Pretoki in pokritja grafov

Riste Škrekovski

Poglavje 1

Pretoki in pokritja grafov

1.1 Osnovno o pretokih

Najprej omenimo nekaj osnovnih definicij. Točka grafa je *soda* oz. *liha*, če je njena stopnja sodo oz. liho število. Če so v grafu vse točke sode, ga imenujemo *sodi* graf. Dobro je znano, da se povezave sodega grafa dajo razbiti na unijo ciklov, ki so po povezavah paroma disjunktni. Graf je *Eulerjev*, če je hkrati sod in povezan. Spomnimo se, da ima vsak Eulerjev graf obhod, ki vsebuje vsako povezavo natanko enkrat. Zato je vsak Eulerjev graf po povezavah 2-povezan. V grafu G je množica povezav $F \subseteq E(G)$ *prerez*, če ima graf $G \setminus F$ več komponent kot G in če je F minimalna s to lastnostjo. Če so vse povezave prereza incidenčne z isto točko grafa, ki ni prerezna točka, tedaj je prerez *trivialen*. Če je prerez množica moči n, potem ji bomo rekli tudi n-*prerez*. 1-prerez pogosto imenujemo *most*. *Utež* je funkcija $f : E(G) \to \Gamma$, kjer je Γ Abelova grupa. V tem delu bomo za Γ najpogosteje uporabljali celoštevilske grupe. *Usmeritev* grafa je predpis, ki vsaki povezavi določi eno od dveh možnih smeri. S usmeritvijo D grafa G dobimo usmerjeni graf, ki ga bomo označili z $D(G)$. Usmeritev D bomo neredko gledali kot funkcijo, za katero velja:

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{usmeritev povezave } uv \text{ je iz } u \text{ proti } v \\ -1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako za vsako povezavo uv velja $D(u,v) = -D(v,u)$. Z $N(v)$ in $E(v)$ bomo ustrezno označevali množico točk, sosednih z v in množico povezav, incidenčnih z v v grafu G.

Pretok grafa G je urejeni par (D, f), kjer je D usmeritev in f utež grafa G, ki izpolnjuje Kirchoffov pogoj:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) = 0. \tag{1.1}$$

Včasih nam bo prišlo prav, če razširimo domeno uteži f tudi na točke grafa G z nastavitvijo

$$f(v) := \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu)$$

za vsako točko $v \in V(G)$. Takrat je pogoj (1.1) enakovreden pogoju, da je $f_{|V} \equiv 0$.

Za utež f grafa G je *nosilec* množica povezav $e \in E(G)$, za katere je $f(e) \neq 0$. Nosilec bomo označili s $\mathrm{supp}(f)$. Pretok (D, f) grafa G je *nikjer-ničelni pretok*, če je $\mathrm{supp}(f) = E(G)$. Kadar f slika v grupo $(\mathbb{Z}, +)$, par (D, f) imenujemo *celoštevilski pretok*. *k-pretok* grafa G je celoštevilski pretok (D, f), pri katerem je $|f(e)| < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. k-pretok, pri katerem ima vsaka povezava nenegativno utež, imenujemo *nenegativni k-pretok*. Če pa ima vsaka povezava pozitivno utež, ga imenujemo *pozitivni k-pretok*.

V nadaljevanju bomo našteli nekaj osnovnih lastnosti pretokov. Bralcu prepustimo, da preveri njihovo veljavnost.

(1) Graf z mostovi ne dopušča nikjer-ničelnega pretoka.

(2) Če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi za vsak $h \geq k$ dopušča nikjer-ničelni h-pretok.

(3) Naj bo (D, f) (nikjer-ničelni) pretok grafa G in naj bo F poljubna podmnožica množice $E(G)$. Naj bo D_F usmeritev, ki jo dobimo iz D s spremembo smeri vsaki povezavi iz F. Utež f_F definiramo s predpisom:

$$f_F(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin F \\ -f(e), & e \in F. \end{cases}$$

Tedaj je par (D_F, f_F) tudi (nikjer-ničelni) pretok grafa G.

(4) Če graf G dopušča nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za dano usmeritev, potem dopušča tudi nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za poljubno usmeritev. Torej, če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi dopušča pozitivni k-pretok.

(5) Za dani celoštevilski pretok grafa G naj bo H podgraf grafa G, induciran z liho uteženimi povezavami. Tedaj je H sod graf. Od tod sledi, da graf dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod.

1.2 Pretoki in barvanja grafov

V tem razdelku bomo videli, da obstaja zelo zanimiva zveza med celoštevilskimi pretoki in barvanji grafov. Namreč, vsak nikjer-ničelni k-pretok ravninskega grafa inducira k-barvanje dualnega grafa in obratno. Torej se izkaže, da je teorija k-pretokov na nek način naravna posplošitev dobro znane teorije barvanj ravninskih zemljevidov. Vložitev grafa na sklenjeni ploskvi imenujemo *celično*, če je vsako lice grafa homomorfno odprtemu disku.

Izrek 1.2.1 (Tutte [47]) *Naj bo G celično vložen graf na neki orientabilni ploskvi. Če je G po licih k-obarvljiv, potem G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Dokaz. Naj bo λ k-barvanje lic grafa G, kjer so barve elementi množice $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Usmeritev D in utež f grafa G definiramo takole. Naj bo $e = uv \in E(G)$ poljubna povezava iz G in naj bosta F_1 in F_2 lici, incidenčni z e. Povezavo e usmerimo tako, da je lice z večjo barvo na njeni desni strani. Za utež pa naj velja $f(e) = |\lambda(F_1) - \lambda(F_2)|$.

Trdimo, da je (D, f) nikjer-ničelni k-pretok grafa G. Naj bo v poljubna točka grafa G. Označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vse sosede točke v, naštete v vrstnem redu, ki ga dobimo, kadar se sprehajamo okrog točke v v smeri urinega kazalca in označimo z e_i povezavo vv_i. Naj bo F_i lice, čigar rob vsebuje eno za drugo povezave e_i in e_{i+1}, $i = 1, \ldots, k \pmod k$. Z indukcijo ni težko pokazati, da velja naslednja zveza

$$\lambda(F_i) = \lambda(F_k) + \sum_{j=1}^{i} D(v, v_j) f(vv_j)$$

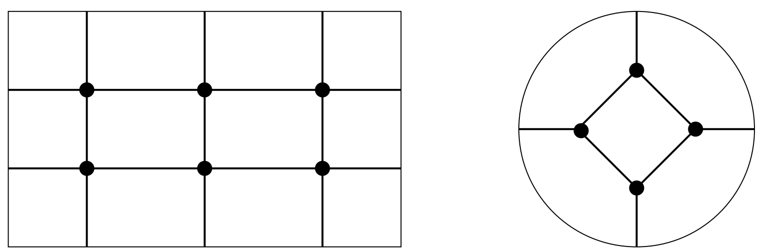
za vsak $i = 1, \ldots, k$. In v primeru, kadar je $i = k$, dobimo

$$\sum_{j=1}^{k} D(v, v_j) f(vv_j) = 0.$$

To pa je pogoj (1.1) in ker je $0 < f(e) < k$, za vsako povezavo $e \in E(G)$ sledi, da je par (D, f) nikjer-ničelni k-pretok. $\square$

Zdajle se lahko vprašamo, ali velja izrek 1.2.1 v obratni smeri, t.j., če celično vložen graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok ali je potem graf po licih k-obarvljiv? Odgovor na to vprašanje je negativen. Primer: graf $C_2 \,\Box\, C_3$ (kartezični produkt grafov C_2 in C_3) celično vložimo v torus, kot je prikazano na sliki 1.1. Ta graf je sod in zato dopušča nikjer-ničelni 2-pretok. Po licih pa $C_2 \,\Box\, C_3$ ni 2-obarvljiv.

Podobno se lahko vprašamo, ali bo izrek 1.2.1 še naprej veljaven, če pogoj orientabilnosti ploskve izpustimo. Odgovor je tudi na to vprašanje negativen. Na sliki 1.1 je po licih 3-obarvljiva celična vložitev grafa K_4 v projektivni ravnini. Graf K_4 pa ne dopušča nikjer-ničelnega 3-pretoka (poglej trditev 2.5.2).



Slika 1.1: Celični vložitvi grafov $C_2 \,\Box\, C_3$ in K_4 na torusu in projektivni ravnini

V primeru, da je ploskev, v kateri je graf vložen, sfera, pa velja nekaj več.

Izrek 1.2.2 (Tutte [47]) *Naj bo G ravninski graf brez mostov. Tedaj je G po licih k-obarljiv natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Dokaz. Po izreku 1.2.1 bo dovolj, če pokažemo, da je G po licih k-obarvljiv, če obstaja nikjer-ničelni pretok (D, f) grafa G. Barvanje $\lambda : F(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ konstruiramo na naslednji način. Najprej izberemo eno lice in ga poljubno obarvamo. Potem ponovimo naslednji postopek, dokler niso vsa lica obarvana: izberi eno neobarvano lice F_u, ki ima za soseda že obarvano lice, recimo F_c; naj bo e povezava, incidenčna z obema licema F_u in F_c; licu F_u priredimo barvo $\lambda(F_u)$ tako, da velja:

$$\lambda(F_u) \equiv \lambda(F_c) \pm f(e) \pmod{k} \tag{1.2}$$

z operacijo $'+'$, kadar je F_c na desni strani povezave e in z operacijo $'-'$ sicer.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je λ dobro definirana. In ker je f nikjer-ničelni k-pretok, bomo dobili, da je λ pravilno po licih k-barvanje grafa G.

Naj bo neobarvano lice F_0, incidenčno z obarvanima licema F_a in F_b in naj bo e_i povezava med licema F_0 in F_i, $i = a, b$. Lahko privzamemo, da je F_0 na desni strani povezave e_a in na levi strani povezave e_b. Dovolj bo, če pokažemo, da je

$$\lambda(F_a) - f(e_a) \equiv \lambda(F_b) + f(e_b) \pmod{k}. \tag{1.3}$$

Ni težko videti, da obstaja prerezna množica $X = \{e_0 = e_a, e_1, \ldots, e_{n-1} = e_b\}$, kjer e_i in e_{i-1} ležita na istem licu F_i, $i = 0, \ldots, n-1$ (indeksiramo po modulu n). Tedaj je $F_1 = F_a$ ter $F_{n-1} = F_b$. Lahko predpostavimo, da je F_i zmeraj na desni strani povezave e_i. Potem imamo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(e_i) = 0 \tag{1.4}$$

in za $i = 1, \ldots, n-2$

$$\lambda(F_{i+1}) \equiv \lambda(F_i) + f(e_i) \pmod{k}. \tag{1.5}$$

Iz (1.4) in (1.5) ni težko izpeljati (1.3). To pa je konec dokaza. □

1.3 Tuttove domneve

V prejšnjem razdelku smo spoznali, v kakšni lepi zvezi sta teorija pretokov in teorija barvanj grafov. Pri barvanju grafov vsakemu grafu priredimo kromatično število. Podobno pri pretokih priredimo vsakemu grafu G *pretočno število* $\kappa(G)$, ki pomeni najmanjše število k, za katero G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Če tak k ne obstaja, potem definiramo $\kappa(G) = \infty$. Naprimer, če ima graf G most, je $\kappa(G) = \infty$.

Prvi dve domnevi, ki ju je postavil Tutte [47], govorita o zgornji meji pretočnega števila.

Domneva 1.3.1 (Domneva o zgornji meji) *Obstaja tako naravno število k, da vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Domneva 1.3.2 (Domneva o 5-pretoku) *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Domnevo o zgornji meji sta neodvisno dokazala Kilpatrick [25] in Jaeger [22]. Oba sta pokazala, da je zgornja meja 8. Kasneje je Seymour [37] pokazal, da je tudi število 6 zgornja meja. To je hkrati tudi najboljši približek Domnevi o 5-pretoku. Torej za vsak graf G brez mostov je $\kappa(G) \leq 6$. Domneva o 5-pretoku je posplošitev trditve, da je vsak ravninski graf 5-obarvljiv. Vemo, da Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka (glej posledico 2.6.4(a)). Torej v tej domnevi ne moremo zamenjati 5 s 4.

Naslednja Tuttova domneva govori o posplošitvi Izreka štirih barv. Iz izreka 1.2.2 in iz Izreka štirih barv dobimo naslednji rezultat.

Posledica 1.3.3 *Vsak ravninski graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka (glej posledico 2.6.4(a)) in se ne da vložiti v ravnino. Tutte [50] je nekdanjo Domnevo o štirih barvah posplošil takole.

Domneva 1.3.4 (Domneva o 4-pretoku) *Vsak graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Domneva o 4-pretoku je tesno povezana z naslednjo Tuttovo [50, 51] domnevo.

Domneva 1.3.5 (Domneva o 3-barvanju povezav) *Vsak kubičen graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, je po povezavah 3-obarvljiv.*

Znani Grötzschev izrek [14] pravi, da je vsak ravninski graf brez zank in trikotnikov 3-obarvljiv. Iz dualnosti sledi, da je vsak ravninski graf brez 1- in 3-prerezov po licih 3-obarvljiv. Sedaj iz izreka 1.2.2 dobimo naslednji rezultat.

Posledica 1.3.6 *Vsak ravninski graf brez mostov in 3-prerezov dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Tuttova zadnja domneva o pretokih govori o posplošitvi zgornje posledice.

Domneva 1.3.7 (Domneva o 3-pretoku) *Vsak graf brez mostov in brez 3-prereza dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Razen Domneve o zgornji meji, ki je sedaj izrek, se je izkazalo, da so ostale domneve pretrd oreh. Dejstvo je, da so nekatere od teh domnev stare več kot štiri desetletja in da je do danes v tej smeri zelo malo narejenega. V naslednjem poglavju bomo povedali nekaj zanimivih rezultatov, ki so nastali v poskusih, da se zgornje domneve rešijo.

