Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Matematika – teoretična smer (UNI)

Rok Erman

RAZDALJNA BARVANJA GRAFOV

Diplomsko delo

Ljubljana, 2007

Kazalo

Program diplomskega dela

V diplomskem delu obdelajte razdaljno barvanje grafov s poudarkom na razdaljnem realnem barvanju grafov. Za osnovo naj vam služi članek:
R. Erman, S. Jurečič, D. Král', K. Stopar, N. Stopar: Optimal real number graph labelings of a subfamily of Kneser graphs, IMFM Preprint Series (2006), 5–14.

Ljubljana, 23. maj 2007

doc. dr. R. Škrekovski

Povzetek

V tem delu bomo obravnavali realno barvanje grafov z omejitvami na razdaljah. Najprej bomo predstavili povezavo med takim barvanjem in problemom dodeljevanja frekvenc, ki je bil glavna motivacija za študij takih barvanj in izpeljali osnovno definicijo. Razdaljna barvanja bomo povezali z navadnim barvanjem točk in barvanjem potence grafa. Ogledali si bomo lastnosti lambda funkcij in tako spoznali nekaj metod za njihovo lažje določanje. Določili bomo lambda funkcije za poti, cikle, kolesa in posebno poddružino Kneserjevih grafov. Na koncu predstavimo še rezultate za drevesa in mreže.

In this thesis we deal with Real number graph labellings with distance conditions. First we present the link between this type of coloring and the frequency assignment problem, which was the main motivation for studying these labellings and derive the basic definition. Afterwards we establish the link between these labellings and normal vertex colorings and colorings of a power of a graph. We will look at the properties of lambda functions and consequently acquire some methods for their determination. Then we determine the lambda functions for paths, cycles, wheels and a subfamily of Kneser graphs. In the end we present the results for trees and lattices.

Math. Subj. Class. (2000): 05C15, 05C78, 05C05, 05C12, 05C38, 94C15

Ključne besede: barvanje grafov, realno barvanje, razdaljno barvanje, razpon, lambda funkcija, dodeljevanje frekvenc, poti, cikli, kolesa, Kneserjevi grafi, mreže, drevesa.

Keywords: graph coloring, real number graph labelling, distance labelling, span, lambda function, frequency assignment, paths, cycles, wheels, Kneser graphs, lattices, trees.

Poglavje 1

Uvod

Teorija grafov je področje diskretne matematike, ki se ukvarja z grafi, ki so strukture sestavljene iz točk in povezav. Študij grafov zajema barvanja grafov, povezanost, velikost, ravninskost in tako naprej. Za uradni začetek teorije grafov se pogosto vzameta objavi člankov Leonharda Eulerja o sedmih mostovih v Königsbergu leta 1736 in Vandermondeov članek o šahovskem problemu s konjem. Grafi so se izkazali kot odlično orodje za modeliranje mnogih problemov, ki jih srečamo v vsakdanjem in poklicnem življenju. Tako s teorijo grafov rešujemo probleme, kot so iskanje učinkovitih algoritmov v računalništvu, dodeljevanje frekvenc oddajnikom v brezžičnih omrežjih, reševanje raznih diskretnih problemov podobnih Eulerjevim mostovom, iskanje optimalnih urnikov in seveda še veliko več. Za področje so značilni problemi, ki so slišati zelo preprosti, pogosto celo tako, da jih lahko predstavimo majhnemu otroku, ki še nikoli ni slišal za disketno matematiko, pri reševanju pa se izkaže, da so problemi zelo težki. Eden takih problemov je recimo iskanje Hamiltonovega cikla v grafu, to je iskanje sklenjene poti skozi graf, ki obišče vse točke grafa. Za ta problem vemo, da je v splošnem NP-težak, kar je seveda zelo daleč od njegove preproste formulacije. Drug zelo kompleksen problem, ki je bil nedavno rešen šele s pojavom dovolj zmogljivih računalnikov, je tako imenovani problem štirih barv oz. izrek o štirih barvah, ki pravi, da se da poljuben zemljevid pobarvati s štirimi barvami tako, da nobeni dve sosednji državi nista pobarvani z isto barvo.

Eno večjih in pomembnejših področij teorije grafov je barvanje grafov, kjer poskušamo grafe pobarvati s čim manj barvami, poleg tega pa upoštevame še neke omejitve. V diplomskem delu bomo predstavili posebno podzvrst barvanja grafov, to je realno barvanje grafa z omejitvami na večih razdaljah in ne samo na razdalji ena, kot je to običajno. Taka barvanja so odličen model za brezžična telekomunikacijska omrežja, uporabljamo pa jih tudi za druge namene. Najprej si bomo postavili temelje z osnovnimi definicijami, podali motivacijo za študij takih barvanj in predstavili uporabo v praksi. Nato bomo na kratko predstavili področje in nekatere odprte probleme. Na koncu pa bomo naštelí in dokazali nekaj nekoliko zahtevnejših rezultatov iz tega področja.

Poglavje 2

Osnovne definicije

V tem poglavju bomo podali osnovne definicije, s katerimi bomo postavili temelje za nadaljne delo.

2.1 Graf in podgraf

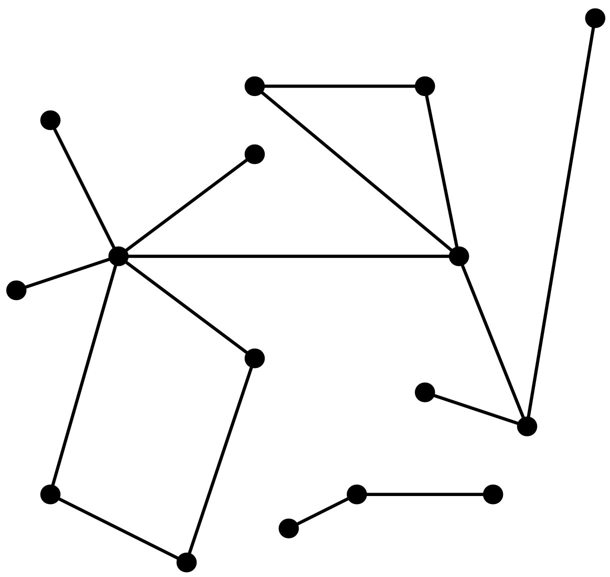
Osnovni pojem, s katerim se ukvarjamo v teoriji grafov, je seveda graf. Pa poglejmo, kaj je definicija grafa:

Definicija 2.1.1 **Graf *G*** *je par množic* $G = (V, E)$*, kjer velja* $V \neq \emptyset$ *in* $E \subset V \times V$*. Množica* V *predstavlja* **točke** *ali* **vozlišča** *grafa, množica* E *pa* **povezave** *grafa. Povezava v grafu je torej par točk, med katerima povezava poteka. Množico točk grafa* G *označimo z* $V(G)$*, množico povezav pa z* $E(G)$*.*

Definicija je seveda zelo intuitivna, saj točke, ko graf rišemo, dejansko so točke in povezave dejansko so povezave oziroma črte med točkami, kot vidimo na sliki 2.1.

Točke ponavadi označujemo s črkami $u, v, x, y, \ldots$, povezave pa s črkami $e, f, \ldots$ ali pa kar z robnima točkama. Torej, če povezava e povezuje točki u in v, jo pogosto pišemo kar kot uv.

Če imamo med točkama u in v povezavo, pravimo, da sta **sosednji** oziroma, da je u **sosednja** v. Točkama, ki ju povezava veže, pravimo tudi **krajišči povezave**. Za točki, ki nista povezani, pravimo, da sta **neodvisni**.



Slika 2.1: Primer grafa.

Med dvema točkama imamo lahko tudi več **vzporednih povezav** ali pa imamo povezave, ki povezujejo točko samo s seboj. Te imenujemo **zanke**. Grafu, v katerem nastopajo vzporedne povezave ali zanke, rečemo **multigraf**, grafu brez njih pa pravimo **enostaven graf**. Mi bomo ves čas delali samo z enostavnimi grafi.

Pri delu z grafi nas pogosto ne zanima ves graf ampak le njegov del, saj je cel graf lahko prevelik ali pa opazujemo del zato, ker ima neko posebno lastnost. Zato definiramo razne oblike podgrafov:

Definicija 2.1.2 **Podgraf $\boldsymbol{H}$** *grafa G je graf z vozlišči $V(H) \subseteq V(G)$ in povezavami $E(H) \subseteq E(G)$.*

Podgraf H za katerega je $V(H) = V(G)$ je **vpeti podgraf**. Podgraf grafa G, ki ga dobimo, če vzamemo neko podmnožico $V' \subset V(G)$ in dodamo vse povezave iz $E(G)$, katerih krajišča so v V', imenujemo **inducirani graf**.

Podgrafu brez povezav pravimo tudi **neodvisna množica**. Neodvisna množica reda n je graf na n točkah brez povezav. Podgrafu, ki vsebuje vse možne povezave, pravimo **klika**. Klika reda n je torej podgraf, ki je poln graf na n točkah.

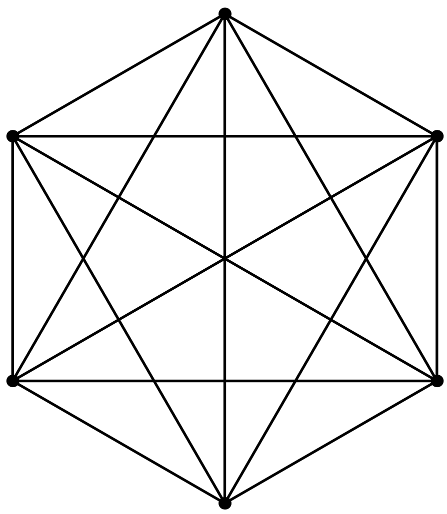
Definicija 2.1.3 **Stopnja točke $\boldsymbol{v}$** *je moč množice $\{e \in V(G); v \in e\}$, torej število povezav, ki vsebujejo točko v kot krajišče. Označimo jo z* $\mathbf{deg}(\boldsymbol{v})$. *V enostavnem* *grafu je to število njenih sosedov.* **Najvišjo stopnjo** *v grafu G označimo z* $\boldsymbol{\Delta(G)}$ *ali pogosto kar z* $\boldsymbol{\Delta}$*, ko vemo za kateri graf gre.*

Grafu, v katerem imajo vsa vozlišča enako stopnjo pravimo **regularen graf** in če je ta stopnja enaka k, rečemo, da je graf $\boldsymbol{k}$**-regularen**.

2.2 Posebni grafi

Oglejmo si sedaj nekaj posebnih vrst grafov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija 2.2.1 Poln graf reda $\boldsymbol{n}$ *je graf z n točkami in vsemi možnimi povezavami. Teh je $\frac{n(n-1)}{2}$. Označimo ga s* $\boldsymbol{K_n}$.



Slika 2.2: Poln graf K_n.

Definicija 2.2.2 Dvodelen graf *je vsak graf, katerega točke lahko razdelimo na dve particiji A in B tako, da imajo vse povezave eno krajišče v A in drugo krajišče v B. Iz definicije je očitno, da sta A in B neodvisni množici.*

Poln dvodelen graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ *je dvodelen graf z* $\boldsymbol{n}$ *točkami v vsaki particiji in vsemi povezavami med particijama. Tak graf ima torej* $\boldsymbol{n^2}$ *povezav.*

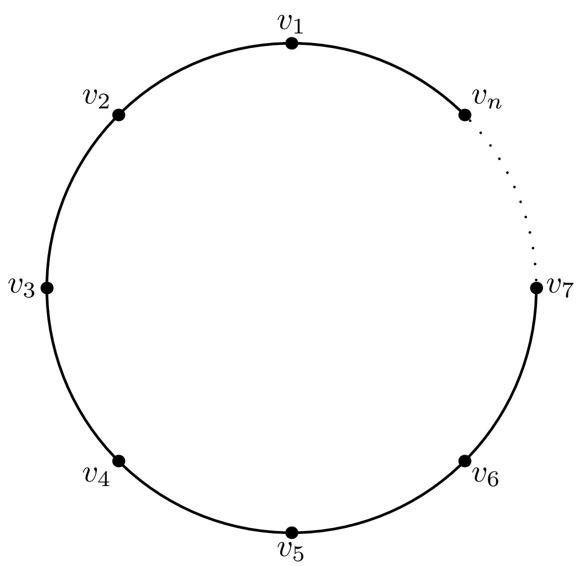
Definicija 2.2.3 Pot na $\boldsymbol{n}$ točkah *je graf s točkami $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in povezavami $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$. Označimo jo s* $\boldsymbol{P_n}$.

Slika 2.3: Pot na n točkah.

Pot pogosto na kratko zapišemo kar z zaporedjem točk $v_1 v_2 \cdots v_n$.

Definicija 2.2.4 **Cikel dolžine $\boldsymbol{n}$** *je graf s točkami* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *in povezavami* $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. *Pravimo mu tudi* **$\boldsymbol{n}$-cikel** *in ga označimo s* $\boldsymbol{C_n}$.

Krajši zapis je spet kar zaporedje točk s ponovljeno začetno točko $v_1 v_2 \ldots v_n, v_1$. Cikel dobimo, če v poti povežemo prvo in zadnjo točko.

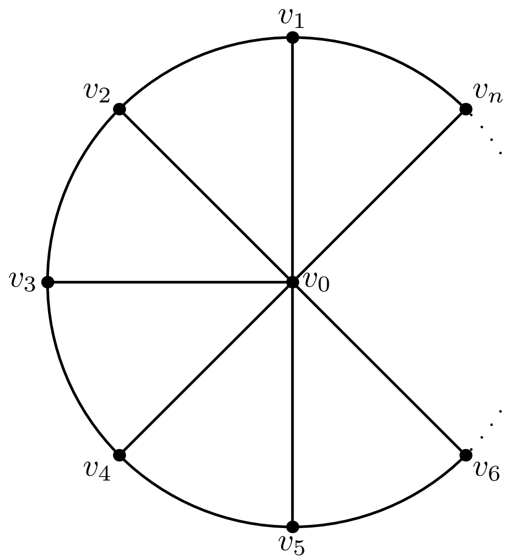


Slika 2.4: Primer n-cikla.

Definicija 2.2.5 *Graf s točkami* $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *in povezavami* $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1), (v_0, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_n)\}$ *imenujemo n-kolo in označimo z W_n. Kolo je torej n-cikel z dodanim središčem v_0, s katerim so povezane vse točke cikla.*

Definicija 2.2.6 **Drevo** *je povezan graf brez cikla. To pomeni, da ne obstaja podmnožica točk grafa, katere induciran graf je cikel.*

Grafu, ki je sestavljen iz enega ali več dreves, pravimo tudi **gozd**.



Slika 2.5: Primer n-kolesa.

2.3 Razdalja in povezanost

Med zelo pomembne lastnosti grafa sodi razdalja.

Definicija 2.3.1 Razdalja med točkama $\boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{v}$ *je dolžina najkrajše poti med njima in jo označimo z* $\boldsymbol{d(u, v)}$.

