Preštevanje - osnovno in malo manj osnovno

Primož Potočnik

Math. Subj. Class. (2000) 05A05

Predstavimo metodo za reševanje nekaterih kombinatoričnih nalog s pomočjo preštevanja ekvivalenčnih razredov preslikav med dvema končnima množicama. Pričnemo pri štetju variacij in kombinacij ter končamo pri posplošitvah teorije Redfielda in Pólya.

Counting - basic and less basic

A method for solving some combinatorial problems by counting equivalency classes of mappings between two finite sets is introduced. We begin with variations and combinations, and end with generalizations of the theory of Redfield and Pólya.

Kombinatorika sodi med manj priljubljena poglavja srednješolske matematike. Vzrok temu je morda iskati v dejstvu, da se kombinatoričnih nalog ne da reševati po nekem avtomatiziranem postopku tako kot, denimo, sisteme linearnih enačb, risanje grafov racionalnih funkcij in podobno. Naj se dijak še tako vestno uči obrazcev in postopkov, vedno ostane dvom: Sem uporabil pravo formulo? Sem reševal po pravem postopku? Današnji srednješolski učbeniki dijaka učijo, da naloge bodisi reši z neko ad hoc metodo (navajanje vseh možnosti ali uporaba osnovnega izreka kombinatorike) bodisi problem prevede na preštevanje permutacij, kombinacij oziroma variacij.

V pričujočem prispevku bom predstavil metodo reševanja nekaterih preštevalnih nalog, ki se mi zdi mnogo preglednejša in naravnejša kot sistem permutacij, variacij in kombinacij. Reši vse naloge, ki jih lahko rešimo z uporabo permutacij, variacij in kombinacij, poleg tega pa tudi precej sorodnih nalog, ki jim z njimi nismo kos. Seveda omenjena metoda ni zrasla na mojem zelniku. Najdemo jo lahko v mnogih učbenikih kombinatorike (glej naprimer [1] ali [4]), predava pa se tudi pri predmetu Diskretna matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Nikakor si ne upam trditi, da bi lahko tudi v srednjih šolah poučevali kombinatoriko na takšen način. Verjetno lahko o tem sodijo le tisti, ki imajo s poučevanjem srednješolcev bogate izkušnje. Moj namen pa bo v celoti izpolnjen, če bo prispevek vsaj nekaterim bralkam in bralcem srednješolsko (in malo manj srednješolsko) kombinatoriko pokazal v drugačni, jasnejši luči.

Tri naloge

Za začetek vabim bralko oziroma bralca, da reši naslednje tri naloge:

1. naloga. Abeceda šteje 25 znakov. Koliko različnih besed dolžine 4 lahko sestavimo? Kaj pa, če smemo vsako črko uporabiti le enkrat?

2. naloga. Na razpolago imamo 3 vrste čaja v vrečkah. Za pripravo vrča čaja potrebujemo 7 vrečk. Koliko različnih mešanic čaja lahko pripravimo?

3. naloga. Koliko besed dolžine 7 lahko sestavimo iz 4 črk, če se mora vsaka črka pojaviti vsaj enkrat?

Prva naloga je preprosta. Neuki bralec bi razmišljal takole: Za prvo črko besede imam 25 možnosti, pri vsaki izbiri prve črke še 25 možnosti za drugo, skupaj torej 25^2. Tako nadaljujem in pridem do rezultata 25^4. Če smem vsako črko abecede porabiti le enkrat, imam za drugo črko besede le 24 možnosti, za tretjo 23 in zadnjo 22. Skupaj torej $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$. Malo učenejši bralec bi v zgornjem razmišljanju prepoznal tako imenovani *osnovni izrek kombinatorike.* Tisti, ki pa ima gimnazijsko poglavje o kombinatoriki v mezincu, bi ustrelil: Gre za *variacije* 25 *elementov reda* 4. V prvem primeru *s ponavljanjem*, v drugem *brez ponavljanja.*

Druga naloga bi bila za neukega bralca že težja. Za 7 vrečk se moramo odločiti, kakšne vrste naj bodo. Pri prvi vrečki imamo 3 možnosti, pri naslednji spet 3, itd. Skupaj torej 3^7 možnih izbir. Seveda pa na to, kakšen bo čaj, vrstni red izbiranja vrečk nima vpliva. Če najprej izberemo 3 šipke, nato 1 meto in nazadnje 3 lipe, bo rezultat enak, kot če bi najprej izbrali 1 meto, nato 2 šipka, 3 lipe in nazadnje še 1 šipek. Očitno je možnih mešanic čaja precej manj kot 3^7. Večina bi se tu odločila, da našteje vse možne kombinacije, in morda bi se celo dokopala do pravilnega rezultata. Šolani bralec je tu v prednosti. Če je poglavje o kombinatoriki dobro proučil, je pri tej nalogi prepoznal *kombinacije* 7 *elementov reda* 3 *s ponavljanjem.* Pravilni odgovor se torej glasi: $\binom{7+3-1}{7} = 36$.

Gimnazijsko znanje pa nas pri tretji nalogi (čeprav se zdi podobna prvima dvema) pusti na cedilu. No, morda se je kdo do pravilnega rezultata prebil tako, da je najprej preštel vse besede dolžine 7, teh je 4^7, nato pa odštel število besed, kjer se pojavijo največ tri črke. Do tega števila bi prišel tako, da bi za vsako trojico izmed 4 črk preštel število besed, ki jih te črke sestavljajo (to znese 4-krat po 3^7) in nato upošteval, da je besede, ki premorejo po natanko dve izbrani različni črki, štel dvakrat, tiste, ki so sestavljene le iz ene črke, pa celo trikrat. Ker je število parov črk enako $\binom{4}{2} = 6$, mora prejšnjemu številu odšteti 6-kratnik števila besed, ki vsebujejo največ dve izbrani različni črki (torej $6 \cdot 2^7$), nato pa prišteti še število besed iz ene črke (takšne so 4), saj smo izbrano takšno besedo odšteli 3-krat, namesto le 2-krat, kot bi bilo potrebno.