1.4 Modularni pretoki

Modularni k-pretok grafa G je urejeni par (D, f), kjer je D usmeritev grafa G in $f : E(G) \to \mathbb{Z}$ tako, da velja:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) \equiv 0 \pmod{k} \tag{1.6}$$

Nosilec modularnega k-pretoka (D, f) je množica povezav $e \in E(G)$, za katero je $f(e) \not\equiv 0 \pmod{k}$ in jo označimo s $\mathrm{supp}_k(f)$. Modularni k-pretok (D, f) je *nikjer-ničelni*, če je $\mathrm{supp}_k(f) = E(G)$.

Tutte [46] je dokazal naslednji izrek o modularnih k-pretokih.

Izrek 1.4.1 *Graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni modularni k-pretok.*

Pomembnost modularnih k-pretokov nam kaže zgornji izrek. Torej v splošnem ne bo nič narobe, če pri dokazovanju, da graf dopušča k-pretok, pogoj (1.1) nadomestimo s šibkejšim pogojem (1.6). V praksi se izkaže, da si na ta način delo precej olajšamo.

Lema 1.4.2 *Za dani graf G naj bo D usmeritev in $f : E(G) \to \mathbb{R}^+$ utež. Predpostavimo, da za točko $u \in V(G)$ velja $f(u) > 0$. Tedaj obstaja točka $v \in V(G)$ s $f(v) < 0$ in obstaja usmerjena pot od u do v.*

Dokaz. Predpostavimo, da lema ne velja. Očitno je, da obstaja točka z negativno utežjo, t.j. obstaja $x \in V(G)$ z $f(x) < 0$. Torej naj ne obstaja usmerjena pot od točke u do nobene od točk z negativno utežjo. Označimo s U množico točk grafa, do katerih obstaja usmerjena pot iz u. Ob predpostavki, da za vsako točko $x \in U$ velja $f(x) \geq 0$, izpeljimo

$$\begin{array}{rcl} 0 & < & \sum_{v \in U} f(v) \\ & = & \sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v)} D(v,x) f(vx) \\ & = & \sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v) \setminus U} D(v,x) f(vx) \\ & = & -\sum_{v \in U} \sum_{x \in N(v) \setminus U} f(vx) \leq 0. \end{array}$$

To pa nas pripelje do protislovja. $\square$

Da dokažemo izrek 1.4.1, potrebujemo naslednje definicije. Naj bo (D, f) modularni k-pretok grafa G in naj bo $F \subseteq E(G)$. Usmeritev D_F grafa G dobimo iz D tako, da spremenimo smer vsaki povezavi iz F. Utež f_F pa definiramo takole:

$$f_F(e) = \begin{cases} k - f(e), & e \in F \\ f(e), & e \notin F. \end{cases}$$

Ni težko videti, da je par (D_F, f_F) ravno tako modularni k-pretok. Za poljubno točko v grafa G in poljubno podmnožico povezav $F \subseteq E(G)$ definirajmo

$$f_F(v) = \sum_{u \in N(v)} D_F(v,u) f_F(vu) \qquad \text{in} \qquad \eta(F) = \sum_{v \in V(G)} |f_F(v)|.$$

Lema 1.4.3 *Naj ima graf G modularni k-pretok (D, f) tako, da je $0 < f(e) < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Potem obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$, za katero je (D_F, f_F) pozitiven k-pretok.*

Dokaz. Kadar obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$ z $\eta(F) = 0$, je par (D_F, f_F) pozitiven k-pretok. Zato predpostavimo, da za vsako podmnožico $F \subseteq E(G)$ velja $\eta(F) > 0$. Zdajle pa naj bo neprazna podmnožica $F \subseteq E(G)$ s čim manjšim $\eta(F) > 0$. Po lemi 1.4.2 obstajata točki u in v tako, da je $f(u) > 0$ in $f(v) < 0$ in obstaja usmerjena pot $P = (u =) w_0 \cdots w_n (= v)$, kjer je $f(w_i) = 0$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Naj bo $F' = F \oplus E(P)$. Tedaj pa velja

$$f_{F'}(w_i) = f_F(w_i) \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

ter

$$f_{F'}(u) = f_F(u) - k \quad \text{in} \quad f_{F'}(v) = f_F(v) + k.$$

Od tod sledi, da je $\eta(F') < \eta(F)$. To pa nasprotuje minimalnosti $\eta(F)$. □

Trditev 1.4.4 *Naj bo (D, f) modularni k-pretok grafa G. Tedaj G dopušča k-pretok (D, g) tako, da je $f(e) \equiv g(e) \pmod{k}$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.*

Dokaz. Naj bo f_1 utež, za katero velja:

$$\forall e \in E(G) : f_1(e) \equiv f(e) \pmod{k_1} \text{ in } 0 < f_1(e) < k.$$

Par (D, f_1) je modularni k-pretok s $\mathrm{supp}_k(f_1) = \mathrm{supp}_k(f)$. Po lemi 1.4.3 obstaja podmnožica $F \subseteq E(G)$ tako, da je (D_F, f_{1F}) nenegativen k-pretok s $\mathrm{supp}(f_{1F} = \mathrm{supp}_k(f_1)$. Definirajmo

$$g(e) = \begin{cases} -f_{1F}(e), & e \in F \\ f_{1F}(e), & e \notin F. \end{cases}$$

Za vsako povezavo e velja naslednje

$$f(e) \equiv f_1(e) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} -f_{1F}(e), & e \in F \\ f_{1F}(e), & e \notin F \end{array} \right\} = g(e) \pmod{k}.$$

Torej je (D, g) iskani k-pretok. □

Dokaz izreka 1.4.1 Jasno, vsak k-pretok je tudi modularni k-pretok. Tako nam preostane, da pokažemo samo še drugo smer. Naj bo (D, f) modularni nikjer-ničelni k-pretok grafa G. Trditev 1.4.4 nam zagotovi, da obstaja k-pretok (D, g) tako, da je $f(e) \equiv g(e) \pmod{k}$. Zato je $g(e) \neq 0$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Torej je (D, g) nikjer-ničelni k-pretok grafa G. □

Lahko je videti, da je vsak nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok grafa G tudi nikjer-ničelni modularni k-pretok. Zdaj pa naj bo (D, f) poljubni nikjer-ničelni modularni k-pretok grafa G. Označimo s F množico negativno utežene povezave grafa G. Definirajmo utež g takole

$$\forall e \in E(G) : f_F(e) \equiv g(e) \pmod{k} \text{ in } 1 \leq g(e) \leq k-1.$$

Tedaj je par (D_F, g) nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok. Tale kratek premislek nas pripelje do sklepa, da graf dopušča nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni modularni k-pretok. Tako smo z dokazom izreka 1.4.1 dokazali tudi naslednjo posledico.

Posledica 1.4.5 *Graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko tedaj, ko dopušča nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_k, +_k)$-pretok.*

1.5 Pretočni polinomi

Dobro je znano, da je število različnih k-barvanj grafa G, ki je označeno s $P(G, k)$, polinom z nedoločenko k. Zato se lahko vprašamo, ali je funkcija $F(G, k)$, t.j. število različnih nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G za vnaprej podano usmeritev D in Abelovo grupo Γ, polinom nedoločenke k. Ni se težko prepričati v veljavnost naslednje trditve.

Trditev 1.5.1 *Funkcija $F(G, k)$ ima naslednje lastnosti:*

(1) $F(G, k) = 0$, če je G povezava;

(2) $F(G, k) = k - 1$, če je G zanka;

(3) $F(G, k) = (k-1)F(G \setminus e, k)$, če je $e \in E(G)$ zanka;

(4) $F(G, k) = F(G/e, k) - F(G \setminus e, k)$, če $e \in E(G)$ ni zanka.

Iz zgornje lastnosti je razvidno, da je $F(G, k)$ polinom z nedoločenko k. Naslednji izrek nam poda $F(G, k)$ v polinomski obliki. Označimo z $r(F)$ število komponent podgrafa v G, ki je induciran z množico povezav $F \subseteq E(G)$.

Izrek 1.5.2 *Naj bo Γ končna Abelova grupa reda k in naj bo D poljubna usmeritev grafa G. Za usmeritev D je število nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G*

$$F(G, k) = \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|E(G) \setminus F|} k^{|F| - r(F)}. \tag{1.7}$$

Zgornji izrek se lahko dokaže z indukcijo po številu povezav grafa G. Če je G povezava ali zanka, potem je to enostavno preveriti. Sicer pa enakost (1.7) izpeljemo s pomočjo trditve 1.5.1(3) in (4). Zgornji izrek neposredno implicira naslednjo posledico. (Ko smo že pri posledici 1.5.3, omenimo samo, da zaenkrat še ni znan konstruktiven dokaz za (b).)

Posledica 1.5.3 *Naj bosta Γ_1 in Γ_2 Abelovi grupi reda k in naj bo G poljuben graf.*

(a) Za poljubno usmeritev D grafa G je število nikjer-ničelnih Γ_1-pretokov grafa G enako številu nikjer-ničelnih Γ_2-pretokov grafa G.

(b) Graf G dopušča nikjer-ničelni Γ_1-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni Γ_2-pretok.

Označimo s K_2^h graf, sestavljen iz dveh točk in h povezav med njimi.

Trditev 1.5.4 *Naj bo G povezan graf s prerezom T moči $h \leq 3$ in $M_1 = G/E(H_2)$ in $M_2 = G/E(H_1)$, kjer sta H_1 in H_2 komponenti grafa $G \setminus T$. Tedaj velja:*

$$F(G,k) \cdot F(K_2^h,k) = F(M_1,k) \cdot F(M_2,k)$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali z indukcijo po številu povezav grafa G. V primeru, ko je $|E(G)| = h$, velja $G \cong M_1 \cong M_2 \cong K_2^H$. Zato tedaj ni težko preveriti, da enakost velja. Predpostavimo, da obstaja povezava $e \in E(G) \setminus T$ in recimo, da je $e \in E(H_2)$. Od tod je $e \in E(M_1)$. Kadar je e zanka, velja:

$$\begin{aligned} F(G,k) \cdot F(K_2^h,k) &= (k-1)F(G \setminus e,k) \cdot F(K_2^h,k) \\ &= (k-1)F(M_1 \setminus e,k) \cdot F(M_2,k) \\ &= F(M_1,k) \cdot F(M_2,k). \end{aligned}$$

In v primeru, ko e ni zanka:

$$\begin{aligned} F(G,k) \cdot F(K_2^h,k) &= [F(G \setminus e,k) - F(G/e,k)] \cdot F(K_2^h,k) \\ &= F(G \setminus e,k) \cdot F(K_2^h,k) - F(G/e,k) \cdot F(K_2^h,k) \\ &= F(M_1 \setminus e,k) \cdot F(M_2,k) - F(M_1/e,k) \cdot F(M_2,k) \\ &= F(M_1,k) \cdot F(M_2,k). \end{aligned}$$

To pa je konec dokaza. □

1.6 Pokritja grafov

Množica podgrafov $\mathcal{F}$ grafa G je *pokritje* grafa G, če je vsaka povezava iz G vsebovana v vsaj enem grafu iz $\mathcal{F}$. Opozorimo, da grafi iz pokritja niso nujno paroma različni. Pokritje, ki ne vsebuje več kot k grafov, imenujemo *k-pokritje*. Pokritje $\mathcal{F}$

je *sodo*, če je vsak graf iz $\mathcal{F}$ sod. Sodo pokritje $\mathcal{F}$ grafa G imenujemo *sodo dvojno pokritje* ali krajše *dvojno pokritje*, če je vsaka povezava iz G vsebovana v natanko dveh grafih iz $\mathcal{F}$. Pokritje je *trivialno*, kadar je $|\mathcal{F}| = 1$ oz. $\mathcal{F} = \{G\}$. Pokritje $\mathcal{F}$ grafa G imenujemo $(1,2)$ *pokritje*, kadar je vsaka povezava iz G vsebovana v največ dveh elementih iz $\mathcal{F}$. Torej vsako dvojno pokritje je tudi $(1,2)$ pokritje.

Mogoče takoj ni videti zveze med teorijo pokritij grafov in teorijo pretokov. Omenimo samo, da G dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod oz. kadar je $\{G\}$ sodo pokritje grafa G. Naslednja trditev nam posploši to zvezo.

Trditev 1.6.1 *Naj bo r naravno število. Graf G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok natanko tedaj, ko ima sodo r-pokritje.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Iz posledic 1.4.5 in 1.5.3 lahko povzamemo, da obstaja nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok (D, f) grafa G. Torej f slika v množici $\mathbb{Z}_2^r$. Za $i = 1, \ldots, r$ in $x \in \mathbb{Z}_2^r$ označimo z $x(i)$ i-to kordinato r-terke x. Naj bo

$$C_i = \{e \in E(G) : f(e)(i) = 1\}.$$

Ker je (D, f) pretok, sledi, da je graf H_i, induciran s povezavami iz C_i, sod. Torej je množica $\{H_1, \ldots, H_r\}$ sodo r-pokritje grafa G.

$(\Leftarrow)$ Naj bo $\{H_1, \ldots, H_r\}$ sodo r-pokritje grafa G. Definirajmo utež $f : E(G) \to \mathbb{Z}_2^r$ takole:

$$f(e)(i) = \begin{cases} 0, & e \notin E(C_i) \\ 1, & e \in E(C_i), \end{cases}$$

za $i = 1, \ldots, r$. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G. Ni težko videti, da je par (D, f) $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok grafa G. Ker je vsaka povezava $e \in V(G)$ vsebovana v vsaj enem od grafov H_i, $i = 1, \ldots, r$, sledi, da je (D, f) tudi nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok. Iz posledic 1.4.5 in 1.5.3 pa sledi, da G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. $\square$

Če se omejimo samo na soda dvojna pokritja, potem velja naslednja zveza.