Tako rečemo, da je u za $d(u, v)$ **oddaljena od** v. Največjo razdaljo med točkama v grafu imenujemo **premer** ali **diameter** grafa.

Definicija 2.3.2 *Graf G je* **povezan**, *če obstaja pot med poljubnima dvema točkama $u, v \in V(G)$.*

Enako velja za neko podmnožico točk v grafu. Ta je povezana, če je njen induciran podgraf povezan.

Definicija 2.3.3 Komponenta (*ali* **komponenta za povezanost**) *je največja povezana množica točk v grafu. Največja tukaj pomeni, da ne moremo dodati točke ali povezave tako, da bi množica ostala povezana. Vsak graf ima očitno vsaj eno komponento in vsak nepovezan graf ima vsaj dve komponenti.*

Povezanost grafa nas zanima, ker lahko pri reševanju problemov rešitev pogosto najdemo za vsako komponento posebej in jo nato združimo za cel graf.

2.4 Barvanje grafov

Barvanje grafa se je pojavilo kot dejansko barvanje točk grafa z barvami, kjer so želeli, da so povezane točke pobarvane različno. Cilj je bil graf pobarvati s čim manj barvami. Lep primer tega je recimo izrek o štirih barvah, ki trdi, da lahko poljuben zemljevid pobarvamo s štirimi barvami. Kmalu so seveda ugotovili, da je veliko lažje delati s števili namesto z barvami in tako pridemo do osnovne definicije barvanja točk:

Definicija 2.4.1 **Barvanje točk grafa $\boldsymbol{G}$** *je preslikava* $c : V(G) \to \mathbb{N}$. *Barvanje je* **pravo** *oziroma* **dobro**, *če imata poljubni povezani točki* u *in* v *različni barvi. Torej za* $vu \in E(G)$ *mora veljati* $c(v) \neq c(u)$.

Podobno definiramo barvanje povezav, kjer morata povezavi biti različno pobarvani, če imata skupno krajišče.

Definicija 2.4.2 **Barvanje povezav grafa $\boldsymbol{G}$** *je preslikava* $c : E(G) \to \mathbb{N}$. *Barvanje je* **pravo**, *če za poljubni povezavi s skupnim krajiščem* e *in* f *velja* $c(e) \neq c(f)$.

Barvanje povezav je zelo lahko prevesti na barvanje točk z uporabo povezavnega grafa:

Definicija 2.4.3 **Povezavni graf (line graph) $\boldsymbol{L(G)}$** *grafa* G *dobimo tako, da vsaki povezavi v* G *priredimo točko v* $L(G)$ *in nato v* $L(G)$ *povežemo točke, ki ustrezajo sosednjim povezavam v* G.

Barvanje točk grafa $L(G)$ tako ustreza barvanju povezav grafa G.

Definicija 2.4.4 *Graf* G *je* **$\boldsymbol{k}$-obarvljiv**, *če obstaja pravo barvanje* $c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. *To pomeni, da lahko graf dobro pobarvamo s k-barvami. Najmanjše število* k, *za katero je graf še* k-*obarvljiv, imenujemo* **kromatično število** *in ga označimo s* $\boldsymbol{\chi(G)}$. *Barvanju s* $\chi(G)$ *barvami pravimo* **optimalno barvanje**.

Tukaj opazimo, da točke, ki so pobarvane z isto barvo, tvorijo neodvisno množico. Tako je dobro barvanje ekvivalentno particiji na neodvisne množice in je optimalno barvanje ekvivalentno particiji na najmanjše možno število neodvisnih množic.

Hamiltonova pot je pot v grafu G, ki vsebuje vse točke grafa, torej vpeta pot. **Hamiltonov cikel** v grafu G je cikel, ki vsebuje vse točke. Grafu, ki ima kakšen Hamiltonov cikel, rečemo **Hamiltonski graf**.

Poznamo tudi operacije na grafih in ena izmed njih je potenca grafa.

Definicija 2.4.5 *Naj bo $G = (V, E)$ graf. Graf* $\boldsymbol{G^k}$ *je* **$\boldsymbol{k}$-ta potenca grafa $\boldsymbol{G}$**, *če velja:*

- $V(G^k) = V(G)$,
- $uv \in E(G^k)$ *natanko tedaj, ko obstaja med u in v pot dolžine $\leq k$.*

V k-ti potenci grafa imamo torej poleg že obstoječih povezav še vse povezave med točkami na razdalji $\leq k$.

Definicija 2.4.6 *Naj bo G graf. Njegov* **komplement $\boldsymbol{G^C}$** *je graf*

- *s točkami $V(G^C) = V(G)$,*
- *s povezavami $E(G^C) = \{e; e \notin E(G)\}$.*

V komplementu so torej natanko tiste povezave, ki jih ni v originalnem grafu.

Poglavje 3

Razdaljna barvanja

3.1 Dodeljevanje frekvenc

Problem dodeljevanja frekvenc se je pojavil s prvimi oddajniki za brezžična omrežja. Med oddajniki, ki so blizu, pride do interference in tako do motenega signala. Da bi to preprečili, je treba bližnjim oddajnikom dodeliti dovolj različne frekvence, da ne more priti do interference, kar na začetku ni bil problem, saj so bile vse frekvence proste. Danes pa je zaradi zelo hitre rasti brezžičnih omrežij postal frekvenčni spekter zelo iskana in redka dobrina. Frekvenčni pasovi so omejeni zaradi fizikalnih omejitev oddajnikov. Potem pa je tu še finančna omejitev, kajti zakup frekvenčnega pasu je zelo drag. Tako se je pojavila potreba po učinkovitih algoritmih za dodeljevanje frekvenc.

Na tem mestu se takoj ponudi model za brezžično omrežje z grafi. Oddajnike predstavmo s točkami v grafu in bližnje oddajnike povežemo s povezavami. V teoriji grafov lahko modele za dodeljevanje radijskih frekvenc oddajnikom prvič zasledimo v zgodnjih osemdesetih letih v članku Halea [18]. Od tedaj so razvili več različnih oblik barvanja grafov, s katerimi lahko modeliramo tak problem. Tako poznamo recimo T-barvanja grafov, kjer so med posameznimi oddajniki (točkami) prepovedane nekatere razlike med frekvencami [26]. Prav tako je bilo objavljenih več študij na to temo [1, 7], ki dajejo pregled nad različnimi pristopi k problemu in rezultati iz tega področja.

Leta 1988 je Roberts predlagal nov model za dodeljevanje frekvenc z dvema nivojema interference [27], ki sta ga Griggs in Yeh prilagodila v bolj splošen model razdaljnih barvanj [17]: Za nenegativna cela števila $p_1, \ldots, p_k$, je $\boldsymbol{L(p_1, \ldots, p_k)}$**-barvanje** grafa G barvanje s celimi števili tako, da točke natanko na razdalji i dobijo barve, ki se razlikujejo vsaj za p_i. Cilj je seveda najdi tako barvanje, da bo razlika med največjo in najmanjšo uporabljeno barvo najmanjša, saj bo s tem frekvenčni pas najmanjši. Zaradi primerov iz prakse se je sprva privzelo, da pogoji na razliko med barvami padajo z razdaljo [6], na primer $p_1 \geq p_{\geq} \ldots \geq p_k \geq 1$, čeprav teorja tega ne zahteva. Sedaj pa vemo, da so zelo pomembni tudi ostali primeri, recimo $p_1 = 0$ in $p_2 = 1$, ki prav tako nastopa v praksi [5, 19]. Primer $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ nam da tako imenovano injektivno barvanje.

Ideja za tem modelom je sledeča. Točke predstavljajo oddajnike in sosednji oddajniki so povezani s povezavami. Največ interference se seveda ustvari med oddajniki, ki so zelo blizu in so zato v grafu povezani. Kjub temu pa se nekaj interference pojavi tudi med oddajniki na razdalji dva, tri in tako naprej. Da bi učinkovito dodeljevali frekvence v takem omrežju, iščemo dodelitev frekvenc znotraj čim manjšega intervala, kjer se frekvence, dodeljene bližnjim oddajnikom, zelo razlikujejo. Frekvence dodeljene oddajnikom, ki so srednje oddaljeni pa se razlikujejo za manj. To nas takoj vodi do definicije razdaljnega barvanja iz prejšnjega odstavka.

3.2 Definicije

V praksi seveda ni nobenega razloga, da bi frekvence morale biti celoštevilske, saj jih lako izbiramo iz celega zveznega spektra elektromagnetnega valovanja. Tako je teorija kmalu naravno prešla na barvanje z realnimi števili, oznake pa se pustijo kar enake:

Definicija 3.2.1 *Imejmo končen graf G in nenegativna realna števila $p_1, \ldots, p_k$.* $\boldsymbol{L(p_1, \ldots, p_k)}$**-barvanje (**$\boldsymbol{L(p_1, \ldots, p_k)}$**-labeling)** *grafa G je preslikava $c : V(G) \to [0, \infty)$, kjer za točki u in v na razdalji $d(u, v) = i$, $i \leq k$ velja $|c(u) - c(v)| \geq p_i$.* **Razpon (span)** *$L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanja je razlika med največjo in najmanjšo barvo.*

Tukaj velja omeniti, da lahko brez izgube za splošnost najmanjšo barvo vedno postavimo na nič, kar se večinoma kar privzame. To je očitno, saj lahko od poljubnega $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanja odštejemo najmanjšo barvo in tako dobimo barvanje z najmanjšo barvo nič. Tako razpon postane največja barva v našem grafu. Naš cilj je seveda najti $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje z najmanjšim možnim razponom. Najmanjši možen razpon označimo z $\lambda_{p_1,\ldots,p_k}(G)$ ali $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$. Pogosto srečamo tudi izraz **lambda funkcija**, ko gledamo na razpon kot funkcijo argumentov $p_1, \ldots, p_k$. Vsako barvanje z razponom $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$ je **optimalno**.

Tukaj opazimo **lastnost razmerja** (**scaling property**):

Trditev 3.2.2 *Za vsako realno število $\alpha > 0$ velja:*

$$\alpha\, \lambda(G; p_1, \ldots, p_k) = \lambda(G; \alpha\, p_1, \ldots, \alpha\, p_k).$$

Dokaz. Naj bo f $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje grafa G z razponom $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$. Če ga pomnožimo z α očitno dobimo $L(\alpha\, p_1, \ldots, \alpha\, p_k)$-barvanje f' z najmanjšim možnim razponom $\alpha\, \lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$, saj smo največjo barvo pomnožili z α. Če razpon ne bi bil najmanjši možen, bi imeli barvanje z manjšim razponom, ki bi ga delili z α in dobili $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje z manjšim razponom, kar pa je protislovje. Dokaz v drugo smer je podoben, le da sedaj delimo z α. $\square$

V posebnem, ko je $k = 2$, lahko vrednost $\lambda(G; p_1, p_2)$ povsem določimo že s funkcijo za $p_2 = 1$. Torej lahko za študij $L(p, q)$-barvanj študiramo kar $L(x, 1)$-barvanja.

Največjo pozornost pri raziskovanju so posvetili osnovnemu primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$, torej $L(2, 1)$-barvanju, saj je to eden najosnovnejših primerov, ki se pojavljajo v praksi. Iz tega primera zelo preprosto sledijo rešitve za perturbirane probleme, ki so blizu optimalne rešitve.

Izrek 3.2.3 (Izrek o D-množici za končen primer, $p = 2$) *Naj bo $D(k_1, k_2) = \{a_1k_1 + a_2k_2; a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$, torej množica vseh linearnih kombinacij k_1 in k_2 s celimi koeficienti. Naj bo $G = (V, E)$ končen graf in naj bosta $p, q \geq 0$ realni števili. Potem obstaja tako optimalno $L(p, q)$-barvanje $f : V(G) \to [0, \infty)$, da je najmanjša barva nič in vse barve (in razpon $\lambda(G; p, q)$) pripadajo množici $D(p, q)$ in je vsota koeficientov $a_1 + a_2 < |V|$.*

Očitno je najmanjši možen razpon nepadajoča funkcija svojih argumentov, saj velja, če je c dobro $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje za neke $p_1, \ldots, p_k$, je ta isti c tudi dobro

$L(p'_1, \ldots, p'_k)$-barvanje, če velja za vsak $p'_i \leq p_i$. Velja pa še veliko več. Griggs in Jin [15] sta dokazala, da je $\lambda(G; x, 1)$ zvezna, odsekoma linearna funkcija s končno mnogo odseki. To pomeni, da obstaja končna particija definicijskega območja lambda funkcije na odseke, kjer velja, da je funkcija na vsakem odseku linearna. To pa še ni vse. Velja celo, da so koeficienti linearne funkcije na nekem odseku prav tako v D-množici.

To nam je v veliko pomoč pri določanju lambda funkcij. Predstavljajmo si $L(p, q)$-barvanje. Kot vemo, je lambda funkcija $\lambda(G; p, q)$ natanko določena z enoparametrično funkcijo $\lambda(G; x, 1)$, kar pa nam zelo olajša dokazovanje spodnjih in zgornih mej za to funkcijo. Če recimo vemo, da lambda funkcija zavzame enako vrednost v dveh točkah x_0 in x_1, iz tega sledi, da lambda funkcija zavzema to vrednost tudi v vseh točkah $x \in [x_0, x_1]$.

Razdaljna barvanja so povezana z navadnim barvanjem točk. Če je $k = 1$ in $p_1 = 1$ je to navadno barvanje točk in velja $\lambda(G; 1) = \chi(G) - 1$. Če je recimo $p_1 = \ldots = p_k = 1$ se naš problem prevede na navadno barvanje točk k-te potence našega grafa G. Torej povezava uv je v grafu G^k, če velja, da sta točki u in v v grafu G na razdalji manjši ali enaki k. Tako velja $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k) = \chi(G^k) - 1$. Tako se mnogo rezultatov barvanja potenc grafov prevede na razdaljna barvanja in obratno. Kot primer si bralec lahko ogleda delo Molloya in Salavatipourja [24, 25].

3.3 Hipoteza Δ^2

Kot smo že rekli, je bilo daleč največ dela opraljenega na primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$. Ena najpomembnejših hipotez na tem področju, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [17], je hipoteza Δ^2:

Trditev 3.3.1 *Vsak graf G z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 2$ ima $L(2, 1)$-barvanje z razponom največ Δ^2.*

Hipoteza še vedno ni ne potrjena ne ovržena skoraj petnajst let po njeni objavi, kljub temu, da ji je bila posvečena dobršna mera pozornosti. To dejstvo kaže zahtevnost in težo hipoteze. V zaporedju člankov [17, 9, 22, 14] so prvo mejo $\Delta^2 + 2\Delta$, ki jo bomo dokazali kasneje, zmanjševali do trenutno najboljše meje $\Delta^2 + \Delta - 2$, ki jo je dokazal Gonçalves [14]. Uspešno so jo dokazali le za nekatere posebne razrede grafov, kot so ravninski grafi z najvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$, Hamiltonski kubični grafi [20], grafi z najvišjo stopnjo dva, ravninski gravi z vajvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$ [4] in drugi. Zaradi uporabe razdaljnih barvanj v praksi ni presenetljivo, da se je pojavlja vedno več člankov z algoritemskim pogledmo na taka barvanja [2, 11, 12, 21, 23].