Končni rezultat se tako glasi: $4^7-(4\cdot 3^7-6\cdot 2^7+4)=8400$. (Mimogrede, zgornji način razmišljanja nosi slikovito ime *pravilo vključitev in izključitev.*) Takšen način reševanja je pri majhnih številih (7 in 4) še znosen, pri večjih pa gotovo odpove. Je ta naloga res toliko zahtevnejša od prvih dveh ali tiči razlog za neobravnavanje takšnih nalog v gimnazijah preprosto v tem, da jih ne moremo uvrstiti v ustaljeni sistem permutacij, variacij in kombinacij?

Tri stare in dve novi nalogi

Vrnimo se k 1. nalogi. Naj bo $N=\{1,2,3,4\}$ štirielementna množica, naj $\mathcal{A}$ označuje množico 25 črk abecede in naj bo $\mathcal{A}^N$ množica vseh preslikav iz množice N v množico $\mathcal{A}$. (V nadaljevanju bo oznaka K^N, kjer sta K in N poljubni množici, vedno pomenila množico vseh preslikav iz množice N v množico K.) Vsaki preslikavi $f\in\mathcal{A}^N$ lahko priredimo besedo, ki ima na prvem mestu $f(1)$, na drugem $f(2)$, na tretjem $f(3)$ in na četrtem $f(4)$. Dve različni preslikavi določata različni besedi in vsaka beseda je prirejena neki preslikavi. To pomeni, da je besed dolžine 4 natanko toliko, kot je moč množice preslikav $\mathcal{A}^N$, torej $|\mathcal{A}|^{|N|}$. Ni težko razmisliti, da je besed, kjer se vsaka črka pojavi največ enkrat, ravno toliko, kot je v množici $\mathcal{A}^N$ injektivnih funkcij.

Podobno lahko obravnavamo 3. nalogo. Naj N zdaj označuje sedemelementno množico $\{1,2,\ldots,7\}$ in naj bo K množica 4 črk, iz katerih sestavljamo besede. Vsaki preslikavi $f\colon N\to K$ lahko po enakem postopku kot pri 1. nalogi priredimo besedo $f(1)f(2)\ldots f(7)$, vendar pa tako dobimo vse besede dolžine 7 in ne zgolj tistih, ki vsebujejo vse 4 črke iz množice K. Besede, ki zadoščajo takšni omejitvi, pripadajo surjektivnim preslikavam iz množice K^N. Iskano število je tako enako številu vseh *surjektivnih preslikav iz* 7-*elementne množice v* 4-*elementno.*

Situacija je nekoliko drugačna pri 2. nalogi. Naj N predstavlja 7-elementno množico $\{1,2,\ldots,7\}$, ki si jo lahko predstavljamo kot množico 7 vrečk čaja, ki zaenkrat še nimajo okusa. Množico 3 okusov združimo v množico K. Mešanico dobimo tako, da vsaki od sedmih vrečk iz množice N priredimo po en okus iz množice K. Na ta način smo nalogo zopet prevedli na preštevanje preslikav iz množice N v množico K. No, v resnici ne ravno preslikav. V tem primeru namreč dve različni preslikavi lahko določata isto mešanico čaja. Če smo natančni, dve preslikavi f in g določata isto mešanico natanko tedaj, ko imata isto sliko, šteto z večkratnostmi. S preprostim premislekom pa se lahko bralec prepriča, da se to zgodi natanko tedaj, ko obstaja neka permutacija π množice N, za katero je $f=g\circ\pi$. Za poljubno množico V naj $\mathrm{Sym}(V)$ označuje množico vseh permutacij množice V. Definirajmo na množici preslikav K^N relacijo $\sim$

takole:

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in \mathrm{Sym}(N), \text{ da velja } f = g \circ \pi \,. \tag{1}$$

Bralec se lahko sam prepriča, da je tako definirana relacija simetrična, refleksivna in tranzitivna, torej ekvivalenčna. Število, ki ga zahteva 2. naloga, je enako številu *ekvivalenčnih razredov* preslikav iz množice K^N glede na zgoraj definirano ekvivalenčno relacijo. Včasih se bomo v takšni situaciji izražali nekoliko ohlapno in rekli, da štejemo preslikave, pri čemer *elementov množice N ne ločimo.*

Nekatere naloge zahtevajo preštevanje preslikav iz množice N v množico K, kjer *ne ločimo elementov množice K*. Za zgled vzemimo naslednjo nalogo.

4. naloga. Devet (oštevilčenih) bilijardnih krogel bi radi razporedili v tri skupine, tako da nobena skupina ne bo prazna. Na koliko načinov to lahko storimo?

Razmišljamo lahko takole. Vsaki od devetih krogel (množico krogel označimo z N) priredimo eno od treh skupin (trielementna množica K naj predstavlja množico treh skupin). Vsaki surjektivni preslikavi iz množice N v množico K pripada neka razporeditev devetih krogel v tri (neprazne) skupine. Pri tem res dobimo vse iskane razporeditve, dve različni preslikavi f in g pa določata isto razporeditev natanko tedaj, ko obstaja neka permutacija ρ množice K, za katero je $f = \rho \circ g$. Če definiramo relacijo $\sim$ na množici vseh surjektivnih preslikav s predpisom

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \rho \in \mathrm{Sym}(K), \text{ da velja } f = \rho \circ g \,, \tag{2}$$

lahko nalogo prevedemo na vprašanje: Koliko je ekvivalenčnih razredov surjektivnih preslikav iz množice N v množico K glede na zgornjo ekvivalenčno relacijo. Ohlapno povedano, iščemo število surjektivnih preslikav iz N v K, kjer elementov množice K ne ločimo.

Omenimo še tip nalog, ki zahtevajo preštevanje preslikav iz N v K, kjer *ne ločimo niti elementov množice N niti elementov množice K*. Oglejmo si klasičen zgled takšne naloge:

5. naloga. Na koliko načinov lahko naravno število n zapišemo kot vsoto največ k sumandov? Pri tem vrstni red sumandov ni pomemben.