Trditev 1.6.2 *Naj ima graf G dvojno 2^r-pokritje. Tedaj G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{F}$ dvojno 2^r-pokritje grafa G. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G in $\omega : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^r$ poljubna injektivna preslikava. Definirajmo utež f grafa G:

$$\forall e \in E(G) : f(e) = \omega(C_e^1) + \omega(C_e^2),$$

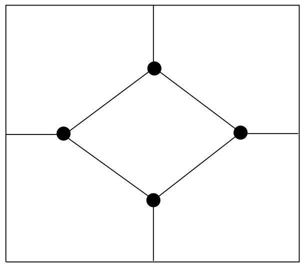
kjer $e \in E(C_e^i)$ in $C_e^i \in \mathcal{F}$, za $i = 1, 2$. Ni težko pokazati, da je (D, f) $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok. Iz injektivnosti preslikave ω sledi, da je ta pretok tudi nikjer-ničelni. Iz posledic 1.4.5 in 1.5.3 pa sledi, da G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. $\square$

Glede obstoja dvojnega pokritja sta Szekeres [42] in Seymour [36] neodvisno podala naslednjo domnevo.

Domneva 1.6.3 (Domneva o dvojnem pokritju) *Vsak graf brez mostov ima sodo dvojno pokritje.*

Kasneje sta Celmins [8] in Preissmann [33] neodvisno postavila močnejšo domnevo. V delu bomo pokazali, da Petersenov graf nima dvojnega 4-pokritja. Torej se v spodnji domnevi ne da zamenjati 5 s 4.

Domneva 1.6.4 (Domneva o dvojnem 5-pokritju) *Vsak graf brez mostov ima sodo dvojno 5-pokritje.*



Slika 1.2: Celična in nekrepka vložitev grafa K_4 na torusu

Celična vložitev grafa v neko ploskev je *krepka*, kadar je rob vsakega lica cikel grafa. Da vsaka celična vložitev ni zmeraj krepka, vidimo iz slike 1.2; obe lici sta odprta diska, vendar rob enega od teh dveh lic ni cikel. Topološko posplošitev Domneve o dvojnem pokritju je podal Haggard [19] (glej [29, 30]).

Domneva 1.6.5 (Domneva o krepki vložitvi) *Vsak 2-povezan graf ima krepko celično vložitev v neko ploskev.*

Obstaja celo močnejša domneva od zgornje, ki trdi, da se lahko v zgornji domnevi omejimo na orientabilne ploskve.

1.7 Usmerjena pokritja

1.7.1 Usmerjena dvojna pokritja grafov

Usmeritev D sodega grafa G je *pravilna*, če je $\forall v \in V(G) : d_D^+(v) = d_D^-(v)$. Tedaj G dopušča nikjer-ničelni 2-pretok (D, f) z $f \equiv 1$. Množica sodih podgrafov $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ grafa G je *usmerjeno dvojno pokritje* grafa G, če velja

(1) za vsak H_i obstaja pravilna usmeritev D_i;

(2) vsaka povezava $e \in E(G)$ je vsebovana v natanko dveh grafih H_{e1} in H_{e2} z $e1, e2 \in \{1, \ldots, k\}$;

(3) vsako povezavo $e \in E(G)$ usmeritivi D_{e1} in D_{e2} usmerjata v različno smer.

Usmerjeno dvojno k-pokritje je usmerjeno dvojno pokritje z močjo ne večjo od k. Hitro se vidi, da usmerjeno dvojno k-pokritje inducira dvojno k-pokritje grafa. V nadaljevanju bomo študirali zvezo med naslednjimi tremi lastnostmi grafov tako za vse grafe v splošnem (v vsakem primeru bomo privzeli, da so grafi brez mostov), kakor tudi za grafe iz posameznih razredov ali posameznih k-jev.

P1. Graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.

P2. Graf G ima usmerjeno dvojno k-pokritje.

P3. Obstaja orientabilna sklenjena ploskev S, na kateri ima graf G po licih k-obarvljivo vložitev.

Trditev 1.7.1 *Naj bo G po povezavah 2-povezan graf, S orientabilna sklenjena ploskev in k naravno število. Tedaj*

(1) v splošnem velja $P3 \Rightarrow P2 \Rightarrow P1$;

(2) če je G ravninski in S sfera, potem velja $P3 \Leftrightarrow P2 \Leftrightarrow P1$;

(3) če je G kubičen, potem velja $P3 \Leftrightarrow P2 \Rightarrow P1$;

(4) če je $k \in \{2, 3, 4\}$, potem velja $P3 \Rightarrow P2 \Leftrightarrow P1$.

Dokaz. (1) ($P3 \Rightarrow P2$). Naj bo G vložen v orientabilni ploskvi S tako, da je po licih k-obarvan. Označimo s $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ barvne razrede tega k-barvanja. Usmerimo povezave roba vsakega lica tako, da je rob usmerjen v smeri urinega kazalca. Za $i = 1, \ldots, k$ naj bo B_i usmerjen graf, induciran s usmerjenimi robovi lic iz $\mathcal{F}_i$. Hitro se vidi, da je $\{B_1, \ldots, B_k\}$ usmerjeno k-pokritje grafa G.

($P2 \Rightarrow P1$). Naj bo D poljubna usmeritev grafa G in naj bo $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ usmerjeno dvojno k-pokritje grafa G. Označimo z D_i usmeritev usmerjenega grafa H_i. Ker je D_i pravilna usmeritev, obstaja 2-pretok (D_i, f_i) grafa G s $\mathrm{supp}(f_i) = E(H_i)$ in $f_i(e) = 1$ za vsak $e \in E(H_i)$. Naj bo

$$f_i'(e) = \begin{cases} f_i(e), & D \text{ in } D_i \text{ enako usmerjata } e; \\ -f_i(e), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Par (D, f_i') je 2-pretok grafa G s $\mathrm{supp}(f_i') = E(H_i)$. Definirajmo utež f grafa G takole

$$\forall e \in E(G) : f(e) = \sum_{i=1}^{k} i f_i'(e).$$

Bralcu prepustimo, da se prepriča, da je par (D, f) nikjer-ničelni k-pretok.

(2) Z (1) smo pokazali, da v splošnem velja $P3 \Rightarrow P2 \Rightarrow P1$. Kadar je G ravninski in S sfera, pa iz izreka 1.2.2 sledi $P1 \Rightarrow P3$. Torej v tem primeru dobimo, da velja $P3 \Leftrightarrow P2 \Leftrightarrow P1$.

(3) Iz (1) bo dovolj, če pokažemo implikacijo $P2 \Rightarrow P3$. Naj bo $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ usmerjeno dvojno pokritje grafa G. Ker je vsak H_i sod usmerjen graf s pravilno usmeritvijo, se ga da razbiti kot unijo po povezavah paroma disjunktnih usmerjenih ciklov; označimo to unijo s $\mathcal{F}_i$. Naj bo $\bar{\mathcal{F}} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$. Vsakemu ciklu $C \in \bar{\mathcal{F}}$ priredimo disk K_C, čigar rob je C. Spomnimo se, da vsaka povezava $e \in E(G)$ pripada natanko dvema cikloma C_{e1} in C_{e2}, ki jo usmerjata v različno smer. Za vsako povezavo $e \in V(G)$ ustrezna dva diska $K_{C_{e1}}$ in $K_{C_{e2}}$ zlepimo vzdolž povezave e tako, da se smeri povezave, ki jo inducirata C_{e1} in C_{e2}, ne ujemata. Ker je graf kubičen končni rezultat lepljenja teh diskov, je orientabilna ploskev S. Na koncu vsak disk K_C obarvamo z barvo i, če je $C \in \mathcal{F}_i$. To pa je po licih k-barvanje vloženega grafa G na orientabilni ploskvi S.

(4) ($P1 \Rightarrow P2$). Naj bo $k = 2$. Potem je G sod graf. Naj bo D pravilna usmeritev grafa G. Označimo z D' usmeritev grafa G, ki v obratno smer kot D usmerja vsako povezavo grafa G. Tedaj je D' tudi pravilna usmeritev za G. Torej je $\{D(G), D'(G)\}$ usmerjeno dvojno pokritje grafa G. Kadar je $k = 3$ oz. 4, glej trditev 2.5.3 oz. trditev 2.6.1.

$\square$

Podrazdelek bomo končali z domnevo, ki jo je postavil Archdeacon [3].

Domneva 1.7.2 *Vsak graf brez mostov ima usmerjeno dvojno 5-pokritje.*

Resničnost domneve 1.7.2 implicira resničnost Domneve o dvojnem 5-pokritju. Celo več, domneva 1.7.2 implicira tudi Domnevo o 5-pokritju. Torej se nekako izzide, da je domneva 1.7.2 posplošitev, v katero združimo obe prej omenjeni domnevi.

1.7.2 Usmerjena pokritja usmerjenih grafov

V prejšnem razdelku smo definirali pokritja (neusmerjenih) grafov. Sedaj pa bomo ta koncept razširili tudi na usmerjene grafe.

Naj bo D usmeritev grafa G. Označimo z $D(G)$ usmerjeni graf, ki ga dobimo iz G s usmeritvijo vsake povezave tako kot je naznačeno v D. *Usmerjeno pokritje* usmerjenega grafa $D(G)$ je množica $\mathcal{F}$ usmerjenih podgrafov grafa $D(G)$ tako, da je vsaka povezava grafa $D(G)$ vsebovana v vsaj enem grafu iz $\mathcal{F}$. Kadar je $|\mathcal{F}| \leq k$, $\mathcal{F}$ imenujemo *usmerjeno k-pokritje*. Usmerjeno pokritje je *sodo*, kadar je vsak element iz $\mathcal{F}$ usmerjen sod graf. Usmerjeno sodo pokritje $\mathcal{F}$ je *pravilno*, če je vsak graf iz $\mathcal{F}$ pravilno usmerjen. Jasno, vsako usmerjeno k-pokritje grafa $D(G)$ inducira k-pokritje grafa G. Obratno pa v splošnem ne velja. Naslednji izrek nam poda zvezo med k-pretoki in pravilno usmerjenimi pokritji grafov.

Izrek 1.7.3 *Naj bo G graf brez mostov, D usmeritev za G in $k \geq 2$. Tedaj G dopušča pozitiven k-pretok (D, f) natanko takrat, ko ima usmerjeni graf $D(G)$ pravilno usmerjeno sodo $(k-1)$-pokritje $\mathcal{F}$ tako, da je vsaka povezava e vsebovana v natanko $f(e)$ elementih pokritja $\mathcal{F}$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Za vsak element $C \in \mathcal{F}$ naj bo (D, f_C) nenegativni 2-pretok s $\operatorname{supp}(f_C) = E(C)$. Definirajmo

$$f = \sum_{C \in \mathcal{F}} f_C.$$

Hitro se vidi, da je (D, f) iskani k-pretok.

($\Rightarrow$) Dokazali bomo z indukcijo po k. V primeru $k = 2$ je trditev trivialna. Zato naj bo $k \geq 3$. Naj bo $E_{k-1} = \{e \in E(G) : f(e) = k - 1\}$. Pretok (D, f) je tudi modularni $(k-1)$-pretok grafa G. Zato po trditvi 1.4.4 obstaja $(k-1)$-pretok (D, f_1) grafa G s $\operatorname{supp}(f_1) = \operatorname{supp}(f) \setminus E_{k-1}$ in $f(e) \equiv f_1(e) \pmod{k-1}$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Definirajmo utež $f_2 = \frac{f - f_1}{k-1}$. Par (D, f_2) je nenegativen 2-pretok s $\operatorname{supp}(f_2) \supseteq E_{k-1}$. Povezave iz opore uteži f_2 inducirajo sod graf; označimo ta graf s C. Par $(D, f - f_2)$ je nenegativen $(k-1)$-pretok grafa G s $\operatorname{supp}(f - f_2) \subseteq \operatorname{supp}(f)$. Naj bo H podgraf grafa G, induciran s povezavami iz $\operatorname{supp}(f - f_2)$. Po indukcijski predpostavki obstaja usmerjeno $(k-2)$-pokritje $\mathcal{F}'$ tako, da je vsaka usmerjena povezava $e \in E(H)$ natanko v $(f - f_2)(e)$ elementih iz $\mathcal{F}'$. Sedaj pa hitro sledi, da je $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{C\}$ iskano $(k-1)$-pokritje za pretok (D, f). $\square$

Poglavje 2

Nikjer-ničelni k-pretoki

2.1 Produkt in vsota pretokov

Naj bo G graf brez mostov s $k = \kappa(G)$. Omenili smo že, da tedaj za vsak $h \geq k$ G dopušča nikjer-ničelni h-pretok. Kaj pa bi znali povedati o h-pretokih grafa G, kadar je $h < k$? Seveda vsi ti pretoki niso nikjer-ničelni. V splošnem bi bilo težko povedati kaj več o tem. Posebej pa bi bilo zanimivo študirati o zvezi med nekaterimi k_1- in k_2-pretoki s k-pretoki grafa G, kadar je $k = k_1 \cdot k_2$ ali $k = k_1 + k_2$.

Bralcu prepustimo, da premisli, da kadar graf G dopušča tak k_1-pretok (D, f_1) in k_2-pretok (D, f_2), da je $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) = E(G)$, tedaj sta $(D, k_2 \cdot f_1 + f_2)$ in $(D, f_1 + k_2 \cdot f_2)$ nikjer-ničelna $k_1 \cdot k_2$-pretoka grafa G. Z naslednjim izrekom bomo pokazali, da velja nekaj več kot le zgornji premislek.

