se \tilde{e}_1 in \tilde{e}_2 sekata v največ končno mnogo točkah.

Pogosto bomo enačili množici točk in povezav z njunima slikama v risbah.

Križanje na risbi grafa G je točka v ravnini brez \tilde{V} , ki pripada dvema povezavam. Točneje je točka $\phi_{e_1}(]0, 1[) \cap \phi_{e_2}(]0, 1[)$ za neki povezavi e_1 in e_2 . *Delček* povezave e je del krivulje $\phi_e[0, 1]$ med dvema zaporednima končnima točkama ali križanjema na e . Delček med a in b imenujemo (a, b) -delček.

Graf je *ravninski*, če ima risbo brez križanj. Preprosta posledica Eulerjeve formule je naslednja dobro znana trditev.

Trditev 5.2.1. *Za ravninski graf G je $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.*

Risba graf G je *optimalna*, če minimizira število križanj. Opazimo, da se lahko dve povezavi križata večkrat bodisi v končnih točkah ali križanjih. A s pomočjo naslednjih dveh lem bomo lahko obravnavali le *lepe* risbe, to je risbe, kjer se dve povezavi sekata največ enkrat.

Lema 5.2.2. *Vsak graf s prekrižnim številom k ima lepo risbo z največ k križanji.*

Dokaz. Naj bo G graf s prekrižnim številom k . Poglejmo optimalno risbo grafa G , ki minimizira število križanj med povezavami s skupno točko. Predpostavimo nasprotno trditev, da se dve povezavi $e_1 = u_1v_1$ in $e_2 = u_2v_2$ sekata vsaj dvakrat. Naj bosta a in b točki križanja med e_1 in e_2 . Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da so u_1, u_2, v_1 , in v_2 zunaj sklenjene krivulje C , ki je unija (a, b) -delčka P_1 na u_1v_1 in (a, b) -delčka P_2 na u_2v_2 . Prav tako lahko domnevamo, da P_1 vsebuje vsaj toliko križanj kot P_2 .

Potem lahko ponovno narišemo u_1v_1 vzdolž (u_1, a) -delčka e_1, P_2 , in (b, v_1) -delčka e_1 malo izven C tako, da se e_1 in e_2 ne križata več. S tem smo odstranili vsa križanja P_1 vključno z a in b (če sta bili križani). Pri tem pa smo ustvarili križanje za vsako križanje P_2 , različno od a in b . Ker eno od $\{a, b\}$ mora biti križanje (nimamo vzporednih povezav), smo s tem dobili risbo z enim križanjem manj, kar je protislovje. \square

Podobno lahko dokažemo naslednjo lemo.

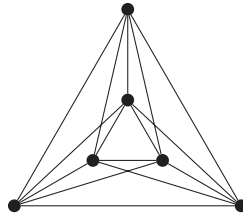
Lema 5.2.3. *Vsak graf z množico povezav F , katerih izbris da ravninski graf, ima lepo risbo, kjer vsako križanje vsebuje vsaj eno povezavo iz F .*

Obravnavali bomo samo lepe risbe. Tako je vsako križanje enolično določeno s parom povezav, ki mu pripada. Tako bomo pogosto enačili križanje z njegovima povezavam.

Lice risbe \tilde{G} je povezana komponenta prostora, ki ga dobimo z odstranitvijo $\tilde{V} \cup \tilde{E}$ iz ravnine. Naj bo $F(\tilde{G})$ (ali preprosto F) množica vseh lic \tilde{G} . Pravimo, da je točka v ali delček povezave incidenčna z $f \in \tilde{F}$, če je v vsebovana v zaprtju f . Meja f , ki jo označimo z $bd(f)$ sestavljajo točke in maksimalni (glede na vsebovanost) delčki povezav incidenčnih z f .

Lema 5.2.4. *Do permutacije točk natančno obstaja le ena vložitev K_6 z natanko tremi križanji (glej sliko 5.1).*

Dokaz. Naj bo A vložitev K_6 s tremi križanji. Pokazali bomo, da je edina. Najprej opazimo, da ima vsaka povezava največ eno križanje. V nasprotnem primeru bi imeli dve povezavi, katerih odstranitev naredi graf ravninski, kar je protislovje s trditvijo 5.2.1. Ker vsaka gruča vsebuje štiri točke, mora obstajati točka v , ki je vsebovana v dveh.

Slika 5.1: Risba K_6 s tremi križanji.

Upoštevajmo, da v ne more biti vsebovana v vseh treh gručah, saj $K_6 - v$ (ki je izomorfen K_5) ni ravninski. Naj bosta $e_1 = vx$ in $e_2 = vy$ dve prekržani povezavi, incidenčni z v , in naj bo e_3 ena od povezav križanja, katerega gruča ne vsebuje v . Graf $K_6 \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ je ravninska triangulacija T , kjer je $\deg(v) = 3$.

Z a, b, c označimo sosede točke v v T , ki nujno inducirajo trikotnik. Brez izgube splošnosti sta ab in bc tisti povezavi, ki ju križata e_1 in e_2 v tem vrstnem redu.

Ker je T triangulacija, abx in bcy tvorita trikotnika. Poleg tega je xy tudi trikotnik ter x in y sta zaporedna soseda okoli b . Zadnji dve povezavi, ki ju še nismo obravnavali, sta xc in ya . Križata se znotraj $bxyz$ in ena od njiju je e_3 . Zato je A edina. \square

Lema 5.2.5. *Risba K_5 z vsemi točkami, incidenčnimi istemu licu, zahteva 5 križanj.*

Dokaz. Oštevilčimo točke grafa K_5 kot v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 v smeri urinega kazalca okoli lica f , kateremu so incidenčna. Sedaj lahko ponovno narišemo povezave $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5$ in v_5v_1 . Tako lahko predpostavimo, da je meja lica cikel $C = v_1v_2v_3v_4v_5$ in je f njegova notranjost. Sedaj obe povezavi v_1v_3 in v_2v_4 ležita zunaj C in se tako morata kizati. Podobno velja za pare povezav $\{v_2v_4, v_3v_5\}$, $\{v_3v_5, v_4v_1\}$, $\{v_4v_1, v_5v_2\}$ in $\{v_5v_2, v_1v_3\}$. \square

Lema 5.2.6. *Risba $K_{2,3}$, kjer so točke vsakega dela na skupnem licu, zahteva vsaj eno križanje.*

Dokaz. Naj bo $(\{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2, v_3\})$ biparticija $K_{2,3}$. Predpostavimo, da ima $K_{2,3}$ ravninsko risbo, kjer leži vsak del biparticije na skupnem licu. Potem dodajmo točko u_3 v lice, ki je incidenčno v_1, v_2 in v_3 ter povežimo u_3 s temi točkami. Dobili smo risbo $K_{3,3}$ brez križanj, kar je protislovje z dejstvom, da $K_{3,3}$ ni ravninski. \square

5.2.2 Lastnosti 6-kritičnih grafov

Stabilno pokritje križanj neke risbe grafa je množica točk, ki je hkrati stabilna in pokritje križanj.

Lema 5.2.7. *Vsak graf s stabilnim pokritjem križanj je 5-obarvljiv.*

Dokaz. Naj bo G graf, ki ima stabilno pokritje križanj W . Uporabimo izrek o štirih barvah na $G - W$ in razširimo barvanje na G tako, da uporabimo peto barvo na W . \square

Naj bo G graf in u, v njegovi točki. Operacija *identifikacije* točk u in v v G rezultira v grafu, ki ga bomo označili z $G/\{u, v\}$, ki ga dobimo iz $G - \{u, v\}$ tako, da dodamo novo točko w in množico povezav $\{wz \mid uz \text{ ali } vz \text{ je povezava v } G\}$.

Lema 5.2.8. *Naj bo G graf in v točka stopnje pet v G . Naj bosta u in w dve nesosedni sosedni točki v . Če je $(G - v)/\{u, w\}$ 5-obarvljiv, je tudi G 5-obarvljiv.*

Dokaz. Dobro 5-barvanje grafa $(G - v)/\{u, w\}$ ustreza dobremu 5-barvanju $G - v$ tako, da sta u in v pobarvani z isto barvo. Lahko ga lahko razširimo do dobrega 5-barvanja grafa G tako, da v dodelimo prosto barvo. \square

Naj bo G graf vložen v ravnino. Cikel je *ločevalen*, če ima točko v svoji notranjosti in točko v svoji zunanosti. Cikel C je *neprekrižan*, če so vse njegove povezave neprekrižane. *Regularen* je, če vsaka gruča križanja, ki vsebuje povezavo iz C , vsebuje vsaj tri točke iz C .

Lema 5.2.9. *V nobeni ravninski risbi 6-kritičnega grafa ni ločevalnega regularnega trikotnika.*

Dokaz. Naj bo G 6-kritičen graf, narisani v ravnini. Predpostavimo nasprotno in naj bo C ločevalen regularen trikotnik. Naj bo G_1 graf, ki ga inducirajo točke na C in znotraj C in naj bo G_2 graf, ki ga inducirajo točke na C in zunaj C . Ker je C ločevalen, ima tako G_1 kot G_2 manj točk kot G . Torej zaradi 6-kritičnosti obstajata 5-barvanji teh dveh grafov. Dodatno so barve točk na C v teh dveh barvanjih grafov G_1 in G_2 različne. Torej lahko permutiramo barve v teh barvanjih in privzamemo, da se barve na C ujemajo. Torej unija teh barvanj da 5-barvanje grafa G . \square

Lema 5.2.10. *Naj bo G 6-kritičen graf, različen od K_6 . Potem v lepi risbi grafa G ne more nastopiti ločevalen trikotnik, za katerega bi veljalo, da*

- *ima največ eno povezavo prekrížano in*
- *je največ eno križanje v njegovi notranjosti.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da tak cikel $C = x_1x_2x_3$ obstaja. Potem je zaradi leme 5.2.9 ena njegova povezava prekrížana, recimo x_2x_3 . Naj bo uv ta povezava, ki jo križa, kjer je u znotraj C in v izven. Zaradi leme 5.2.9 C ni regularen, torej $u \neq x_1$. Še več: $u \notin \{x_2, x_3\}$, saj je risba lepa.

Naj bo G_1 graf, induciran s točkami izven C . Potem ima G_1 5-barvanje c_1 , saj je G 6-kritičen.

Naj bo G_2 graf, ki ga dobimo iz grafa, ki ga inducira C , in točk znotraj C , kjer dodamo povezave ux_1 , ux_2 in ux_3 , če še ne obstajajo. Opazimo, da ima G_2 ravninsko risbo z največ dvema križanjema. Povezavo ux_1 lahko ponovno narišemo vzdolž uv , nakar nadaljuje pot zunaj C in povezavi ux_2 in ux_3 lahko narišemo vzdolž povezav križanja $\{x_2x_3, uv\}$. Torej G_2 ima 5-barvanje c_2 .