Naloge se lahko lotimo takole: Označimo z N množico $\{1, 2, \ldots, n\}$ in s K množico $\{1, 2, \ldots, k\}$. Za vsako preslikavo $f \in K^N$ si oglejmo moči $x_i := |f^{-1}(i)|$ praslik elementov $i \in K$. Očitno velja $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Vsaki preslikavi f tako določimo neki zapis števila n na k (ali manj, saj so nekatere praslike lahko prazne) sumandov. Bralcu prepuščam premislek, da dve preslikavi $f, g \in K^N$ določata isti zapis natanko tedaj, ko obstajata permutaciji $\pi \in \mathrm{Sym}(N)$ in $\rho \in \mathrm{Sym}(K)$, za kateri je $f = \rho \circ g \circ \pi$. Tako je spet na mestu definicija ekvivalenčne relacije:

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstajata } \rho \in \mathrm{Sym}(K) \text{ in } \pi \in \mathrm{Sym}(N),$$
$$\text{da velja } f = \rho \circ g \circ \pi. \tag{3}$$

Iskano število je tako spet enako številu ekvivalenčnih razredov preslikav iz n-elementne množice N v k-elementno množico K glede na zgoraj definirano ekvivalenčno relacijo.

Dvanajstera pot

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko veliko kombinatoričnih nalog prevedemo na preštevanje preslikav $f\colon N \to K$, kjer sta N in K končni množici (N moči n in K moči k). Glede na to, ali preštevamo vse funkcije, samo injektivne ali samo surjektivne in ali ločimo elemente množic K oziroma N, dobimo 12 problemov, ki jih imenujemo *dvanajstera pot*.

Tabela 1: Dvanajstera pot.

N	K	vse funkc.	inj. funkc.	surj. funkc.
ločimo	ločimo	var. s pon.	var. brez pon.	?
ne ločimo	ločimo	komb. s pon.	komb. brez pon.	?
ločimo	ne ločimo	?	?	?
ne ločimo	ne ločimo	?	?	?

Pri 1. nalogi smo že premislili, da preslikave $f\colon N \to K$, kjer ločimo tako elemente množice K kot elemente množice N, ustrezajo variacijam k elementov reda n. Kadar dopuščamo vse preslikave, dobimo variacije s ponavljanjem, če se omejimo zgolj na injektivne preslikave, dobimo variacije brez ponavljanja. Z zgledom smo tudi pojasnili formulo k^n za število variacij s ponavljanjem in formulo $k(k-1)\cdots(k-n+1)$ za variacije brez ponavljanja. Kako je s številom surjektivnih preslikav, naj zaenkrat ostane skrivnost.

Pri 2. nalogi smo ugotovili, da preslikave $f\colon N \to K$, kjer elementov množice N ne ločimo (ločimo pa elemente množice K), ustrezajo kombinacijam k elementov reda

n. Če dopuščamo vse preslikave, gre za kombinacije s ponavljanjem, če se omejimo na injektivne, dobimo kombinacije brez ponavljanja. Čeprav formulo $\binom{k}{n}$ za število kombinacij brez ponavljanja pozna vsak srednješolec, jo izpeljimo še s pomočjo štetja preslikav. Naj bo $g\colon N \to K$ injektivna preslikava in $g \circ \pi$ ter $g \circ \sigma$, kjer sta π ter σ permutaciji množice N, poljubni preslikavi iz ekvivalenčnega razreda preslikave g glede na ekvivalenčno relacijo (1). Ker je g injektivna preslikava, ji lahko poiščemo *levi inverz* $\bar{g}\colon K \to N$, za katerega velja $\bar{g} \circ g = \mathrm{id}_N$. Do takšne preslikave $\bar{g}$ pridemo, če poljubnemu elementu y iz slike preslikave g priredimo njegovo (natanko določeno) g-prasliko, preostalim elementom iz množice K pa poljuben element iz množice N. Če sta preslikavi $g\circ\pi$ in $g\circ\sigma$ enaki, sledi, da je $\pi = \bar{g}\circ g\circ\pi = \bar{g}\circ g\circ\sigma = \sigma$. Seveda velja tudi obratno, če je $\pi = \sigma$, sta preslikavi $g \circ \pi$ in $g \circ \sigma$ enaki. S tem smo dokazali, da je moč ekvivalenčnega razreda poljubne injektivne preslikave enaka moči množice $\mathrm{Sym}(N)$. Od tod pa sledi, da je število ekvivalenčnih razredov enako številu vseh injektivnih preslikav, deljeno z močjo ekvivalenčnega razreda, torej $\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} = \binom{k}{n}$.

Štetje kombinacij s ponavljanjem lahko prevedemo na štetje kombinacij brez ponavljanja. Ideja se skriva v naslednjem premisleku. Mislimo si, da množico N sestavlja n enakih kroglic, ki jih razporejamo v k med seboj različnih skupin (pri čemer so lahko nekatere skupine prazne). Razporeditvi sta enaki natanko tedaj, ko vsaka skupina vsebuje v obeh razporeditvah enako število kroglic, torej natanko tedaj, ko obstaja permutacija kroglic, ki eno razporeditev prevede v drugo. Število takšnih razporeditev je zato enako številu kombinacij k elementov reda n s ponavljanjem (primerjaj z 2. nalogo). Razporeditve enakih kroglic v različne skupine pa si lahko predstavljamo tudi drugače. V vrsto postavimo $n + k - 1$ enakih belih kroglic, izmed katerih jih $k - 1$ izberemo in pobarvamo rdeče. Bele kroglice med dvema rdečima tvorijo skupino in takšnih skupin je natanko $k - 2$. Če dodamo še skupino belih kroglic od začetka vrste do prve rdeče in skupino belih kroglic od zadnje rdeče do konca vrste, dobimo natanko k skupin (od katerih jih je nekaj spet lahko praznih). Na ta način smo našli bijektivno korespondenco med kombinacijami k elementov reda n s ponavljanjem in izbori $k-1$ elementov izmed $n+k-1$ enakih elementov, torej kombinacijami $n+k-1$ elementov reda $k-1$ brez ponavljanja. Iskano število kombinacij k elementov reda n s ponavljanjem je tako enako $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Ekvivalenčne razrede surjektivnih preslikav iz množice N v množico K glede na relacijo (1) preštejemo z naslednjim premislekom. Vsak element množice K je slika vsaj enega elementa množice N. Ker elementov množice N ne ločimo, lahko predpostavimo, da se prvih k elementov množice N bijektivno preslika na množico K. Preostalih $n - k$

elementov lahko nato poljubno slikamo v množico K. Surjektivne preslikave torej ustrezajo kombinacijam k elementov reda $n-k$ s ponavljanjem.

