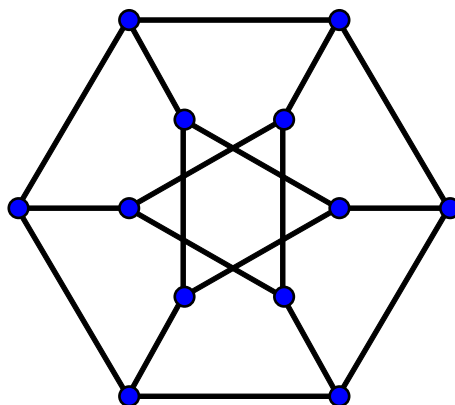


IZBRANA POGLAVJA IZ DISKRETNE MATEMATIKE

ZBORNIK SEMINARSKIH NALOG IZ DISKRETNE MATEMATIKE



Matjaž Krnc, Riste Škrekovski

Junij 2015 – verzija 1.1

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.1(082)(0.034.2)

IZBRANA poglavja iz diskretne matematike [Elektronski vir] : zbornik seminarских nalog iz diskretne matematike / [urednika] Matjaž Krnc, Riste Škrekovski. - verzija 1.1- El. knjiga. - Ljubljana : samozal. R. Škrekovski, 2015

Način dostopa (URL): <http://www.fmf.uni-lj.si/~skreko/Gradiva/Zborniki/IPDM.pdf>

ISBN 978-961-92887-5-7 (pdf)

1. Krnc, Matjaž, 1987-
279674880

Seminarske naloge iz tega zbornika so nastale v okviru različnih predmetov na Fakulteti za matematiko in fiziko, v letih 2011-2014. Zbornik je pedagoške narave, namen je bralcu ponuditi nekatere zanimive teme iz diskretne matematike v slovenskem jeziku. Vsebina poglavij iz tega zbornika sledi priznanim objavljenim člankom ter knjigam v angleškem jeziku. Nekatere seminarske naloge so z namenom večje preglednosti urejene in/ali združene. Morebitne napake sporočite na matjaz.krnc@gmail.com.

Za izdelavo seminarskih nalog se zahvaljujemo študentom:
Jernej Azarija, Miha Begelj, Tinkara Delibegović, Irena Drenšek, Rok Erman, Anja Fettich, Marko Kandič, Teja Klemenčič, Zvone Klun, Katja Korenjak, Lučka Lenič, Rok Okorn, Žiga Povalej, Jana Rihtaršič, Blaž Rugelj, Kris Stopar, Nik Stopar, Davorin Učakar, Tina Volčanšek, Vida Vukašinović, Nikolaj Zalokar, Andreja Zorko, David Žnidaršič.

Izbrana poglavja iz diskretne matematike

Zbornik seminarskih nalog iz diskretne matematike

Avtorja: Matjaž Krnc, Riste Škrekovski

Samozaložba: Riste Škrekovski

Oblikovanje: Matjaž Krnc

Fotografija na naslovnici: *Dürer graph* by Kokogo - Own work.
Licensed under CC BY-SA 3.0

ISBN:

Ljubljana, Junij 2015

KAZALO

i	POGLAVJA IZ TEORIJE GRAFOV	9
1	POVEZANOST GRAFOV	11
1.1	Uvod	11
1.2	2-povezanost	11
1.3	3-povezanost	13
1.4	Mengerjev izrek	15
1.5	Maderjev izrek in izrek o vpetih drevesih	16
2	PRIREJANJA	19
2.1	Uvod	19
2.2	Prirejanja v dvodelnih grafih	19
2.3	Prirejanja v splošnih grafih	21
3	HAMILTONOVI CIKLI	25
3.1	Hamiltonovi in nehamiltonovi grafi	25
3.1.1	Potreben pogoj	26
3.1.2	Zadosten pogoj	28
3.2	Nehamiltonovi ravninski grafi	29
3.3	Zaključek	31
4	PRODUKTI GRAFOV	33
4.1	Kartezični produkt grafov	33
4.1.1	Kartezični produkt več faktorjev	35
4.2	Krepki produkt grafov	36
4.3	Leksikografski produkt grafov	37
4.4	Tenzorski produkt	39
5	OSNOVNO O HIPERKOČKAH	41
5.1	Uvod	41
5.2	Lastnosti	42
5.3	Popolna prirejanja in hamiltonost - Domneva Krewerasa	48
6	PROBLEM ŠIRIH BARV	51
6.1	Uvod	51
6.2	Problem petih barv	51
6.3	Neizogibne konfiguracije	54
6.4	Reducibilnost	55
6.4.1	Reducibilnost D	56
6.4.2	Reducibilnost C	56
6.5	Zaključek	58
7	KROMATIČNI POLINOM	61
7.1	Definicije in osnovne lastnosti	61
7.2	Metoda izbrisa-skrčitve	63
7.3	Kromatični polinom spoja grafov	65
7.4	Kromatični polinom kvazi-separabilnih grafov	68
7.5	Tutteov polinom	70