V obeh barvanjih so barve na C paroma različne. Tako lahko barve permutiramo in privzamemo, da se c_1 in c_2 na C ujemata. Prav tako lahko za U izberemo barvo iz $\{1, \dots, 5\} \setminus \{c_2(x_1), c_2(x_2), c_2(x_3)\}$ tako, da je $c_2(u) \neq c_1(v)$. Potem je unija barvanj c_1 in c_2 5-barvanje grafa G . \square

Lema 5.2.11. *Naj bo G 6-kritičen graf. V vsaki risbi grafa G v ravnini obstaja neprekrižan 4-cikel C , da velja:*

- C ima diagonalo v svoji zunanosti,
- C in njegova notranost tvorita ravninski graf in
- notranost C vsebuje vsaj eno točko.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da tak 4-cikel $C = tuv$, ki zadovoljuje zahteve zgoraj in z diagonalo v svoji zunanosti vt , obstaja. Vzemimo graf G_1 , ki ga dobimo iz G z odstranitvijo točk znotraj C . Ker je G 6-kritičen, ima G_1 5-barvanje c_1 z barvami $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $c_1(v) = 5$. Torej velja $\{c_1(t), c_1(u), c_1(w)\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Sedaj vzemimo graf G_2 , ki ga dobimo, če iz G odstranimo točke izven C . Če je $c_1(u) = c_1(w)$, naj bo H graf, dobljen iz $G_2 - v$ z identifikacijo u in w . Če pa je $c_1(u) \neq c_1(w)$, naj bo H graf, dobljen iz $G_2 - v$ z dodano povezavo uw , če ta še ne obstaja. V obeh primerih je H ravninski graf in tako ima 4-barvanje c_2 z barvami $\{1, 2, 3, 4\}$. Zaradi konstrukcije H velja $c_2(u) = c_2(w)$ natanko tedaj, ko je $c_1(u) = c_1(w)$. Torej lahko permutiramo barve in privzamemo, da se c_1 in c_2 na $\{t, u, w\}$ ujemata. Torej je unija barvanj c_1 in c_2 5-barvanje grafa G . □

5.2.3 6-kritični grafi vloženi v torus ali Kleinovo steklenico

V dokazu izreka 5.1.6 uporabimo seznam vseh 6-kritičnih grafov, ki imajo vložitev v torus, ki ga je sestavil Thomassen [71] in seznam vseh 6-kritičnih grafov, ki imajo vložitev v Kleinovo steklenico, ki so ga neodvisno sestavili Chenette et al. [19] in Kawarabayashi et al. [50].

Izrek 5.2.12 (Thomassen [71]). *Obstajajo štiri neizomorfni 6-kritični grafi, ki so vložljivi v torus. (Trije od njih so na sliki 5.2, zadnji pa je 6-regularen graf na 11 točkah.)*

Izrek 5.2.13 (Chenette et al. [19]; Kawarabayashi et al. [50]). *Obstaja 9 neizomorfni grafov, ki imajo vložitev v Kleinovo steklenico (prikazani so na sliki 5.2).*

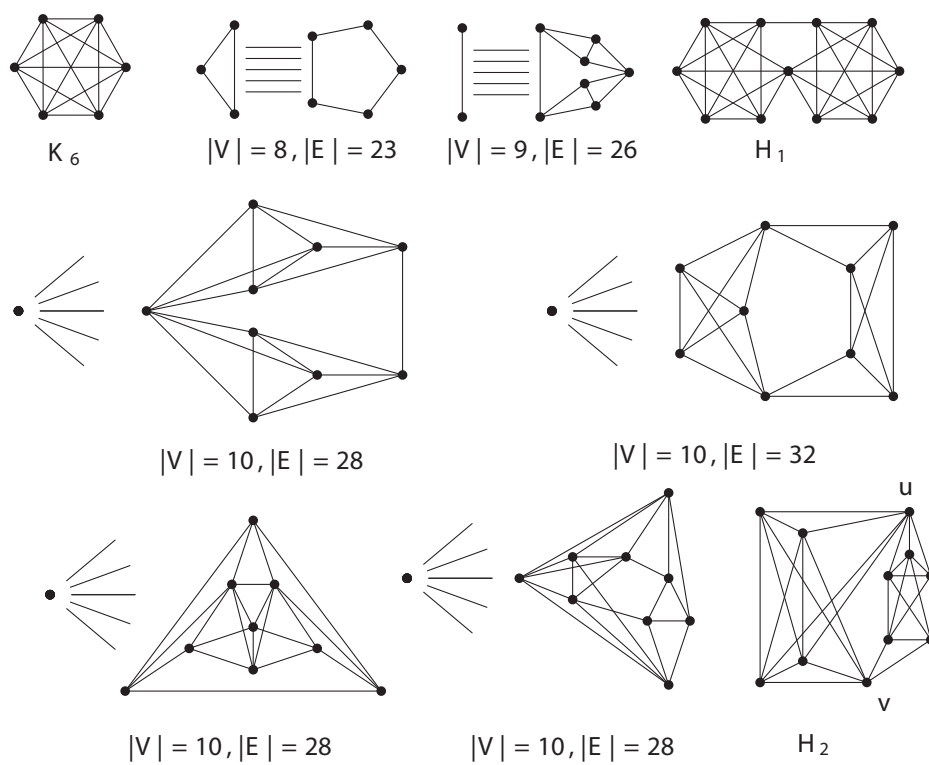
Lema 5.2.14. *Če izbrišemo tri povezave v 6-kritičnem grafu, ki ima vložitev v torus in ni K_6 , bo rezultirajoč graf neravninski.*

Dokaz. Poznamo ves seznam grafov, ki jih moramo preveriti zaradi izreka 5.2.12. Za vse od njih, razen za K_6 , velja $|E| > 3|V| - 3$. Torej ti grafi ne morejo biti ravninski po odstranitvi treh povezav zaradi trditve 5.2.1. □

Lema 5.2.15. *Če izbrišemo tri povezave v 6-kritičnem grafu, ki ima vložitev v Kleinovo steklenico in ni K_6 , bo rezultirajoč graf neravninski.*

Dokaz. Poznamo ves seznam grafov, ki jih moramo preveriti zaradi izreka 5.2.13. Za vse grafe razen K_6 , H_1 in H_2 velja $|E| > 3|V| - 3$. Torej ti grafi niso ravninski po odstranitvi treh povezav zaradi trditve 5.2.1.

Sedaj moramo pogledati zadnja dva grafa H_1 in H_2 (glej sliko 5.2). Najprej si oglejmo H_1 . Ta vsebuje neodvisno kopijo K_6 brez ene povezave. Iz vsake od teh kopij moramo



Slika 5.2: Seznam vseh 6-kritičnih grafov, ki imajo vložitev v Kleinovo steklenico. Prvi trije imajo tudi vložitev v torus.

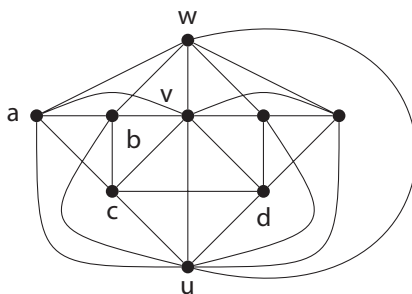
odstraniti vsaj dve povezavi zaradi trditve 5.2.1 in tako moramo iz H_1 odstraniti vsaj 4 povezave.

Oglejmo si še H_2 . Naj bo F taka množica povezav, da je $H_2 \setminus F$ ravninski. Označimo z u in v točki edinega 2-prereza grafa H_2 (glej sliko 5.2). Opazimo, da je $H_2 - \{u, v\}$ disjunktna unija K_5 in K_4 . Ker K_5 ni ravninski, je ena povezava e tega K_5 v F . Še vedno pa obstaja (u, v) -pot P v $K_5 \setminus e$. Potem je unija grafa, induciraneega z u, v in točkami v zgornjem K_4 in poti P , subdivizija grafa K_6 . Torej morajo biti zaradi trditve 5.2.1 za K_6 vsaj tri njegove povezave v F . Torej je $|F| \geq 4$. \square

5.3 6-kritični grafi s prekrižnim številom 5

Izrek 5.1.3 dokažemo s predstavitvijo risbe 6-kritičnega grafa G , ki ima 5 križanj in ni K_6 .

Izrek 5.3.1. *Graf G na sliki 5.3 je 6-kritičen.*



Slika 5.3: 6-Kritičen graf s prekrižnim številom 5.

Dokaz. S protislovjem bomo pokazali, da G ni 5-obarvljiv. Bralec naj za imena točk gleda sliko 5.3. Predpostavimo, da je ϱ 5-barvanje grafa G . Ker točke u, v in w tvorijo trikotnik morajo imeti različne barve. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\varrho(u) = 1, \varrho(v) = 2$ in $\varrho(w) = 3$. Sosedni točki a in b sta sosedni vsem točkam trikotnika uvw , torej je $\{\varrho(a), \varrho(b)\} = \{4, 5\}$. Potem velja $\varrho(c) = 3$, ker je c sosedna a, b, u in v .

Simetrično dobimo, da je $\varrho(d)$ tudi 3, kar je protislovje, saj je cd povezava.

Preprosto je preveriti, da je vsak netrivialen podgraf grafa G 5-obarvljiv. Torej je G 6-kritičen. \square

5.4 Barvanje grafov, katerih križanja so pokrita z malo povezavami

Izrek 5.4.1. *Če lahko graf G naredimo ravninski z izbrisom največ $2k$ povezav, je G $(4 + k)$ -obarvljiv.*

Dokaz. Dokažimo izrek z indukcijo po k . Rezultat drži za $k = 0$ zaradi izreka o štirih barvah.

Predpostavimo, da rezultat drži za k . Naj bo $G = (V, E)$ graf z množico F največ $2k + 2$ povezav, tako da je $G \setminus F$ ravninski. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je F minimalen, to je za vsako pravo podmnožico $F' \subset F$, graf $G \setminus F'$ ni ravninski.

Vzemimo ravninsko risbo grafa $G \setminus F$. To nam da risbo grafa G , kjer vsako križanje vsebuje povezavo iz F .

Predpostavimo, da je $|F| \leq 2k + 1$. Naj bo $e = uv$ povezava v F . Po induksijski predpostavki je $G - v$ $(4 + k)$ -obarvljiv, saj je $F \setminus e$ množica $2k$ povezav, katere odstranitev naredi $G - v$ ravninski. Torej je $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1 \leq 4 + k + 1$.

Tako lahko predpostavimo, da je $|F| = 2k + 2$.

Če imata dve povezavi e in f skupno točko v , je $G - v$ $(4 + k)$ -obarvljiv, saj je $F \setminus \{e, f\}$ množica $2k$ povezav, katere odstranitev naredi $G - v$ ravninski. Tako je $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1 \leq 4 + k + 1$. Torej lahko predpostavimo, da so povezave v F paroma neincidenčne.

Naj bosta $e = \{u_1, u_2\}$ in $f = \{v_1, v_2\}$ povezavi v F . Potem končne točke teh povezav tvorijo K_4 . Predpostavimo nasprotno, da u_1 in v_1 nista sosedni. Potem je $G - \{u_1, v_1\}$ $(4 + k)$ -obarvljiv, ker je $F \setminus \{e, f\}$ množica $2k$ povezav, katere odstranitev naredi $G - \{u_1, v_1\}$ ravninski ter u_1 in v_1 lahko dobita isto barvo. Torej je $\chi(G) \leq \chi(G - \{u_1, v_1\}) + 1 \leq 4 + k + 1$. Tako vemo, da $X = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ inducirajo K_4 .

Dalje ločimo dva primera:

$k = 0$: Naj bosta $e = \{u_1, u_2\}$ in $f = \{v_1, v_2\}$ povezavi v F in naj bo

$$X = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}.$$

Naj bo C 4-cikel, induciran z X v ravninskem grafu $G \setminus \{e, f\}$. Upoštevajmo, da je C ločevalen, sicer bi bil $G \setminus e$ ravninski. Razrežemo G vzdolž C in dobimo dva manjša grafa G_1 in G_2 , ki oba vsebujeta X . Oba 5-obarvamo po indukciji. Nato dobimo 5-barvanje grafa G iz 5-barvanj G_1 in G_2 tako, da permutiramo barve na X , da se barvanji na $V(C)$ ujemata.

$k \geq 1$: Upoštevajmo, da vse končne točke povezav v F inducirajo poln graf $K_{2|F|}$. Tak $K_{2|F|}$ mora biti ravninski po odstranitvi največ $|F|$ povezav. Torej drži sledeča Eulerjeva formula:

$$\begin{aligned} |E| &\leq 3|V| - 6 + 2k + 2 \\ \binom{4k + 4}{2} &\leq 3(4k + 4) + 2k - 4 \\ 8k^2 - 2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Torej je ta primer nemogoč.

□

Ker velja $\text{cr}(K_5) = 1$ in $\text{cr}(K_6) = 3$, nam izrek 5.4.1 da točno mejo za $k \leq 2$. Ampak K_6 je edina omejitev, da bi lahko rezultat peljali naprej, kar kaže naslednji izrek, ki je reformulacija izreka 5.1.6 v smislu kritičnih grafov.