Izrek 2.1.1 *Graf G dopušča nikjer-ničelni $k_1 \cdot k_2$-pretok, če in samo če dopušča k_1-pretok (D, f_1) in k_2-pretok (D, f_2) s* $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) = E(G)$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ta smer je pravzaprav zgornji premislek.

($\Rightarrow$) Naj graf G dopušča nikjer-ničelni $k_1 \cdot k_2$-pretok (D, f). Kot smo že omenili v prejšnjem poglavju, lahko privzamemo, da je to pozitiven pretok. Po trditvi 1.4.4, G dopušča k_1-pretok (D, f_1) tako, da je

$$\forall e \in E(G) : f_1(e) \equiv f(e) \pmod{k_1}. \tag{2.1}$$

Zdajle definirajmo utež f_2' takole:

$$\forall e \in E(G) : f_2'(e) = \frac{f(e) - f_1(e)}{k_1}. \tag{2.2}$$

Za poljubno točko $v \in V(G)$ velja

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{u \in N(v)} D(v,u) f_2'(vu) &= \textstyle\sum_{u \in N(v)} D(v,u)(f(vu) - f_1(vu))/k_1 \\
&= \textstyle\sum_{u \in N(v)} D(v,u) f(vu) - \frac{1}{k} \sum_{u \in N(v)} D(v,u) f_1(vu) \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

To nam zagotovi, da je (D, f_2') pretok grafa G. Iz (2.1) in (2.2) sledi, da je

$$\forall e \in E(G) : 0 \leq f_2'(e) \leq k_2.$$

Torej (D_2, f_2') je (k_2+1)-pretok grafa G. Ni težko videti, da za poljubno povezavo $e \in E(G)$ velja:

$$f_1(e) \neq 0 \text{ ali } f_2'(e) \not\equiv 0 \pmod{k_2}.$$

Definirjamo utež $f_2'' : E(G) \to \{0, \ldots, k-1\}$ takole

$$\forall e \in E(G) : f_2''(e) \equiv f_2'(e) \pmod{k_2}.$$

Očitno je (D, f_2'') modularni k_2-pretok in je $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}_k(f_2'') = E(G)$. Po lemi 1.4.3 obstaja nikjer-ničelni k_2-pretok (D, f_2) tako, da je

$$\forall e \in E(G) : f_2(e) \equiv f_2''(e) \pmod{k_2}.$$

Torej (D, f_1) in (D, f_2) sta k_1- in k_2-pretoka grafa G, za katera je $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) = E(G)$. □

Vemo, da kadar graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem ta dopušča tudi nikjer-ničelni pozitivni k-pretok. Zato se bomo v naslednji trditvi omejili samo na pozitivne pretoke.

Trditev 2.1.2 *Naj bo $k = k_1 + k_2$ z $k_1 \geq 2$ in $k_2 \geq 1$. Potem graf G dopušča pozitivni nikjer-ničelni k-pretok (D, f) natanko takrat, ko G dopušča nenegativni k_1-pretok (D, f_1) in nenegativni $(k_2 + 1)$-pretok (D, f_2) z $f = f_1 + f_2$ in $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) = E(G)$.*

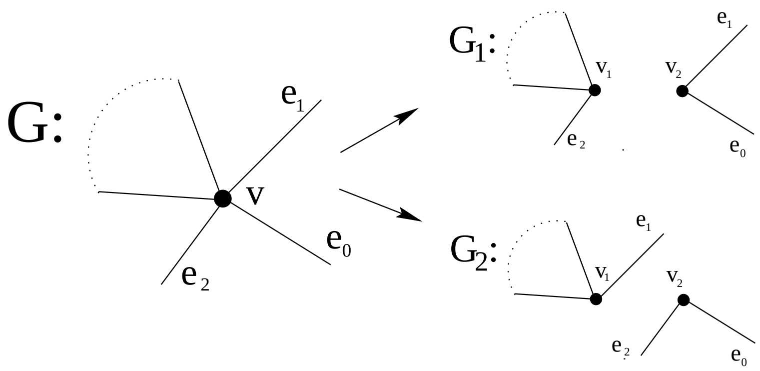
Dokaz. $(\Leftarrow)$ V to smer je trditev trivialna in zato jo prepustimo bralcu.

$(\Rightarrow)$ To smer pa bomo dokazali s pomočjo izreka 1.7.3. Ta izrek implicira, da ima G usmerjeno sodo $(k-1)$-pokritje $\mathcal{F}$ tako, da je vsaka povezava $e \in V(G)$ v natanko $f(e)$ grafov iz $\mathcal{F}$. Naj bo $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ poljubno razbitje $\mathcal{F}$ z $|\mathcal{F}| \leq k_1 - 1$ in $|\mathcal{F}_2| \leq k_2$. Spet po izreku 1.7.3 obstajata nenegativni k_1-pretok (D, f_1) in nenegativni (k_2+1)-pretok (D, f_2) tako, da je vsaka povezava e vsebovana v natanko $f_i(e)$ $(i = 1, 2)$ grafih iz $\mathcal{F}$. To pa implicira zvezo $f = f_1 + f_2$. Ker je (D, f) nikjer-ničelni, sledi, da je $\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_2) = E(G)$. □

2.2 Minimalni protiprimeri

Zelo pogosto je v teoriji grafov, ko se lotimo neke domeneve, študiranje lastnosti minimalnega protiprimera te domneve, ob predpostavki, da protiprimer obstaja. V tem razdelku bomo to naredili za Tuttove domneve. Predpostavimo, da za $k = 3, 4$ ali 5, Domneva o k-pretoku ne velja. Potem zagotovo obstaja protiprimer G te domneve, da je $|V(G)| + |E(G)|$ najmanjše, kar se da. V nadaljevanju bomo videli, da ima graf G lepe lastnosti, to pa nas bo pripeljalo do zanimivih rezultatov o nikjer-ničelnih k-pretokih.

Naslednja lema, znana kot *Lema o cepitvi točke*, nima opravka s pretoki, pa vendarle nam bo prišla zelo prav.



Slika 2.1: Cepitev točke iz leme 2.2.1

Lema 2.2.1 (Fleishner [16]) *Naj bo graf G po povezavah 2-povezan in naj bo $v \in V(G)$ točka stopnje vsaj 4. Naj bodo e_0, e_1 in e_2 povezave grafa G, incidenčne s točko v tako, da $\{e_0, e_1, e_2\}$ ni prerez. Definirajmo graf G_i $(i = 1, 2)$ takole: razcepimo točko v na točki v_1 in v_2 tako, da bo točka v_2 incidenčna s povezavami e_0 in e_i, točka v_1 pa incidenčna s ostalimi povezavami, ki so bile incidenčne v G s točko v (glej sliko 2.1). Potem je vsaj eden od grafov G_1 in G_2 po povezavah 2-povezan.*

Dokaz. Recimo, da oba grafa G_1 in G_2 nista po povezavah 2-povezana. Tedaj veljajo naslednje lastnosti.

(1) *Vsak most grafa G_i $(i = 1, 2)$ leži na vsaki poti med v_1 in v_2.*

Naj bo e most v G_i. Torej je e most zato, ker pri cepitvi točke v (na v_1 in v_2) vsak cikel grafa G, ki vsebuje e, razpade na pot med v_1 in v_2.

(2) *Graf G_i $(i = 1, 2)$ nima dveh po povezavah disjunktnih poti med v_1 in v_2.*

Predpostavimo, da ima G_i dve taki poti. Tedaj je G_i povezan, ker je G povezan. Graf G_i je tudi brez mostov, drugače pridemo v protislovje s (1). Od tukaj sledi, da je G_i po povezavah 2-povezan. To pa je protislovje.

Naj bo B_i $(i = 1, 2)$ blok grafa G_1, ki vsebuje povezavo e_i. Ker smo predpostavili, da G_1 ni po povezavah 2-povezan sledi, da je $B_1 \neq B_2$, t.j., $E(B_1) \cap E(B_2) = \emptyset$ in $|V(B_1) \cap V(B_2)| \leq 1$. Zdaj pa obravnavajmo naslednje tri primere:

- *B_1 in B_2 nista povezavi.* V tem primeru obstaja cikel C_i $(i = 1, 2)$ v B_i, ki vsebuje povezavo e_i. Za cikla C_1 in C_2 velja $E(C_1) \cap E(C_2) \neq \emptyset$. Torej v grafu G_2 pri cepitvi točke v, C_1 in C_2 postaneta po povezavah disjunktni poti med v_1 in v_2. Tako pridemo v protislovje z (2).

- *B_2 je povezava.* Tedaj je e_2 most v G_1. Iz (1) sledi, da vsaka pot med v_1 in v_2 vsebuje e_2. Od tukaj pa sledi, da je $\{e_0, e_1, e_2\}$ prerez v grafu G. To pa smo predpostavili, da ni mogoče.

- *B_1 je povezava.* Podobno kot prej, je e_1 most v G_1 in zaradi tega, iz (1), vsaka pot med v_1 in v_2 vsebuje e_1. To pa implicira, da je e_0 most v G; to pa je protislovje.

□

Naj bo graf G vložen na neki vnaprej podani ploskvi in privzemimo, da sta e_0 in e_i $(i = 1, 2)$ sosedi na robu nekega lica. Tedaj vložitev grafa G inducira vložitev za vsakega od grafov G_1 in G_2 iz zgornje leme. To ohranjanje vložitve nam bo prišlo prav, ko bomo študirali minimalne protiprimere Tuttovih domnev, ki se dajo vložiti na vnaprej podano ploskev.

Trditev 2.2.2 *Naj bo G po povezavah 2-povezan graf, ki za dano naravno število $k > 2$ ne dopušča nikjer-ničelnega k-pretoka in s čim manjšim $|V(G)| + |E(G)|$. Tedaj je G enostaven, 3-povezan kubičen graf brez trivialnega 3-reza in z velikostjo najkrajšega cikla vsaj $2k - 3$.*

Dokaz. Očitno je, da je G 2-povezan, brez zank in brez točk stopnje dve. Po trditvi 1.5.4 G nima netrivialnega prereza reda 2 in 3. Ker G nima točke stopnje 2 sledi, da nima prereza moči 2, t.j. G je po povezavah 3-povezan. Zdaj predpostavimo, da je v točka stopnje vsaj 4 grafa G. Po lemi 2.2.1 obstajata povezavi $e_1 = vu_1$ in $e_2 = vu_2$ tako, da je graf $G' = G \setminus \{e_1, e_2\} \cup \{vu_2\}$ po povezavah 2-povezan. Ker je $V(G') + E(G') < V(G) + E(G)$, iz minimalnosti grafa G sledi, da G' dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Omenimo samo, da bi e_1 in e_2 lahko izbrali tudi tako, da sta zaporedni na robu nekega lica v primeru, da je G vložen na neko vnaprej podano ploskev. To nam inducira vložitev grafa G' na isti ploskvi. Kadar ima G' nikjer-ničelni k-pretok, ni težko pokazati, da ga ima tudi G. To pa nas pripelje v protislovje. Tako je vsaka točka grafa G stopnje največ 3 in ker je po povezavah 3-povezan ter $k > 2$ dobimo, da je G kubičen graf z $|V(G)| \geq 3$. Od tod pa sledi, da je G 3-povezan enostaven kubičen graf.

Zdajle pa bomo dokazali, da je najkrajši cikel grafa G, velikosti vsaj $2k - 3$. Predpostavimo, da je to narobe, naj bo $C = v_0 \cdots v_{r-1} v_0$ cikel grafa G z $r \leq 2k - 4$. Naj bo $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 0, \ldots, r-1$, indeksiramo po modulu r. Ker je G kubičen graf, označimo z x_i tretjo sosedo točke v_i. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G tako, da so po povezavah e_i usmerjene iz v_i v v_{i+1}. Naj bo $\bar{E} = \{e_{2i} : i = 0, \ldots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1\}$ in $H = G/\bar{E}$. Označimo z z_i točko, v kateri smo združili v_{2i} in v_{2i+1}. Tako je $V_4 = \{z_i : i = 0, \ldots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1\}$ množica točk, stopnje 4, grafa H. S uporabe leme 2.2.1 vsako točko $z_i \in V_4$ razcepimo na točki z_i in z_i' tako, da je novodobljeni graf H' brez točke stopnje 4 in je hkrati po povezavah 2-povezan. Kot smo že omenili, lahko razcepimo točke tako, da je v primeru, ko je prvotni graf vložen na neko ploskev, dobljeni graf H' tudi vložen na to poloskev. Torej imamo dve možnosti pri cepitvi točke z_i:

(1) točka z_i bo incidenčna s e_{2i-1} in e_{2i+1} in z_i' sosednja z x_{2i-1} in x_{2i}.

(2) točka z_i je sosednja z x_{2i-1} ter incidenčna s e_{2i-1} in točka z_i' je sosednja s x_{2i+1} ter incidenčna s e_{2i+1}.

Iz minimalnosti grafa G sledi, da H' dopušča nikjer-ničelni k-pretok (D, f_0). Ta pa inducira k-pretok (D, f) grafa G z $E(G) \setminus E_0 \subseteq \text{supp}(f)$. Naj bo $L = \{l \in \mathbb{Z}_k : l = f(e_i) \text{ za neki } 0 \leq i \leq r - 1\}$.

Opazi, da je $|E(C) \cap E(H)| = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ in vsaka povezava iz $E(C) \cap E(H)$ ima neničelno utež. Če ima kaka povezava $e_{2i} \in E(C) \setminus E(H)$ neničelno vrednost, potem je razcep v točki z_i bil narejen kot je opisano v (1). No, v tem primeru je $f(e_{2i-1}) = f(e_{2i+1})$. Od tukaj lahko sklepamo, da je $|L \setminus \{0\}| \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil$.