Lotimo se sedaj problemov, ki jim z gimnazijskim znanjem nismo kos.

Surjektivne preslikave, N ločimo, K ne ločimo. Število ekvivalenčnih razredov relacije (2) na množici ${K^N}_{Sur} = \{f \in K^N \mid f \text{ surjektivna}\}$ označimo s $S(n,k)$. Števila $S(n,k)$ imenujemo *Stirlingova*[1] *števila 2. vrste.* Preslikavi $f \in {K^N}_{Sur}$ priredimo množico praslik $R_f = \{f^{-1}(b) \mid b \in K\}$. Množica R_f je očitno razbitje množice N na k nepraznih podmnožic. Bralcu prepuščam premislek, da sta množici R_f in R_g enaki natanko tedaj, ko sta preslikavi f in g v relaciji (2). Tako smo dokazali naslednje:

Število $S(n,k)$ je enako številu vseh razbitij n-elementne množice na k nepraznih podmnožic.

Ker množice ne moremo razbiti na več nepraznih podmnožic, kot sama vsebuje elementov, velja:

$$S(n,k) = 0\,, \text{ če je } k > n\,.$$

Množico z n elementi lahko razbijemo na n nepraznih podmnožic na en sam način, na same enoelementne podmnožice. Podobno lahko množico razbijemo na eno samo podmnožico le tako, da je podmnožica enaka začetni množici. Tako velja:

$$S(n,n) \;=\; 1 \;=\; S(n,1)\,.$$

Naj bo sedaj $k,n \geq 2$ in $k < n$. Izberimo element x množice N in množico razbitij razdelimo na dve skupini. V prvi naj bodo tista, ki ne vsebujejo množice $\{x\}$. To so takšna razbitja, pri katerih element x nastopa v isti množici razbitja vsaj še z enim elementom množice N. Če element x iz ustrezne množice razbitja odstranimo, dobimo razbitje množice $N\setminus\{x\}$ na k še vedno nepraznih množic. Takšnih razbitij je $S(n-1,k)$. Neko drugo razbitje množice N nam bo po takšni operaciji dalo enako razbitje množice $N \setminus \{x\}$ natanko tedaj, ko ga iz prvotnega dobimo tako, da element x prestavimo v eno od preostalih $k-1$ množic razbitja. Takšnih razbitij je skupaj s prvotnim torej ravno k. Tako smo ugotovili, da je razbitij množice N iz prve skupine natanko $kS(n,k)$.

V drugi skupini so razbitja, ki vsebujejo množico $\{x\}$. Če množico $\{x\}$ odstranimo iz takšnega razbitja, dobimo razbitje množice $N \setminus \{x\}$ na $k-1$ nepraznih podmnožic. Takšnih razbitij pa je $S(n-1,k-1)$. S tem smo dokazali, da za $k,n \geq 2$ velja naslednja rekurzivna formula:

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)\,.$$

[1] James Stirling (1692-1770), škotski matematik.

Rekurzivna formula nam omogoča, da števila $S(n,k)$ računamo podobno kot binomske koeficiente (s pomočjo Pascalovega trikotnika). Sestavimo tabelo, v kateri na presečišču n-te vrstice in k-tega stolpca stoji število $S(n,k)$:

Tabela 2: Stirlingova števila 2. vrste $S(n,k)$.

$n\|k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Iz začetnih pogojev sledi, da so v prvem stolpcu in po diagonali same enke, nad diagonalo same ničle, preostala števila $S(n,k)$ pa dobimo tako, da številu $S(n-1,k-1)$, ki leži diagonalno levo nad številom $S(n,k)$, prištejemo k-kratnik števila $S(n-1,k)$, ki leži neposredno nad številom $S(n,k)$. Število 65, ki leži v vrstici 6 in stolpcu 4, smo torej dobili tako, da smo sešteli 25 (levo zgoraj) in $4 \cdot 10$ (smo v stolpcu 4, nad iskanim številom pa stoji 10).

Surjektivne preslikave, N ločimo, K ločimo. Vzemimo preslikavo $f \in {K^N}_{Sur}$ in preštejmo elemente njenega ekvivalenčnega razreda $\{\rho \circ f \mid \rho \in \mathrm{Sym}(K)\}$. Ker za poljubni permutaciji $\rho, \sigma \in \mathrm{Sym}(K)$ zaradi surjektivnosti preslikave f iz enakosti $\rho \circ f = \sigma \circ f$ sledi $\rho = \sigma$, premore ekvivalenčni razred preslikave f natanko $k!$ elementov. Surjektivnih preslikav iz n-elementne množice v k-elementno je zato natanko $k!S(n,k)$.

Vse preslikave, N ločimo, K ne ločimo. Vsaka preslikava je surjektivna na svojo sliko. Množico vseh preslikav lahko torej razdelimo glede na moč njihovih slik. Od tod sledi, da je število vseh preslikav iz n-elementne množice N v k-elementno množico K natanko $\sum_{j=1}^{k} S(n,j)$.

Surjektivne preslikave, N ne ločimo, K ne ločimo. Število ekvivalenčnih razredov množice ${K^N}_{Sur}$ glede na relacijo (3) označimo s $p_k(n)$. Podobno kot pri 5. nalogi prepuščamo bralcu v premislek, da je število $p_k(n)$ enako številu razbitij naravnega števila n na vsoto k neničelnih celoštevilskih sumandov, pri čemer vrstni red sumandov ni pomemben. Brez težav pridemo do naslednjih enakosti:

$$p_1(n) = p_n(n) = 1 \text{ in } p_k(n) = 0 \text{ za } k > n\,.$$

Naj bo sedaj $n > k \geq 2$. Razbitja naravnega števila n na vsoto k neničelnih sumandov v tem primeru razdelimo v dve skupini glede na to, ali je kateri od sumandov enak 1 ali ne. Če je kateri od sumandov enak 1, lahko ta sumand odstranimo in dobimo razbitje naravnega števila $n-1$ na vsoto $k-1$ sumandov. Takšnih je $p_{k-1}(n-1)$. Če so vsi sumandi večji ali enaki 2, lahko vsakega zmanjšamo za 1 in dobimo razbitje števila $n-k$ na vsoto k sumandov. Od tod sledi rekurzivna formula

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)\,. \tag{$\triangle$}$$

Kot pri Stirlingovih številih 2. vrste si tudi tu računanje olajšamo, če sestavimo tabelo, v kateri na presečišču n-te vrstice in k-tega stolpca stoji število $p_k(n)$.