Izrek 5.4.2. *Če izbrišemo največ tri povezave iz 6-kritičnega grafa, ki ni K_6 , bo rezultirajoč graf neravninski.*

Dokaz. Naj bo G 6-kritičen graf različen od K_6 in F množica največ treh povezav. Predpostavimo nasprotno, da je $G \setminus F$ ravninski.

Poglejmo lepo risbo grafa G . Po lemi 5.2.7 G nima stabilnega pokritja križanj.

Če je $|F| \leq 2$, izrek 5.4.1 nasprotuje dejstvu, da G ni 5-obarvljiv. Torej lahko privzamemo, da je $F = \{e_1, e_2, e_3\}$. Postavimo $e_i = u_i v_i$ za $i \in \{1, 2, 3\}$.

Trditev 5.4.3. *Povezave v F so paroma neincidenčne.*

Dokaz. Če obstaja točka v , ki si jo delijo vse tri povezave je $\{v\}$ stabilno pokritje križanj, kar je protislovje. Torej si točko u lahko delita največ dve povezavi v F . Naj bo s število točk stopnje 2 v grafu induciranim z F .

Sedaj bomo pridobili protislovje za vsako vrednost $s > 0$. Torej je $s = 0$, kar dokazuje trditev.

$s = 1$: Brez škode za splošnost je $u = u_1 = u_2$. Nobena od $\{u, u_3\}$ in $\{u, v_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, torej sta uu_3 in uv_3 povezavi.

Ponovno narišemo povezavo e_3 vzdolž poti u_3uv_3 tako, da križa le povezave incidenčne z U . Glej sliko 5.4(A). Potem je u stabilno pokritje križanj, kar je protislovje.

$s = 2$: Brez škode za splošnost je $u = u_1 = u_2$ in $v = v_2 = v_3$. Potem F inducira pot. Nobena od $\{v_1, v\}$ in $\{u, u_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, torej sta v_1v in uu_3 povezavi. Nato narišemo povezave F preko ročke, glej sliko 5.4(B). Torej lahko G vložimo v torus, kar je protislovje z lemo 5.2.14.

$s = 3$: Brez škode za splošnost je $u = u_1 = u_2$ ena od skupnih točk. Naj bosta v in w ostali dve. Opazimo, da F inducira trikotnik.

Zaradi trditve 5.2.1 velja $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3$. Torej imamo vsaj 6 točk stopnje pet, ker je pet minimalna stopnja grafa G .

Naj bo x točka stopnje pet, ki je različna od u, v in w . Zaradi minimalnosti G obstaja 5-barvanje ϱ grafa $G - x$. Barve lahko permutiramo in tako privzamemo, da je $\varrho(u) = 1$, $\varrho(v) = 2$ in $\varrho(w) = 3$.

Poleg tega so sosedi x obarvani različno. Z y in z označimo sosedi točke x , ki sta obarvani z barvama 4 in 5 v tem vrstnem redu. Privzamemo, da je G vložen v ravnino tako, da so vsa križanja pokrita z F . Obstajata dve v smeri urinega kazalca zaporedni sosedi točke x z barvami v $\{1, 2, 3\}$. Ti točki označimo z a in b . Brez izgube za splošnost naj bo vrstni red točk okoli x kar z, y, a, b ter $\varrho(a) = 1$ in $\varrho(b) = 2$. Glej sliko 5.4(C).

Naj bo A povezana komponenta, ki vsebuje a , inducirana s točkami pobarvanimi z 1 in 5. Če A ne vsebuje točke z , lahko njeno barvo zamenjamo. Potem lahko x obarvamo z 1, kar je protislovje. Opazimo, da je menjava barv možna tudi, če je u

v A , saj bo nova barva u potem 5, kar je različno od 2 in 3. Torej mora med a in z obstajati pot na točkah, obarvanih z 1 in 5. Podoben argument pokaže, da mora med b in y obstajati pot na točkah z barvama 2 in 4. Ti poti morata biti disjunktni, saj ne vsebujeta povezav iz F . Ne moremo pa ju narisati v ravnini brez križanj, kar je protislovje.

□

Trditev 5.4.4. Za poljubni različni celi števili $i, j \in \{1, 2, 3\}$ je poljubna točka e_i sosedna največ eni točki e_j .

Dokaz. Predpostavimo nasprotno. Potem lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je u_2 sosedna u_1 in v_1 . Najprej ponovno narišimo povezavo e_1 vzdolž poti $u_1u_2v_1$. Potem je vsaka povezava, ki jo e_1 križa in ni e_3 , incidenčna e_2 . Ker velja, da $\{u_2, u_3\}$ in $\{u_2, v_3\}$ nista stabilni pokritji križanj, sta u_2u_3 in u_2v_3 povezavi. Ponovno narišimo e_3 vzdolž poti $u_3u_2v_3$. Potem je spet vsaka povezava, ki jo e_3 križa in ni e_1 , incidenčna e_2 . Še več, e_1 in e_3 se križata, saj bi sicer $\{u_2\}$ bilo stabilno pokritje križanj. Glej sliko 5.4(D).

Ločimo več primerov glede na število p sosedov točke v_2 med u_1, v_1, u_3 in v_3 .

$p = 0$: Točka v_2 in par nesosednih točk iz u_1, v_1, u_3 in v_3 bi tvorili stabilno pokritje križanj. Torej $\{u_1, v_1, u_3, v_3\}$ inducirajo K_4 . Glej sliko 5.4(E). Po lemi 5.2.9 ne obstaja točka znotraj vseh trikotnikov $u_2u_1u_3$, $u_2u_3v_1$, $u_2v_1v_3$ in $u_2u_1v_3$. Torej so vse točke znotraj 4-cikla $u_1u_3v_1v_3$. Vsebuje tudi točko v_2 . Ponovno narišemo e_1 tako, da križa le e_3 in u_2v_3 . Potem je $\{v_3, v_2\}$ stabilno pokritje križanj, kar je protislovje. Glej sliko 5.4(F).

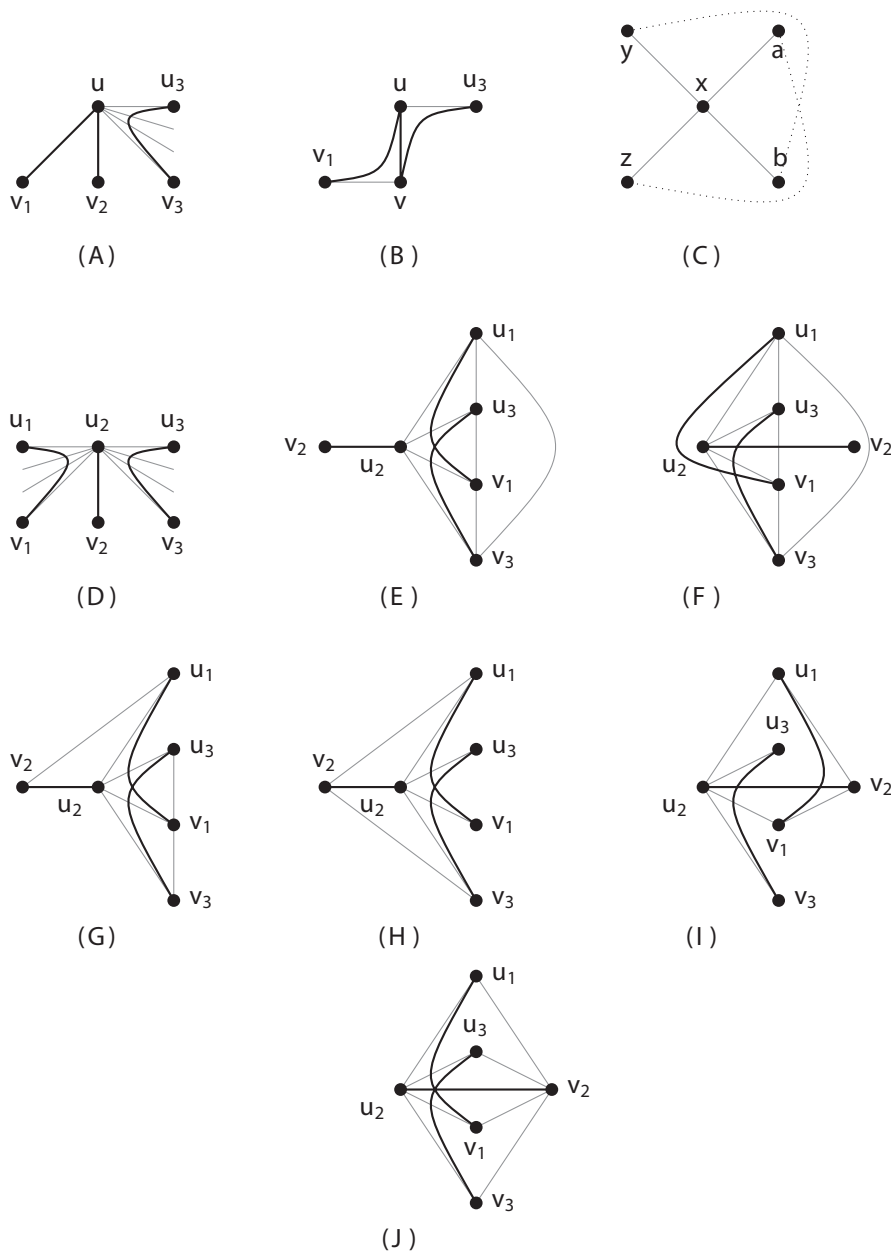
$p = 1$: Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da je soseda točke v_2 točka u_1 . Nobena od $\{v_2, v_1, u_3\}$ in $\{v_2, v_1, v_3\}$ ni stabilno pokritje križanj in tako sta u_3v_1 in v_1v_3 povezavi. Po lemi 5.2.9 ne obstaja točka znotraj obeh trikotnikov $u_2u_3v_1$ in $u_2v_1v_3$. Glej sliko 5.4(G). Torej lahko povezavo e_3 ponovno narišemo znotraj teh trikotnikov in lahko množico F zamenjamo z $F' = \{e_1, e_2, u_2v_1\}$. Dve povezavi v F' si delita točko, kar je protislovje s trditvijo 5.4.3.

$p \in \{2, 3\}$: Dalje ločimo dva podprimera. Ali sta dve sosedi točke v_2 iz $\{u_1, v_1, u_3, v_3\}$ povezani s povezavo v F ali pa nista.

V drugem primeru lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da sta sosedi točke v_2 kar točki u_1 in v_3 . Sedaj zaradi leme 5.2.11 ne obstaja točka znotraj 4-cikla $v_2u_1u_2v_3$. Torej lahko e_2 ponovno narišemo znotraj tega cikla. Glej sliko 5.4(H). Ker z odstranitvijo $\{e_1, e_3\}$ graf G ne postane ravninski, je v_1v_3 znotraj $v_2u_1u_2v_3$. Torej množica $F' = \{e_1, e_3, u_1v_3\}$ nasprotuje trditvi 5.4.3.

V prvem primeru brez izgube splošnosti privzamemo, da je v_2 sosedna u_1 in v_1 . Najprej e_1 ponovno narišemo vzdolž poti $u_1v_2v_1$. Sedaj so vse povezave, ki križajo e_1 , incidenčne v_2 . Tako $\{v_2, u_3\}$ ali $\{v_2, v_3\}$ tvori stabilno pokritje križanj. Glej sliko 5.4(I).

$p = 4$: Glej sliko 5.4(J). Zaporedoma uporabljamo lemo 5.2.11, ki implicira, da so 4-cikli $u_2u_3v_2u_1$, $u_2u_3v_2v_1$, $u_2v_1v_2v_3$ in $u_2v_3v_2u_1$ ločevalni. To pa pomeni, da graf vsebuje le 6 točk. To je protislovje, saj je edini 6-kritičen graf na 6 točkah graf K_6 .