Dokažimo sedaj prvo zgornjo mejo za razpon $L(2,1)$-barvanja poljubnega grafa G, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [17]:

Trditev 3.3.2 *Naj bo G graf z najvišjo stopnjo Δ. Potem velja $\lambda(G;2,1) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.*

Dokaz. Vemo, da obstaja optimalno barvanje z barvami v $D(2,1)$. Torej lahko brez škode za splošnost upoštevamo samo celoštevilske barve ≥ 0. Poljubno uredimo točke grafa in jih po vrsti barvamo z najnižjo dovoljeno barvo. Točka $v \in V(G)$ ima največ Δ sosedov in tako največ $\Delta(\Delta - 1)$ točk na razdalji dva. Vzemimo neko točko v našega grafa in jo poskušajmo pobarvati. Točka, ki je pobarvana z barvo c, nam za x prepoveduje barve $c - 1$, c in $c + 1$, če je od v oddaljena za dva, in barvo c, če je od v oddaljena za ena. Tako je za barvo točke v prepovedanih največ $3\Delta + \Delta^2 - \Delta$ barv. Torej je razpon kvečjemu $\Delta^2 + 2\Delta$, saj začnemo z barvo 0 in imamo tako na voljo $\Delta^2 + 2\Delta + 1$ barv. $\square$

Očitna spodnja meja pa je $\Delta + 1$, ki jo dosežemo z grafom $K_{\Delta,1}$ za $\Delta \geq 2$.

Definicija 3.3.3 **Končna projektivna ravnina reda n** *z oznako $Pi(n)$ je množica $n^2 + n + 1$ točk s sledečimi lastnostmi:*

1. *Poljubni dve točki tvorita premico,*

2. *Poljubni dve premici se sekata v eni točki,*

3. *V vsaki točki se seka $n + 1$ premic in*

4. *Vsaka premica vsebuje $n + 1$ točk.*

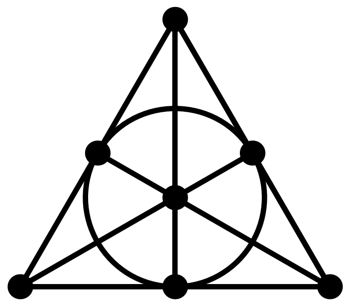
Taka projektivna ravnina obstaja, če je n potenca praštevila. Znana hipoteza pravi, da so to edine končne projektivne ravnine, ki obstajajo. Dokaz te hipoteze pa je eden izmed pomembnejših nerešenih problemov v diskretni matematiki.

Definicija 3.3.4 *Graf G je* **incidenčni graf** *projektivne ravnine $\Pi(n)$ reda n, če je $G = (A, B, E)$ dvodelen graf, da velja:*

(1) $|A| = |B| = n^2 + n + 1,$

(2) *vsak $a \in A$ predstavlja točko p_a v $\Pi(n)$ in vsak $b \in B$ predstavlja premico l_b v $\Pi(n)$,*

(3) $E = \{\{a, b\}\colon\ a \in A,\ b \in B,$ *da velja* $t_a \in p_b$ *v* $\Pi(n)\ \}.$



Slika 3.1: Končna projektivna ravnina reda 2 (Fanova ravnina)

Iz definicije $\Pi(n)$ vemo, da je incidenčni graf $(n+1)$-regularen. Za vsak $x, y \in A$ je $d_G(x, y) = 2$ in za vsak $u, v \in B$ je $d_G(u, v) = 2$. Prav tako, če $a \in A$ in $b \in B$ nista sosednja, sta na razdalji $d_G(a, b) = 3$. V [17] imamo sledeči izrek.

Izrek 3.3.5 *Če je $G = (A, B, E)$ incidenčni graf projektivne ravnine reda n, je $\lambda(G; 2, 1) = n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$, kjer je $\Delta = n + 1$ maksimalna stopnja grafa G.*

Dokaz. Pokažimo najprej spodnjo mejo. V A imamo $n^2 + n + 1$ točk in poljubni dve sta na razdalji dve. Torej morata poljubni dve točki biti pobarvani različno. Torej je razpon $\lambda(G; 2, 1) \geq n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$.

Definicija 3.3.6 Prirejanje (matching) *grafa G je množica disjunktnih povezav, torej množica povezav, za katero velja, da poljubni dve povezavi nimata skupne točke.*

Popolno prirejanje (perfect matching) *je prirejanje z $\frac{n}{2}$ povezavami, torej največje možno. To seveda pomeni, da imajo lahko le grafi s sodo mnogo točkami popolna prirejanja.*

Bralec lahko dokaz naslednjega izreka najde v [3], mi pa ga bomo tukaj izpustili:

Izrek 3.3.7 (Hallov pogoj) : *Naj bo A neka množica točk, potem je množica $N(A)$ množica sosedov točk iz A. Dvodelen graf G s particijama X in Y ima popolno prirejanje natanko tedaj, ko velja $|N(A)| \geq |A|$ za vse podmnožice $A \subset X$.*

Sedaj lahko nadaljujemo z dokazom izreka 3.3.5. Za zgornjo mejo si oglejmo komplementarni dvodelen graf $G' = K_{n,n} - E(G)$. Ta graf je dvodelen in n^2 regularen, saj je G $n+1$-regularen. Hallov pogoj je torej izpolnjen, torej ima G' popolno prirejanje. To pomeni, da imamo $n^2 + n + 1$ povezanih parov točk. Graf je dvodelen, torej ima vsak tak par eno točko v A in drugo v B. Vsakega od teh parov točk lahko v originalnem grafu G pobarvamo z isto barvo, saj tam te točke niso povezane in hkrati niso na razdalji dve. Iz dokaza spodnje meje vidimo, da bo barvanje pravo, če bodo te barve paroma različne in tako smo dokazali še zgornjo mejo. $\square$

Poglavje 4

Kneserjevi grafi

V tem poglavju bomo določili lambda funkcijo za poddružino Kneserjevih grafov. Najprej pa moramo postaviti osnovne definicije, ki jih bomo potrebovali.

4.1 Definicije

Poglejmo najprej, kaj je Kneserjev graf:

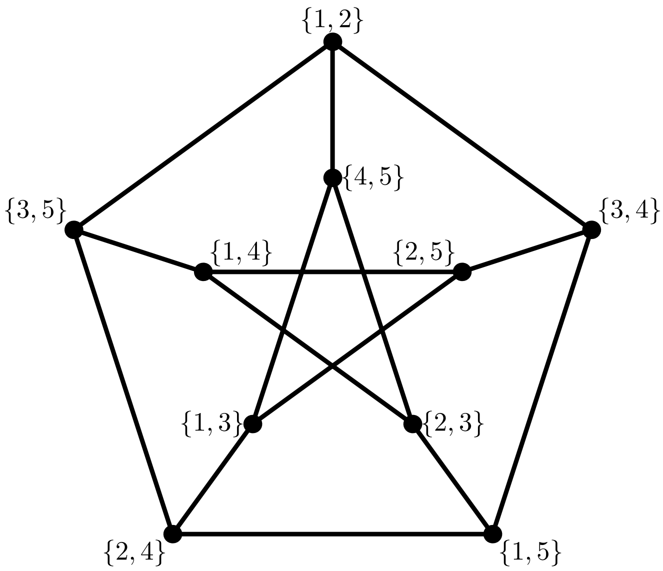
Definicija 4.1.1 **Kneserjev graf** $K(n, k)$*,* $n > 2k$*, je graf na* $\binom{n}{k}$ *točkah, definiran kot: vsaka točka ustreza podmnožici množice* $\{1, \ldots, n\}$ *s* k *elementi in točki sta sosednji natanko tedaj, ko sta njuni množici disjunktni. Kneserjev graf* $K(5, 2)$ *je Petersenov graf.*

Najbolj znan Kneserjev graf je $K(5, 2)$, ki je Petersenov graf, kot vidimo na sliki 4.1.

Določitev lambda funkcij vseh Kneserjevih grafov vsebuje določitev njihovih kromatičnih števil, kot tudi kromatičnih števil njihovih kvadratov kot poseben primer. Mi bomo tukaj določili lambda funkcije za vse Kneserjeve grafe $K(n, 2)$, $n \geq 5$ (Izrek 4.4.1).

Kot primer so lambda funkcije Kneserjevih grafov $K(n, 2)$, $n = 5, 6, 7, 8$, na sliki 4.2.

Poglejmo si sedaj nekaj posebnih lastnosti grafov $K(n, 2)$. Graf $K(n, 2)$ je izomorfen komplementu povezavnega grafa K_n. Vsako točko $K(n, 2)$ lahko asoci-



Slika 4.1: Petersenov graf.

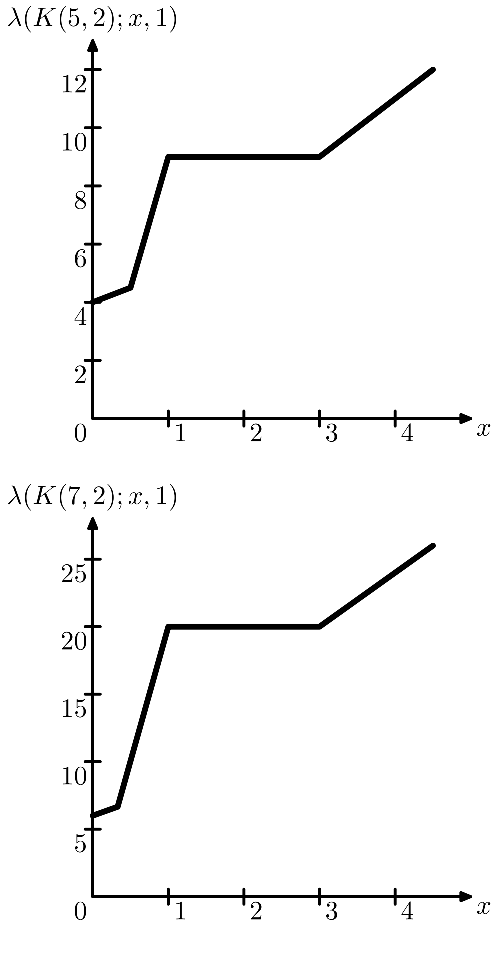
iramo s povezavo v K_n. Taka povezava naravno ustreza dvoelementni podmnožici množice z n elementi, ki jo predstavljajo točke K_n. Dve točki $K(n, 2)$ sta sosednji natako tedaj, ko sta njuni množici disjunktni. To je ekvivalentno zahtevi, da sta povezavi v povezavnem grafu K_n disjunktni. Izkazalo se je, da je premišljevanje v naslednjih razdelkih veliko lažje, če $n - 1$ točk grafa K_n identificiramo s števili $0, \ldots, n-2$ in zadnjo točko z zvezdico $*$.

Posledica opažene korespondence med $K(n, 2)$ in povezavnim grafom K_n je dejstvo, da je največja klika v $K(n, 2)$ velikosti $\lfloor n/2 \rfloor$ (velikost maksimalnega prirejanja v K_n).

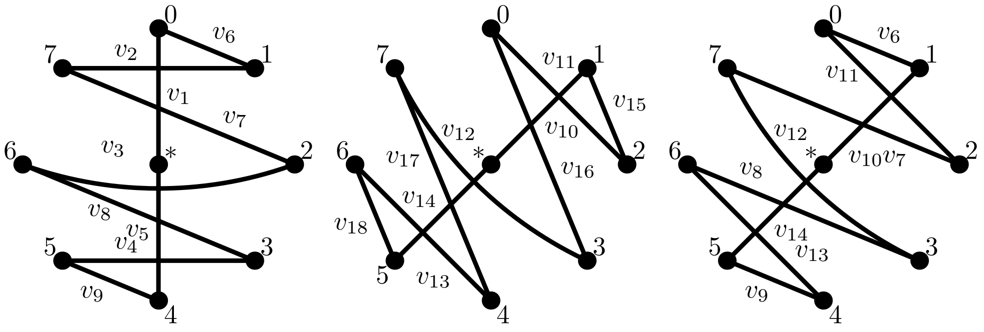
Uporabno bo tudi dejstvo, da je kvadrat $K(n, 2)$ poln graf za vsak $n \geq 5$, saj sta poljubni točki v $K(n, 2)$ na razdalji največ dve. V posebnem, $\lambda(K(n, 2); 1, 1) = \chi(K(n, 2)^2) - 1 = \binom{n}{2} - 1$.

4.2 Majhne vrednosti x

Lema 4.2.1 *Za vsak $\ell \geq 2$ obstaja zaporedje točk $v_1, \ldots, v_m$, $m = \binom{2\ell+1}{2}$ v $K(2\ell + 1, 2)$ tako, da za vsak $i = 1, \ldots, m - (\ell - 1)$ točke $v_i, \ldots, v_{i+\ell-1}$ tvorijo kliko velikosti ℓ v $K(2\ell + 1, 2)$.*



Slika 4.2: Lambda funkcije Kneserjevih grafov $K(5,2)$, $K(6,2)$, $K(7,2)$ in $K(8,2)$.

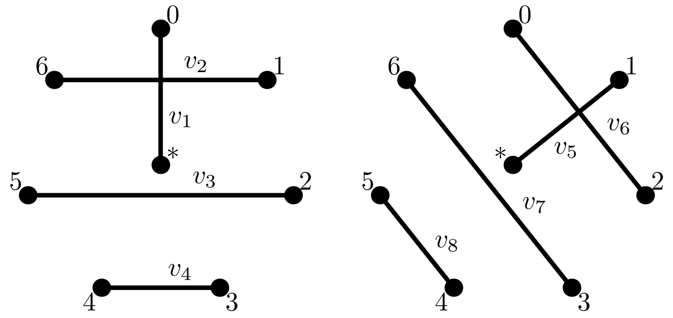


Slika 4.3: Povezave, ki ustrezajo točkam $v_1, \ldots, v_9$, vsebovanim v bloku B_1, in točkam $v_{10}, \ldots, v_{18}$, vsebovanim v bloku B_2, iz vrstnega reda točk grafa $K(9,2)$, kot smo ga konstruirali v dokazu leme 4.2.1 (leva in sredinska slika). Na desni sliki je prikazan podgraf, ki ga tvorijo zadnje štiri povezave prvega bloka in prvih pet povezav drugega bloka.