Tabela 3: Števila $p_k(n)$.

$n \vert k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0	0
5	1	2	2	1	1	0	0	0
6	1	3	3	2	1	1	0	0
7	1	3	4	3	2	1	1	0
8	1	4	5	5	3	2	1	1

Začetni pogoji pravijo, da v prvem stolpcu in po diagonali stojijo same enke, nad diagonalo pa same ničle. Do števil pod diagonalo pridemo z zaporednim upoštevanjem rekurzivne formule ($\triangle$).

Bralec bo gotovo znal razrešiti preostale tri od 12 problemov, ki smo jih zastavili na začetku razdelka. Svoje rezultate lahko zloži v naslednjo tabelo:

Tabela 4: Rešitve nalog dvanajstere poti.

N	K	vse funkc.	inj. funkc.	surj. funkc.
ločimo	ločimo	k^n	$k(k-1)\cdots(k-n+1)$	$k!S(n,k)$
ne ločimo	ločimo	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{n-k}$
ločimo	ne ločimo	$\sum_{j=1}^{k} S(n,j)$	1, za $k \geq n$, 0 sicer	$S(n,k)$
ne ločimo	ne ločimo	$\sum_{j=1}^{k} p_j(n)$	1, za $k \geq n$, 0 sicer	$p_k(n)$

Teorija Redfielda in Pólya

V tem razdelku si bomo bežno (in brez dokazov) ogledali teorijo Redfielda in Pólya, ki se ukvarja z nekaterimi posplošitvami preštevalnih nalog, s katerimi smo se ubadali v prejšnjih razdelkih. Teorijo sta neodvisno razvila J. H. Redfield leta 1928 (za nekatere posebne primere) in G. Pólya leta 1937 (splošneje). Podrobnejšo obravnavo snovi skupaj z vsemi izpeljavami lahko zahtevnejši bralec najde denimo v člankih [2, 5, 6, 7] ali pa v učbenikih [1, 8]. Za začetek pa rešimo naslednjo nalogo.

6. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, ki se jim zdijo vsi enaki. Na koliko načinov si lahko razdelijo mikastenje gardistov?

Kdor je pozorno prebral prejšnji razdelek, se bo naloge lotil takole: Mikastenje gardistov si bo predstavljal kot preslikavo iz množice gardistov $\mathcal{G}$ v množico mušketirjev $\mathcal{M}$, ki vsakemu gardistu priredi tistega mušketirja, ki ga je *premikastil.* Ker so gardisti vsi enaki, elementov množice $\mathcal{G}$ ne ločimo med seboj. Opravka imamo torej s preštevanjem ekvivalenčnih razredov množice $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ glede na relacijo

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in \mathrm{Sym}(\mathcal{G})\,, \text{ da velja } f = g \circ \pi\,.$$

Odgovor se zato glasi: Mušketirji lahko gardiste premikastijo na $\binom{7+3-1}{7} = 36$ načinov. Zgornjo nalogo pa lahko malce zavijemo:

7. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, od katerih je eden poveljnik, trije inštruktorji in trije novinci. Na koliko načinov si lahko razdelijo mikastenje gardistov, če gardistov istega ranga med seboj ne ločijo?

Mikastenje gardistov lahko tako kot pri 6. nalogi predstavimo s preslikavo iz množice gardistov $\mathcal{G}$ v množico mušketirjev $\mathcal{M}$. Zaplete pa se pri vprašanju, kdaj dve preslikavi določata enako mikastenje. Ker gardista, ki nista istega ranga, mušketirji ločijo, ni vseeno, kdo dobi poveljnika in kdo novinca. Kljub temu pa gardistov znotraj skupine z istim rangom ne razlikujejo. Elemente množice $\mathcal{G}$ torej ločimo le delno. Znamo to povedati natančneje? Seveda. Dve preslikavi $f, g \in \mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ določata isto mikastenje gardistov natanko tedaj, ko se razlikujeta za neko permutacijo množice $\mathcal{G}$, ki poveljnika preslika v poveljnika, inštruktorja v inštruktorja in novinca v novinca. Če z G označimo množico takšnih permutacij in definiramo relacijo $\sim$ na množici $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ takole:

$$f \sim g \;\text{ natanko tedaj, ko obstaja }\; \pi \in G\,,\;\text{ da velja }\; f = g \circ \pi\,, \tag{4}$$

lahko odgovorimo: Iskano število mikastenj je enako številu ekvivalenčnih razredov množice $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ glede na zgoraj definirano relacijo $\sim$.

In koliko je to? Poiskati odgovor na to vprašanje ni preprosto. Opazili smo že, da bodo pomembno vlogo pri reševanju zgornje naloge igrale tiste množice permutacij, ki *ohranjajo* strukturo množice gardistov. S tem, ko smo gardistom podelili vojaške nazive, smo namreč v množico $\mathcal{G}$ vpeljali nekakšno strukturo, ki je ne ohranjajo več vse permutacije množice $\mathcal{G}$ temveč le nekatere. Hitro se lahko prepričamo, da kompozitum dveh permutacij, ki ohranjata strukturo množice $\mathcal{G}$, prav tako ohranja strukturo, zato je množica G takšnih permutacij v resnici *podgrupa* grupe $\mathrm{Sym}(\mathcal{G})$. Dokončni odgovor na nalogo o mušketirjih in rangiranih gardistih je vsebovan v odgovoru na naslednjo splošnejšo nalogo.

8. naloga. Naj bosta N in K končni množici in naj bo G podgrupa grupe $\mathrm{Sym}(N)$. Na koliko ekvivalenčnih razredov razpade množica K^N pri relaciji (4)?

Odgovor je seveda odvisen od tega, koliko in kakšne permutacije vsebuje grupa G. Natančneje, odvisen je od *ciklične strukture* njenih elementov oziroma od *cikličnega indeksa grupe G*.