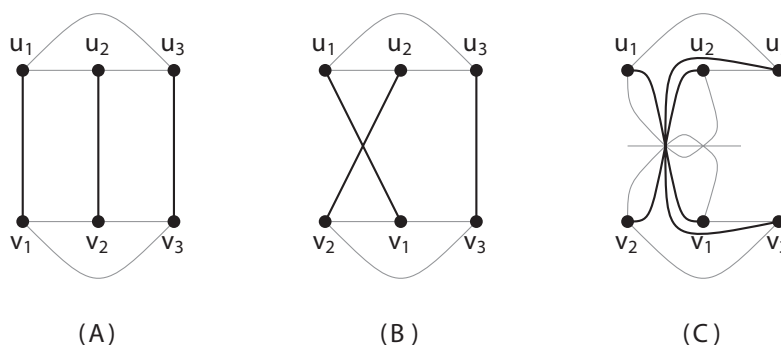


Slika 5.4: Tri črne povezave pokrijejo vsa križanja.

□

Ker $\{u_1, u_2, u_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, mora inducirati vsaj eno povezavo, recimo u_1u_2 . Trditev 5.4.4 pravi, da u_1v_2 in v_1u_2 nista povezavi. Sedaj $\{v_1, u_2, u_3\}$ in $\{v_1, u_2, v_3\}$ nista stabilni pokritja križanj. Torej po simetriji lahko privzamemo, da sta u_2u_3 in v_1v_3 povezavi. Tako sledi, da $\{u_1, v_2, u_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, torej obstaja povezava u_1u_3 ; $\{v_1, v_2, u_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, torej obstaja povezava v_1v_2 ; $\{u_1, v_2, v_3\}$ ni stabilno pokritje križanj, torej obstaja povezava v_2v_3 . Torej obstajata dva trikotnika $u_1u_2u_3$ in $v_1v_2v_3$, ki nista ločevalna po lemi 5.2.9.

Brez izgube splošnosti se zgodi ena od dveh možnosti. Ali se povezave v F ne križajo ali pa se križa natanko en par. Če se ne križajo (slika 5.5(A)), lahko G vložimo v torus, če dodamo ročko v trikotnika in narišemo povezave iz F preko ročke, kar nasprotuje lemi 5.2.14.



Slika 5.5: Zadnji primer iz izreka 5.1.6.

Če se križa en par (slika 5.5(B)), je možno G vložiti v Kleinovo steklenico (glej sliko 5.5(C)), kar nasprotuje lemi 5.2.15. □

5.5 5-barvanje grafov s 4 križanji

V tem razdelku bomo dokazali spodnji izrek 5.5.1, ki je reformulacija izreka 5.1.4 v smislu kritičnih grafov.

Izrek 5.5.1. *Edini 6-kritičen graf s prekrižnim številom največ 4 je K_6 .*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da je $G = (V, E)$ 6-kritičen graf s prekrižnim številom največ 4 različen od K_6 . Dodatno lahko predpostavimo, da je G tak kritičen graf z minimalnim številom točk in maksimalnim številom povezav na $|V(G)|$ točkah.

Poleg tega predpostavimo še, da imamo lepo optimalno risbo grafa G . Po izreku 5.1.6 obstajajo 4 križanja in vsaka povezava je križana največ enkrat.

Ker je G 6-kritičen, ima vsaka točka stopnjo vsaj 5. Po trditvi 5.2.1 velja $|E| \leq 3|V| - 6 + \text{cr}(G) \leq 3|V| - 2$. Torej imamo vsaj 4 točke stopnje 5.

Naj bo v poljubna točka stopnje 5 in naj bodo v_i , $1 \leq i \leq 5$, njene sosede v vrstnem redu nasprotnem urinemu kazalcu okoli v . Zaradi kritičnosti grafa G ima $G - v$ 5-barvanje ϕ . Točke v_i so nujno pobarvane različno, saj bi sicer lahko ϕ razširili na v .

Za vsak $i \leq j$ obstaja taka pot od v_i do v_j , označimo jo z $v_i - v_j$, da so vse njene točke pobarvane z $\phi(v_i)$ ali $\phi(v_j)$. Sicer v_j ni v povezani komponenti A , ki vsebuje v_i v grafu, induciranim s točkami pobarvanimi z $\phi(v_i)$ in $\phi(v_j)$. Tako bi z zamenjavo barv $\phi(v_i)$ in $\phi(v_j)$ na A dobili 5-barvanje ϕ' grafa $G - v$ tako, da nobena soseda točke v ni pobarvana z barvo $\phi(v_i)$. Torej lahko barvo $\phi(v_i)$ dodelimo točki v in dobimo 5-barvanje grafa G , kar je protislovje.

Naj bo q število prekrizanih povezav incidenčnih z v .

Trditev 5.5.2. $q \neq 0$.

Dokaz. Unija poti $v_i - v_j$ za $i \neq j$ je subdivizija K_5 v $G - v$. Če je $q = 0$, potem so v_i , $1 \leq i \leq 5$, vse na istem licu po odstranitvi v . Zaradi leme 5.2.5 taka subdivizija zahteva vsaj 5 križanj, kar je protislovje s predpostavko o največ 4 križanjih. \square

Trditev 5.5.3. $q \neq 1$.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da $q = 1$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je prekrizana povezava vv_1 .

Pot $v_2 - v_4$ mora križati poti $v_1 - v_3$ in $v_3 - v_5$. Ker je vsaka povezava križana največ enkrat, v_2v_4 ni povezava.

Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz $G - v$ z identifikacijo v_2 in v_4 v novo točko v' . Zaradi leme 5.2.8 G' ni 5-obarvljiv. Sedaj ima G' največ tri križanja, saj smo skupaj z v odstranili prekrizano povezavo vv_1 . Torej zaradi minimalnosti G graf G' vsebuje podgraf H , ki je izomorfen K_6 . Poleg tega mora H vsebovati v' , saj G ne vsebuje K_6 . Ker ima G' le tri križanja, lahko uporabimo lemo 5.2.4. Naj bosta u_1 in u_2 točki v H , ki skupaj z v' tvorita trikotno lice in naj bodo u_3, u_4 in u_5 ostale točke, ki tvorijo drugo trikotno lice. Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da je $u_3u_4u_5$ znotraj $v'u_1u_2$ kot na sliki 5.6(A).

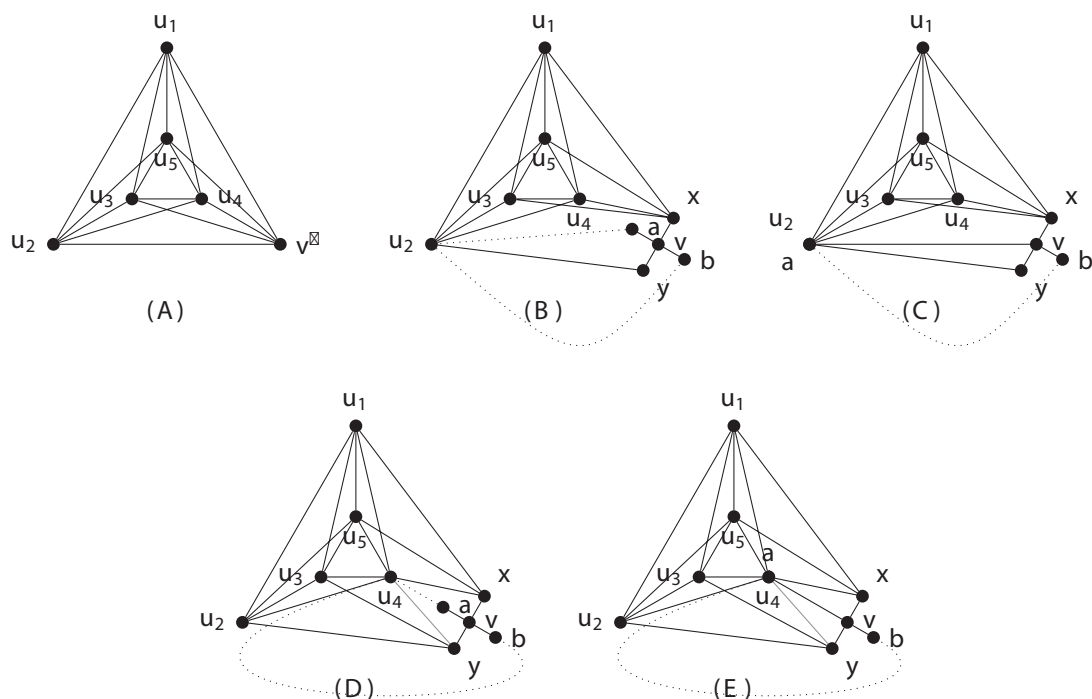
Oglejmo si sedaj situacijo v G . Namesto, da bi obravnavali mnoge rotacije grafa K_6 , raje fiksiramo K_6 in poskušamo raziskovati možne pozicije za v in njene sosede. Sosedni točke v , ki smo ju identificirali, označimo z x in y (i.e. $\{v_2, v_4\} = \{x, y\}$). Naj bosta a in b drugi dve sosedi točke v , kjer va in vb nista prekrizani ($\{a, b\} = \{v_3, v_5\}$). Poleg tega predpostavimo, da je vrstni red okoli v nasproti urinemu kazalcu enak x, a, y, b . Upoštevajmo, da lahko točko v_1 vstavimo kamorkoli v zaporedje.

Ena od identificiranih točk, recimo x , je sosedna vsaj dvema točkama iz $\{u_3, u_4, u_5\}$.

- 1) Predpostavimo, da je x sosedna u_3, u_4 in u_5 . Ker G nima K_6 , x ni sosedna neki točki v $\{u_1, u_2\}$, recimo u_2 . Torej je $yu_2 \in E$.

Točka a je bodisi znotraj u_2yvx ali pa je u_2 . Glej sliko 5.6(B) in (C). Pot $a - b$ (predstavljena kot črtkana črta na sliki) nujno vsebuje u_2 . Ker barvi $\phi(a)$ in $\phi(b)$ alternirata na $a - b$, ta pot ne more vsebovati točk x, u_3, u_4 in u_5 . Poti $a - b$ in avb ločita x in y in obstajati morata poti $v_1 - x$ in $v_1 - y$. Torej vsaj ena od njiju mora križati pot $a - b$. Ampak nobeno od štirih križanj ni na voljo za to, kar je protislovje.

- 2) Privzemimo sedaj, da je x sosedna le dvema točkama izmed $\{u_3, u_4, u_5\}$, recimo u_4 in u_5 . Potem je u_3 sosedna z y . (Morda sta sosedni tudi u_4 in y .) Pot $a - b$ mora

Slika 5.6: K_6 , kjer identificiramo dve sosedi točke v .

skozi u_4 in nato skozi u_1 ali u_2 . Ne more skozi u_3 ali u_5 , ker barvi na poti alternirata. Glej sliko 5.6(D) in (E).

Pot $x - y$ mora križati $a - b$. Torej $x - y$ poteka skozi u_3y in $a - b$ skozi u_4u_2 ali pa $x - y$ poteka skozi xu_5 in $a - b$ skozi u_4u_1 . V obeh primerih mora ena od poti $v_1 - x$ in $v_1 - y$ križati $a - b$. Vendar križanj nimamo več na voljo.

To zaključuje dokaz trditve 5.5.3. □

Trditev 5.5.4. $q \neq 2$.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da je $q = 2$.

Najprej dokažimo naslednjo izjavo, ki jo bomo večkrat uporabili.