Iz $r \leq 2k-4$ sledi, da je $|L \setminus \{0\}| \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil \leq k-2$. Torej lahko izberemo neničelno število $w \in \mathbb{Z}_k \setminus L$. Naj bo par (D, f_1) 2-pretok cikla C s $\text{supp}(f_1) = C$. Tedaj dobimo, da je $(D, f - w \cdot f_1)$ nikjer-ničelni k-pretok grafa G. To pa je protislovje. □

V dokazu prejšnje trditve smo v nekaterih primerih ohranili lastnost, da je na dobljeni graf že inducirana vložitev, če je bil prvotni graf G vnaprej vložen na neki ploskvi. To nam zagotavlja naslednjo posledico.

Posledica 2.2.3 *Naj bo G graf brez mostov, vložen na ploskvi S in naj G ne dopušča nikjer-ničelnega k-pretoka. Potem obstaja kubičen graf H brez mostov z $|V(H)| + |E(H)| \leq |V(G)| + |E(G)|$, ki ne dopušča nikjer-ničelnega k-pretoka in z velikostjo najkrajšega cikla vsaj $2k - 3$.*

2.2.1 5-pretoki in grafi z majhnim rodom

Lema 2.2.4 *Naj bo G kubičen graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj 7. Predpostavimo, da je G vložen na ploskvi S z rodom γ. Tedaj je*

$$|V(G)| \leq \begin{cases} 28(\gamma - 1), & S \textit{ je orientabilna ploskev;} \\ 14(\gamma - 2), & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Dokaz. Ker je vsako lice velikosti vsaj 7, je $7|F(G)| \leq 2|E(G)|$ in ker je G kubičen, je $3|V(G)| = 2|E(G)|$. Sedaj hitro sledi dokaz iz Eulerjeve zveze: $|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| \leq 2 - 2\gamma$, kadar je S orientabilna in $|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| \leq 2 - \gamma$, kadar je S neorientabilna ploskev. □

Posledica 2.2.3 in lema 2.2.4 skupaj implicirata naslednjo trditev.

Trditev 2.2.5 *Vsak graf brez mostov, ki se da vložiti v orientabilno ploskev roda ≤ 1 ali neorientabilno ploskev roda ≤ 2, dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Steinberg [40] je dokazal zgornjo trditev v primeru, kadar je ploskev projektivna ravnina. Kasneje so Möler, Carstens in Brinkmann [31] s pomočjo računalnika pokazali, da vsi kubični grafi z manj kot 30 točkami dopuščajo nikjer-ničelni 5-pretok. To pa implicira, da grafi brez mostov, ki se dajo vložiti na orientabilni ploskvi roda ≤ 2 ali neorientabilni ploskvi roda ≤ 4, dopuščajo nikjer-ničelni 5-pretok. Nedavno je Steffen [39] dokazal, da vsi kubični grafi brez mostov reda največ 44 dopuščajo nikjer-ničelni 5-pretok. Dokaz bomo izpustili, ker je dolg in zelo tehnične narave. Njegov rezultat pa implicira naslednjo trditev.

Trditev 2.2.6 *Vsak graf brez mostov, ki se da vložiti v orientabilno ploskev roda* ≤ 2 *ali v neorientabilno ploskev roda* ≤ 5*, dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

2.3 Izrek o 8-pretoku

V tem razdelku bomo dokazali Domnevo o zgornji meji.

Izrek 2.3.1 (Kilpatrick [25], Jaeger [22]) *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 8-pretok.*

Množico točk lihe stopnje grafa G bomo označevali z $O(G)$. Podgraf H grafa G je *parnostno usklajen* z G, če velja $O(H) = O(G)$. (Ali drugače povedano; graf, induciran s povezavami $E(G) \setminus E(H)$, je sod.)

Lema 2.3.2 *Graf G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok natanko takrat, ko G vsebuje r parnostno usklajenih podgrafov $P_1, \dots, P_r$ tako, da je $E(P_1) \cap E(P_2) \cap \dots \cap E(P_r) = \emptyset$.*

Dokaz. Podgrafi $P_1, \dots, P_r$ so parnostno usklajeni in hkrati velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap \dots \cap E(P_r) = \emptyset$ natanko takrat, ko je $\{G_1 \setminus E(P_1), \dots, G \setminus E(P_r)\}$ sodo r-pokritje grafa G. Sedaj dokaz sledi iz trditve 1.6.1. □

Izrek 2.3.3 *Vsak, po povezavah $2k$-povezan graf, ima k po povezavah disjunktnih, vpetih dreves.*

Dokaz. Nash-Williams [32] in Tutte [49] sta neodvisno in istočasno pokazala, da ima graf G k, po povezavah disjunktnih dreves natanko takrat, ko za vsako razbitje P množice $V(G)$ obstajajo vsaj $k(|P| - 1)$ povezav grafa G s krajišči v različnih množicah razbitja. Dokazi te trditve, ki sta jih priložila zgornja dva matematika, so dolgi in nimajo nič skupnega s pretoki, zato jih bomo opustili.

Naj bo zdaj G po povezavah $2k$-povezan in naj bo $P = \{B_1, \dots, B_r\}$ razbitje množice $V(G)$. V primeru, da je $r = 1$, je trditev trivialna. Zato predpostavimo, da je $r > 1$. Iz vsakega razreda B_i gre k drugim razredom vsaj $2k$ povezav. Torej je število povezav, ki imajo za krajišča točke iz različnih razredov, vsaj $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} 2k = kr$ povezav. Iz prej omenjenega izreka sledi, da ima G k po povezavah disjunktnih vpetih dreves. □

Lema 2.3.4 *Vsako vpeto drevo povezanega grafa G vsebuje podgraf, parnostno usklajen z G.*

Dokaz. Naj bo T vpeto drevo v G. Za vsako povezavo $e \in E(G) \setminus E(H)$ označimo s C_e edini cikel grafa $T \cup \{e\}$. Naj bo $H = \oplus_{e \in E(G) \setminus E(T)} C_e$. Jasno, H je sod graf in vsebuje množico povezav $E(G) \setminus E(T)$. Zaradi tega je graf $G \setminus E(H)$ parnostno usklajen z G in vsebovan v T. □

Lema 2.3.5 *Naj bo G po povezavah 3-povezan graf. Potem G vsebuje tri podgrafe P_1, P_2 in P_3, parnostno usklajene z G, za katere velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap E(P_3) = \emptyset$.*

Dokaz. Konstruirajmo graf G' iz G tako, da podvojimo vsako povezavo v G. Graf G' je po povezavah 6-povezan in zaradi tega ima, po izreku 2.3.3, po povezavah tri disjunktna vpeta drevesa T_1, T_2 in T_3. Lema 2.3.4 nam zagotovi podgraf P_i grafa T_i, ki je parnostno usklajen z G. In na koncu ni težko videti, da v G velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap E(P_3) = \emptyset$. □

Dokaz izreka 2.3.1 Po trditvi 2.2.2 bo dovolj, če pokažemo, da izrek velja za po povezavah 3-povezane grafe. Veljavnost za te grafe pa hitro sledi iz lem 2.3.2 in 2.3.5.

□

2.4 Izrek o 6-pretoku

V tem razdelku bomo, da se izognemo robustnim notacijam, cikle obravnavali tudi kot množice povezav. Za dani graf G, $X \subseteq E(G)$ in $k > 0$ naj bo $\langle X \rangle_k$ najmanjša množica $Y \subseteq E(G)$ z naslednjimi lastnostimi

- $X \subseteq Y$;
- G nima cikla C tako, da je $0 < |C \setminus Y| \leq k$.

Če množici Y_1 in Y_2 izpolnjujeta zgornja dva pogoja pri istem X in k, potem ju izpolnjuje tudi množica $Y_1 \cap Y_2$. Torej je $\langle X \rangle_k$ enolično določena. Preslikava $X \to \langle X \rangle_k$ je operator zaprtja, t.j. velja:

- $X \subseteq \langle X \rangle_k$;
- $\langle \langle X \rangle_k \rangle_k = \langle X \rangle_k$;
- $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle_k \subseteq \langle Y \rangle_k$.

Lema 2.4.1 *Naj bo D usmeritev grafa G, $k > 1$ in $X \subseteq E(G)$ z $\langle X \rangle_{k-1} = E(G)$. Tedaj G dopušča k-pretok (D, f) z $E(G) \setminus X \subseteq \mathrm{supp}(f)$.*

Dokaz. Dokazali bomo z indukcijo po $|E(G) \backslash X|$. V primeru, kadar je $|E(G) \backslash X| = 0$, je trditev trivialna. Zato privzamimo, da je $|E(G) \setminus X| \neq 0$. Iz $\langle X \rangle_{k-1} = E(G)$ sledi, da je $\langle X \rangle_{k-1} \neq X$. Zaradi tega pa lahko privzamemo, da obstaja cikel C, za katerega velja $0 < |C \backslash X| \leq k-1$. Iz lastnosti zaprtja sledi, da je $\langle X \cup C \rangle_{k-1} = E(G)$ in po indukcijski predpostavki obstaja k-pretok (D, g) z $E(G) \setminus (X \cup C) \subseteq \mathrm{supp}(g)$. Naj bo (D, h) 2-pretok grafa s $\mathrm{supp}(h) = C$. Ker je $|C \setminus X| \leq k-1$, lahko izberemo število n tako, da je

$$0 \leq n \leq k-1 \text{ in } \forall e \in C \setminus X : n \not\equiv -\frac{g(e)}{h(e)} \pmod{k}.$$

Naj bo $f = g + n \cdot h$. Tedaj je $f(e) = g(e) \neq 0$ za vsak $e \in E(G) \setminus (X \cup C)$ in $f(e) = g(e) + n \cdot h(e) \not\equiv 0 \pmod{k}$ za $e \in C \setminus X$. Torej je $f(e) \not\equiv 0 \pmod{k}$ za vsak $e \in E(G)$. Zdajle iz trditve 1.4.4 sledi, da obstaja iskani k-pretok. □

Lema 2.4.2 *Naj bo G neničelen enostaven graf s stopnjo vsake točke vsaj 2. Potem obstaja 2-povezan podgraf B grafa G z vsaj tremi točkami tako, da je največ ena točka grafa B sosednja s točko iz množice $V(G) \setminus V(B)$.*

Dokaz. Naj bo B blok grafa G, ki je list v drevesni strukuri blokov (t.j. blok B ima največ eno točko, ki je hkrati v kakem drugem bloku). Izkaže se, da je B iskani podgraf. Ker je G neničelen, B zagotovo obstaja. B ima vsaj tri točke, drugače dobimo točko grafa G s stopnjo 1 ali večkratne povezave. In ker je B blok, je graf G 2-povezan. □

Lema 2.4.3 *Naj bo G enostaven 3-povezan graf reda vsaj 3. Potem G vsebuje po točkah paroma disjunktne cikle $C_1, \ldots, C_r$, za katere $\langle C_1 \cup \cdots \cup C_r \rangle_2 = E(G)$.*

Dokaz. Množici povezav $X \subseteq E(G)$ rečemo, da je *povezana*, kadar je podgraf grafa G, induciran s povezavami iz X, povezan.

Naj bo C cikel grafa G. Ker je G enostaven graf, je množica $\langle C \rangle_2$ zmeraj povezana. Zaradi tega obstaja največje število $r \geq 1$ z lastnostjo, da obstajajo po točkah paroma disjunktni cikli $C_1, \ldots, C_r$ tako, da je $\langle C_1 \cup \cdots \cup C_r \rangle_2$ povezana množica. Postavimo, da je $X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ in $Y = \langle X \rangle_2$.

Zdaj pa trdimo, da je $Y = E(G)$. Recimo, da to ni res. Naj bo U množica točk grafa G, ki so incidenčne s kako povezavo iz Y in naj bo $H = G \setminus U$. Ob zgornji predpostavki H ni ničelen graf. Vsaka točka iz H ima največ eno sosedo v U; drugače pridemo v nasprotje z definicijo množice $\langle X \rangle_2$. Iz 3-povezanosti grafa G dobimo, da je vsaka točka grafa H stopnje vsaj 2. Lema 2.4.2 nam zagotovi obstoj 2-povezanega podgrafa B v H na vsaj 3 točkah tako, da ima B največ eno točko, ki ima kako sosedo v $V(H) \setminus V(B)$. Ker je $U \neq \emptyset$, je G 3-povezan in B je reda vsaj 3, obstajajo v B vsaj tri točke, ki imajo za sosedo kako točko iz $V(G) \setminus V(B)$. Zato obstajata v B različni točki b_1 in b_2, ki imata kako sosedo iz U. Ker je B 2-povezan in reda vsaj 3, ta vsebuje cikel C_{r+1}, na katerem ležita točki b_1 in b_2. Dobimo, da so cikli $C_1, \ldots, C_r, C_{r+1}$ po točkah disjunktni s $\langle C_1 \cup \cdots \cup C_r \cup C_{r+1} \rangle_2$ povezanimi množicami. To pa nasprotuje izbiri števila r. Torej je $Y = E(G)$ in dobimo, da so $C_1, \ldots, C_r$ iskani cikli. $\square$

Izrek 2.4.4 *Če graf G nima mostov, potem dopušča nikjer-ničelni 6-pretok.*

Dokaz. Po lemi 2.2.2 lahko privzamemo, da je G 3-povezan enostaven kubičen graf. Tedaj po lemi 2.4.3 obstajajo po točkah paroma disjunktni cikli $C_1, \ldots, C_r$ s $\langle C_1 \cup \cdots \cup C_r \rangle_2 = E(G)$. Naj bo $X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, tedaj je $\langle X \rangle_2 = E(G)$. Po lemi 2.4.1 obstaja 3-pretok (D, f) grafa G z $E(G) \setminus X \subseteq \mathrm{supp}(g)$. Naj bo (D, h) 2-pretok grafa G s $\mathrm{supp}(h) = X$. Postavimo $f = g + 3h$. Tedaj je $|f(e)| = 1$ ali 2 za vsak $e \in E(G) \setminus X$ in je $f(e) = g(e) \pm 3$ za vsak $e \in X$. Kakorkoli, za vsak $e \in E(G)$ velja $0 < f(e) < 6$. Torej je (D, f) nikjer-ničelni 6-pretok grafa G. $\square$

2.5 Nikjer-ničelni 3-pretoki

Vemo, da graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod. Podobno bi bilo lepo karakterizirati, kateri po povezavah 2-povezani grafi dopuščajo nikjer-ničelni 3-pretok. Po izreku 1.2.2 ravninski graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok natanko takrat, ko je njegov dual po licih 3-obarvljiv. Ker je 3-barvanje ravninskih grafov NP-poln problem, na žalost verjetno ne obstaja 'dobra' karakterizacija grafov, ki dopuščajo nikjer-ničelni 3-pretok. Domneva o 3-pretoku govori samo o zadostnem pogoju, da graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Kot smo že rekli, je Domneva o 3-pretoku možna posplošitev Grötzschevega izreka. Torej je ta domneva resnična za ravninske grafe. Steinberg in Younger [41] sta pokazala, da je domneva resnična tudi za grafe, vložljive na projektivni ravnini. Po trditvi 2.2.2 lahko Domnevo o 3-pretoku zapišemo tudi takole.