Dokaz. Tvorimo zaporedje točk v $K(2\ell+1,2)$, sestavljeno iz ℓ blokov, $B_0, \ldots, B_{\ell-1}$, kjer vsakega sestavlja $2\ell+1$ zaporednih točk. Prva točka $v_{k(2\ell+1)+1}$ v B_k ustreza množici $\{*, k\}$ (glej Sliko 4.3), i-ta točka $v_{k(2\ell+1)+i}$, $i = 2, \ldots, \ell$, je točka, ki ustreza množici $\{(-(i-1)+k) \mod 2\ell, ((i-1)+k) \mod 2\ell\}$, $(\ell+1)$-ta točka $v_{k(2\ell+1)+\ell+1}$ je točka, ki ustreza množici $\{*, k+\ell\}$, in i-ta točka $v_{k(2\ell+1)+i}$, $i = \ell+2, \ldots, 2\ell+1$, je točka, ki ustreza množici $\{((i-\ell-1)+k) \mod 2\ell, (-(i-\ell-2)+k) \mod 2\ell\}$.

To zaporedje točk ima zelo lepo interpretacijo v povezavni reprezentaciji Kneserjevih grafov. Na sliki polnega grafa, z zvezdico na sredini in ostalimi oštevilčenimi točkami na ciklu okoli nje, vsak blok ustreza Hamiltonovemu ciklu in vsakih ℓ zaporednih točk v B_i tvori prirejanje, kot kaže slika 4.3. Zaporedne bloke potem dobimo tako, da Hamiltonov cikel zavrtimo za $360/2\ell$ stopinj v negativni smeri.

Preverimo sedaj, da poljubnih ℓ zaporednih točk tvori kliko v $K(2\ell+1,2)$ oziroma, da so množice, ki jim pripadajo, paroma disjunktne. To je najlažje videti, če uporabimo korespondenco s Hamiltonovimi cikli v $K_{2\ell+1}$ iz prejšnjega odstavka. Opazimo, da zadnjih ℓ povezav v bloku B_i, za $i = 0, \ldots, \ell-2$ skupaj s prvimi $\ell+1$ povezavami bloka B_{i+1} prav tako tvori Hamiltonov cikel in celo poljubnih ℓ zaporednih povezav izmed teh tvori prirejanje (glej sliko 4.3). Poljubnih ℓ zaporednih povezav leži v enem bloku ali pa v dveh blokih B_i in B_{i+1} za nek $i = 0, \ldots, \ell-2$ in



Slika 4.4: Povezave, ki ustrezajo prvemu in drugemu bloku v zaporedju, ki smo ga konstruirali za $K(8,2)$ v dokazu leme 4.2.2.

tako vsakih ℓ zaporednih povezav tvori prirejanje v polnem grafu in tako ustrezajoče točke tvorijo kliko v $K(2\ell+1,2)$. Trditev iz leme sedaj sledi. □

Poglejmo si sedaj Kneserjeve grafe $K(n,2)$ pri sodem n.

Lema 4.2.2 *Za vsak $\ell \geq 2$ obstaja zaporedje točk $v_1,\ldots,v_m$, $m = \binom{2\ell+2}{2}$ grafa $K(2\ell+2,2)$ takih, da za vsak $i = 1,\ldots,m-(\ell-1)$ točke $v_i,\ldots,v_{i+\ell-1}$ tvorijo kliko velikosti ℓ v $K(2\ell+2,2)$ in za vsak $i = 1, \ell+2, 2\ell+3, \ldots, m-\ell$ točke $v_i,\ldots,v_{i+\ell}$ tvorijo kliko velikosti $\ell+1$.*

Dokaz. Tvorimo zaporedje točk v $K(2\ell+2,2)$, sestavljeno iz $2\ell+1$ blokov z $\ell+1$ točkami v vsakem izmed njih. Bloke oštevilčimo od 0 do 2ℓ. Prva točka $v_{k(\ell+1)+1}$ v k-tem bloku naj bo točka, ki ustreza množici $\{*,k\}$ in i-ta točka $v_{k(\ell+1)+i}$, $i = 2,\ldots,\ell+1$, naj bo točka, ki ustreza množici $\{(-(i-1)+k) \mod (2\ell+1), ((i-1)+k) \mod (2\ell+1)\}$. Očitno vsak blok tvori kliko velikosti $\ell+1$, kot smo želeli.

To zaporedje točk ima tudi zelo lepo interpretacijo v povezavni reprezentaciji Kneserjevega grafa. Na sliki vidimo poln graf z zvezdico na sredini in oštevilčenimi točkami na ciklu okoli zvezdice. Vsak blok ustreza popolnemu prirejanju, ki ga sestavlja povezava od zvezdice do neke druge točke v grafu in vse povezave, ki so pravokotne na njo (glej sliko 4.4). Sledeče bloke potem dobimo tako, da popolno prirejanje zavrtimo okoli zvezdice za $360/(2\ell+1)$ stopinj v negativni smeri.

Preverimo sedaj, da poljubnih ℓ zaporednih tvori kliko v $K(2\ell+2,2)$ oziroma, da so množice, ki ustrezajo tem točkam paroma disjunktne. Vzemimo točko $v_{k(\ell+1)+i}$,

$k = 0, \dots, 2\ell$ in $i = 1, \dots, \ell + 1$. Množica, ki ustreza tej točki, je disjunktna z vsemi ostalimi množicami, ki ustrezajo točkam v istem bloku, to je množicam, ki ustrezajo točkam $v_{k(\ell+1)+i'}$ za $i' = 1, \dots, \ell + 1$ in $i' \neq i$. Za $k > 0$ je zadnja točka v prejšnjem bloku, katere množica *ni* disjunktna z množico, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, točka $v_{(k-1)(\ell+1)+i+1}$ za $i < \ell + 1$ (ni nam treba obravnavati primera $i = \ell + 1$). Podobno je za $k < 2\ell + 1$ prva točka v naslednjem bloku, katere množica ni disjunktna z množico, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, točka $v_{(k-1)(\ell+1)+i-1}$ za $i > 0$. Torej je množica, ki ustreza $v_{k(\ell+1)+i}$, disjunktna z vsemi množicami, ki ustrezajo točkam $v_{k(\ell+1)+i+j}$ za $j = \pm 1, \dots, \pm(\ell - 1)$. Trditev iz leme sedaj sledi. □

Preostanek tega razdelka bomo posvetili določanju spodnjih mej lambda funkcij $K(n, 2)$ za $x \in [0, 1/\ell]$. Ponovno moramo razlikovati med dvema primeroma glede na parnost n.

Lema 4.2.3 *Sledeča ocena velja za vsak $\ell \geq 2$ in $x \in (0, 1/\ell)$:*

$$\lambda(K(2\ell + 1, 2); x, 1) \geq 2\ell + (\ell - 1)x \ .$$

Dokaz. Naj bo c $L(x, 1)$-barvanje grafa $K(2\ell+1, 2)$ in naj bo $v_1, \dots, v_m$, $m = \binom{2\ell+1}{2}$ zaporedje točk tako, da $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \cdots \leq c(v_m)$.

Pokazali bomo, da je $c(v_{i\ell+1}) \geq i$ za vsak $i = 0, \dots, 2\ell$. Neenakost očitno velja za $i = 0$. Za $i > 0$ imamo med $v_{(i-1)\ell+1}, \dots, v_{i\ell+1}$ dve nesosednji točki, saj $K(2\ell+1, 2)$ ne vsebuje klike velikosti $\ell + 1$. Torej se barvi teh dveh točk razlikujeta vsaj za ena. Iz $c(v_{(i-1)\ell+1}) \leq \cdots \leq c(v_{i\ell+1})$ sledi $c(v_{i\ell+1}) \geq c(v_{(i-1)\ell+1}) + 1 \geq (i - 1) + 1 = i$ in iz tega sklepamo, da je $c(v_{2\ell^2+1}) \geq 2\ell$.

Ker je razlika med poljubnima barvama vsaj x, sledi naslednja ocena:

$$c(v_m) \geq c(v_{2\ell^2+1}) + \big(m - (2\ell^2 + 1)\big)\, x \geq 2\ell + (\ell - 1)x \ .$$

To dokazuje lemo. □

Razdelek zaključujemo s spodnjo mejo lambda funkcije za $K(n, 2)$ pri sodem n. Rešitev za sode n se je izkazala kot precej kompleksnejša od rešitve za lihe n.

Lema 4.2.4 *Za vsak $\ell \geq 2$ in $x \in (0, 1/\ell)$ velja:*

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) \geq 2\ell + 3\ell x \ .$$

Dokaz. Naj bo c $L(x,1)$-barvanje grafa $K(2\ell+2,2)$ in naj bo $v_1,\ldots,v_m$, $m=\binom{2\ell+2}{2}$ zaporedje točk tako, da $c(v_1)\leq c(v_2)\leq\cdots\leq c(v_m)$.

Rekurzivno definirajmo indekse $i_0,\ldots,i_{2\ell}$. Postavimo $i_0=1$. Za $j>0$ naj bo i_j največji tak indeks, da točke od i_{j-1}-te do (i_j-1)-te, oz. $v_{i_{j-1}},\ldots,v_{i_j-1}$, tvorijo kliko. Ker je največja klika v $K(2\ell+2,2)$ velikosti $\ell+1$, $K(2\ell+2,2)$ ne moremo po točkah pokriti z manj kot $2\ell+1$ klikami in tako so indeksi $i_0,\ldots,i_{2\ell}$ dobro definirani.

Naj bo sedaj C_j, $j=0,\ldots,2\ell-1$ klika v $K(2\ell+2,2)$, ki jo tvorijo točke $v_{i_j},\ldots,v_{i_{j+1}-1}$ in na bo γ_j, $j=0,\ldots,2\ell$ število klik velikosti $\ell+1$ med $C_0,\ldots,C_{j-1}$. V posebnem velja $\gamma_0=0$ in $\gamma_j\leq j$.

Dokažimo sedaj naslednо trditev:

Pomožna trditev: *Za vsak $j=0,\ldots,2\ell$ velja $c(v_{i_j})\geq j+\gamma_j x$.*

Postopamo z indukcijo po j. Trditev očitno velja za $j=0$. Naj bo sedaj $j>0$. Naj bo $k\in\{0,\ldots,|C_{j-1}|-1\}$ največji tak k, da točka $v_{i_{j-1}+k}$ v C_{j-1} ni sosednja točki v_{i_j}. Če je klika C_{j-1} velikosti $\ell+1$, potem povezave v polnem grafu, ki ustrezajo točkam v C_{j-1} tvorijo prirejanje in točka v_{i_j} ni sosednja vsaj dvema točkama v C_{j-1}. V posebnem je $k\geq 1$. Ker je razlika med barvama poljubnih dveh točk vsaj x (in vemo, da je $x\leq 1$) in v_{i_j} ni sosednja $v_{i_{j-1}+k}$, dobimo:

$$c(v_{i_j})\geq c(v_{i_{j-1}+k})+1\geq c(v_{i_{j-1}})+1+kx\geq j+\gamma_{j-1}x+kx\ .$$

Če je $\gamma_j=\gamma_{j-1}$, smo dobili željeno neenakost. Sicer je C_{j-1} velikosti $\ell+1$, torej $k\geq 1$ in neenakost prav tako sledi. S tem smo pomožno trditev dokazali.

Klike $C_0,\ldots,C_{2\ell-1}$ vsebujejo največ $2\ell\cdot\ell+\gamma_{2\ell}$ točk grafa $K(2\ell+2,2)$. Torej $i_{2\ell}\leq 2\ell^2+1+\gamma_{2\ell}$. Sedaj preprosto sledi naslednja ocena:

$$\begin{aligned} c(v_m) &\geq c(v_{i_{2\ell}})+(m-i_{2\ell})\,x \\ &\geq 2\ell+\gamma_{2\ell}x+\big((2\ell^2+3\ell+1)-(2\ell^2+1+\gamma_{2\ell})\big)\,x \\ &\geq 2\ell+3\ell x\ . \end{aligned}$$

S tem je lema dokazana. □

4.3 Velike vrednosti x

V tem razdelku bomo poiskali spodnje in zgornje meje za lambda funkcije grafa $K(n,2)$ za $x \geq 1$. Začnimo z zgornjo mejo za $x \in (1,3)$.

Lema 4.3.1 *Za vsak $n \geq 5$ in $x \in (1,3)$ obstaja $L(x,1)$-barvanje z razponom $\binom{n}{2}-1$ tako, da sta poljubni dve barvi različni celi števili in da sta največji dve $\binom{n}{2}-2$ in $\binom{n}{2}-1$.*

Dokaz. Lemo bomo dokazali z indukcijo po n. Za $n=5$ pobarvamo točke grafa $K(5,2)$ z barvami $0,1,\ldots,9$ v vrstnem redu, ki ustreza sledečemu vrstnemu redu množic:

$$\{*,0\},\{*,1\},\{*,2\},\{*,3\},\{3,2\},\{3,1\},\{3,0\},\{0,1\},\{0,2\} \text{ in } \{1,2\}\,.$$

Ker točki, ki ustrezata množicama $\{0,2\}$ in $\{1,2\}$ nista sosednji, to barvanje zadovoljuje tudi drugo trditev v lemi.

Naj bo sedaj $n>5$. Po indukciji torej vemo, da obstaja $L(x,1)$-barvanje podgrafa $K(n,2)$, imenujmo ga G, ki ga inducirajo točke, katerih množice ne vsebujejo zvezdice. To barvanje ima razpon $\binom{n-1}{2}-1$ in dve nesosednji točki v G sta pobarvani z $\binom{n-1}{2}-2$ in $\binom{n-1}{2}-1$. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da točki pobarvani z barvama $\binom{n-1}{2}-2$ in $\binom{n-1}{2}-1$, pripadata množicama $\{0,2\}$ in $\{0,1\}$ v tem vrstnem redu.

Z barvo $\binom{n-1}{2}+i$ sedaj pobarvamo točko, ki ustreza množici $\{*,i\}$ za $i=0,\ldots,n-2$. Lahko je preveriti, da je tako dobljeno barvanje dejansko $L(x,1)$-barvanje grafa $K(n,2)$ in da sta nesosednji točki $\{*,n-3\}$ in $\{*,n-2\}$ pobarvani z barvama $\binom{n}{2}-2$ in $\binom{n}{2}-1$. $\square$

Določimo sedaj zgornjo mejo za $x \geq 3$.

Lema 4.3.2 *Za vsak $n \geq 5$ in $x \geq 3$ obstaja $L(x,1)$-barvanje grafa $K(n,2)$ z razponom $(n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-1$ tako, da so tri največje barve $(n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-3$, $(n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-2$ in $(n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-1$.*

Dokaz. Postopali bomo podobno kot v dokazu leme 4.3.1. Najprej pobarvamo točke grafa $K(5,2)$ z barvami

$$0, 1, 2, 3, x+1, x+2, x+3, 2x+1, 2x+2 \text{ in } 2x+3$$

v vrstnem redu, ki ustreza sledečemu vstnemu redu množic:

$$\{*,0\}, \{*,1\}, \{*,2\}, \{*,3\}, \{3,2\}, \{3,1\}, \{3,0\}, \{0,1\}, \{0,2\} \text{ in } \{1,2\} .$$

To barvanje zadovoljuje tudi drugo trditev v lemi.