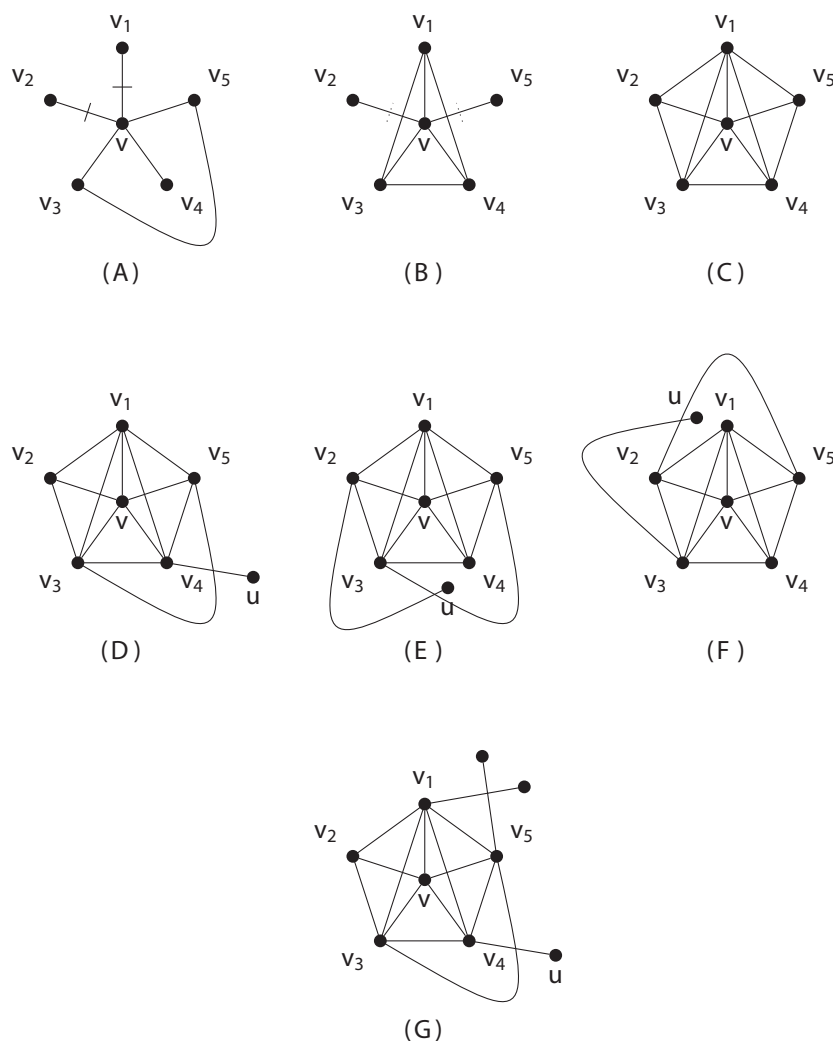
Izjava Naj bosta x in y dve sosedi točke v . Potem sta x in y sosedna, če velja eno od naslednjega:

- vx in vy nista prekrížani,
- $\{x, y\}$ je vsebovana v gruči nekega križanja.

Opazimo, da ima $G - v$ največ dve križanji. Predpostavimo, da x in y nista sosedni. Če vx in vy nista prekrížani, lahko identificiramo x in y vzdolž xvy , ne da bi dodali novo križanje. Če je $\{x, y\}$ vsebovana v gruči nekega križanja, lahko identificiramo x in y vzdolž povezav tega križanja, ne da bi dodali novo križanje. Torej ima $(G - v)/\{x, y\}$ v

obeh primerih ravninsko risbo z največ dvema križanjsoma. Potem lema 5.2.8 in izrek 5.4.1 vodita v protislovje. To dokazuje našo izjavo.

Predpostavimo, da sta prekrížani povezavi zaporedni, recimo vv_1 in vv_2 . Zaradi izjave zgoraj obstaja povezava v_3v_5 . Glej sliko 5.7(A). Če v_3v_5 ni prekrížana ali pa križa vv_1 ali vv_2 , potem je cikel vv_3v_5 regularen, kar nasprotuje lemi 5.2.9. Če v_3v_5 križa druga povezava, potem cikel vv_3v_5 nasprotuje lemi 5.2.10. Torej lahko od sedaj naprej predpostavimo, da prekrížani povezavi nista zaporedni, recimo vv_2 in vv_5 .



Slika 5.7: Dve prekrížani povezavi.

Zaradi izjave zgoraj obstajajo povezave v_1v_3 , v_1v_4 in v_3v_4 . Če v_1v_3 ni prekrížana, je trikotnik vv_1v_3 ločevalen, saj sta v_2 in v_4 na nasprotnih straneh. To nasprotuje lemi 5.2.9. Če je v_1v_3 prekrížana, jo lahko ponovno narišemo vzdolž poti v_1vv_3 z enim križanjem z vv_2 . Simetrično lahko privzamemo, da v_1v_4 križa vv_5 . Glej sliko 5.7(B).

Zaradi izjave zgoraj je $\{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_5v_1\} \subset E(G)$. Glej sliko 5.7(C).

Naj bosta $C = \{c_1c_2, c_3c_4\}$ in $D = \{d_1d_2, d_3d_4\}$ tisti dve križanji, ki nimata točke v v njunih gruĉah. Zaradi lažje obravnave bomo malo zlorabili notacijo in s C (oziroma D)

označili tako križanje kot tudi njegovo gručo. Za $X \in \{C, D\}$ naj bo $a(X) := |X \cap N(v)|$. Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da je $a(C) \leq a(D)$.

Točka u je *kandidat*, če ni sosedna točki v . Ne obstaja kandidat u , ki bi bil v C in D , saj bi bila $\{u, v\}$ sicer stabilno pokritje križanj. Prav tako ne obstajata nesosedna kandidata $c \in C$ in $d \in D$, saj bi bila $\{v, c, d\}$ sicer stabilno pokritje križanj.

Privzemimo, da je $a(D) = 4$. Točka v_1 ne more biti v D , ker je že povezana z vsemi ostalimi sosedi točke v s povezavami izven D . Torej je $D = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Ampak zaradi trditve zgoraj obstaja povezava v_2v_5 . Torej $N(v) \cup \{v\}$ inducira K_6 , kar je protislovje. Torej velja $a(C) \leq a(D) \leq 3$.

Predpostavimo sedaj, da $X \in \{C, D\}$ ne inducira K_4 . Potem dve točki x_1 in x_2 v X nista sosedni. Povezavo x_1x_2 lahko dodamo in jo narišemo vzdolž povezav križanja in s tem ne naredimo novih križanj. Torej zaradi izbire G dobljeni graf $G \cup x_1x_2$ vsebuje K_6 . Ker ima K_6 prekrizno število 3, mora uporabiti eno od križanj, ki vsebuje v v svoji gruči. Torej v pripada K_6 in je tako ta K_6 induciran z $\{v\} \cup N(v)$. V tem primeru se povezavi v_2v_4 in v_3v_5 križata in tako tvorita C ali D , kar pa ni mogoče, saj je $a(C) \leq a(D) \leq 3$.

Torej C in D inducirata K_4 . To pa pomeni, da kandidati v $C \cup D$ inducirajo poln graf. To pomeni, da jih je največ pet. Ker $C \cap D$ ne vsebuje nobenega kandidata, velja $a(C) + a(D) \geq 3$ in tako $2 \leq a(D) \leq 3$.

Privzemimo, da je $a(D) = 2$ in zato $1 \leq a(C) \leq 2$. Potem C (oz. D) vsebuje množico C' (oz. D') dveh kandidatov. Vse točke v C' so sosedne vsem točkam v D' . Ker pa obe množici C in D vsebujeta točko iz $N(v)$, lahko vse te povezave med množicama narišemo le z dodatnim križanjem, kar pa je protislovje.

Torej je $a(D) = 3$.

Torej ima povezava iz D svoji točki v $N(v)$ in je zato ena od v_2v_5 , v_2v_4 ali v_3v_5 . Naj bo u enolično določeni kandidat v D .

Najprej privzemimo, da je $v_1 \in D$. Potem je povezava v_1u v D . Še več, C mora biti na poteh $v_2 - v_4$ in $v_3 - v_5$. Ker so povezave križane največ enkrat, je $D = \{v_1u, v_2v_5\}$. Naj bo w kandidat v C . Potem je w zunaj cikla vv_2v_5 . Ampak edina soseda točke v_1 zunaj tega cikla je u , ki pa je različna od w , ker nimata križanji C in D skupnega kandidata. Torej je $\{w, v_1\}$ stabilno pokritje križanj in s tem protislovje z lemo 5.2.7.

Sledi, da je $v_1 \notin D$.

Simetrično lahko privzamemo, da je D enak ali $\{v_3v_5, v_4u\}$ (slika 5.7(D)) ali $\{v_3v_5, v_2u\}$ (slika 5.7(E)) ali pa $\{v_2v_5, v_3u\}$ (slika 5.7(F)). Drug in tretji primer nasprotujeta lemi 5.2.10 s ciklom $v_3v_4v_5$ v drugem oziroma $v_1v_2v_5$ v tretjem primeru.

Torej velja $D = \{v_3v_5, v_4u\}$.

Množica $\{v_2, v_4\}$ je stabilna in pokriva tri križanja različna od C . Torej $\{v_2, v_4\}$ nima preseka s C , saj bi sicer bila stabilno pokritje križanj. Torej je $C \cap N(v) \subset \{v_1, v_3, v_5\}$. Povezava v_1v_5 ni prekrižana, saj bi jo sicer lahko ponovno narisali vzdolž povezav križanja $\{vv_5, v_1v_4\}$ in s tem dobili risbo grafa G z manj križanji. Dalje v_1v_3 in v_3v_5 nista v C , ker sta v nekem drugem križanju. Tako je $a(C) \leq 2$.

Naj bo B množica kandidatov v C . Spomnimo se, da so vse točke v B sosedne točki u . Dalje je vsaka točka $b \in B$ sosedna točki v $\{v_2, v_4\}$, saj bi sicer $\{v_2, v_4, b\}$ bila stabilno pokritje križanj. Vendar sta v_4 in u ločeni z $v_3v_4v_5$, torej so vse točke v B sosedne točki v_2 . Sedaj je graf, induciran s povezavami med B in $\{u, v_2\}$, poln dvodelen graf. Poleg tega njegova inducirana risba nima križanj in točke vsake particije so v skupnem licu. Torej zaradi leme 5.2.6 velja $|B| \leq 2$.

Tako je $a(C) = 2$.

Spomnimo se, da je $C \cap N(v) \subset \{v_1, v_3, v_5\}$. Predpostavimo $C \cap N(v) = \{v_1, v_3\}$. Sklenjena krivulja, ki jo tvorijo pot v_3vv_1 in dve "polpovezavi", ki povezujeta v_1 z v_3 v C , ločuje v_2 in u . Potem točke v B ne morejo biti sosedne hkrati z obema u in v_2 , kar je protislovje. Podobno dobimo protislovje, če je $C \cap N(v) = \{v_3, v_5\}$. Tako lahko privzamemo, da je $C \cap N(v) = \{v_1, v_5\}$. Ampak potem bi povezovanje točk v B s točkama $\{v_2, v_4\}$ zahtevalo še eno križanje. Glej sliko 5.7(G).

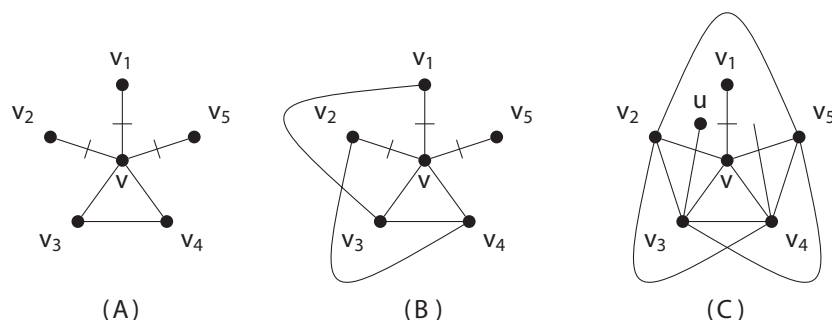
To zaključuje dokaz trditve 5.5.4. □

Trditev 5.5.5. $q \neq 3$.

Dokaz. Predpostavimo, da je $q = 3$.

Naj bo C gruča križanja, ki ne vsebuje točke v . Ne vsebuje kandidata u , saj bi bila sicer množica $\{u, v\}$ stabilno pokritje križanj. Torej je $C \subset N(v)$.