Ciklični indeks permutacijske grupe

Naj bo V poljubna končna množica. Če za poljubni permutaciji $\pi, \rho \in \mathrm{Sym}(V)$ definiramo produkt $\pi\rho$ kot njun kompozitum $\pi \circ \rho$, postane množica $\mathrm{Sym}(V)$ grupa. Naj bo π poljubna permutacija množice V. Točka $v \in V$ je za permutacijo π *negibna*, če velja $\pi(v) = v$, in *premaknjena*, če velja $\pi(v) \neq v$. Permutacijo, za katero so vse točke negibne, imenujemo *identiteta* in jo označujemo z id_V. Če je v negibna točka za permutacijo π, pravimo tudi, da permutacija π točko v *pribije*. Permutaciji, ki imata množici premaknjenih točk disjunktni, sta *ločeni.* Ločene permutacije med seboj komutirajo. Množica točk $\{\pi^k(v) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ki jo dobimo z zaporedno uporabo permutacije π na točki v, se imenuje *orbita* točke v in permutacije π. Orbita poljubne negibne točke v permutacije π vsebuje le točko v. Takšnim orbitam pravimo *trivialne orbite.* Permutaciji, ki premore natanko eno netrivialno orbito, pravimo *cikel*, moči njene netrivialne orbite pa *dolžina cikla.* Če je $\{v, \pi(v), \ldots, \pi^k(v)\}$ netrivialna orbita cikla π, permutacijo π označimo s simbolom $(v, \pi(v), \ldots, \pi^k(v))$.

Vsaka permutacija (ki ni enaka identiteti) se da do vrstnega reda faktorjev enolično predstaviti kot produkt paroma ločenih ciklov. Naj bo α_1 število negibnih točk neke permutacije $\pi \in \mathrm{Sym}(V)$, n moč množice V in α_k, $k \in \{2, \ldots, n\}$, število ciklov dolžine k v zapisu permutacije π kot produkt ločenih ciklov. Seveda so nekatera od števil α_i ničelna in velja enakost $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$. Polinomu

$$\zeta_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$$

rečemo *ciklični indeks permutacije* π. Povprečju cikličnih indeksov neke grupe $G \leq \mathrm{Sym}(V)$ rečemo *ciklični indeks grupe* G:

$$\zeta_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \zeta_\pi.$$

Zgled. Izračunajmo ciklični indeks simetrične grupe S_n pri njenem naravnem delovanju na množici z n elementi.

Naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nenegativna cela števila, za katera velja $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$. Koliko permutacij množice V ima ciklični indeks enak polinomu ${x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \cdots {x_n}^{\alpha_n}$?

Vsaka permutacija s takšnim cikličnim indeksom se zapiše kot produkt ločenih ciklov takole:

$$\underbrace{(*)(*)\ldots(*)}_{\alpha_1}\ \underbrace{(**)\ldots(**)}_{\alpha_2}\ \cdots\ \underbrace{(\overbrace{**\ldots*}^{n})}_{\alpha_n}\ . \qquad (+)$$

Pri tem smo zaradi nazornosti zapisali tudi točke, ki jih permutacija pribije. Zvezdice lahko nadomestimo z elementi množice V na $n!$ načinov, vendar bodo pri tem nekatere nadomestitve predstavljale iste permutacije. Premislimo, koliko nadomestitev zvezdic z elementi množice V porodi isto permutacijo.

Vsak cikel dolžine k lahko zapišemo na k načinov, saj lahko elemente znotraj cikla krožno vrtimo. Ker lahko to počnemo neodvisno z vsakim od ciklov, ki nastopajo v cikličnem zapisu naše permutacije, je takšnih zapisov: $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}$. Poleg tega lahko cikle iste dolžine poljubno permutiramo. Takšnih preureditev je zato $\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$. Skupaj smo tako dobili

$$1^{\alpha_1}\alpha_1!\,2^{\alpha_2}\alpha_2!\,\cdots\,n^{\alpha_n}\alpha_n!$$

različnih zapisov oblike (+) iste permutacije. Od tod lahko sklepamo, da imamo v grupi S_n natanko $n!/(1^{\alpha_1}\alpha_1!\,2^{\alpha_2}\alpha_2!\,\cdots\,n^{\alpha_n}\alpha_n!)$ permutacij s predpisanim cikličnim indeksom. Ciklični indeks simetrične grupe S_n je tako enak:

$$\zeta_{S_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+n\alpha_n=n}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}(\frac{x_1}{1})^{\alpha_1}(\frac{x_2}{2})^{\alpha_2}\cdots(\frac{x_n}{n})^{\alpha_n}\,.$$

Pri računanju cikličnega indeksa grupe iz naloge o mušketirjih in rangiranih gardistih bomo potrebovali naslednjo trditev in njeno posledico.

Trditev. *Naj bodo $V_1,V_2,\ldots,V_k$ paroma disjunktne množice in G_i, $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, podgrupe simetričnih grup Sym(V_i). Z $G=G_1\times G_2\times\ldots\times G_k$ označimo premi produkt grup $G_1,G_2,\ldots,G_k$, z $V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_k$ pa unijo množic $V_1,V_2,\ldots,V_k$. Če za poljuben indeks i, poljuben element $(g_1,g_2,\ldots,g_k)$ grupe G in poljuben element v_i množice V_i definiramo $(g_1,g_2,\ldots,g_k)(v_i)=g_i(v_i)$, predstavimo s tem grupo G kot podgrupo grupe Sym(V). Pri tem za ciklični indeks grupe G velja: $\zeta_G=\zeta_{G_1}\zeta_{G_2}\cdots\zeta_{G_k}$.*

Od tod lahko izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica. *Naj bo $V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_k$ razbitje množice V in naj bo G množica vseh tistih permutacij množice V, ki ohranjajo vsako od množic $V_1,V_2,\ldots,V_k$. Tedaj je grupa G premi produkt grup Sym(V_1), Sym(V_2), $\ldots$, Sym(V_k) in njen ciklični indeks je enak produktu cikličnih indeksov grup Sym(V_1), Sym(V_2), $\ldots$, Sym(V_k).*

Zdaj lahko povemo, kakšen je ciklični indeks grupe G iz naloge o treh mušketirjih in sedmih rangiranih gardistih. Ker smo množico gardistov razbili na tri skupine: 1 poveljnik, 3 inštruktorji in 3 novinci, je ciklični indeks grupe G enak:

$$\zeta_G(x_1,x_2,\ldots,x_7)=\zeta_{S_1}(x_1,x_2,\ldots,x_7)\zeta_{S_3}^2(x_1,x_2,\ldots,x_7)=\frac{1}{36}x_1({x_1}^3+3x_1x_2+2x_3)^2=$$

$$=\frac{1}{36}({x_1}^7+9{x_1}^3{x_2}^2+4x_1{x_3}^2+6{x_1}^5x_2+4{x_1}^4x_3+12{x_1}^2x_2x_3)\,.$$

Nazaj k Redfieldu in Pólyu...