Naj bo $n > 5$. Oglejmo si sedaj $L(x,1)$-barvanje podgrafa $K(n,2)$, ki ga inducirajo točke, katerih množice ne vsebujejo zvezdice, pri katerem so največje tri barve $(n-4)(x-3)+\binom{n-1}{2}-3$, $(n-4)(x-3)+\binom{n-1}{2}-2$ in $(n-4)(x-3)+\binom{n-1}{2}-1$.

Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je točka, ki ustreza množici $\{0,2\}$, pobarvana z barvo $(n-4)(x-3)+\binom{n-1}{2}-2$ in točka, ki ustreza množici $\{0,1\}$, pobarvana z barvo $(n-4)(x-3)+\binom{n-1}{2}-1$. Za $i = 0, \dots, n-2$ pobarvajmo točko, ki ustreza $\{*,i\}$ z barvo $(n-3)(x-3)+\binom{n-1}{2}+i$. Lahko je preveriti, da dobljeno barvanje zadovoljuje trditev iz leme. □

Zaključimo ta razdelek z določitvijo spodnje meje za $x \geq 3$, ki se ujema z zgornjo mejo, ki smo jo dokazali v zgornji lemi.

Lema 4.3.3 *Sledeča neenakost velja za vsak $n \geq 5$ in $x \geq 3$:*

$$\lambda(K(n,2);x,1) \geq (n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-1 .$$

Dokaz. Imejmo $L(x,1)$-barvanje c grafa $K(n,2)$ in naj bo $v_1, \dots, v_m$, $m = \binom{n}{2}$ zaporedje točk tako, da velja $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \cdots \leq c(v_m)$. Naj bo i_1 največji indeks, da točke $v_1, \dots, v_{i_1}$ tvorijo neodvisno množico v $K(n,2)$, i_2 največji indeks, da točke $v_{i_1+1}, \dots, v_{i_2}$ tvorijo neodvisno množico, i_3 največji indeks, da točke $v_{i_2+1}, \dots, v_{i_3}$ tvorijo neodvisno množico in tako naprej.

Končno naj bo $A_j = \{v_{i_{j-1}+1}, \dots, v_{i_j}\}$ za $j = 1, 2, \dots$ (postavimo $i_0 = 0$) in naj bo k število množic A_j.

Imamo dve vrsti neodvisnih množic A_j: tiste, ki ustrezajo zvezdam (poln dvodelen graf z eno točko v eni particiji) v povezavni interpretaciji $K(n,2)$ in tiste, ki ustrezajo trikotnikom. Naj bo k_s število množic prve vrste. Ker je k_s točk polnega grafa velikost n sosednjih s $\frac{k_s(2n-1-k_s)}{2}$ povezavami in vsaka neodvisna množica druge vrste vsebuje tri povezave, dobimo sledečo mejo za k:

$$k \geq k_s + \frac{\binom{n}{2} - \frac{k_s(2n-1-k_s)}{2}}{3} = \frac{k_s^2 - (2n-7)k_s + n^2 - n}{6} .$$

S pomočjo osnovnih analitičnih orodij je preprosto preveriti, da je izraz najmanjši za $k_s \in \{n-4, n-3\}$. Torej velja:

$$k \geq \frac{(n-3)^2 - (2n-7)(n-3) + n^2 - n}{6} = \frac{6n-12}{6} = n-2 .$$

Dokažimo sedaj naslednjo trditev:

Pomožna trditev: *Če je točka v_i, $i \in \{1, \dots, m\}$ vsebovana v A_j, je $c(v_i) \geq (j-1)(x-3) + i - 1$.*

Postopamo z indukcijo po i. Trditev trivalno drži za $i = 1$, saj je $v_1 \in A_1$. Vzemimo točko v_i, $i > 1$. Če sta točki v_{i-1} in v_i vsebovani v isti množici A_j, velja

$$c(v_i) \geq c(v_{i-1}) + 1 \geq (j-1)(x-3) + i - 1,$$

saj se poljubni dve barvi razlikujeta vsaj za ena. Torej lahko za preostanek dokaza privzamemo, da je $v_{i-1} \in A_{j-1}$ in $v_i \in A_j$.

Trdimo, da obstaja $1 \leq i' \leq \min\{3, |A_{j-1}|\}$ tak, da sta točki $v_{i-i'}$ in v_i sosednji (očitno je $v_{i-i'} \in A_{j-1}$). Če je $|A_{j-1}| \leq 3$, trditev sledi direktno iz izbire množice A_{j-1}. Za $|A_{j-1}| > 3$ pa morajo povezave, ki ustrezajo točkam množice A_{j-1}, tvoriti zvezdo v polnem grafu in povezava, ki ustreza v_i, je sosednja največ dvema takima povezavama. Torej mora v_i v $K(n, 2)$ biti sosednja eni od točk v_{i-3}, v_{i-2} in v_{i-1}.

Naj bo i' definiran kot v prejšnjem odstavku. Ker sta točki $v_{i-i'}$ in v_i sosednji, se njuni barvi razlikujeta za vsaj $x \geq 3$ in tako dobimo spodnjo mejo za $c(v_i)$:

$$\begin{aligned} c(v_i) &\geq c(v_{i-i'}) + x \\ &= x + (j-2)(x-3) + (i-i') - 1 \\ &\geq (j-1)(x-3) + i - 1 + 3 - i' \geq (j-1)(x-3) + i - 1 . \end{aligned}$$

S tem smo končali dokaz pomožne trditve.

Končno, ker je $c(v_m)$ vsaj

$$(k-1)(x-3)+m-1 \geq (n-3)(x-3)+\binom{n}{2}-1\ ,$$

trditev iz leme direktno sledi. □

4.4 Osrednji rezultat

Sedaj smo pripravljeni, da dokažemo osrednji izrek.

Izrek 4.4.1 *Za vsak $\ell \geq 2$ so lambda funkcije grafov $K(2\ell+1,2)$ in $K(2\ell+2,2)$ sledeče:*

$$\lambda(K(2\ell+1,2);x,1) = \begin{cases} 2\ell+(\ell-1)x, & x \in [0,1/\ell), \\ (2\ell^2+\ell-1)x, & x \in [1/\ell,1), \\ 2\ell^2+\ell-1, & x \in [1,3), \\ (2\ell-2)x+2\ell^2-5\ell+5, & x \geq 3 \end{cases}$$

in

$$\lambda(K(2\ell+2,2);x,1) = \begin{cases} 2\ell+3\ell x, & x \in [0,1/\ell), \\ (2\ell^2+3\ell)x, & x \in [1/\ell,1), \\ 2\ell^2+3\ell, & x \in [1,3),\ \textit{in} \\ (2\ell-1)x+2\ell^2-3\ell+3, & x \geq 3. \end{cases}$$

Dokaz. Najprej poiščimo lambda funkcije za $x \geq 1$. Naj bo m število točk grafa $K(n,2)$, kjer je n enak $2\ell+1$ ali $2\ell+2$. Ker je $n \geq 5$, sta poljubni dve točki v $K(n,2)$ na razdalji največ dva. Torej je $\lambda(K(n,2);x,1) \geq m-1$. Ta preprosta spodnja meja in lema 4.3.1 določata lambda funkcijo za $x \in [1,3]$. Za $x \geq 3$ imamo zgornjo in spodnjo mejo v lemah 4.3.2 in 4.3.3, ki se ujemata.

Dalje postopamo ločeno za primera $K(2\ell+1,2)$ in $K(2\ell+2,2)$. Začnimo z določitvijo preostanka lambda funkcije za $K(2\ell+1,2)$. Spomnimo se, da je v tem primeru $m=\binom{2\ell+1}{2}$. Za $x \in [0,1/\ell)$ je vrednost $\lambda(K(2\ell+1,2);x,1)$ vsaj $2\ell+(\ell-1)x$ po lemi 4.2.3. Za zgornjo mejo konstruirajmo zaporedje točk $v_1,\ldots,v_m$, kot je opisano v lemi 4.2.1 in pobarvajmo točko v_i z barvo $(i-1)x+\lfloor (i-1)/\ell \rfloor (1-\ell x)$.

To barvanje si lahko predstavljemo takole: točke v zaporedju tvorijo ℓ klik velikosti $2\ell+1$ in i-ta točka v k-ti kliki je pobarvana z barvo $k+(i-1)x$.

Dalje trdimo, da je to barvanje pravo. Vzemimo dve točki v_i in v_j, $1 \le i < j \le m$. Za $j-i<\ell$ sta točki v_i in v_j sosednji, saj smo konstruirali tako zaporedje. Ker se njuni barvi razlikujeta vsaj za x, je povezava v_iv_j dobro pobarvana. Sicer je $j-i \ge \ell$ in barvi se razlikujeta za vsaj ena in spet je povezava dobro pobarvana. Iz

$$c(v_m) = (m-1)x + \left\lfloor \frac{m-1}{\ell} \right\rfloor (1-\ell x) = (2\ell^2+\ell-1)x + 2\ell(1-\ell x) = 2\ell + (\ell-1)x,$$

sledi zgornja meja.

Naj bo $x \in [1/\ell, 1)$. Ker se morata barvi poljubnih dveh točk razlikovati za vsaj x, velja:

$$\lambda(K(2\ell+1,2);x,1) \ge (m-1)x = (2\ell^2+\ell-1)x\ .$$

Za zgornjo mejo vzemimo zaporedje točk $v_1,\ldots,v_m$, kot v lemi 4.2.1 in obarvajmo točko v_i z barvo $(i-1)x$. Dokaz, da je to barvanje pravo, je enak dokazu v prejšnjem odstavku.

Določiti moramo še preostanek lambda funkcije za $K(2\ell+2,2)$. V tem primeru je $m = \binom{2\ell+2}{2}$. Za $x \in [0,1/\ell)$ je vrednost $\lambda(K(2\ell+2,2);x,1)$ vsaj $2\ell+3\ell x$ po lemi 4.2.4. Za zgornjo mejo vzemimo zaporedje točk $v_1,\ldots,v_m$, kot smo ga opisali v lemi 4.2.2 in obarvajmo točko v_i z barvo $(i-1)x + \lfloor (i-1)/(\ell+1) \rfloor (1-\ell x)$. Barvanje lahko predstavimo z ozirom na dokaz leme 4.2.2 tako: i-ta točka v bloku B_k je obarvana z barvo $k(1+x)+(i-1)x$ (tako kot v dokazu leme).

Oglejmo si dobljeno barvanje. Za $1 \le i < j \le m$ se barvi dveh točk v_i in v_j razlikujeta vsaj za ena, če je $j-i>\ell$. Če je $j-i<\ell$, sta točki v_i in v_j sosednji in zaradi izbire vrstnega reda, se njuni barvi razlikujeta vsaj za x. Torej je povezava v_iv_j dobro obarvana. Za $j-i=\ell$ in $i \equiv 1 \pmod{\ell+1}$ sta točki v_i in v_j prav tako sosednji in povezava v_iv_j je spet dobro obarvana. Končno, če je $i \not\equiv 1 \pmod{\ell+1}$, se barvi v_i in v_j razlikujeta vsaj za ena. Torej lahko zaključimo, da je to barvanje dobro $L(x,1)$-barvanje grafa $K(2\ell+1,2)$. Iz

$$c(v_m) = (m-1)x + \left\lfloor \frac{m-1}{\ell+1} \right\rfloor (1-\ell x) = (2\ell^2+3\ell)x + 2\ell(1-\ell x) = 2\ell + 3\ell x,$$

sledi zgornja meja.

Oglejmo si še primer, ko je $x \in [1/\ell, 1)$. Ker se barvi poljubnih dveh točk razlikujeta vsaj za x, lahko sklepamo, da je:

$$\lambda(K(2\ell + 2, 2); x, 1) \geq (m - 1)x = (2\ell^2 + 3\ell)x \ .$$

Za zgornjo mejo vzamemo zaporedje točk $v_1, \ldots, v_m$ iz leme 4.2.2 in točki v_i dodelimo barvo $(i-1)x$. Dokaz, da je to barvanje dobro, je enak dokazu v prejšnjem odstavku. $\square$

Poglavje 5

Poti, cikli in kolesa

5.1 Poti

V tem poglavju bomo določili lambda funkcije za poti poljubne dolžine:

Izrek 5.1.1 *Za realen $x \geq 0$ velja:*

$$\begin{aligned}
\lambda(P_2; x, 1) &= x, \\
\lambda(P_3; x, 1) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+1, & x \geq 1, \end{cases} \\
\lambda(P_4; x, 1) &= k+1, \\
\lambda(P_5; x, 1) = \lambda(P_6; x, 1) &= \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x+2, & x \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Za $n \geq 7$,

$$\lambda(P_n; x, 1) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 2, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x+2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Dokaz bomo razdelili na več podpoglavij.

5.1.1 Kratke poti

Poimenujmo točke v poti P_n po vrsti z enega konca z $v_1, \ldots, v_n$. Izrek je za P_2 očiten, saj je to ena sama povezava med točkama. Oglejmo si torej P_3.

Trditev 5.1.2 *Za realen $x \geq 0$ velja:*

$$\lambda(P_3; x, 1) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornjo mejo pokažemo z barvanjem f:

$$(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) = \begin{cases} (0, x, 1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (0, x, 2x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ (0, x+1, 1), & x \geq 1. \end{cases}$$

Pokazali bomo, da je to tudi spodnja meja. Predpostavimo, da je f optimalno barvanje z najmanjšo barvo nič kot v izreku o D-množici. Zaradi pogoja na razdaljo dva, mora biti $f(v_1)$ ali $f(v_2) \geq 1$. Torej je $\lambda(P_3; x, 1) \geq 1$, kar nam da željeno spodnjo mejo na intervalu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Pomožna trditev 1 *Za $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ je $\lambda(P_3; x, 1) \geq 2x$.*

Dokaz. Barvi poljubnih dveh točk izmed treh v P_3 se morata razlikovati vsaj za x in tako mora biti razpon tega barvanja vsaj $2x$, kar dokazuje pomožno trditev.

Pomožna trditev 2 *Za $x \geq 1$ je $\lambda(P_3; x, 1) \geq x + 1$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $\lambda(P_3; x, 1) = l \leq x + 1$. Zaradi izreka o D-množici lahko predpostavimo, da sta vsaj dve od treh barv manjša od x, saj lahko sicer f nadomestimo z $l - f(v)$ za vse točke v. Zaradi pogoja na razdaljo ena točke z barvo manjšo od x ne morejo biti sosednje in tako velja $f(v_1), f(v_3) \leq x$. Zaradi pogoja na razdaljo dva je $f(v_1)$ ali $f(v_3) \geq 1$. Torej je $f(v_2) \geq x + 1$, kar je protislovje s predpostavko $l \leq x + 1$, ki dokazuje pomožno trditev.