Najprej predpostavimo, da so tri prekrížane povezave, sosedne z v , zaporedne, recimo, da so prekrížane povezave vv_1, vv_2 in vv_5 . Po trditvi zgoraj obstaja povezava v_3v_4 (glej sliko 5.8(A)). Do simetrije natančno je gruča C ena od naslednjih treh množic $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ali $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.



Slika 5.8: Tri zaporedne prekrížane povezave.

- $C = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Potem povezavi v C nista v_1v_4 in v_2v_3 , ker bi ju bilo nemogoče narisati tako, da bi obe bili prekrížani le enkrat. Torej je $C = \{v_1v_3, v_2v_4\}$. Jordanska krivulja, ki jo tvorijo pot v_1vv_4 in dve "polpovezavi", ki povezujeta v_1 z v_4 v C ločuje $\{v_2, v_3\}$ in v_5 . Glej sliko 5.8(B). Prekrížana je le enkrat (na povezavi v_1v), čeprav potrebujemo dve križanji, eno za vsako od disjunktnih poti $v_2 - v_5$ in $v_3 - v_5$, kar je protislovje.
- $C = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Potem povezavi v C nista v_2v_3 in v_4v_5 , ker bi ju bilo nemogoče narisati tako, da bi obe bili prekrížani le enkrat. Torej je $C = \{v_2v_4, v_3v_5\}$. Zaradi zgornje izjave obstajajo povezave v_2v_3 , v_4v_5 in v_2v_5 . Trikotnik vv_2v_3 ima le eno prekrížano povezavo. Torej zaradi leme 5.2.10 ni ločevalen. Tako je njegova notranjost prazna in je povezava, ki križa vv_2 , incidenčna z v_3 . Naj bo u druga točka te povezave. Zaradi simetrije je notranjost vv_4v_5 prazna in je povezava, ki križa vv_5 , povezava v_4t za neko točko t .

Če je $u = t = v_1$, potem zaradi zgornje izjave obstajata povezavi v_1v_2 in v_1v_5 . Torej $N(v) \cup \{v\}$ inducira K_6 , kar je protislovje. Torej lahko brez izgube za splošnost privzamemo, da je $u \neq v_1$. Glej sliko 5.8(C).

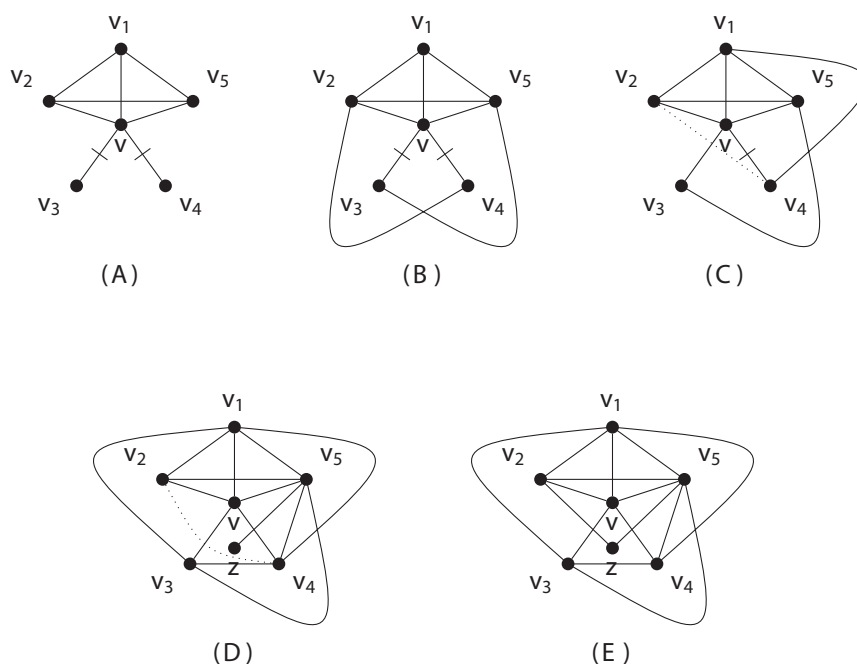
Notranjosti ciklov vv_2v_3 , vv_3v_4 in $v_2v_3v_4$ ne vsebujejo točk po lemi 5.2.9. Torej je v_3 točka stopnje pet. Poleg tega njeni sosedi u in v nista sosedni in ima $(G - v_3)/\{u, v\}$ največ dve križanji. Potem izrek 5.4.1 in lema 5.2.8 vodita v protislovje.

- $C = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Križanje C ni niti $\{v_1v_2, v_4v_5\}$ niti $\{v_1v_5, v_2v_4\}$, ker bi bilo te povezave nemogoče narisati tako, da bi obe bili prekržani le enkrat. Torej je $C = \{v_1v_4, v_2v_5\}$. Po izjavi zgoraj je $v_2v_4 \in E(G)$. Potem trikotnik vv_2v_4 nasprotuje lemi 5.2.10.

Sedaj predpostavimo, da tri prekržane povezave, incidentne z v , niso zaporedne. Brez izgube za splošnost privzamemo, da so te povezave vv_1 , vv_3 in vv_4 .

Po zgornji izjavi obstaja v_2v_5 . Če v_2v_5 ni prekržana, je vv_2v_5 ločevalen trikotnik, kar nasprotuje lemi 5.2.9. Torej je v_2v_5 prekržana. Ne more križati vv_3 niti vv_4 , saj bi bil sicer vv_2v_5 regularen trikotnik, kar nasprotuje lemi 5.2.9. Poleg tega v_2v_5 ne more biti v C , saj bi sicer vv_2v_5 nasprotoval lemi 5.2.10. Torej v_2v_5 križa vv_1 .

Po zgornji izjavi obstajata povezavi v_1v_2 in v_1v_5 . Poleg tega nista prekržani, saj bi ju sicer lahko ponovno narisali vzdolž povezav križanja $\{vv_1, v_2v_5\}$ in tako dobili risbo grafa G z manj križanji. Glej sliko 5.9(A).



Slika 5.9: Tri nezaporedne prekržane povezave.

Poglejmo poti $v_2 - v_4$ in $v_3 - v_5$. Če se križata, se morata križati skozi C . Ker velja $C \subset N(v)$, sta poti $v_2 - v_4$ in $v_3 - v_5$ v resnici povezavi. Glej sliko 5.9(B). Ampak v_2v_5 lahko ponovno narišemo vzdolž povezav iz C in tako dobimo risbo grafa G z manj križanji.

Privzemimo sedaj, da se $v_2 - v_4$ in $v_3 - v_5$ ne križata. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da $v_2 - v_4$ križa vv_3 . Poti $v_1 - v_4$ in $v_3 - v_5$ se križata. To morata narediti v C in tako sta v_1v_4 in v_3v_5 obe le povezavi. Glej sliko 5.9(C). Po zgornji izjavi obstajajo povezave v_1v_3 , v_3v_4 in v_4v_5 .

Če obstaja tudi povezava v_2v_4 , zgornja izjava pravi, da obstaja tudi povezava v_2v_3 . Potem $N(v) \cup \{v\}$ inducira K_6 , kar je protislovje. Torej je $v_2v_4 \notin E(G)$.

Zaradi leme 5.2.10 cikel vv_4v_5 ni ločevalen. Zato njegova notranjost ne vsebuje točke in je vv_4 križana s povezavo iz točke v_5 . Naj bo z druga točka te povezave. Ker je vsaka povezava križana največ enkrat, je z znotraj vv_3v_4 . Glej sliko 5.9(D).

Naj bo ab povezava, ki križa vv_3 . Množici $\{v_5, a\}$ in $\{v_5, b\}$ nista stabilni, saj bi sicer bili stabilni pokritji križanj. Torej obstajata povezavi v_5a in v_5b . Tako je $ab = v_2z$. Glej sliko 5.9(E). Sedaj ne obstaja povezava v_1z in zato je $\{v_1, z\}$ stabilno pokritje križanj, kar nasprotuje lemi 5.2.7.

To zaključuje dokaz trditve 5.5.5. □

Trditev 5.5.6. $q \neq 4$.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da je $q = 4$. Potem je $\{v\}$ stabilno pokritje križanj, kar je protislovje. □

Če združimo trditve 5.5.2, 5.5.3, 5.5.4, 5.5.5 in 5.5.6, dobimo protislovje. To dokazuje izrek 5.5.1. □

5.6 Bodoče raziskovanje

5.6.1 Razširitev rezultatov

Izrek 5.4.1 trdi, da če lahko graf naredimo ravninski z odstranitvijo največ $2k$ povezav, je ta graf $(4 + k)$ -obarvljiv. Mnenja smo, da ta meja ni točna. Zato se naravno postavlja naslednje vprašanje.

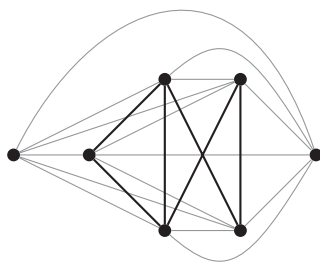
Problem 5.6.1. *Katero je tisto največje kromatično število vseh grafov, ki vsebujejo množico največ k povezav, katerih odstranitev naredi graf ravninski?*

Označimo ta maksimum z $g(k)$. Jasno je $g(1) = g(2) = 5$ zaradi izreka 5.4.1. Ker K_5 ni ravninski, velja $g(3) = 6$ po izreku 5.4.1 in zaradi $cr(K_6) = 3$. Prav tako smo mnenja, da je optimalna vrednost za večje vrednosti k podana s polnim grafom. Zelo verjetno je, da je poln graf $K_{g(k)}$ edini $g(k)$ -kritičen graf, ki ga lahko naredimo ravninskega z odstranitvijo k povezav. V posebnem je to res za primera $k = 6$ in $k = 7$. Res je po trditvi 5.2.1 potrebno odstraniti vsaj 6 povezav, da K_7 postane ravninski in prav tako obstaja množica 6 povezav, katerih odstranitev naredi graf K_7 ravninski. Glej sliko 5.10.

Izrek 5.6.2. *Naj bo G graf s kličnim številom največ 6. Če obstaja množica največ 7 povezav, katerih odstranitev naredi graf ravninski, je G 6-obarvljiv.*

Dokaz. Za dokaz tega izreka bomo pokazali, da je K_7 edini 7-kritičen graf G , za katerega obstaja množica 7 povezav, katerih odstranitev naredi graf G ravninski.

Znan rezultat Diraca [22] pravi, da za r -kritičen graf G , ki ni K_r , velja $2|E(G)| \geq (r - 1)|V(G)| + r - 3$. V posebnem za $r = 7$ velja $|E(G)| \geq 3|V(G)| + 2$. Torej moramo zaradi trditve 5.2.1 odstraniti vsaj 8 povezav, da graf postane ravninski. □



Slika 5.10: Graf K_7 in množica povezav (krepke povezave) katerih odstranitev naredi graf ravninski.

Eden prvih problemov, ki jih je potrebno rešiti, je domneva, ki razširi oba izreka 5.1.6 in 5.1.4.

Domneva 5.6.3. *Vsak graf s ključnim številom največ 5, ki vsebuje množico največ štirih povezav, katerih odstranitev naredi graf ravninski, je 5-obarvljiv.*

5.6.2 Kritični grafi in obarvljivost

Iz trditve 5.2.1 je preprosto izpeljati, da za $r \geq 8$ obstaja le končno mnogo r -kritičnih grafov, ki jih lahko vložimo v določeno ploskev. Kot je pokazal Thomassen v [71], je število 7-kritičnih grafov, ki jih lahko vložimo v določeno ploskev, prav tako končno. Thomassen [69] je nato dokončal rezultat, ko je dokazal, da je število 6-kritičnih grafov, ki jih lahko vložimo v določeno ploskev Σ , končno. To v posebnem pomeni, da je problem $(r - 1)$ -obarvljivosti grafov vložljivih v Σ odločljiv v polinomskem času za vsak $r \geq 6$. Po drugi strani pa je določitev 3-obarvljivosti NP-poln problem za ravninske grafe (glej [34]) in tako tudi za grafe, ki so vložljivi v poljubno drugo ploskev. Kompleksnost za 4-obarvljivost je še vedno odprt problem.