Bralec se je pri branju prejšnjega razdelka upravičeno spraševal, kaj imata skupnega ciklični indeks grupe in 8. naloga. Odgovor podaja naslednji izrek.

Izrek. (Redfield (1928), Pólya (1937).) *Naj bo N množica moči n, K množica moči k, G podgrupa grupe $Sym(N)$ s cikličnim indeksom $\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in naj bo ekvivalenčna relacija $\sim$ na množici K^N vseh preslikav iz N v K določena s predpisom*

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in G\,, \text{ da velja } f = g \circ \pi.$$

Tedaj relacija $\sim$ razbije množico K^N na $\zeta_G(k, k, \ldots, k)$ ekvivalenčnih razredov.

Če zgoraj povedano uporabimo pri nalogi z mušketirji in gardisti, pridemo do števila:

$$\frac{1}{36}(3^7 + 9 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^5 + 12 \cdot 3^4) = 300\,.$$

Dokaz, da nas zgoraj opisani postopek res vedno pripelje do pravilnega odgovora, ni posebej težak, zahteva pa kar nekaj pomožnih rezultatov, katerih izpeljave bi nam vzele precej časa in prostora. Bralca vabim, da si natančen dokaz ogleda v že omenjeni literaturi. Preden gremo naprej, pa predlagam, da si ogledamo naslednja zgleda.

Zgled. Naj bo $G = \{\mathrm{id}_N\}$ trivialna grupa. Tedaj je ciklični indeks $\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^n$. Izrek Redfielda in Pólya tedaj pravi, da je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako $\zeta_G(k, k, \ldots, k) = k^n$, kar po pričakovanjih ustreza številu variacij s ponavljanjem.

Zgled. Naj bo $G = \mathrm{Sym}(N)$. Ciklični indeks simetrične grupe $\mathrm{Sym}(N)$ smo izračunali v razdelku o cikličnem indeksu:

$$\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} (\frac{x_1}{1})^{\alpha_1} (\frac{x_2}{2})^{\alpha_2} \cdots (\frac{x_n}{n})^{\alpha_n}\,.$$

V skladu z izrekom Redfielda in Pólya je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako

$$\zeta_G(k, k, \ldots, k) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}} k^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\,.$$

Ker je relacija $\sim$ v našem primeru enaka relaciji iz formule (1), mora biti zgornje število enako številu kombinacij s ponavljanjem. Tako smo izpeljali zanimivo enakost:

$$\binom{n+k-1}{n} = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n! 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n}} k^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\,.$$

...in naprej

Definicije ekvivalenčnih relacij (1), (2) in (3) nas skupaj z 8. nalogo kar silijo k naslednji nalogi, ki v svoji splošnosti zaobjame tako prvi stolpec dvanajstere poti kot izrek Redfielda in Pólya.

9. naloga. Naj bosta N in K končni množici, G podgrupa grupe $\mathrm{Sym}(N)$ in H podgrupa grupe $\mathrm{Sym}(K)$. Na koliko ekvivalenčnih razredov razpade množica K^N pri relaciji

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstajata } \rho \in H \text{ in } \pi \in G, \text{ da velja } f = \rho \circ g \circ \pi\,? \qquad (5)$$

Odgovor na zgornje vprašanje je našel N. J. de Bruijn (glej njegov pregledni članek [3]).

Izrek. (de Bruijn.) *Naj bodo N, K, G, H in $\sim$ kot v besedilu 9. naloge, $|N| = n$, $|K| = k$ in naj bo $\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ciklični indeks grupe G. Za vsako permutacijo $h \in H$ naj $\alpha_1(h)$ predstavlja število negibnih točk permutacije h, $\alpha_i(h)$, za $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, pa število ciklov dolžine i pri zapisu permutacije h kot produkt ločenih ciklov. Za poljubno naravno število m naj $D(m)$ pomeni množico naravnih števil, ki delijo število m. Označimo še:*

$$s_i(h) = \sum_{j \in D(i)} j\alpha_j(h).$$

Tedaj je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako številu

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \zeta_G(s_1(h), s_2(h), \ldots, s_n(h)).$$

Če za grupo H vzamemo bodisi trivialno grupo $\{\mathrm{id}_K\}$ bodisi simetrično grupo $\mathrm{Sym}(K)$, za grupo G pa bodisi trivialno grupo $\{\mathrm{id}_N\}$ bodisi simetrično grupo $\mathrm{Sym}(N)$, nam de Bruijnov izrek razreši prvi stolpec dvanajstere poti. Če pa za H vzamemo trivialno grupo $\{\mathrm{id}_K\}$, za G pa poljubno podgrupo simetrične grupe $\mathrm{Sym}(N)$, nam de Bruijnov izrek preide v izrek Redfielda in Pólya. Preverimo. Naj bo $H = \{\mathrm{id}_K\}$ in $G \leq \mathrm{Sym}(N)$. Izračunajmo število $s_i(\mathrm{id}_K)$ za poljuben $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ker permutacija id_K ne vsebuje nobenih ciklov dolžine $j \geq 2$, pribije pa vse točke množice K, je $\alpha_j(\mathrm{id}_K) = 0$ za vsak $j \geq 2$ in $\alpha_1(\mathrm{id}_K) = k$. Od tod sledi, da je $s_i(\mathrm{id}_K) = k$ za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. De Bruijnov izrek pravi, da je število ekvivalenčnih razredov tedaj enako

$$\zeta_G(s_1(\mathrm{id}_K), s_2(\mathrm{id}_K), \ldots, s_n(\mathrm{id}_K)) = \zeta_G(k, k, \ldots, k).$$

Natanko to pa trdi tudi izrek Redfielda in Pólya. Za konec pa z uporabo de Bruijnovega izreka rešimo še eno različico naloge o mušketirjih in gardistih.

10. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, od katerih je eden poveljnik, trije inštruktorji in trije novinci. Athos ima za sabo naporen dan, zato se boja ne udeleži, v zameno pa na stran mušketirjev povabi tri slučajne opazovalce - trojčke. Trojčki so si tako podobni, da jih nihče ne loči med seboj (niti sami sebe ne). Na koliko načinov si lahko preostala Portos, Aramis in trojčki razdelijo mikastenje gardistov, če gardistov istega ranga med seboj ne ločijo?

Z N označimo množico sedmih gardistov, s K pa petelementno množico, ki vsebuje oba bojujoča mušketirja in vse tri trojčke. Bralec je gotovo že sam ugotovil, da naloga sprašuje po številu ekvivalenčnih razredov relacije (5). Pri tem za grupo G vzamemo enako grupo kot pri 7. nalogi, torej grupo, ki je izomorfna direktnemu produktu $S_1 \times S_3 \times S_3$ in ki ima ciklični indeks enak

$$\zeta_G(x_1, x_2, \ldots, x_7) = \frac{1}{36}({x_1}^7 + 9{x_1}^3{x_2}^2 + 4x_1{x_3}^2 + 6{x_1}^5x_2 + 4{x_1}^4x_3 + 12{x_1}^2x_2x_3)\,,$$

za grupo H pa vzamemo podgrupo grupe $\mathrm{Sym}(K)$, ki pribije oba mušketirja, trojčke pa med seboj poljubno premetava. Takšna grupa je izomorfna grupi $S_1 \times S_1 \times S_3$. Če mušketirja označimo s števili 4 in 5, trojčke pa s števili 1, 2 in 3, grupa H vsebuje naslednje permutacije:

$$H = \{\mathrm{id}_K, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

Vsaki permutaciji $h \in H$ priredimo urejeno petorko $(\alpha_1(h), \alpha_2(h), \ldots, \alpha_5(h))$. V grupi H imamo glede na ciklično strukturo tri tipe permutacij: identiteto, transpozicijo in cikel dolžine 3. Tem tipom pripadajo naslednje urejene petorke: identiteti petorka $(5,0,0,0,0)$, transpoziciji petorka $(3,1,0,0,0)$ in ciklu dolžine tri petorka $(2,0,1,0,0)$. Potrebujemo še števila $s_i(h)$ za $h \in H$ in $i \in \{1,2,\ldots,7\}$. Ker je število $s_i(h)$ odvisno le od cikličnega tipa permutacije h, se lahko omejimo na $h \in \{\mathrm{id}_K, (1,2), (1,2,3)\}$, in ker v cikličnem indeksu ζ_G nastopajo le nedoločenke x_1, x_2 in x_3, moramo zgornja števila izračunati le za $i \in \{1,2,3\}$. Že iz prejšnjega zgleda vemo, da je $s_i(\mathrm{id}_K) = |K| = 5$ za vsako naravno število i. Izračunajmo še preostalo

$$s_1(1,2) = \alpha_1(1,2) = 3, \quad s_2(1,2) = \alpha_1(1,2) + 2\alpha_2(1,2) = 3 + 2 = 5,$$

$$s_3(1,2) = \alpha_1(1,2) + 3\alpha_3(1,2) = 3.$$

$$s_1(1,2,3) = \alpha_1(1,2,3) = 2, \quad s_2(1,2,3) = \alpha_1(1,2,3) + 2\alpha_2(1,2,3) = 2,$$
$$s_3(1,2,3) = \alpha_1(1,2,3) + 3\alpha_2(1,2,3) = 2 + 3 = 5.$$

Izračunati moramo še ciklične indekse $\zeta(h) = \zeta_G(s_1(h), s_2(h), s_3(h), \ldots, s_7(h))$ za $h = \mathrm{id}_K$, $h = (1,2)$ in $h = (1,2,3)$. Kratek račun pokaže, da velja

$$\zeta(\mathrm{id}_K) = 6125, \qquad \zeta(1,2) = 507, \qquad \zeta(1,2,3) = 50.$$

Odgovor na vprašanje se tako glasi:

$$\frac{1}{|H|}\big(\zeta(\mathrm{id}) + 3\zeta((1,2)) + 2\zeta((1,2,3))\big) = \frac{1}{6}(6125 + 3 \cdot 507 + 2 \cdot 50) = 1291.$$

Za občutek izračunajmo še, na koliko načinov bi lahko bili tepeni gardisti, če bi trojčke med seboj razlikovali: $\zeta_G(5,5,5) = 6125$, in če bi namesto enojajčnih trojčkov imeli dva pomočnika, ki bi ju ločili med seboj: $\zeta_G(4,4,4) = 1600$. Če pa trojčke nadomestimo s počivajočim Athosom, vemo, da rezultat znaša $\zeta_G(3,3,3) = 300$.

Zahvala. Zahvaljujem se dr. Borisu Zgrabliću za nad vse koristne pripombe in predloge.

Literatura

[1] V. Batagelj: *Kombinatorika*, samozaložba, Ljubljana, 1997.

[2] N. J. de Bruijn: *Pólya's Theory of Counting*, Applied Combinatorial Mathematics, ur. E. F. Beckenbach, Wiley, New York, 1964.

[3] N. J. de Bruijn: *A survey of generalizations of Pólya's enumeration theorem*, Nieuw. Arch. Wisk. (3), **19**, (1971), 89–112.

[4] M. Juvan, P. Potočnik: *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFAS, Ljubljana, 2000.

[5] G. Pólya: *Kombinatorische Anzahlbestimmungen fur Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen*, Acta Math., **68**, (1937), 145–254.

[6] G. Pólya, R. C. Read: *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds*, Springer Verlag, New York, 1987.

[7] J. H. Redfield: *The Theory of Group-Reduced Distributions*, Amer. J. Math., **49**, (1928), 433–455.

[8] D. Veljan: *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.