KAZALO

7.5.1	Linearna rekurzivna definicija	70
7.5.2	Definicija rangovno-nične rodovne funkcije	72
7.5.3	Kromatični polinom kot posebni primer Tutteovega polinoma	73
7.6	Pretočni polinom	73
7.6.1	Pretoki	74
7.6.2	Definicija in lastnosti pretočnega polinoma	75
7.6.3	Odstranitev šopa povezav	77
7.6.4	Tuttove domneve	78
7.7	Zaključek	78
8	$L(p, q)$ -BARVANJE	81
8.1	Uvod in motivacija	81
8.2	Definicije.	81
8.3	Hipoteza Δ^2	82
8.4	Barvanja poti, ciklov in dreves	85
8.5	$L(p, q)$ -barvanja - Dodatek	87
8.6	Zaključek	87
9	POPOLNI GRAFI	89
9.1	Uvod	89
9.2	Začetne definicije	89
9.3	Izrek o popolnih grafih	91
9.4	Primeri popolnih grafov	95
9.5	Minimalno nepopolni grafi in Bergeova domneva	96
9.6	Operacije, ki ohranjajo popolnost	97
9.7	Zaključek	98
10	TETIVNI GRAFI	101
10.1	Predstavitev tetivnih grafov	101
10.2	Umestitev tetivnih grafov med popolne grafe	103
10.3	Barvanje tetivnih grafov	104
11	PARAMETRI RAVNINSKOSTI IN PLOSKVE VIŠJIH REDOV	107
11.1	Parametri ravninskosti	107
11.1.1	Debelina grafa	107
11.1.2	Križno število	109
11.2	Ploskve višjih redov	111
12	DISJUNKTNA VPETA DREVESA	117
12.1	Uvod	117
12.2	Tutte-ov izrek	120
13	PREŠTEVANJA VPETIH DREVES	123
13.1	Preštevanja dreves	123
13.2	Vpeta drevesa v grafih	125
13.3	Dekompozicija in lepa označitev	126
13.4	Navzven usmerjena drevesa in Eulerjevi digrafi	127
ii	POGLAVJA IZ KOMBINATORIKE	131
14	LATINSKI KVADRATI	133
14.1	Definicija latinskega kvadrata $n \times n$	133

14.2	Konstrukcija latinskih kvadratov	134
14.3	Ostale variante ali verzije latinskih kvadratov	139
14.3.1	Sudoku	139
14.3.2	Futoshiki	139
14.3.3	Magični kvadrat	141
14.3.4	Grško-latinski kvadrat	141
15	MAGIČNE KOCKE IN MAGIČNI GRAFI	143
15.1	Magični kvadrati in magične kocke	143
15.2	Magični in polmagični grafi	149
15.2.1	Polmagični grafi	149
15.2.2	Magični grafi	152
16	TEORIJA NAČRTOV	155
16.1	Načrti	155
16.2	T-načrti	158
16.3	Ciklične konstrukcije načrtov	161
16.4	Fisherjeva neenakost	163
16.5	Zaključek	165
17	OSNOVNO O MATROIDIH	167
17.1	Postulati	167
17.2	Operator zaprtja	170
17.3	Primeri matroidov	171
17.4	Požrešna metoda	172
18	OSNOVNO O PROBLEMU UMETNOSTNE GALERIJE	175
18.1	Osnovne definicije in lastnosti	175
18.2	Chvátalov izrek	176
18.3	Tradicionalna umetnostna galerija	178
18.4	Ostali primeri umetnostnih galerij	179
18.4.1	Umetnostna galerija z notranjimi stenami	179
18.4.2	Poligoni z mobilnimi stražarji	179
18.4.3	r -zastraženi poligoni	180
18.4.4	Problem zapora in trdnjave	180
19	NAPREDNI PRISTOPI ZA PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE	181
19.1	Osnovne definicije	181
19.2	Triangulacija	182
19.3	Izrek umetnostne galerije	184
19.4	Konveksno deljenje	184
19.5	Ortogonalni poligoni	186
19.5.1	Dokaz zadostnosti	187
19.5.2	Obstoj lihega prereza	187
19.6	Problem trdnjave	190
20	RAMSEYEVO ŠTEVILO IN NAKLJUČNI GRAFI	193
20.1	Uvod v Ramseyevo teorijo	193
20.2	Pomembni izreki in definicije	195