Domneva 2.5.1 *Vsak po povezavah 4-povezan graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Posledica 2.6.8(b) (iz naslednjega razdelka) nam pove, da grafi iz zgornje domneve dopuščajo nikjer-ničelni 4-pretok. To je namreč najboljši približek k tej domnevi.

V nadaljevanju bomo dokazali dve lepi trditvi o 3-pretokih. Prva trditev karakterizira kubične grafe, ki dopuščajo nikjer-ničelni 3-pretok. Druga trditev pa nam poda zvezo med 3-pretoki in usmerjenimi dvojnimi pokritji grafov.

Trditev 2.5.2 *Kubičen graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok natanko takrat, ko je dvodelen.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo G kubičen graf, ki dopušča nikjer-ničelni 3-pretok (D, f). Opazimo, da je vsaka točka grafa incidenčna z natanko eno povezavo, ki ima utež 2. Naj bo V_1 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava s utežjo 2 usmerjena iz te točke. In naj bo V_2 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava z utežjo 2 usmerjena k tej točki. Par $\{V_1, V_2\}$ je razbitje množice $V(G)$. Ni težko videti, da med poljubnima dvema točkama iz V_1 oz. V_2 ni povezave. Torej je G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$.

($\Rightarrow$) Naj bo G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$. Naj bo D usmeritev grafa G tako, da je vsaka povezava $e = v_1v_2$ ($v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$) usmerjena iz v_1 proti v_2 in naj bo f utež, ki vsaki povezavi priredi vrednost 1. Tedaj je par (D, f) $(\mathbb{Z}_3, +_3)$-pretok. Po posledici 1.4.5 G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. $\square$

Trditev 2.5.3 *Za poljuben graf G sta naslednja dva stavka ekvivalentna:*

(i) G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

(ii) G ima usmerjeno dvojno 3-pokritje.

Dokaz. Po trditvi 1.7.1(1) nam ostane samo smer $(i) \Rightarrow (ii)$. Torej naj bo (D, f) pozitiven 3-pretok grafa G. Po trditvi 1.7.3 obstaja pravilno usmerjeno 2-pokritje $\{C_1, C_2\}$ grafa $D(G)$. Naj bo $\tilde{C}_2$ usmerjeni graf, ki ga dobimo iz C_2 tako, da spremenimo smer vsaki povezavi. Označimo s C_3 sodi usmerjeni graf s povezavami iz $E(C_1 \oplus C_2)$ tako, da je smer vsake povezave grafa C_3 nasprotna s tisto iz C_1 oz. $\tilde{C}_2$. Enostavno je preveriti, da je vsaka povezava e grafa G v natanko dveh grafih iz $\{C_1, \tilde{C}_2, C_3\}$ in inducirani usmeritvi te povezave iz teh dveh grafov sta si nasprotni. Torej je $\{C_1, \tilde{C}_2, C_3\}$ usmerjeno dvojno pokritje. $\square$

Razdelek bomo končali s trditvijo o pretočnem številu polnih grafov. Če je $n \geq 3$ liho število, tedaj je K_n sod graf in zato je $\kappa(K_n) = 2$. Po trditvi 2.5.2 je $\kappa(K_4) > 3$. Ker je K_4 po povezavah 3-obarvljiv, je po posledici 2.6.4(a) $\kappa(K_4) \leq 4$. Torej je $\kappa(K_4) = 4$. Iz naslednje trditve sledi, da je K_4 edini polni graf s pretočnim številom 4.

Trditev 2.5.4 *Za vsako sodo število $n \geq 6$ je $\kappa(K_n) = 3$.*

Dokaz. Naj bo $n \geq 6$ sodo število. Graf K_n ni sod, zato je $\kappa(K_n) \geq 3$. Torej bo trditev dokazana, če za vsakega od teh grafov pokažemo z indukcijo, da dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

Naj bo $n = 6$. K_6 lahko razbijemo na po povezavah disjunktne grafe G_1, G_2 in G_3 tako, da je $G_1 \simeq G_2 \simeq K_3$ in $G_3 \simeq K_{3,3}$. Jasno vsak od grafov G_1 in G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Po trditvi 2.5.2 G_3 dopušča tudi nikjer-ničelni 3-pretok. Vsota pretokov teh treh grafov inducira nikjer-ničelni 3-pretok v K_6.

Naj bo zdaj $n > 6$. Naj so $\{v_1, \ldots, v_n\}$ točke grafa K_n. Naj bo G_1 podgraf v K_n, induciran s točkami $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ in naj bo G_2 induciran s povezavami iz $E(K_n) \setminus$

$E(G_1)$. Tako sta G_1 in G_2 po povezavah disjunktna. Po indukcijski predpostavki G_1 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Torej bo trditev dokazana, če pokažemo, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok; potem nikjer-ničelni 3-pretoki grafov G_1 in G_2 inducirajo nikjer-ničelni 3-pretok v K_n. Ni se težko prepričati, da K_2^{n-2} (graf na 2 točkah z $n-2$ povezav med njima) dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Ker je G_2 subdivizija grafa K_2^{n-2} sledi, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. To pa je konec dokaza. □

2.5.1 3-pretoki in povezanost grafov

Domneva 2.5.1 po domače rečeno pravi, da graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok, kadar je dovolj po povezavah povezan. S to idejo je Jaeger [22, 23] predložil šibkejšo varianto Domnevi o 3-pretoku:

Domneva 2.5.5 *Obstaja naravno število k tako, da vsak po povezavah k-povezani graf dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

V tem podrazdelku bomo pokazali, da graf zmeraj dopušča nikjer-ničelni 3-pretok, če je povezanost zadosti velika v primerjavi s številom lihih točk grafa. Pravzaprav bomo dokazali izrek 2.5.6. Posledica 2.5.6 pa trivialno sledi iz izreka. Spomnimo se, da smo z $O(G)$ označili množico lihih točk grafa G.

Izrek 2.5.6 (Lai in Zhang [27]) *Naj bo G po povezavah k-povezan graf. Če je $k \geq 4\lceil \log_2 |O(G)| \rceil$, potem G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Posledica 2.5.7 *Naj bo G po povezavah k-povezan graf reda n. Če je $k \geq 4\lceil \log_2 n \rceil$, potem G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Kot smo že definirali, je podgraf H grafa G parnostno usklajen z G, če je $O(H) = O(G)$. Da bomo olajšali pisanje v tem podrazdelku, bomo z $G_{f=0}$ označevali graf, induciran s povezavami iz $E(G) \setminus \mathrm{supp}(f)$, kjer je f vnaprej podana utež grafa G.

Lema 2.5.8 *Naj bodo H_1, H_2 in H_3 po povezavah paroma disjunktni podgrafi povezanega grafa G, ki so parnostno usklajeni z G. Označimo s H graf, induciran s povezavami $E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3)$. Potem H dopušča 3-pretok (D, f) tako, da je $|O(H_{f=0})| \leq |O(G)|/2$.*

Dokaz. Naj bo T_3 podgraf v H_3 s čim manj povezavami, ki je parnostno usklajen z G. Graf $H_3 \setminus E(T_3)$ je sod in zaradi tega dopušča nikjer-ničelni 2-pretok. Od tod je dovolj, če bi lemo pokazali za graf H', induciran z $E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(T_3)$. Iz minimalnosti sledi, da je T_3 drevo. Zato je T_3 po povezavah disjunktna unija poti $P_1, \ldots, P_k$. Vsaka pot P_j ima za krajišči lihi točki v_{2j-1} in v_{2j} grafa G, kjer je $O(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$. Naj bosta S_1 in S_2 soda grafa, ki ju dobimo iz H_1 in H_2 tako, da pridružimo povezave $v_{2j-1}v_j, j = 1, \ldots, k$.

Povezave iz $E(T_1) \cup E(T_2)$ in poti $P_1, \ldots, P_k$ poljubno usmerimo. Usmerimo še vsako povezavo iz P_j in povezavo $v_{2j-1}v_{2j}$ v S_1 in S_2 tako, da se njihova usmeritev ujema s usmeritvijo P_j, $j = 1, \ldots, k$. Dobljeno usmeritev označimo z D.

Ker je S_i sod graf, ta dopušča 2-pretok $(D, f_i), i = 1, 2$. Naj bo S_i^* sod podgraf v G, ki ga dobimo iz S_i tako, da vsako povezavo $v_{2j-1}v_{2j}$ zamenjamo s potjo P_j. Podobno iz f_i ustvarimo utež f_i^* za S_i^* takole:

$$f_i^*(e) = \begin{cases} f_i(v_{2j-1}, v_{2j}), & \text{če } e \in E(P_1) \cup \cdots \cup E(P_k) \\ f_i(e), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Par $(D, f_1^* + f_2^*)$ je 3-pretok grafa H'. $H'_{f_1^*+f_2^*=0}$ je unija nekaj poti $P_{i1}, \ldots, P_{ir}$. V primeru, da je $r \leq k/2$, dobimo

$$|O(\cup_{j=1}^r P_{ij})| = 2r \leq k = |O(G)|/2.$$

Če pa je $r > k/2$, potem obravnavamo 3-pretok $(D, f_1^* - f_2^*)$. Tedaj je $H'_{f_1^*-f_2^*=0}$ množica poti $\{P1, \ldots, P_k\} \setminus \{P_{i1}, \ldots, P_{ir}\}$ in ima $2k - 2r$ $(2k - 2r < k = |O(G)|/2)$ lihih točk. $\square$

Naredimo kratek odklop in omenimo znani Mengerejev izrek. Dokaz tega izreka je naveden v mnogih knjigah teorije grafov, zato ga bomo tukaj izpustili.

Izrek 2.5.9 (Mengerejev izrek) *Naj bosta u, v različni točki povezanega grafa G z lastnostjo, da je vsak prerez, ki loči x in y, reda vsaj k. Tedaj ima G po povezavah disjunktni k poti med točkama u in v.*

Lema 2.5.10 *Naj bodo $T_0, \ldots, T_{2s-1}$ po povezavah paroma disjunktni podgrafi povezanega grafa G, kjer je T_0 parnostno usklajen z G in so $T_0, \ldots, T_{2s-1}$ vpeta drevesa v G. Če je $|O(G)| \leq 2^s$, potem G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Dokaz. Dokazali bomo z indukcijo po s. Kadar je $s = 0$, je G sod graf in zaradi tega dopušča nikjer-ničelni 2-pretok oz. nikjer-ničelni 3-pretok. Recimo, da je $s = 1$. Potem $O(G) = \{x, y\}$. Ker sta x in y v isti komponenti grafa T_0 in ker je T_1 povezan graf sledi, da je poljubni prerez grafa G, ki loči x in y reda, vsaj dve. Iz dejstva, da ima vsak graf sodo mnogo lihih točk sledi, da mora biti tak prerez reda vsaj 3. Sedaj pa nam znani Mengerejev izrek zagotovi, da obstajajo tri po povezavah disjunktne poti P_1, P_2 in P_3 med x in y v G. Naj bo $P_i = v_1^i \ldots v_{ri}^i$, kjer je $v_1^i = x$ in $v_{ri}^i = y$ za $i = 1, 2$ in 3. Naj bo G' graf induciran s povezavami iz $G[E(P_1) \cup E(P_2) \cup E(P_3)$ in D_1 usmeritev za G' tako, da $D_1(v_j^i, v_{j+1}^i) = 1$ za vsak par sosednjih točk v_j^i in v_{j+1}^i. Definirajmo še utež f_1 grafa G' takole:

$$f_1(e) = \begin{cases} 1, & e \in E(P_1) \cup E(P_2), \\ 2, & e \in E(P_3). \end{cases}$$

Tako je (D_1, f_1) nikjer-ničelni 3-pretok grafa G_1. Ker je $G \setminus E(G_1)$ sod graf, naj bo (D_2, f_2) njegov nikjer-ničelni 2-pretok. Hitro se vidi, da je $(D_1 + D_2, f_1 + f_2)$ nikjer-ničelni 3-pretok za G.