S tem smo dokazali trditev 5.1.2. □

Trditev 5.1.3 *Za realen $x \geq 0$ velja:*

$$\lambda(P_4; x, 1) = x + 1.$$

Dokaz. Zgornjo mejo pokažemo z barvanjem $(f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)) = (x, 0, x + 1, 1)$. Pokazali bomo, da je to tudi spodnja meja. Za $x \geq 1$ imamo $\lambda(P_4; x, 1) \geq \lambda(P_3; x, 1) = x + 1$, kot smo želeli. Preostane nam še dokaz za majhne x. Dovolj je dokazati spodnjo mejo $x + 1$ za $0 < x < 1$, saj bo meja za $x = 0$ sledila zaradi zveznosti funkcije λ.

Pomožna trditev 3 *Za* $0 < x < 1$ *je* $\lambda(P_4; x, 1) \geq x + 1$.

Dokaz. Privzemimo nasprotno, da je $l = \lambda(P_4; x, 1) < x + 1$ za nek x in naj bo f optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici.

Naj bo $f(v_2) < 1$. Če je $f(v_2) = 0$, morata biti obe $f(v_1)$ in $f(v_2) \geq x$ zaradi pogoja na razdaljo ena. Torej mora biti večja od njiju večja ali enaka $k + 1$, kar nasprotuje privzetku o l. Torej mora biti $f(v_2)$ oblike $i\,x$ za neko celo število $i > 0$ (saj je v $D(k, 1)$ in $x < 1$). Potem mora biti $f(v_4)$ vsaj $i\,x + 1 \geq x + 1$, kar spet nasprotuje privzetku $l < x + 1$.

Torej mora biti $f(v_2) \geq 1$. Definirajmo sedaj komplementarno barvanje f' kot $f'(v) = l - f(v)$. Čeprav f' je optimalno $L(x, 1)$-barvanje, morda ni tako, kot v izreku o D-množici (z vsemi barvami v $D(x, 1)$). Lahko pa dobimo tako barvanje, recimo mu f'', kot v dokazu izreka o D-množici 3.2.3: za vsak v naj bo $f''(v)$ največji element $D(x, 1)$, ki je manjši ali enak $f'(v)$. Sedaj velja $f''(v) \leq f'(v) = l - f(v) \leq l - 1 < k < 1$ in spet pridemo v protislovje, kar dokazuje pomožno trditev.

S tem je trditev 5.1.3 dokazana. $\square$

Trditev 5.1.4 *Za realen $x \geq 0$ velja:*

$$\lambda(P_5; x, 1) = \lambda(P_6; x, 1) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x + 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Dokaz. Oba grafa imata enak razpon. Za zgornjo mejo je dovolj poiskati barvanje za P_6: Naj bo $c = (f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4), f(v_5), f(v_6))$ barvanje točk poti. Tedaj je

$$c = \begin{cases} (x+1, x, 0, x+1, 1, 0), & 0 \leq x \leq 1, \\ (0, x, 2x, 0, x, 2x), & 1 \leq x \leq 2, \\ (0, x+1, 1, x+2, 0, x+1), & x \geq 2, \end{cases}$$

dobro barvanje, kar je preprosto preveriti. Preostane nam še dokaz spodnje meje za P_5. Za $0 \leq x \leq 1$ uporabimo $\lambda(P_5; x, 1) \geq \lambda(P_4; x, 1) = x + 1$. Sedaj vzemimo x med 1 in 2:

Pomožna trditev 4 *Za $1 \leq x \leq 2$ je $\lambda(P_5; x, 1) \geq 2x$.*

Dokaz. Privzemimo, da je $L = \lambda(P_5; x, 1) < 2x$ in naj bo f optimalno barvanje kot v izreku o D-množici. Predpostavimo lahko, da sta vsaj dve od treh barv $f(v_2), f(v_3), f(v_4)$ manjši od x (saj lahko barvanje sicer nadomestimo s komplementarnim barvanjem, kot v dokazu pomožne trditve 3). Zaradi pogojev na razdaljo ena ti dve točki ne moreta biti sosednji in tako sta $f(v_2)$ in $f(v_3)$ obe manjši od x in se razlikujeta vsaj za 1. Večja od obeh barv, recimo $f(v_2)$, potem zadostuje pogoju $1 \leq f(v_2) < x$. Torej $f(v_1), f(v_3) \geq x + 1$. Zaradi pogoja na razdaljo dva je $f(v_1)$ ali $f(v_3) \geq x + 2 \geq 2x$, kar je protislovje z $l < 2x$ in pomožna trditev sledi.

Pomožna trditev 5 *Za $x \geq 2$ je $\lambda(P_5; x, 1) \geq x + 2$.*

Dokaz. Privzemimo nasprotno, da je $l = \lambda(P_5; x, 1) < x + 2$ in naj bo f optimalno barvanje kot v izreku o D-množici. Enak postopek kot v dokazu pomožne trditve 4 vodi do $f(v_1)$ ali $f(v_3) \geq x + 2$, kar je protislovje, ki dokazuje pomožno trditev.

S tem je trditev 5.1.4 dokazana. $\square$

5.1.2 Dolge poti

Trditev 5.1.5 *Naj bo $n \geq 7$. Za realen $k \geq 0$ je*

$$\lambda(P_n; x, 1) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 2, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ x+2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo c barvanje točk poti. Glede na velikost x ponavljamo podčrtan vzorec, dokler ne obarvamo vsega P_n in dosežemo optimalnih razponov iz trditve:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x+1, 1, x}, \ldots), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (\underline{0, x, 2x, 3x}, \ldots), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ (\underline{0, 1, 2}, \ldots), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \\ (\underline{0, x, 2x}, \ldots), & 1 \leq x \leq 2, \\ (\underline{0, x+1, 1, x+2}, \ldots), & x \geq 2. \end{cases}$$

Spodnjo mejo dobimo direktno iz spodnje meje za P_5, razen za interval $\frac{1}{2} < x < 1$. Dalje je lahko preveriti, da je za $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ presek $(x+1, 3x) \cap D(x, 1) = \emptyset$ in za $\frac{2}{3} < x < 1$ $(x+1, 2) \cap D(x, 1) = \emptyset$. Zaradi izreka o D-množici je dovolj dokazati sledečo lemo:

Pomožna trditev 6 *Za $\frac{1}{2} < x < 1$ je $\lambda(P_7; x, 1) > x + 1$.*

Dokaz. Za nek x privzemimo, da je $l = \lambda(P_7; x, 1) \leq x + 1$ in naj bo f optimalno barvanje kot v izreku o D-množici. Privzamemo lahko, da sta vsaj dve izmed treh barv $f(v_3), f(v_4), f(v_5) < 1$ (sicer konstruiramo komplementarno barvanje f'' kot v dokazu pomožne trditve 3). Ti dve barvi ne moreta biti na razdalji dve in tako lahko privzamemo, da sta s tema barvama pobarvani točki v_3 in v_4 (sicer obrnemo smer številčenja na P_7). Sedaj moramo obdelati le še točke od v_1 do v_6. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da je $f(v_3) > f(v_4)$ in tako $f(v_3) \geq x$. Ker je $f(v_3) < 1$, pogoj na razdaljo dve prisili $f(v_1) \geq f(v_3) + 1 \geq x + 1$. Zaradi razpona f mora biti $f(v_1) = x+1$, kar prisili $f(v_3) = x$ in $f(v_4) = 0$. Potem v_1 prisili $f(v_2) \leq 1$, medtem ko v_3 in v_4 prisilita $f(v_2) > 1$, kar pa je protislovje in dokazuje pomožno trditev.

S tem smo končali dokaz trditve. □

Tako je izrek 5.1.1 dokazan.

5.2 Cikli

Izrek 5.2.1 *Za realen $x \geq 0$ velja:*

$$\begin{aligned}
\lambda(C_3; x, 1) &= 2x, \\
\lambda(C_4; x, 1) &= \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+2, & x \geq 1, \end{cases} \\
\lambda(C_4; x, 1) &= \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x \geq 2, \end{cases}
\end{aligned}$$

Za $n \geq 6$ je:

$\lambda(C_n; x, 1)$	$n \equiv 0 \pmod 4$	$n \not\equiv 0 \pmod 4$
$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$	$x+1$	2
$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$	$3x$	2

$\lambda(C_n; x, 1)$	$n \equiv 0 \pmod 3$	$n \not\equiv 0 \pmod 3$
$\frac{2}{3} \leq x \leq 1$	2	$3x$
$1 \leq x \leq 2$	$2x$	$x+2$

$\lambda(C_n; x, 1)$	$n \equiv 0 \pmod 4$	$n \equiv 2 \pmod 4$	$n \not\equiv 1$ *ali* $3 \pmod 4$
$2 \leq x \leq 3$	$x+2$	$2x$	$2x$
$x \geq 3$	$x+2$	$x+3$	$2x$

Dokaz bomo razdelili na več podpoglavij.

5.2.1 Kratki cikli

Imenujmo točke cikla C_n po vrsti, kot si sledijo na ciklu $v_1, \ldots, v_n$. Izrek je trivialen za trikotnik C_3, za katerega je optimalno barvanje $(0, x, 2x)$. Dokaz za C_4 in C_5 bomo podali v naslednjih dveh trditvah.

Trditev 5.2.2 *Za realen $x \geq 0$ je*

$$\lambda(C_4; x, 1) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornjo mejo dobimo z barvanjem

$$(f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)) = \begin{cases} (0, x, 1, x+1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (0, x, 2x, 3x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ (0, x+1, 1, x+2), & x \geq 1. \end{cases}$$

Za spodnjo mejo vzemimo optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici. Naj bo $f(v_1) = 0$. Pogoji na razdalje prisilijo $f(v_2), f(v_3), f(v_4) \geq \min\{x, 1\}$. Razpon med $\{f(v_2), f(v_3), f(v_4)\}$ je večji ali enak $\lambda(P_3; x, 1)$ in tako je $\lambda(C_4; x, 1) \geq \lambda(P_3; x, 1) + \min\{x, 1\}$. Če sedaj uporabimo izrek 5.1.1, dobimo željeno mejo. □

Trditev 5.2.3 *Za realen $x \geq 0$ je*

$$\lambda(C_5; x, 1) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 4, & 1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornjo mejo pokažemo z barvanjem

$$c = \begin{cases} (0, x, 1, x+1, 2), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (0, x, 2x, 3x, 4x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ (0, 2, 4, 1, 3), & 1 \leq x \leq 2, \\ (0, x, 2x, 1, x+1), & x \geq 2. \end{cases}$$

Pokazali bomo, da je to tudi spodnja meja. Naj bo f optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici.

Lema 5.2.4 *Za* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ *je* $\lambda(C_5; x, 1) \geq 2$.

Dokaz. Med poljubnimi tremi točkami v C_5 sta dve na razdalji dve in tako imata največ dve točki barvi $f(v)$ v intervalu $[0, 1)$. Podobno imata največ dve točki barvi v intervalu $[1, 2)$. Torej mora neka točka imeti barvo večjo ali enako 2 in tako je razpon barvanja f večji ali enak 2, kar dokazuje lemo. □

Lema 5.2.5 *Velja:*

$$\lambda(C_5; x, 1) \geq \begin{cases} 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 4, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Pogoji na razdalje nam dajo, da se poljubni dve barvi razlikujeta za vsaj x in tako je razpon vsaj $4x$ kot smo želeli. Za $x \geq 1$ je $\lambda(C_5; x, 1) \geq \lambda(C_5; 1, 1) \geq 4$, kar dokazuje lemo. □

Lema 5.2.6 *Za* $x \geq 2$ *je* $\lambda(C_5; x, 1) \geq 2x$.

Dokaz. Med poljubnimi tremi točkami sta dve sosednji. Tako nam pogoji na razdalje dajo, da imata največ dve točki barvi v intervalu $[0, x)$. Podobno imata največ dve točki barvi v intervalu $[x, 2x)$. Torej mora neka točka imeti barvo večjo ali enako $2x$ in tako je razpon barvanja f večji ali enak $2x$, kar dokazuje lemo. □

S tem je trditev dokazana. □

5.2.2 Dolgi cikli - zgornje meje

Preostane nam obdelati še C_n za $n \geq 6$. Sledeča trditev nam bo podala barvanja, ki dosežejo željene meje.

Trditev 5.2.7 *Naj bo* $n \geq 6$. *Za realen* $x \geq 0$ *obstajajo barvanja, ki dosežejo razpone iz izreka 5.2.1.*

Dokaz. To so barvanja c glede na velikost x in $n \mod 3$ in $\mod 4$. Podčrtani del ponavljamo, dokler je potrebno.

Za $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x, 1, x+1}), & n \equiv 0 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \underline{0, x, 1, 2}), & n \equiv 1 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, 0, 1, 2, \underline{0, x, 1, 2}), & n \equiv 2 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, \underline{0, x, 1, 2}), & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Za $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x, 2x, 3x}), & n \equiv 0 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \underline{0, x, 2x, 2}), & n \equiv 1 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, 0, 1, 2, \underline{0, x, 2x, 2}), & n \equiv 2 \pmod 4, \\ (0, 1, 2, \underline{0, x, 2x, 2}), & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Za $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, 1, 2}), & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (0, x, 2x, 3x, \underline{0, 1, 2}), & n \equiv 1 \pmod 3, \\ (0, x, 2x, 3x, 0, x, 2x, 3x, \underline{0, 1, 2}), & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Za $1 \leq x \leq 2$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x, 2x}), & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (0, x+1, 1, x+2, \underline{0, x, x+2}), & n \equiv 1 \pmod 3, \\ (0, x+1, 1, x+2, 0, x+1, 1, x+2, \underline{0, x, x+2}), & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Za $2 \leq x \leq 3$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 0 \pmod 4, \\ (0, x, 2x, 0, x, 2x, 0, x, 2x, \underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 1 \pmod 4, \\ (0, x, 2x, 0, x, 2x, \underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 2 \pmod 4, \\ (0, x, 2x, \underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Za $x \geq 3$:

$$c = \begin{cases} (\underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 0 \pmod 4, \\ (0, x, 2x, 0, x, 2x, 0, x, 2x, \underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 1 \pmod 4, \\ (0, x+1, 1, x+2, 2, x+3\underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 2 \pmod 4, \\ (0, x, 2x, \underline{0, x+1, 1, x+2}), & n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

□

5.2.3 Dolgi cikli - spodnje meje

Preostanejo nam dokazi spodnjih mej za $n \geq 7$. Naj bo f optimalno barvanje kot v izreku o D-množici. Začnimo s primerom $x \leq \frac{2}{3}$, ki se razdeli na dva dela glede na $n \pmod 4$. Če je $n \equiv 0 \pmod 4$, je $n \geq 8$ in C_n vsebuje inducirano pot P_7. Torej velja $\lambda(C_n; x, 1) \geq \lambda(P_7; x, 1)$, kar je željen rezultat, $x + 1$ za $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ in $3x$ za $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$. Poglejmo sedaj ostale vrednosti n.