Del I

POGLAVJA IZ TEORIJE GRAFOV

1.1 UVOD

Graf $G = (V, E)$ je *povezan*, če za vsak par točk $u, v \in V$ obstaja pot v G med njima. *Komponenta* je največji povezan del grafa. (A, B) -pot v G je pot, ki ima eno krajišče v A , drugo pa v B , kjer sta $A, B \subseteq V$. Če vsaka (A, B) -pot v G vsebuje točko ali povezavo v $X \subseteq V \cap E$, potem rečemo, da X loči množici A in B . Velja $A \cap B \subseteq X$. Množici X rečemo *prerez*. X loči G , če loči dve točki iz $G - X$ v G .

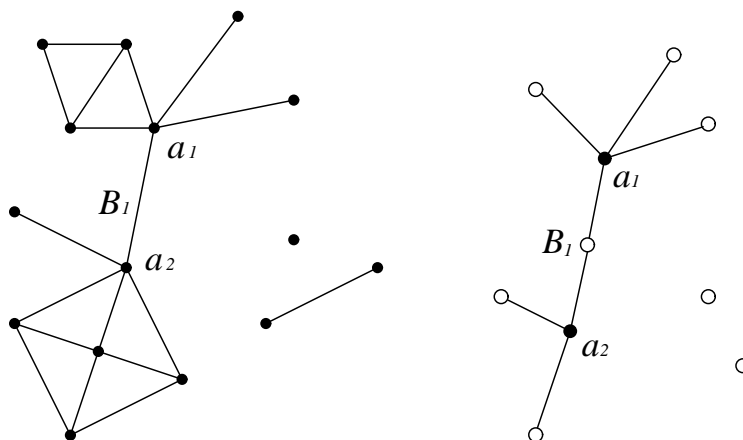
Točka v je *prerezna točka*, če ima $G - \{v\}$ več komponent kot G . Povezava e je *most* oz. *prerezna povezava*, če ima $G - e$ več komponent kot G . Graf G je k -povezan ($k \in \mathbb{N}$, $|V(G)| > k$), če je $G - X$ povezan za vsako $X \subseteq V$, kjer je $|X| < k$. S $\kappa(G)$ označimo največji k , za katerega je G še k -povezan. Graf G je *po povezavah* l -povezan, če je za vsako $F \subseteq E$, $|F| < l$, $G - F$ povezan. Z $\lambda(G)$ označimo največji l , za katerega je G še po povezavah l -povezan. Velja $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, kjer je $\delta(G)$ najmanjša stopnja točk v G .

1.2 2-POVEZANOST

Naj bo $G = (V, E)$ graf. *Blok* je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk. Torej je blok bodisi izolirana točka bodisi most (s krajišči) bodisi maksimalen 2-povezan podgraf. Zato imata dva različna bloka največ eno skupno točko, ki je vedno prerezna točka. Torej vsaka povezava leži v enem bloku in je graf unija blokov. Blok je analog komponenti pri povezanosti. Vendar je s komponentami graf natanko opisan, z bloki pa podamo le grobo sliko grafa, saj bloki med seboj niso disjunktni.

Naj bo A množica prereznih točk in \mathcal{B} množica blokov. Na $A \cup \mathcal{B}$ definiramo dvodelen graf takole: aB je povezava v $A \cup \mathcal{B}$, kjer je $a \in A$, $B \in \mathcal{B}$ taka, da je $a \in B$. Tak graf imenujemo *graf blokov*.

Zgled. Na sliki 1.1 levo imamo graf, ki ima dve prerezni točki a_1 in a_2 ter osem blokov. Na levi imamo njegov graf blokov, na katerem sta prerezni točki označeni s točko, bloki pa s krogi.