Sedaj pa naj bo $s \geq 2$. Po lemi 2.3.4 naj bo R_i podgraf v T_i in parnostno usklajen s T_i za $i = 0, 1, 2$. Po lemi 2.5.8 obstaja 3-pretok (D, f) za graf H, induciran nad množico povezav $E(R_0) \cup E(R_1) \cup E(R_2)$ tako, da je $|O(H_{f=0})| \leq |O(H)|/2$. Naj bo $G'' = G \setminus E(H_{f\neq 0})$. Ker je $G'' = G \setminus E(H) \cup E(H_{f=0})$ in je $G \setminus E(H)$ sod graf sledi, da je $H_{f=0}$ parnostno usklajen z G''. Velja $|O(G'')| \leq |O(G)|/2 \leq 2^{s-1}$ in $H_{f=0}, T_3, \ldots T_{2s-1}$ so po povezavah disjunktni podgrafi grafa G''. Po indukcijski predpostavki ima G'' nikjer-ničelni 3-pretok (D'', f''). Tako je $(D + D'', f + f'')$ nikjer-ničelni 3-pretok za G. □

Dokaz izreka 2.5.6 Iz $s = k \geq \lceil \log_2 |O(G)| \rceil$ sledi, da je $2^{s-1} < |O(G)| \leq 2^s$. Po lemi 3.5 G vsebuje vsaj $2s$ po povezavah disjunktno vpeta drevesa. Sedaj dokaz sledi iz leme 2.5.10. □

2.6 Nikjer-ničelni 4-pretoki

Pokritje $\mathcal{F}$ grafa G imenujemo *(1,2) pokritje*, kadar je vsaka povezava iz G vsebovana v največ dveh grafih iz $\mathcal{F}$. Zanimivo je, da so 4-pretoki v lepi zvezi z večino do sedaj omenjenih pokritij grafov.

Trditev 2.6.1 *Za poljuben graf G so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) G dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.

(ii) G ima sodo (1,2) 2-pokritje.

(iii) G ima sodo (1,2) 3-pokritje.

(iv) G ima dvojno 3-pokritje.

(v) G ima dvojno 4-pokritje.

(vi) G ima usmerjeno dvojno 4-pokritje.

Dokaz. Pokazati, da (ii) implicira (iii), (iv) implicira (v) in (vi) implicira (v) je trivialno. Ker je vsako sodo 2-pokritje tudi sodo (1,2) pokritje, sta po trditvi 1.6.1 (i) in (ii) enakovredna. Trditev 1.6.2 nam zagotovi, da (v) implicira (i). Množica $\{C_1, C_2\}$ je sodo (1,2) pokritje grafa G natanko tedaj, ko je $\{C_1, C_2, C_1 \oplus C_2\}$ dvojno pokritje grafa G. S tem smo pokazali $(ii) \Leftrightarrow (iv)$. Podobno je množica $\{C_1, C_2, C_3\}$ sodo (1,2) pokritje natanko takrat, ko je $\{C_1, C_2, C_3, C_1 \oplus C_2 \oplus C_3\}$ dvojno pokritje grafa G. Od tukaj pa sledi ekvivalenca $(iii) \Leftrightarrow (v)$. Trditev bo dokazana, če pokažemo $(iv) \Rightarrow (vi)$.

Naj bo $\{C_1, C_2, C_3\}$ dvojno 3-pokritje grafa G in naj bo D poljubna usmeritev za G. Označimo z (D, f_i) 2-pretok grafa G, za katerega je $supp(f_i) = E(C_i)$, $i = 1, 2, 3$. Definirajmo funkcije:

$$g_1 = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{2},\ g_2 = \frac{f_1 - f_2 - f_3}{2},\ g_3 = \frac{-f_1 + f_2 - f_3}{2},\ g_4 = \frac{-f_1 - f_2 + f_3}{2}.$$

Za $i = 1, \ldots, 4$ označimo z B_i nosilec uteži g_i in s H_i podgraf grafa G, induciran s povezavami iz B_i. Ni težko ugotoviti, da velja naslednje:

- vsaka povezava je vsebovana v natanko dveh oporah iz $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$;
- če je $e \in B_i \cap B_j$ $(i \neq j)$, potem je $g_i(e) = -g_j(e)$.

Za $i = 1, \ldots, 4$ naj bo D_i usmeritev grafa H_i, ki jo dobimo iz D tako, da vsaki povezavi e spremenimo smer v primeru, da je $g_i(e)$ negativno število. Na koncu dobimo, da je množica

$$\{D_1(H_1), D_2(H_2), D_3(H_3), D_4(H_4)\}$$

usmerjeno dvojno pokritje grafa G. $\square$

Pokritje $\mathcal{F}$ grafa G je *parnostno usklajeno*, kadar je vsak graf iz $\mathcal{F}$ parnostno usklajen z G. Spomnimo se, da pokritje $\mathcal{F}$ imenujemo *dekompozicija*, če so grafi iz $\mathcal{F}$ paroma po povezavah disjunktni.

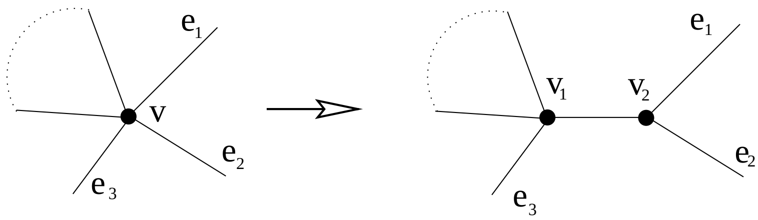
Lema 2.6.2 *Naj ima graf G netrivialno parnostno usklajeno dekompozicijo. Potem ima G tudi netrivialno parnostno usklajeno dekompozicijo moči 3.*

Dokaz. Naj bo $\{H_1, \ldots, H_t\}$ netrivialno parnostno usklajena dekompozicija G. Tedaj je $t \geq 2$. Če je t sodo število, potem je G zagotovo sod graf. V tem primeru je $\{G, \emptyset, \emptyset\}$ iskana dekompozicija. Če pa je $t > 3$ liho število, potem je $\{H_1, H_2, H_3 \cup \cdots \cup H_t\}$ parnostno usklajena dekompozicija moči 3. To pa je konec dokaza. $\square$

Trditev 2.6.3 *Graf G dopušča nikjer-ničelni 4-pretok natanko takrat, ko ima G netrivialno parnostno usklajeno dekompozicijo.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Po trditvi 2.6.1 ima G dvojno 3-pokritje $\{C_1, C_2, C_3\}$. Ni težko videti, da je tedaj $\{G \setminus E(C_1), G \setminus E(C_2), G \setminus E(C_3)\}$ netrivialna parnostno usklajena dekompozicija grafa G.

$(\Leftarrow)$ Po lemi 2.6.2 lahko predpostavimo, da je $\{H_1, H_2, H_3\}$ parnostno usklajena dekompozicija grafa G. Hitro se vidi, da je tedaj $\{G \setminus E(H_1), G \setminus E(H_2), G \setminus E(C_3)\}$ dvojno 3-pokritje grafa G. Sedaj pa po trditvi 2.6.1 G dopušča nikjer-ničelni 4-pretok. $\square$



Slika 2.2: Cepitev točke iz dokaza posledice 2.6.4(b)

Posledica 2.6.4 *(a) Kubičen graf dopušča nikjer-ničelni 4-pretok natanko takrat, ko je po povezavah 3-obarvljiv.*

(b) Vsi ravninski grafi brez mostov so po licih 4-obarvljivi, če in samo če so vsi kubični ravninski grafi brez mostov po povezavah 3-obarvljivi.

Dokaz. (a) Po lemi 2.6.2 in trditvi 2.6.3 kubičen graf dopušča nikjer-ničelni 4-pretok natanko takrat, ko ima parnostno usklajeno dekompozicijo $\{H_1, H_2, H_3\}$. Tedaj so H_1, H_2 in H_3 paroma disjunktni 1-faktorji grafa G in te lahko poistovetimo z barvnimi razredi nekega, po povezavah 3-barvanja grafa G.

(b) ($\Leftarrow$) Recimo, da so vsi grafi brez mostov po licih 4-obarvljivi in naj bo G poljuben kubičen ravninski graf brez mostov. Torej je G po licih 4-obarvljiv. Iz izreka 1.2.2 sledi, da G dopušča nikjer-ničelni 4-pretok. Potem iz (a) sledi, da je G po povezavah 3-obarvljiv.

($\Rightarrow$) Naj so vsi kubični ravninski grafi brez mostov po povezavah 3-obarvljivi in naj bo G ravninski graf brez mostov. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je G povezan graf s stopnjo vsake točke vsaj 2. Če G ni kubičen, potem obstaja $v \in V(G)$ z $d(v) \geq 4$. Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G s cepljenjem točke v kot je prikazano na sliki 2.2 tako, da sta e_2 in e_3 povezavi iz istega bloka v G. Graf G' je po povezavah 2-povezan ravninski graf. Razvidno je, da če je G' po licih 4-obarvljiv, potem je tudi G po licih 4-obarvljiv. Cepimo točke grafa G, dokler končni rezultat ni kubičen graf; označimo ta graf kar z G^*. Torej je G^* kubičen ravninski graf brez mostov. Po predpostavki je G^* po povezavah 3-obarvljiv. Potem iz (a) sledi, da G^* dopušča nikjer-ničelni 4-pretok in iz izreka 1.2.2 sledi, da je G^* po licih 4-obarvljiv. To pa implicira, da je G^* po licih 4-obarvljiv. $\square$

2.6.1 Sodo-napeti grafi

Podgraf H grafa G je *sodo-vpet* v G, če velja:

(i) H je sod graf;

(ii) vsaka komponenta grafa H vsebuje sodo mnogo lihih točk grafa G.

Graf G je *sodo-napet*, kadar ima sodo-vpet podgraf H tako, da je za vsako točko $v \in V(G) : d_H(v) > 0$.

Lema 2.6.5 *Sod podgraf C grafa G je sodo-vpet natanko takrat, ko je C unija dveh, po povezavah disjunktnih, parnostno usklajenih podgrafov grafa G.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $\{v_1, \ldots, v_{2t}\}$ množica lihih točk grafa G. Lahko privzamemo, da sta za $i = 1, \ldots, t$ točki v_{2i-1} in v_{2i} povezani s potjo P_i v grafu C. Tedaj je graf

$$H = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_t$$

parnostno usklajen z G. Ker je C sod graf, je graf $C \setminus E(H)$ tudi parnostno usklajen z G. Hitro se vidi, da sta v tem primeru H in $C \setminus E(H)$ iskana podgrafa.

($\Leftarrow$) Naj bo C unija dveh, po povezavah disjunktnih parnostno usklajenih podgrafov H_1 and H_2 grafa G. Vsekakor je C sod graf in vsebuje vse lihe točke grafa G. Če C vsebuje komponento z liho mnogo lihih točk grafa G, potem to implicira, da imata H_1 in H_2 komponento z liho mnogo lihih točk, a to ni mogoče. Torej dobimo, da je C sodo-vpet podgraf grafa G. $\square$

Lemi 2.6.2 in 2.6.5 in trditev 2.6.3 implicirajo naslednjo trditev.

Trditev 2.6.6 *Graf dopušča nikjer-ničelni 4-pretok natanko takrat, ko ima sodo-vpet podgraf.*

Ker sodo-napeti grafi vsebujejo sodo-vpet podgraf, po trditvi 2.6.6 sledi, da dopuščajo nikjer-ničelni 4-pretok. Mogoče se na prvi pogled zdi, da je sodo-napet preveč obskuren pojem. No, omenimo samo, da sta dva zanimiva podrazreda sodo-napetih grafov razred Hamiltonovih grafov in razred po povezavah 4-povezanih grafov. Za Hamiltonove grafe je očitno, da so sodo-napeti; saj je Hamiltonov cikel zmeraj sodo-vpet povezan podgraf. Sedaj pa bomo pokazali da so po povezavah 4-povezani grafi tudi sodo-napeti.

Lema 2.6.7 *Vsak po povezavah 4-povezan graf je sodo-napet.*

Dokaz. Naj bo G po povezavah 4-povezan graf. Po izreku 2.3.3 ima G dve po povezavah disjunktni vpeti drevesi T_1 in T_2. Po lemi 2.3.4 T_1 vsebuje podgraf H_1, ki je parnostno usklajen z G. Zaradi tega je graf $H = G \setminus E(H_1)$ sod in ker je T_2 podgraf v H, je H tudi povezan vpet podgraf v G. $\square$

Posledica 2.6.8 *(a) Vsak Hamiltonov graf dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*
(b) Vsak po povezavah 4-povezan graf dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.

Blass in Harary [4] sta pokazala, da so skoraj vsi grafi po povezavah 4-povezani. Torej skoraj vsi grafi so sodo-napeti in po trditvi 2.6.6 dobimo naslednjo trditev:

Trditev 2.6.9 *Skoraj vsi grafi dopuščajo nikjer-ničelni* 4*-pretok.*

Podobno lahko sklepamo, da skoraj vsi grafi dopuščajo nikjer-ničelni 5-pretok. Kljub temu, da se zaenkrat Domnevi o 4- in 5-pretokih zelo uspešno upirata, nam zgornja trditev da upanje, da sta vendarle domnevi mogoče resnični.

Barvanja lic sodo-napetih grafov

Iz trditev 1.7.1(3) in 1.7.1(4) sledi naslednja Tuttova trditev.

Trditev 2.6.10 (Tutte [46]) *Naj bo G kubičen graf. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(1) G je po povezavah 3-obarvljiv.

(2) Obstaja orientabilna ploskev, na kateri ima G po licih 4-obarvljivo vložitev.