Problem 5.6.4. *Imejmo poljubno določeno ploskev. Ali obstaja polinomski algoritem, ki odloči ali je graf, ki je vložljiv v to ploskev, 4-obarvljiv?*

Odgovor na problem 5.6.4 je znan le za sfero z izrekom o štirih barvah. Pozitivnega odgovora ne moremo dobiti na enak način kot za $r - 1 \geq 5$, saj obstaja neskončno mnogo 5-kritičnih grafov, kot je dokazal Fisk [32].

Če velja $cr(G) = k$, je G vložljiv v \mathbb{S}_k in \mathbb{N}_k , kjer je \mathbb{S}_k orientabilna ploskev reda k in \mathbb{N}_k neorientabilna ploskev reda k . Torej je za vsak k in $r \geq 6$ število r -kritičnih grafov s prekriznim številom k končno in je zato problem $(r - 1)$ -obarvljivosti za grafe s prekriznim številom k odločljiv v polinomskem času. Vendar pa moramo za implementacijo takega algoritma v polinomskem času poznati seznam 6-kritičnih grafov.

Problem 5.6.5. *Naj bo $k \geq 0$. Kakšen je seznam 6-kritičnih grafov s prekriznim številom k ?*

Ko je $k \leq 3$, je ta seznam prazen in, ko je $k = 4$, je seznam enak $\{K_6\}$. Za $k = 5$ seznam vsebuje K_6 in graf na sliki 5.3. Ampak ali obstajajo še kakšni?

Podobno kot za grafe, ki so vložljivi na neko dano ploskev, je kompleksnost problema 4-obarvljivosti za grafe s prekrižnim številom k neznana.

Problem 5.6.6. *Naj bo $k \geq 1$. Ali obstaja polinomski algoritem za odločitev, ali je dan graf s prekrižnim številom k 4-obarvljiv?*

To bi bilo res, če bi obstajalo le končno mnogo 5-kritičnih grafov s prekrižnim številom k . Vendar, kot je opazil Zdeněk Dvořák, temu ni tako. Res je vsak graf, ki ga dobimo iz lihega cikla, če dodamo dve sosedni točki, ki sta sosedni vsaki drugi točki na ciklu, 5-kritičen.

5.6.3 Izberljivost

Izbira barv grafa G je funkcija L , ki vsaki točki $v \in V(G)$ priredi seznam $L(v)$ barv, ki so na voljo. L -barvanje je taka funkcija $\varphi : V(G) \rightarrow \bigcup_v L(v)$, da je $\varphi(v) \in L(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$ in $\varphi(u) \neq \varphi(v)$, če sta u in v sosedni točki v G . Če G dopušča L -barvanje, pravimo, da je L -obarvljiv. Graf G je k -izberljiv, če je L -obarvljiv za vsako izbiro barv L , kjer velja $|L(v)| \geq k$ za vsako točko $v \in V(G)$. Izbirno število (oz. seznamsko kromatično število) grafa G označimo z $ch(G)$ in je najmanjše število k , za katerega je G k -izberljiv.

Podobno kot za kromatično število lahko iščemo meje za izbirno število grafa z malo križanji ali pa z neodvisnimi križanji.

Thomassen [70] je pokazal, da je vsak ravninski graf 5-izberljiv. V resnici je dokazal še močnejši rezultat:

Definicija 5.6.7. *Notranja triangulacija* je tak ravninski graf, da je vsako notranje lice omejeno s trikotnikom, zunanje lice pa je cikel $F = (v_1v_2 \dots v_kv_1)$.

Izbira barv L notranje triangulacije G je *primerna*, če je:

- $|L(v_1)| = 1$ in $|L(v_2)| = 2$,
- za vsako točko $v \in V(F) \setminus \{v_1, v_2\}$: $|L(v)| \geq 3$ in
- za vsako točko $v \in V(G) \setminus V(F)$: $|L(v)| \geq 5$.

Izrek 5.6.8 (Thomassen [70]). *Če je L primerna izbira barv notranje triangulacije G , je G L -obarvljiv.*

Izrek 5.6.9. *Vsak graf s prekrižnim številom 1 je 5-izberljiv.*

Dokaz. Naj bo G graf s prekrižnim številom 1. Vzemimo ravninsko vložitev grafa G z enim križanjem $C = \{x_1y_1, x_2y_2\}$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je C na zunanjem licu. Ker lahko dodajamo povezave, lahko predpostavimo, da je zunanje lice omejeno s 4-ciklom $x_1x_2y_1y_2x_1$ in, da je $G \setminus C$ notranja triangulacija.

Naj bo L izbira barv grafa G , kjer je v vsakem seznamu vsaj 5 barv. Postavimo $c_1 \in L(x_1)$ in $c_2 \in L(x_2) \setminus \{c_1\}$. Naj bo L' izbira barv, definirana z $L'(x_1) = \{c_1\}$, $L'(x_2) = \{c_1, c_2\}$, $L'(y_i) = L(y_i) \setminus \{c_1, c_2\}$ za $i = 1, 2$ in $L'(v) = L(v)$ za vsako točko $v \in V(G) \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Potem je L' primerna izbira barv za $G \setminus C$. Torej $G \setminus C$ dopušča dobro L' -barvanje, ki je tudi L -barvanje grafa G po definiciji L' . \square

Problem 5.6.10. *Ali je vsak graf s prekrižnim številom 2 tudi 5-izberljiv?*

5.6.4 Grafi z majhnim kličnim številom ali veliko ožino

Znani Grötzschev izrek [38] pravi, da je graf brez trikotnikov (to je s kličnim številom največ 2) 3-obarvljiv. (Glej tudi [68] za kratek eleganten dokaz.) Skupaj z izrekom 5.1.4 to nakazuje, da lahko zgornje meje za kromatično število grafov, ki so skoraj ravninski (imajo malo križanj ali paroma neodvisna križanja ali pa vsebujejo malo povezav, katerih odstranitev pusti graf ravninski), znižamo, če študiramo grafe z majhnim kličnim številom.

Sedaj bomo dokazali rezultat, analogen izreku 5.1.5 za grafe brez K_4 .

Izrek 5.6.11. *Graf brez K_4 , ki ima risbo v ravnini, kjer nobeni dve križanji nista odvisni, je 4-obarvljiv.*

Dokaz. Vzemimo risbo grafa G , ki je brez K_4 in kjer nobeni dve križanji nista odvisni. Naj bodo $C_i = \{u_i v_i, x_i y_i\}$, $i \in I$, križanja. Ker je G brez K_4 , lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da ne obstaja povezava $u_i x_i$ za vsak $i \in I$. Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G , če identificiramo u_i in x_i za vsak $i \in I$ v novo točko z_i . Graf G' je ravninski. Torej ima G' po izreku o štirih barvah dobro 4-barvanje c' . Definirajmo c z $c(x_i) = c(y_i) = c'(z_i)$ za vsak $i \in I$ in $c(v) = c'(v)$ za vsako točko $v \in V(G) \cap V(G')$. Ker za vsak $i \in I$, x_i in u_i nista sosedni, je c dobro 4-barvanje grafa G . \square

Opazimo, da je izrek 5.6.11 točen, saj obstajajo ravninski grafi brez K_4 , ki niso 3-obarvljivi. Vendar ali ga lahko izboljšamo za grafe brez trikotnikov ali pa obstaja graf brez trikotnikov z risbo v ravnini, kjer nobeni dve križanji nista odvisni in ni 3-obarvljiv?

Za grafe brez trikotnikov lahko pokažemo rezultat, ki je analogen izreku 5.1.6.

Izrek 5.6.12. *Če graf brez trikotnikov vsebuje množico povezav (največ) štirih povezav, katerih izbris pusti graf ravninski, je 4-obarvljiv.*

Dokaz. Naredimo indukcijo po številu točk n grafa G , ki nima trikotnikov. Rezultat drži trivialno za $n \leq 4$. Graf brez trikotnikov na n točkah ima največ $2n - 4$ povezav. Torej ima G največ $2n$ povezav. Torej ima G bodisi točko v stopnje največ tri bodisi pa je 4-regularen.

V prvem primeru po indukcijski predpostavki velja, da je $\text{ch}(G - v) = 4$. Naj bo L izbira barv s sezname velikosti vsaj 4 za točke $V(G)$. Graf $G - v$ ima L -barvanje c , ki ga lahko razširimo na ves G tako, da v priredimo barvo, ki ne nastopa na nobenem od njenih sosedov. Torej je G 4-izberljiv.

V drugem primeru pa je G brez trikotnikov in ne vsebuje K_5 in tako po Brooksovem izreku za seznamsko barvanje velja $\text{ch}(G) \leq 4$. \square

Za C_3 in K_4 in splošneje za katerikoli graf ali družino grafov \mathcal{F} lahko vprašamo:

Problem 5.6.13. *Katero je tisto najmanjše celo število $f_{\mathcal{F}}(k)$ (oz. $g_{\mathcal{F}}(k)$), da bo vsak graf G brez \mathcal{F} in prekrižnim številom največ k nujno $f_{\mathcal{F}}(k)$ -obarvljiv (oz. $g_{\mathcal{F}}(k)$ -izberljiv)?*

V posebnem za $\mathcal{C}_g = \{C_i | i = 3, \dots, g - 1\}$, to je družino ciklov dolžine največ g , so grafi brez \mathcal{C}_g kar grafi z ožino vsaj g . Naj bo $f_g(k) = f_{\mathcal{C}_g}(k)$. Trivialno velja $f_g(k) \leq f_h(k)$, če $g \geq h$. V posebnem velja za vsak $g \geq 3$, da je $f_g(k) \leq O(k^{1/4})$, ker je $f_3(k) = f(k) = O(k^{1/4})$. Erdős [25] je pokazal, da obstajajo grafi s poljubno veliko ožino in kromatičnim številom. Torej za poljuben g , $f_g(k)$ gre proti neskončnosti, ko gre k proti neskončnosti.

Grötzschev graf je brez trikotnikov, ima prekrizno število 5 in kromatično število 4, torej je $f_3(5) \geq 4$. Thomas in Walls [67] sta dokazala, da je vsak graf z ožino vsaj pet, ki ima vložitev v Kleinovo steklenico, 3-obarvljiv. Ker je vsak graf s prekriznim številom največ 2 vložljiv v Kleinovo steklenico, sledi, da je vsak graf z ožino vsaj pet in prekriznim številom največ 2 nujno 3-obarvljiv.

Jensen in Royle [46] sta konstruirala graf brez K_4 s prekriznim številom največ 6 in kromatičnim številom 5, torej velja $f_{K_4}(6) \geq 5$.

Dokažemo lahko analog izreku 5.1.5 za grafe z veliko ožino.

Trditev 5.6.14. *Naj bo G graf z risbo v ravnini, kjer nobeni dve križanji nista odvisni.*

(i) *Če je ožina grafa G vsaj 5, potem je G 4-izberljiv.*

(ii) *Če je ožina grafa G vsaj 10, potem je G 3-izberljiv.*

Dokaz. Pokažimo, da ima G točko stopnje največ 3 (oz. največ 2), če ima G ožino vsaj 5 (oz. 10). Potem preprost sklep da želeni rezultat.