Trditev 5.2.8 *Naj bo $n \geq 7$ in $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Za $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ so razponi v izreku 5.2.1 najmanjši možni.*

Dokaz. Dovolj je dokazati spodnjo mejo 2 za $x = 0$. Predpostavimo nasprotno, da je za nek n, $l = \lambda(C_n; 0, 1) < 2$. Potem za vsako točko v_i velja, da je njena barva $f(v_i)$ ali v intervalu $[0, 1)$ ali v intervalu $[1, 2)$. Ker točki na razdalji dva ne moreta imeti barv v istem intervalu dolžine ena, si morajo barve v ciklu slediti v zaporedju: dve barvi v intervalu $[0, 1)$, nato dve barvi v intervalu $[1, 2)$ in tako dalje. To pa je možno le, če 4 deli n, kar je protislovje in dokaz trditve. □

Trditev 5.2.9 *Naj bo $n \geq 7$ in $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Za $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ je $\lambda(C_n; x, 1) \geq 3x$.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da za nek x in nek n velja $\lambda(C_n; x, 1) < 3x$. Vsaka barva $f(v_i)$ je v enem od intervalov $[0, x), [x, 2x), [2x, 3x)$ in poljubni dve barvi na razdalji dva nista v istem intervalu. Torej vsak od teh intervalov vsebuje največ $\lfloor n/3 \rfloor$ točk, kar pa je manj kot $n/3$, saj $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Torej nismo obarvali vseh točk, kar je protislovje in dokaz trditve. □

Naslednji interval je $1 \leq x \leq 2$. Spodnja meja za cikle C_n pri $n \geq 6$ in $n \equiv 0 \pmod 3$ sledi iz razpona za P_5, ki je $2x$ na tem intervalu. Obdelati moramo še ostale vrednosti n:

Trditev 5.2.10 *Naj bo $n \geq 6$ in $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Za $1 \leq x \leq 2$ je $\lambda(C_n; x, 1) \geq x + 2$.*

Dokaz. Barvi manjši od 1 ne moreta biti na razdalji manjši od tri. Takih barv je lahko največ $\lfloor n/3 \rfloor \le n/3$. Torej obstajajo tri zaporedne točke z barvami večjimi ali enakimi 1. Z uporabo razpona za $\lambda(P_3; x, 1) = x + 1$ dobimo, da je razpon barvanja f vsaj $x + 2$. □

Poglejmo sedaj velike vrednosti $x \ge 2$. Ponovno dobimo spodnje meje iz razpona za P_5, ki je $x + 2$ na tem intervalu. To je meja, ki jo želimo za $n \equiv 0 \pmod 4$. Za ostale $n \ge 6$ moramo mejo izboljšati.

Trditev 5.2.11 *Naj bo $n \ge 6$ in $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Za lih n in $x \ge 2$ velja $\lambda(C_n; x, 1) \ge 2x$. Za sod n je $\lambda(C_n; x, 1) \ge 2x$ za $2 \le x \le 3$ in $\lambda(C_n; x, 1) \ge x + 2$ za $x \ge 3$.*

Dokaz. Najprej vzemimo lih $n \ge 6$ in $x \ge 2$. Poljubni sosednji točki ne moreta imeti barv, ki se razlikujeta za manj kot x, torej je število točk z barvami v $[0, x)$ največ $\lfloor n/2 \rfloor < n/2$ in isto velja za točke z barvami v $[x, 2x)$. Torej mora neka točka biti obarvana z barvo večjo ali enako $2x$ in tako je razpon barvanja f vsaj $2x$.

Naj bo sedaj $n \ge 6$ sod in $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Naj bo $r = n/2$, ki je očitno lih. Pokazati moramo, da je $\lambda(C_n; x, 1) \ge \min\{2x, x + 3\}$ za $x \ge 2$. Predpostavimo, da ni tako, recimo $l = \lambda(C_n; x, 1) < \min\{2x, x + 3\}$. S sklepanjem, kot pri lihem n, ugotovimo, da je $n/2$ barv v vsakem od intervalov $[0, x)$ in $[x, l)$ (saj je $l < 2x$) in da alternirajo med intervaloma. Če pogledamo r barv v $[0, x)$ v vrstnem redu, kot si sledijo na ciklu, ugotovimo, da se zaporedni dve, ki sta na razdalji dva na C_n razlikujeta za vsaj ena. Ker je r lih, je neka barva v $[0, x)$ vsaj 2. Njeni sosedi na C_n imata "veliki barvi"(vsaj x). Zaradi pogojev na razdalje imata sosedi barvi večji od $x + 2$ in večja med njima je vsaj $x + 3$. Torej je razpon barvanja f vsaj $x + 3$, kar nasprotuje predpostavki o l in dokazuje trditev. □

S tem je dokaz izreka 5.2.1 končan.

5.3 Kolesa

Izrek 5.3.1 *Za realen $x \ge 0$ velja:*

$$\lambda(W_3; x, 1) = 3x,$$

$$\lambda(W_4; x, 1) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 4x, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ 2x+2, & x \geq 1, \end{cases}$$

Za lih $n \geq 5$,

$$\lambda(W_n; x, 1) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3x + \frac{n-3}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ nx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+n-1, & 1 \leq x \leq \frac{n-1}{2}, \\ 2x, & x \geq \frac{n-1}{2}, \end{cases}$$

Za sod $n \geq 5$,

$$\lambda(W_n; x, 1) = \begin{cases} x + \frac{n}{2} - 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 4x + \frac{n}{2} - 2, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ nx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+n-1, & 1 \leq x \leq \frac{n}{2} - 1, \\ 2x + \frac{n}{2}, & x \geq \frac{n}{2} - 1. \end{cases}$$

Dokaz. Čeprav je kolo W_n zelo sorodno ciklu C_n, nam dodatna točka zmanjša diameter na samo dva, kar očitno zelo močno vpliva na razdaljna barvanja. V resnici to pomeni, da se morata barvi poljubnih dveh točk v $L(x, 1)$-barvanju razlikovati za vsaj $\min\{x, 1\}$.

Kot v prejšnjem poglavju označimo točke, kot si sledijo v n-ciklu C_n z $v_1, \ldots, v_n$ in dodatno točko - središče kolesa označimo z v_0. Ker je W_3 v resnici poln graf K_4 ima razpon $3x$. Dalje si oglejmo W_4:

Trditev 5.3.2 *Za realen $x \geq 0$ je*

$$\lambda(W_4; x, 1) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 2x+2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornje meje dobimo s sledečimi barvanji f, v katerih najprej podamo barvo središča $f(v_0)$, ki ji sledi podpičje in nato barve točk, kot si sledijo na n-ciklu:

$$f = \begin{cases} (2x; 0, x, 1, x+1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (2x; 0, x, 3x, 4x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ (0; x, 2x+1, x+1, 2x+2), & x \geq 1. \end{cases}$$

Preveriti moramo, da so to tudi spodnje meje za vse x. Za $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ imamo $\lambda(W_4; x, 1) \geq \lambda(C_4; x, 1) = x + 1$.

Za $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ se morata poljubni barvi razlikovati vsaj za x in tako je razpon vsaj $4x$. Preostanjeo nam še veliki x:

Lema 5.3.3 *Za $x \geq 1$ je $\lambda(W_4; x, 1) \geq 2x + 2$.*

Dokaz. Naj bo f optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici. Poljubne tri točke v W_4 ali inducirajo pot P_3, ki ima razpon $x+1$, ali cikel C_3, ki ima razpon $2x \geq x+1$. Torej imata največ dve točki barvi v intervalu $[0, x + 1)$ in največ dve točki imata barvi v intervalu $[x + 1, 2x + 2)$. Torej je neka barva in zato razpon vsaj $2x + 2$, kar dokazuje lemo. □

S tem je dokazana trditev. □

Za $n \geq 5$ bomo razdelili dokaz glede na parnost n.

Trditev 5.3.4 *Naj bo $n \geq 5$ liho celo število. Za $x \geq 0$ je*

$$\lambda(W_n; x, 1) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3x + \frac{n-3}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ nx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x + n + 1, & 1 \leq x \leq \frac{n-1}{2}, \\ 3x, & x \geq \frac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornje meje dobimo z barvanji f, kjer je $f(v_0)$ napisana prva:
Za $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$:

$$(2x; 0, x, 1, x + 1, 2, x + 2, 3, x + 3, \ldots, \frac{n-3}{2}, x + \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2})$$

Za $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$:

$$(2x; 0, x, 3x, 4x, 3x + 1, 4x + 1, 3x + 2, 4x + 2, \ldots, 4x + \frac{n-5}{2}, 3x + \frac{n-3}{2})$$

Za $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$:

$$(0; x, 2x, 3x, \ldots, nx)$$

Za $1 \leq x \leq \frac{n-1}{2}$:

$$(0; x, x+\frac{n+1}{2}, x+1, x+\frac{n+3}{2}, x+2, x+\frac{n+5}{2}, \ldots, x+\frac{n-3}{2}, x+n-1, x+\frac{n-1}{2})$$

Za $x \geq \frac{n-1}{2}$:

$$(0; x, 2x+1, x+1, 2x+2, x+2, 2x+3, \ldots, x+\frac{n-5}{2}, 2x+\frac{n-3}{2}, x+\frac{n-3}{2}, 3x, 2x).$$

Preveriti moramo, da so to tudi spodnje meje. Naj bo f optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici. Začnimo z majhnimi x:

Lema 5.3.5 *Naj bo $n \geq 5$ lih. Za $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq \frac{n-1}{2}$.*

Dokaz. Poljubne tri izmed n točk na zunanjem ciklu ne morejo imeti barv v istem intervalu $[i, i+1)$, saj sta dve točki izmed poljubnih treh na razdalji dva v W_n. Torej ima neka točka barvo izven intervala $[0, \frac{n-1}{2})$ in je tako razpon f vsaj $\frac{n-1}{2}$, kar je dokaz leme. □

Lema 5.3.6 *Naj bo $n \geq 5$ lih. Za $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq 3x + \frac{n-3}{2}$.*

Dokaz. Zaradi pogojev na razdalje so vse točke z barvami znotraj $[0, 1)$ paroma sosednje. Take točke so največ tri in če so tri, je ena izmed njih središče v_0 (in $x < \frac{1}{2}$). Enako velja za vse intervale $I_i := [i, i+1)$ pri $0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$. To pomeni, da je lahko največ n točk z barvami v $[0, \frac{n-1}{2})$ in tako imamo neko točko w z barvo večjo ali enako $\frac{n-1}{2}$. Če imamo dve točki s takima barvama, je večja izmed njiju večja ali enaka $x + \frac{n-1}{2} \geq 3x + \frac{n-3}{2}$, kar je željena meja. Če pa imamo samo eno tako točko, moramo graf pogledati bolj podrobno: Nek interval $[j, j+1)$ mora vsebovati barve treh točk (ena od teh je v_0), ostali intervali pa vsebujejo le po dve točki. Največja barva v $[j, j+1)$ je vsaj $2x + j$. Barvi v $[j+1, j+2)$ sta potem vsaj za k večji, torej $3x + j$. Barvi v $[j+2, j+3)$ sta vsaj $3x + j + 1$, saj ustrezata točkama na n-ciklu na razdalji dva od ene ali pa obeh točk z barvama v intervalu $[j+1, j+2)$. S ponavljanjem tega sklepa dobimo, da je barva $f(w) \geq 3x + \frac{n-3}{2}$, kar dokazuje lemo. □

Za $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ je zelo preprosto pokazati spodnjo mejo: Poljubni dve točki imata barvi vsaj za x narazen (saj $x \leq 1$). Imamo $n+1$ točk in tako je razpon vsaj nx.

Za $1 \leq x \leq \frac{n-1}{2}$ se barvi poljubnih dve točk v nekem optimalnem barvanju (kot v izreku o D-monžici) razlikujeta vsaj za $\min\{x, 1\} = 1$. Predpostavimo, da so barve $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Ker je v_0 sosednja vsaki drugi točki, obstaja tak i, da je $x_{i+1} - x_i \geq x$ in tako je razpon $x_n \geq x + n - 1$, kot trdi lema.

Za konec preverimo še velike x:

Lema 5.3.7 *Naj bo $n \geq 5$ lih. Za $x \geq \frac{n-1}{2}$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq 3x$.*

Dokaz. **Dokaz leme 4.** Ker ima W_n premer dva, poljubni sosednji točki ne moreta imeti barv znotraj $[0, x)$. To pomeni, da točke z barvami znotraj $[0, x)$ tvorijo neodvisno množico in isto velja za intervala $[x, 2x)$ in $[2x, 3x)$. Kromatično število kolesa W_n je 4 in tako moramo imeti barvo večjo ali enako $3x$ in tako je $\lambda(W_n; x, 1) \geq 3x$, kar potrjuje lemo. □

S tem smo dokazali trditev. □

S končanim dokazom za lih n nam preostane primer, ko je $n \geq 5$ sod.

Trditev 5.3.8 *Naj bo $n \geq 5$ sodo celo število. Za $x \geq 0$ je*

$$\lambda(W_n; x, 1) = \begin{cases} x + \frac{n}{2} - 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 4x + \frac{n}{2} - 2 & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ nx & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x + n + 1 & 1 \leq x \leq \frac{n}{2} - 1, \\ 2x + \frac{n}{2} & x \geq \frac{n}{2} - 1. \end{cases}$$

Dokaz. Zgornje meje dobimo z barvanji f, kjer je $f(v_0)$ napisana prva:
Za $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$: $(2x; 0, x, 1, x+1, 2, x+2, 3, x+3, \ldots, \frac{n}{2} - 1, x + \frac{n}{2} - 1)$;
Za $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$: $(2x; 0, x, 3x, 4x, 3x+1, 4x+1, 3x+2, 4x+2, \ldots, 3x+\frac{n}{2}-2, 4x+\frac{n}{2}-2)$;
Za $\frac{1}{2} - 1 \leq x \leq 1$: $(0; x, 2x, 3x, \ldots, nx)$;
Za $1 \leq x \leq \frac{n}{2} - 1$: $(0; x, x+\frac{n}{2}, x+1, x+\frac{n}{2}+1, x+2, x+\frac{n}{2}+2, \ldots, x+\frac{n}{2}-1, x+n-1)$;
Za $x \geq \frac{n-1}{2}$: $(0; x, 2x+1, x+1, 2x+2, x+2, 2x+3, \ldots, x+\frac{n}{2}-1, 2x+\frac{n}{2})$.