Naj bo G graf vložen na neki sklenjeni ploskvi in naj bo ta vložitev pravilno po licih 4-obarvana. Če pri vsaki točki v grafa G obstajajo 3 lica, incidenčna z v tako, da so paroma različno obarvana, tedaj to barvanje imenujemo *pakirano* 4-barvanje. Opazimo, da je v primeru, kadar je G kubičen graf, vsako pravilno 4-barvanje lic pakirano. Naj bo G kubičen graf s stopnjo vsake točke ≥ 3. In naj bo G^* kubičen graf, ki ga dobimo iz G, kadar postopek cepljenja točke (glej sliko 2.2) uporabimo dovoljkrat. Tedaj G^* imenujemo *cepitev* grafa G.

Zdaj smo pripravljeni posplošiti zgornjo trditev.

Izrek 2.6.11 (Archdeacon [3]) *Naj bo G graf s stopnjo vsake točke ≥ 3. Tedaj so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) G je sodo-napet.

(2) G ima cepitev, ki je po povezavah 3-obarvljiva.

(3) Obstaja orientabilna ploskev, na kateri ima G po licih 4-obarvljivo vložitev.

Dokaz. $(2 \Rightarrow 1)$. Predpostavimo, da je G' po povezavah 3-obarvljiva cepitev grafa G. Naj so povezave kubičnega grafa obarvane z barvami 1, 2 in 3. Označimo s C_{12} množico povezav grafa G', ki so obarvane z 1 ali 2. Naj bo H podgraf v G, ki je induciran s povezavami iz C_{12}. Preveri, da za vsako točko $u \in V(G)$ velja $d_H(u) > 0$. Tudi ni težko preveriti, da je H sodo-vpet v G. Torej je G sodo-napet.

$(1 \Leftarrow 2)$. Naj bo v točka grafa G z $d(v) > 4$. V nadaljevanju bomo opisali postopek, kako razcepimo točko v na dve sosednji točki v_1 in v_2 z $d(v_1) \geq 3$ in $d(v_2) = 3$ tako, da je novodobljeni graf G' sodo-napet. Potem ta postopek ponavljamo, dokler ne dobimo sodo-napet kubičen graf. Ker je kubičen graf sodo-napet natanko takrat, ko je po povezavah 3-obarvljiv, bo to konec dokaza.

Označimo s H graf, ki je sodo-vpet v G in za katerega velja $d_H(u) > 0$ za vsako točko u iz G. Razdelimo dokaz na naslednja primera.

Primer 1: v je točka stopnje ≥ 4 v H.

Naj bo C komponenta grafa H, ki vsebuje točko v. C je Eulerjev graf in zato naj bo $S = \ldots, e_1, v, e_2, \ldots, e_3, v, e_4$ Eulerjev obhod v C. Razcepimo točko v na dve novi sosednji točki v_1 in v_2 tako, da je $E(v_2) = \{v_1v_2, e_1, e_2\}$ in $E(v_1) = E(v) \setminus E(v_1) \cup \{v_1v_2\}$ (glej sliko 2.2). Novodobljeni graf označimo z G' in označimo s H' podgraf grafa G', ki ga inducira H'.

Ker za vsako točko u iz G' velja $d_{H'}(u) > 0$ je dovolj, če pokažemo, da je H' sodo-vpet v G'. Očitno je, da je H' sod graf. Ker je S Eulerjev sprehod v C sledi, da sta v_1 in v_2 v isti komponenti C' grafa H'. Vsaka komponenta grafa H', različna od C', je tudi komponenta v H. Zato imajo te sodo mnogo lihih točk grafa G'. Opazi, da je v_1 liha točka grafa G' (ker $d_{G'}(v_2) = 3$) in zato je v_1 liha točka v G' natanko takrat, ko je v soda točka v G. Torej je $|O(C')| - |O(C)| = 0$ ali 2. Ker ima C sodo mnogo lihih točk v G sledi, da ima C' sodo mnogo lihih točk grafa G'. Od tod sledi, da je G' sodo-napet graf.

Primer 2: v je točka stopnje 2 v H.

Naj so e_1, e_2 in e_3 tri različne povezave, incidenčne s v v G. Lahko predpostavimo, da sta e_1 in e_3 povezavi v grafu H. Razcepimo točko v na v_1 in v_2 z $E(v_2) = \{v_1v_2, e_1, e_2\}$ in $E(v_1) = E(V) \setminus E(v_2) \cup \{v_1v_2\}$. Označimo z G' novodobljeni graf in s H' podgraf v G', ki ga inducirajo povezave iz $E(H) \cup \{v_1v_2\}$. Podobno kot prej je $d_{H'}(u) > 0$ za vsako točko iz G' in je H' sodo-vpet v G'. To pa je konec dokaza.

$(3 \Rightarrow 2)$. Opisali bomo konstrukcijo cepitve G^* grafa G, ki ohranja vložitev na ploskvi in 4-obarvljivost lic. Potem po trditvi 2.6.10 sledi, da je cepitev G^* po povezavah 3-obarvljiva.

Če je G kubičen graf, potem je $G^* = G$ in je to konec dokaza. V nasprotnem primeru obstaja točka $v \in V(G)$ stopnje ≥ 4. Ker je po licih 4-barvanje grafa G pakirano, obstajajo tri zaporedna lica f_0, f_1 in f_2, incidenčna s v, ki so paroma različno obarvana. Označimo z e_1 in e_2 incidenčni povezavi s točko v, ki sta skupen rob licema f_0 in f_1 oz. licema f_1 in f_2. Bralcu se ne bo težko prepričati, da brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da obstaja lice, različno od f_0, f_1 in f_2, ki je različno obarvano od lic f_0 in f_2. Zdaj razcepimo v na točki v_1 in v_2 tako, da je $E(v_2) = \{v_1v_2, e_1, e_2\}$ in $E(v_1) = [E(v) \setminus \{e_1, e_2\}] \cup \{v_1v_2\}$. Opazi, da je spremenjeni graf G še zmeraj po licih pakirano 4-obarvan.

Torej zgornji postopek ponavljamo, dokler ne dobimo cepitev grafa G.

$(2 \Rightarrow 3)$. Dokaz v tej smeri ni nič drugega kot obratna konstrukcija kot smo jo opisali zgoraj. Zato jo bomo spustili. □

Literatura

[1] B. Alspach, L. A. Goddyn in C.-Q. Zhang, *Graphs with the circuit cover property*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994) 131–154.

[2] B. Alspach in C.-Q. Zhang, *Cycle covers of cubic multigraphs*, Discrete Math. **111** (1993) 11–17.

[3] D. Archdeacon, *Face colorings of embedded graphs*, J. Graph Theory **8** (1984) 387–398.

[4] A. Blass in F. Harary, *Properties of almost all graphs and complexes*, J. Graph Theory **3** (1979) 225–240.

[5] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, Academic Press, London, 1978.

[6] J. A. Bondy, *Small cycle double covers of graphs*, v: Cycles and Rays (G. Hahn, G. Sabidussi in R. Woodrow, ured.), Kluwer Academic, Dordrecht, (1990) 21–40.

[7] J. A. Bondy, *Trigraphs*, Discrete Math. **75** (1989) 69–79.

[8] U. Celmins, *On cubic graphs that do not have an edge-3-colouring*, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, (1984).

[9] M. N. Ellingham, *Petersen subdivisions in some regular graphs*, Congr. Numer. **44** (1984) 33–40.

[10] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinenties*, Commentrarii Academiae Petropolitanae **8** (1736) 128-140.

[11] L. A. Goddyn, *A girth requirement for the double cycle cover conjecture*, v: Cycles in Graphs (B. Alspach in C. Godsil, ured.), Ann. Discrete Math. **27** (1985) 13–26.

[12] L. A. Goddyn, *Cycle covers of graphs*, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, (1988).

[13] L. A. Goddyn, *Cycle double covers of graphs with Hamilton paths*, J. Combin. Theory Ser. B **46** (1989) 253–254.

[14] H. Grötzsch, *Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel*, Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Natur. Reihe **8** (1959) 109–120.

[15] G. Fan in C.-Q. Zhang, *Circuit decompositions of Eulerian graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, poslano v objavo.

[16] H. Fleischner, *Eine gemeinsame basis für die theorie der Eulerschen graphen und den satz von Petersen*, Monatsh. Math. **81** (1976) 267–278.

[17] H. Fleischner, *Eulersche linien und kreisuberdeckungen die vorgegebene durchgange in den kanten vermeiden*, J. Combin. Theory Ser. B **29** (1980) 145–167.

[18] H. Fleischner in A. Frank, *On circuit decompostion of planar Eulerian graph*, J. Combin. Theory Ser. B **50** (1990) 245–253.

[19] G. Haggard, *Edmonds characterization of disc embeddings*, v: Proc. of the 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Utilitas Math., Winnipeg, (1977) 291–302.

[20] R. Halin, *Über einen satz von K. Wagner zum vierfarbenproblem*, Math. Ann. **153** (1964) 47–62.

[21] A. Huck in M. Kochol, *Five cycle double covers of some cubic graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **64** (1995) 119–125.

[22] F. Jaeger, *Flows and generalized coloring theorems in graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979) 205–216.

[23] F. Jaeger, *A survey of the cycle double cover conjecture*, v: Cycle in Graphs (B. Alspach in C. Godsil, ured.), Ann. Discrete Math. **27** (1985) 1–12.

[24] F. Jaeger, *Nowhere-zero flow problems*, v: Selected topics in graph theory 3 (L. W. Beineke in R. J. Wilson ured.), Academic Press, London, (1988) 71–95.

[25] P. A. Kilpatrick, *Tutte's first colour-cycle conjecture*, Ph. D. Thesis, Cape Town (1975).

[26] M. Kochol, *Snarks without small cycles*, J. Combin. Theory B. **67** (1996) 34–47.

[27] H.-J. Lai in C.-Q. Zhang, *Nowhere-zero 3-flows of highly connected graphs*, Discrete Math. **110** (1992) 179–183.

[28] H.-J. Lai, X. Yu in C.-Q. Zhang, *Small circuit double covers of cubic multigraphs*, J. Combin. Theory B **60** (1994) 177–194.

[29] C. H. C. Little in R. D. Ringeisen, *On the strong graph embedding conjcture*, v: Proc. of the 9th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Utilitas Math., Winnipeg, (1978) 479–487.

[30] C. H. C. Little in R. D. Ringeisen, *Barring vertices and the strong graph embedding conjecture*, preprint.

[31] M. Möller, H. G. Carstens in G. Brinkmann, *Nowhere–zero flows in low genus graphs*, J. Graph Theory **12** (1988) 183–190.

[32] J. A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc. **36** (1961) 445–450.

[33] M. Preissmann, *Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques*, Thèse de Doctorat d'État, Grenoble (1981).

[34] K. Seyffarth, *Hajós' conjecture and small cycle double covers of planar graphs*, Discrete Math. **101** (1992) 291–306.

[35] K. Seyffarth, *Small cycle double covers of 4-connected planar graphs*, Combinatorica **13** (1993) 477-482.

[36] P. D. Seymour, *Sums of circuits*, v: Graph Theory and Related Topics (J. A. Bondy in U. S. R. Murty, ured.), Academic Press, New York (1979) 341–355.

[37] P. D. Seymour, *Nowhere-zero 6-flows*, J. Combin. Theory Ser. B **30** (1981) 130–135.

[38] P. D. Seymour, *Even circuits in planar graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **31** (1981) 327–338.

[39] E. Steffen, *Tutte's 5–flow conjecture for graphs of nonorientable genus 5*, J. Graph Theory **22** (1996) 309–319.

[40] R. Steinberg, *Tutte's 5-flow conjecture for the projective plane*, J. Graph Theory **8** (1984) 277–285.

[41] R. Steinberg in D. H. Younger, *Grötzsch's theorem for the projective plane*, Ars Combin. **28** (1989) 15–31.

[42] G. Szekeres, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austal. Math. Soc., **8** (1973) 367–387.

[43] P. G. Tait, *Remarks on the colouring of maps*, Proc. Roy. Soc. Edingbourgh **10** (1880) 729.

[44] J. Tao, *On Hajós's conjecture* (v Kitajščini), J. China Univ. Sci. Tech. **14** (1984) 585–592.

[45] M. Tarsi, *Semi-duality and the cycle double cover conjecture*, J. Combin. Theory Ser. B **41** (1986) 332–340.

[46] W. T. Tutte, *On the imbedding of linear graphs in surfaces*, Proc. London Math. Soc. **51** (1950) 474–483.

[47] W. T. Tutte, *A contribution to the theory of chromatic polynomial*, Canad. J. Math. **6** (1954) 80–91.

[48] W. T. Tutte, *A theorem on planar graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956) 99–116.

[49] W. T. Tutte, *On the problem of decomposing a graph into n connected factors*, J. London Math. Soc. **36** (1961) 221–230.

[50] W. T. Tutte, *On the algebraic theory of graph coulourings*, J. Combin. Theory **1** (1966) 15–50.

[51] W. T. Tutte, *A geometrical version of the four color problem*, v: Combinatorial Mathematics and Its Applications (R. C. Bose in T. A. Dowling, ured.), Univer. of North Carolina Press, (1969) 553–560.

[52] D. H. Younger, *Integer flows*, J. Graph Theory **7** (1983) 349–357.

[53] C.-Q. Zhang, *Minimum cycle coverings and integer flows*, J. Graph Theory **14** (1990) 537–546.

[54] C.-Q. Zhang, *Cycle covers and cycle decompositions of graphs*, v: Quo Vadis, Graph Theory? (J. Gimbel, J. W. Kennedy in L. V. Quintas, ured.), Annals of Discrete Math. **55** (1993) 211–248.

[55] C.-Q. Zhang, *On even circuit decompositions of Eulerian graphs*, J. Graph Theory **18** (1994) 51–57.

[56] C.-Q. Zhang, *Integer flows and cycle covers of graphs*, Marcel Dekker Inc. (1997).