Naj bo n število točk grafa G . Ker nobeni dve križanji nista odvisni, ima G največ $n/4$ križanj. Torej obstaja taka množica F največ $n/4$ povezav, da je $G \setminus F$ ravninski. Še več, $G \setminus F$ ima ožino vsaj 5 (oz. 10) in ima tako $G \setminus F$ manj kot $\frac{10}{6}n$ (oz. $\frac{3}{4}n$) povezav. Tako ima G manj kot $\frac{23}{12}n$ (oz. n) povezav. Torej ima G točko stopnje največ 3 (oz. 2). \square

Literatura

- [1] K. I. Aardal, S. P. M. van Hoesel, A. M. C. A. Koster, C. Mannino, A. Sassano, *Models and solution techniques for frequency assignment problems*, ZIB-Report 01-40, 2001.
- [2] G. Agnarsson, R. Greenlaw, M. M. Halldórsson, *Powers of chordal graphs and their coloring*, Congr. Numer **144** (2000) 41–65.
- [3] G. Agnarsson, M. M. Halldórsson, *Coloring powers of planar graphs*, SIAM J. Discrete Math. **16** (2003) 651–662.
- [4] M. O. Albertson, *Chromatic Number, Independence Ratio, and Crossing Number*, Ars Mathematica Contemporanea **1** (2008) 1–6.
- [5] M. O. Albertson, M. Heenehan, A. McDonough, J. Wise, *Coloring graphs with given crossing patterns*, manuscript.
- [6] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colourable*, Contemporary Mathematics 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [7] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colourable. I. Discharging*, Ill. J. Math. **21** (1977) 429–490.
- [8] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colourable. II. Reducibility*, Ill. J. Math. **21** (1977) 491–567.
- [9] A. S. Asratian, T. M. J. Dennley, R. Häggkvist, *Bipartite Graphs and Their Applications*, (1998) Cambridge University Press 75–75.
- [10] P. Bella, D. Král', B. Mohar, K. Quittnerová, *Labelling planar graphs with a condition at distance two*, Eur. J. Comb. **28** (2007) 2201-2239.
- [11] A. A. Bertossi, M. A. Bonucelli, *Code assignment for hidden terminal interference in multihop packet radio networks*, IEEE/ACM Trans. Networking **3** (1995) 441–449.
- [12] A. A. Bertossi, C. M. Pinotti, R. B. Tan, *Channel assignment with separation for interference avoidance in wireless networks*, IEEE Trans. Parallel Distrib. Sys. **14** (2003) 222–235.
- [13] N. Biggs, E. Lloyd, R. Wilson, *Graph theory*, Oxford university press, Oxford (1986) 1736-1936.

- [14] O. V. Borodin, *On acyclic colorings of planar graphs*, Discrete Math. **25** (1979) 211–236.
- [15] O. V. Borodin, H. J. Broersma, A. Glebov, J. van den Heuvel, *Minimal degrees and chromatic numbers of squares of planar graphs (in Russian)*, Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 18, no. 4 (2001) 9–33.
- [16] O. V. Borodin, D. G. Fon-Der Flaass, A. V. Kostochka, A. Raspaud, E. Sopena, *Acyclic list 7-coloring of planar graphs*, J. Graph Theory **40** (2002) 83–90.
- [17] T. Calamoneri, *The $L(h, k)$ -labelling problem: a survey and annotated bibliography*, Comput. J. **49(5)** (2006) 585–608.
- [18] G. J. Chang, D. Kuo, *The $L(2, 1)$ -labelling problem on graphs*, SIAM J. Discrete Math. **9(2)** (1996) 309–316.
- [19] N. Chenette, L. Postle, N. Streib, R. Thomas, C. Yeger, *Five-coloring graphs in the Klein bottle*, submitted.
- [20] D. W. Cranston, S.-J. Kim, *List-coloring the square of a subcubic graph*, J. Graph Theory **57**, (2008) 65–87.
- [21] R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, New York, 2010.
- [22] G. A. Dirac, *A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of Hadwiger*, Proc. of the London Mathematical Society **17** (1957) 161–195.
- [23] Z. Dvořák, D. Král', P. Nejedlý, R. Škrekovski, *Coloring squares of planar graphs with no short cycles*, Discrete Appl. Math. **157** (2009) 2634–2645.
- [24] Z. Dvořák, R. Škrekovski, M. Tancer, *List-colouring squares of sparse subcubic graphs*, SIAM J. Discrete Math. **22(1)** (2008) 139–159.
- [25] P. Erdős, *Graph theory and probability*, Can. J. Math. **11** (1959) 34–38.
- [26] R. Erman, F. Havet, B. Lidický, O. Pangrác, *5-colouring graphs with 4 crossings*, SIAM J. Discrete Math. **25** (2011) 401–422
- [27] R. Erman, S. Jurečič, D. Král', K. Stopar, N. Stopar, *Optimal real number graph labelings of a subfamily of kneser graphs*, SIAM J. Discrete Math. **23** (2009) 1372–1381.
- [28] R. Erman, R. Škrekovski, *Choosability of the square of a planar graph with maximum degree four*, submitted.
- [29] R. Erman, R. Škrekovski, *Linear colouring of planar graphs with prescribed girth*, IMFM Preprint series **49** (2011).
- [30] L. Esperet, M. Montassier, A. Raspaud, *Linear choosability of graphs*, DMTCS Proc. AE **14** (2005) 99–104.

- [31] J. Fiala, J. Kratochvíl, T. Kloks, *Fixed-parameter complexity of λ -labellings*, Discrete Appl. Math., **113**(1) (2001) 59–72.
- [32] S. Fisk, *The non-existence of colorings*. J. Comb. Theory, Series B **24** (1978) 247–248.
- [33] D. A. Fotakis, S. E. Nikolettseas, V. G. Papadopoulou, P. G. Spirakis, *NP-Completeness results and efficient approximations for radiocoloring in planar graphs*, in: B. Rován, ed., Proc. MFCS'00, LNCS Vol. **1893**, Springer, 2000, 363–372.
- [34] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif. (1979).
- [35] D. Gonçalves, *On the $L(p, 1)$ -labeling of graphs*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. AE (2005) 81–86.
- [36] J. R. Griggs, X. T. Jin, *Real number graph labellings with distance conditions*, SIAM J. Discrete Math. **20**(2) (2006) 302–327.
- [37] J. R. Griggs, R. K. Yeh, *Labelling graphs with a condition at distance 2*, SIAM J. Discrete Math. **5** (1992) 586–595.
- [38] H. Grötzsch, *Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. **8** (1959) 109–120.
- [39] B. Grünbaum, *Acyclic colorings of planar graphs*, Isr. J. Math. **41** (1973) 390–408.
- [40] W. K. Hale, *Frequency assignment: Theory and applications*, Proceedings of the IEEE **68** (1980) 1497–1514.
- [41] F. Havet, *Choosability of the square of planar subcubic graphs with large girth*, Discrete Math. **309** (2009) 3553–3563.
- [42] F. Havet, J. van den Heuvel, C. McDiarmid, B. Reed, *List colouring squares of planar graphs*, INRIA research report.
- [43] J. van den Heuvel, S. McGuinness, *Coloring the square of a planar graph*, J. Graph Theory **42** (2003) 110–124.
- [44] T. J. Hetherington, D. R. Woodall, *List-colouring the square of a K_4 -minor free graph*, Discrete Math. **308** (2008) 4037–4043.
- [45] H. Hind, M. Molloy, B. Reed, *Coloring a graph frugally*, Combinatorica **17** (1997) 469–482.
- [46] T. Jensen, G. F. Royle, *Small Graphs with chromatic number 5: A computer search*, J. Graph Theory **19** (1995) 107–116.
- [47] X. T. Jin, R. K. Yeh, *Graph distance-dependent labelling related to code assignment in computer networks*, Nav. Res. Logist. **52** (2005) 159–164.

- [48] T. K. Jonas, *Graph coloring analogues with a condition at distance two: $L(2,1)$ -labelings and list λ -labelings*, Ph.D. Thesis, University of South Carolina, (1993).
- [49] J.-H. Kang, *$L(2,1)$ -labelling of 3-regular Hamiltonian graphs*, submitted.
- [50] K. Kawarabayashi, D. Král', J. Kynčl, B. Lidický, *6-critical graphs on the Klein bottle*, SIAM J. Discrete Math. **23** (2009) 372–383.
- [51] A. V. Kostochka, *Acyclic 6-coloring of planar graphs*, Metody Diskretn. Anal. **28** (1976) 40–56.
- [52] A.V. Kostochka, D.R. Woodall, *Choosability conjectures and multicircuits*, Discrete Math. **240** (1-3) (2001) 123–143.
- [53] D. Král', *An exact algorithm for channel assignment problem*, Discrete Appl. Math. **145(2)** (2004) 326–331.
- [54] D. Král', L. Stacho, *Coloring plane graphs with independent crossings*, J. Graph Theory **64** (2010) 184–205.
- [55] D. Král', R. Škrekovski, *A theorem about channel assignment problem*, SIAM J. Discrete Math. **16(3)** (2003) 426–437.
- [56] K.-W. Lih, W. F. Wang, X. Zhu, *Coloring the square of a K_4 -minor free graph*, Discrete Math. **269** (2003) 303–309.
- [57] C. McDiarmid, *On the span in channel assignment problems: bounds, computing and counting*, Discrete Math. **266** (2003) 387–397.
- [58] J. Mitchem, *Every planar graph has an acyclic 8-coloring*, Duke Math. J. **14** (1974) 177–181.
- [59] M. Molloy, M. R. Salavatipour, *A bound on the chromatic number of the square of a planar graph*, J. Comb. Theory Ser. B **94** (2005) 189–213.
- [60] M. Molloy, M. R. Salavatipour, *Frequency channel assignment on planar networks*, in: R. H. Möhring, R. Raman, eds., Proc. ESA'02, LNCS Vol. **2461**, Springer, 2002, 736–747.
- [61] M. Montassier, A. Raspaud, *A note on 2-facial coloring of plane graphs*, Inf. Process. Lett. **98(6)** (2006) 211–266.
- [62] B. Oporowski, D. Zhao, *Coloring graphs with crossing*, Discrete Math. **309** (2009) 2948–2951.
- [63] A. Raspaud, W. Wang, *Linear coloring of planar graphs with large girth*, Discrete Math. **309** (2009) 5678–5686.
- [64] F. S. Roberts, *T -colorings of graphs: recent results and open problems*, Discrete Math. **93** (1991) 229–245.

- [65] F. S. Roberts, *Working group agenda of DIMACS/DIMATIA/Renyi working group on graph colorings and their generalizations* (2003) posted at <http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/GraphColor/main.html>.
- [66] M. Schaefer, *personal communication to M. O. Albertson*.
- [67] R. Thomas, B. Walls, *Three-coloring Klein bottle graphs of girth five*, J. Comb. Theory Ser. B **92** (2004) 115–135.
- [68] C. Thomassen, *A short list colour proof of Grötzsch's theorem*, J. Comb. Theory Ser. B **88** (2003) 189–192.
- [69] C. Thomassen, *Color-critical graphs on a fixed surface*, J. Comb. Theory Ser. B **70** (1997) 67–100.
- [70] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Comb. Theory Ser. B **62** (1994) 180–181.
- [71] C. Thomassen, *Five-coloring graphs on the torus*, J. Comb. Theory Ser. B **62** (1994) 11–33.
- [72] C. Thomassen, *The square of a planar cubic graph is 7-colorable*, manuscript, 2006.
- [73] V. G. Vizing, *Vertex colorings with given colors* (in Russian), *Metody Diskretn. Anal.* **29** (1976) 3–10.
- [74] G. Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, Technical Report, University of Dortmund, 1977.
- [75] P. Wernicke, *Über den kartographischen Vierfarbensatz*, *Math. Ann.* **58** (1904) 413–426.
- [76] S. A. Wong, *Colouring graphs with respect to distance*, M.Sc. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, (1996).
- [77] R. Yuster, *Linear coloring of graphs*, *Discrete Math.* **185** (1998) 293–297.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Riste Škrekovskemu za njegovo pomoč in vzpodbudo pri svojem raziskovalnem delu. Posebej hvaležen sem tudi družini, prijateljem in vsem, ki so me vseskozi podpirali in mi stali ob strani.

Izjava

Podpisani Rok Erman izjavljam, da sem avtor disertacije z naslovom *Barvanja ravninskih in sorodnih družin grafov*.

Ljubljana, september 2012

Rok Erman