Pokažimo sedaj, da so formule zgoraj tudi spodnje meje. Kot po navadi, naj bo f optimalno barvanje, kot v izreku o D-množici. Začnimo z majhnimi x:

Lema 5.3.9 *Naj bo $n \geq 5$ sod. Za $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq x + \frac{n}{2} - 1$.*

Dokaz. Največ ena točka ima barvo znotraj $[0, x)$, saj ima W_n premer dva. Za sod i imajo vse točke v neodvisni množici $I := \{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{n-1}\}$ barve večje ali enake x. Za lih i vzamemo $I := \{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_n\}$. Poljubni dve točki v I sta na razdalji dva in tako se njuni barvi razlikujeta vsaj za ena. Torej imajo barve v I razpon vsaj $|I| - 1$ in razpon f je vsaj $x + |I| - 1 = x + \frac{n}{2} - 1$, kar dokazuje lemo. □

Lema 5.3.10 *Naj bo $n \geq 5$ sod. Za $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq 4x + \frac{n}{2} - 2$.*

Dokaz. Zaradi dokazane zgornje meje ima f razpon največ $\frac{n}{2}$ (pomnimo, da je $x \leq \frac{1}{2}$). Podobno kot v dokazu leme 5.3.6 zgoraj vidimo, da vsak interval $I_i := [i, i+1)$, $0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$ vsebuje množico barv paroma sosednjih točk. Vsi intervali I_i vsebujejo barvi dveh točk, le en interval I_j vsebuje barve treh točk in ena izmed njih je v_0. Največja barva v I_j je vsaj $2x + j$.

Če je $j = \frac{n-2}{2}$ imamo barvo, ki je vsaj $4x + \frac{n}{2} - 2$, kar je meja, ki jo iščemo.

Predpostavimo sedaj, da je $j < \frac{n-2}{2}$. Potem sta barvi v I_{j+1} vsaj za x večji in sta tako vsaj $3x + j$. Sedaj zaporedoma ugotovimo (podobno kot v dokazu leme 5.3.6), da sta barvi v I_{j+2} vsaj $3x + j + 1$ in tako naprej. Na koncu dobimo, da sta barvi v $I_{\frac{n}{2}-2}$ vsaj $3x + \frac{n-2}{2} - 1$. Večja od barv v zadnjem intervalu je tako vsaj $4x + \frac{n}{2} - 2$, kar je željena meja. S tem je lema dokazana. □

Za $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{n}{2} - 1$ spodnja meja sledi zaradi istih argumentov, kot v trditvi 5.3.4. Preostanejo nam še velike vrednosti x:

Lema 5.3.11 *Naj bo $n \geq 5$ sod. Za $x \geq \frac{n}{2} - 1$ je $\lambda(W_n; x, 1) \geq 2x + \frac{n}{2}$.*

Dokaz. Barve f so paroma različne in se med seboj ločene za vsaj ena, razen $f(v_0)$, ki je od ostalih ločena za x. Če $f(v_0)$ ni niti najmanjša niti največja barva, mora razpon f biti vsaj $2x + n - 2 \geq 2x + \frac{n}{2}$, kar je željena meja.

Predpostavimo torej, da je $f(v_0)$ ekstremna vrednost, recimo 0 (vrednost 0 lahko izberemo brez izgube za splošnost, saj lahko, če je $f(v_0)$ največja barva vzamemo komplementarno barvanje $f' = f - f(v_0)$). V primeru, da ima f več kot $\frac{n}{2}$ barv, ki so večje ali enake $2x$, mora največja med njimi biti vsaj $2x + \frac{n}{2}$, kar je meja, ki jo iščemo.

Sicer je barv, ki so večje ali enake $2x$ največ $\frac{n}{2}$. Potem imamo vsaj $\frac{n}{2}$ barv v intervalu $[x, 2x)$. Dejansko imamo natanko toliko barv v $[x, 2x)$ zaradi dejstva, da morajo odgovarjajoče točke v W_n biti neodvisne. Torej imamo natanko $\frac{n}{2}$ barv, ki so večje ali enake $2x$. Največja barva v $[x, 2x)$ mora biti vsaj $x + \frac{n}{2} - 1$, medtem ko morata njeni sosedi na ciklu v W_n imeti barvi, ki sta vsaj $2x + \frac{n}{2} - 1$. Večja od njiju in zato tudi razpon f je torej večji ali enak $2x + \frac{n}{2}$, kar dokazuje lemo. □

To dokazuje trditev. □

S tem smo končali dokaz izreka 5.3.1. □

Poglavje 6

Mreže in drevesa

6.1 Mreže

Še ena zelo pogosta struktura, ki jo srečamo v brezžičnih omrežjih, so razne mreže. To je seveda očitno, saj moramo pogosto pokriti neko območje s signalom in bo postavitev oddajnikov v vsakem primeru nekakšna mreža. Občutek imamo, da bo optimalna rešitev na območju, daleč od svojih meja neka regularna mreža. Mi si bomo podrobneje ogledali neskončno trikotniško mrežo $\Gamma_\triangle$, neskončno kvadratno mrežo $\Gamma_\square$ in neskončno šestkotniško mrežo Γ_H. Navedli bomo samo rezultate, dokaz pa lahko bralec najde v člankih Griggsa in Jin [16] in . Omenimo samo, da je za dokaz bila potrebna uporaba računalnika, ki je konstruiral barvanja za zgornje meje.

Izrek 6.1.1 *Za realen $x \geq 0$ ima $L(x,1)$-barvanje trikotniške mreže $\Gamma_\triangle$ sledeče minimalne razpone:*

$$\lambda(\Gamma_\triangle; x, 1) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 6 & \frac{4}{5} \leq x \leq 1, \\ 6x & 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \\ 8 & \frac{4}{3} \leq x \leq 2, \\ 4x & 2 \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ 11 & \frac{11}{4} \leq x \leq 3, \\ 3x+2 & 3 \leq x \leq 4, \\ 2x+6 & x \geq 4. \end{cases}$$

Za interval $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{5}$ *vrednosti niso natančno znane. Dokazane so samo zgornje in spodnje meje:*

$$\lambda(\Gamma_{\triangle}; x, 1) \in \begin{cases} [2x+3, 11x] & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{9}{22}, \\ [9x, 11x] & \frac{9}{22} \leq x \leq \frac{11}{27}, \\ [9x, \frac{9}{2}] & \frac{11}{27} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ [\frac{9}{2}, 5x+2] & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ [\frac{16}{3}, 5x+2] & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ [\frac{23}{4}, 5x+2] & \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Izrek 6.1.2 *Za realen* $x \geq 0$ *ima kvadratna mreža* $\Gamma_{\square}$ *razpon:*

$$\lambda(\Gamma_{\square}; x, 1) = \begin{cases} x+3 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 7x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{7}, \\ 4 & \frac{4}{7} \leq x \leq 1, \\ 4x & 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \\ x+4 & \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 3x+1 & \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{3}, \\ 6 & \frac{5}{3} \leq x \leq 2, \\ 3x & 2 \leq x \leq \frac{8}{3}, \\ 8 & \frac{8}{3} \leq x \leq 3, \\ 2x+2 & 3 \leq x \leq 4, \\ x+6 & x \geq 4, \end{cases}$$

Izrek 6.1.3 *Za realen* $x \geq 0$ *ima šestkotniška mreža* Γ_H *razpon:*

$$\lambda(\Gamma_H; x, 1) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 5x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{5}, \\ 3, & \frac{3}{5} \leq x \leq 1, \\ 3x, & 1 \leq x \leq \frac{5}{3}, \\ 5, & \frac{5}{3} \leq x \leq 2, \\ 2x+1, & 2 \leq x \leq 3, \\ x+4, & x \geq 3, \end{cases}$$

6.2 Drevesa

Realna razdaljna barvanja neskončnih dreves so dobro znana. Georges and Mauro [13] sta določila razpone za neskončno d-regularno drevo T_d za $x \geq 1$. Calmoneri in drugi [8] pa so dopolnili dokaz za vrednosti $x \in [0, 1]$. Občutek imamo, da so neskončna regularna drevesa zelo preprosti grafi. Izkaže pa se, da je določanje njihovih razponov, še posebej za $x \in (\frac{3}{2}, d-1)$, zelo težko. Tukaj bomo navedli samo rezultat in dokaz izpustili:

Izrek 6.2.1 *Sledeče vrednosti so razponi optimalnih $L(x, 1)$-barvanj za neskončno d-regularno drevo T_d za $d \geq 2$:*

$$\lambda(T_d; x, 1) = \begin{cases} x + d - 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(d-1)x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{d}{2d-1}, \\ d, & \frac{d}{2d-1} \leq x \leq 1, \\ dx, & 1 \leq x \leq \frac{d}{d-1}, \\ x + d, & \frac{d}{d-1} \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 2x + d - 2, & d - 1 \leq x \leq d, \\ x + 2d - 2, & x \geq d, \end{cases}$$

Če je $x \in (\frac{3}{2}, \frac{d}{2})$ in $x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}$, je najmanjši razpon podan s sledečo formulo:

$$\lambda(T_d; x, 1) = \begin{cases} (2s+1)(x - \lfloor x \rfloor) + 2x + d - 2 - s, & x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{s+2}{2s+3}, \text{ in} \\ 2(d-1)x, & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je $s = \left\lfloor \frac{d - \lfloor x \rfloor - 2}{2\lfloor x \rfloor + 1} \right\rfloor$.

Še zadnji primer, ko je $x \in [2, \frac{d}{2})$ in $x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{1}{2}$ ali $x \in [\frac{d}{2}, d-1)$, je najmanjši razpon podan tako:

$$\lambda(T_d; x, 1) = \begin{cases} \frac{d + \lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor} x + \lfloor x \rfloor - 2, & x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{s+2}{2s+3}, \text{ in} \\ \frac{d + \lfloor x \rfloor - 1}{\lfloor x \rfloor} x + \lfloor x \rfloor - 1, & x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{s+2}{2s+3}, \text{ in} \\ \frac{d + 2\lfloor x \rfloor - r}{\lfloor x \rfloor} x + r - 2, & x - \lfloor x \rfloor \leq \frac{s+2}{2s+3}, \text{ in} \\ x + \lfloor x \rfloor + d - 1, & \text{sicer}. \end{cases}$$

Poglavje 7

Zaključek

V delu smo se dobro seznanili z realnim razdaljnim barvanjem grafov. Podali smo osnovne definicije za to področje diskretne matematike in nadaljevali z uporabo v praksi. Predstavili smo problem dodeljevanja frekvenc v brezžičnih omrežjih, ki je bil osnovna motivacija za študij takih barvanj. Bralcu smo omogočili pregled nad področjem in omenili pomembnejše nerešene probleme. Pokazali smo tesno povezanost razdaljnih barvanj z navadnim barvanjem točk. Podrobneje smo si ogledali lastnosti lambda funkcije in metode za njeno določanje. Določili smo razpone za poti, cikle, kolesa in posebno poddružino Kneserjevih grafov in samo navedli nekaj rezultatov za mreže in drevesa. Bralec, ki ga zanima več, naj prebere kako študijo na to temo ali pa pregleda kak članek iz literature na koncu.

Literatura

[1] K. I. Aardal, S. P. M. van Hoesel, A. M. C. A. Koster, C. Mannino, A. Sassano: Models and solution techniques for frequency assignment problems, ZIB-Report 01-40, 2001.

[2] G. Agnarsson, R. Greenlaw, M. M. Halldórsson: Powers of chordal graphs and their coloring, to appear in Congressus Numerantium.

[3] Armen S. Asratian,Tristan M. J. Dennley, R. Roland Häggkvist:Bipartite Graphs and Their Applications (1998), Cambridge University Press, 75–75.

[4] P. Bella, D. Král', B. Mohar, K. Quittnerová: Labelling planar graphs with a condition at distance two, to appear in European J. Combinatorics.

[5] A. A. Bertossi, M. A. Bonucelli: Code assignment for hidden terminal interference in multihop packet radio networks, IEEE/ACM Trans. Networking **3** (1995), 441–449.

[6] A. A. Bertossi, C. M. Pinotti, R. B. Tan: Channel assignment with seperation for interference avoidance in wireless networks, IEEE Trans. Paralle Distrib. Sys. **14** (2003), 222–235.

[7] T. Calamoneri: The $L(h, k)$-labelling problem: a survey and annotated bibliography, Comput. J. **49(5)** (2006), 585–608.

[8] T. Calamoneri, A. Pelc, R. Petreschi: Labelling trees with a condition at distance two, to appear in Discrete Math.

[9] G. J. Chang, D. Kuo: The $L(2, 1)$-labelling problem on graphs, SIAM J. Discrete Math. **9(2)** (1996), 309–316.

[10] R. Erman, S. Jurečič, D. Král', K. Stopar, N. Stopar: Optimal real number graph labelings of a subfamily of Kneser graphs, IMFM Preprint Series (2006), 5–14.

[11] J. Fiala, J. Kratochvíl, T. Kloks: Fixed-parameter complexity of λ-labellings, Discrete Appl. Math., **113(1)** (2001), 59–72.

[12] D. A. Fotakis, S. E. Nikoletseas, V. G. Papadopoulou, P. G. Spirakis: NP-Completeness results and effcient approximations for radiocoloring in planar graphs, in: B. Rovan, ed., Proc. MFCS'00, LNCS Vol. **1893**, Springer, 2000, 363–372.

[13] J. P. Georges, D. W. Mauro: Labelling trees with a condition at distance two, Discrete Math. **269** (2003), 127–148.

[14] D. Gonçalves: On the $L(p, 1)$-labeling of graphs, Discrete Math. and Theor. Comp. Science AE (2005), 81–86.

[15] J. R. Griggs, X. T. Jin: Real number graph labellings with distance conditions, SIAM J. Discrete Math. **20(2)** (2006), 302–327.

[16] J. R. Griggs, X. T. Jin: Real number channel assignments for lattices, submitted.

[17] J. R. Griggs, R. K. Yeh: Labelling graphs with a condition at distance 2, SIAM J. Discrete Math. **5** (1992), 586–595.

[18] W. K. Hale: Frequency assignment: Theory and applications, Proceedings of the IEEE **68** (1980), 1497–1514.

[19] X. T. Jin, R. K. Yeh: Graph distance-dependent labelling related to code assignment in computer networks, Naval Res. Logis. **52** (2005), 159–164.

[20] J.-H. Kang: $L(2, 1)$-labelling of 3-regular Hamiltonian graphs, submitted.

[21] D. Král': An exact algorithm for channel assignment problem, Discrete Appl. Math. **145(2)** (2004), 326–331.

[22] D. Král', R. Škrekovski: A theorem about channel assignment problem, SIAM J. Discrete Math. **16(3)** (2003), 426–437.

[23] C. McDiarmid: On the span in channel assignment problems: bounds, computing and counting, Discrete Math. **266** (2003), 387–397.

[24] M. Molloy, M. R. Salavatipour: A bound on the chromatic number of the square of a planar graph, J. Combin. Theory Ser. B. **94** (2005), 189–213.

[25] M. Molloy, M. R. Salavatipour: Frequency channel assignment on planar networks, in: R. H. Möhring, R. Raman, eds., Proc. ESA'02, LNCS Vol. **2461**, Springer, 2002, 736–747.

[26] F. S. Roberts: T-colorings of graphs: recent results and open problems, Disc. Math. **93** (1991), 229–245.

[27] F. S. Roberts: Working group agenda of DIMACS/DIMATIA/Renyi working group on graph colorings and their generalizations (2003), posted at `http://dimacs.rutgers.edu/Workshops/GraphColor/main.html`.