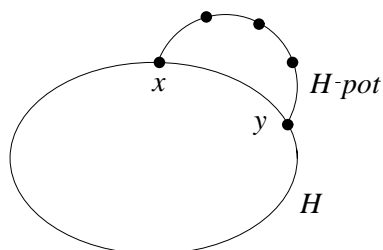


Slika 1.1: Graf G ter njegov graf blokov.

Graf blokov je vedno gozd. Velja naslednja trditev.

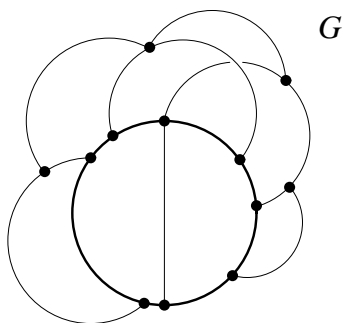
Trditev 1.1. *Graf blokov povezanega grafa je drevo.*

Preprosta metoda za konstrukcijo 2-povezanih grafov se imenuje *ušesna dekompozicija*. V naslednjih vrsticah jo bomo opisali. H -pot je pot v G , ki ima krajišči v H podgrafu G , sicer pa s H nima skupnih točk in povezav. Na sliki je prikazana H -pot med točkama x in y .



Slika 1.2: H -pot med točkama x in y

Zgled: Na sliki 1.3 je prikazan graf G , ki je v celoti konstruiran z ušesno dekompozicijo. Na začetku imamo cikel (povdarjen), ki mu dodajamo H -poti.



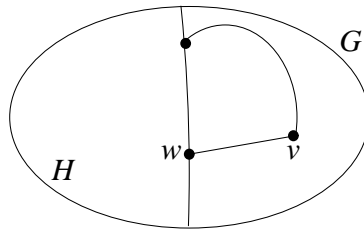
Slika 1.3: Ušesna dekompozicija grafa G

Naslednja trditev natančno opiše ušesno dekompozicijo:

Trditev 1.2. Graf G je 2-povezan natanko takrat, ko ga lahko konstruiramo iz cikla z zaporednim dodajanjem H -poti v že konstruirani podgraf H .

Dokaz. (\Leftarrow) Vsak tako konstruiran graf je očitno 2-povezan.

(\Rightarrow) Naj bo G 2-povezan graf. Potem G vsebuje cikel in ima podgraf H , ki ga dobimo z opisano konstrukcijo. Pa recimo, da smo vzeli maksimalen H . Ker je vsaka povezava xy iz $E(G) \setminus E(H)$ H -pot, kjer je $x, y \in H$, je H inducirani podgraf v G . Če je $H \neq G$, potem zaradi povezanosti G obstaja povezava vw , da je $v \in V(G) \setminus V(H)$ in $w \in V(H)$. Ker je G 2-povezan, $G - \{w\}$ vsebuje $(\{v\}, H)$ -pot P . Potem je wvP H -pot v G in je $H \cup wvP$ z ušesno dekompozicijo konstruiran podgraf v G , ki je večji od H . To pa je protislovje s privzetkom.



Slika 1.4: Povečujoča H -pot za H v G .

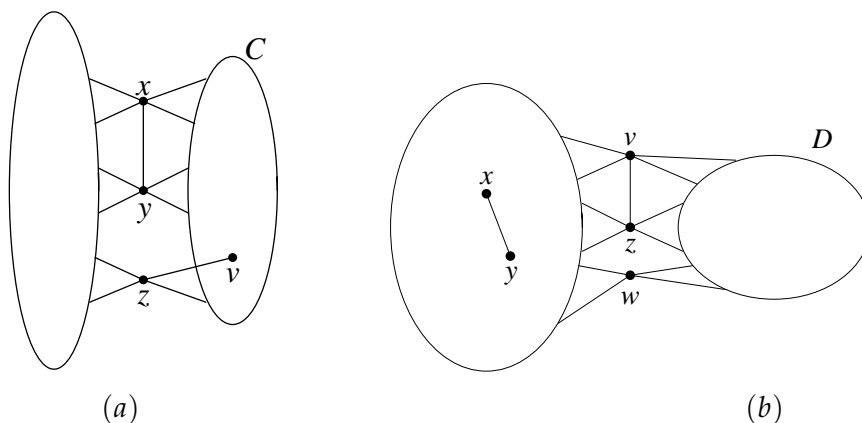
□

1.3 3-POVEZANOST

Lema 1.3. Če je G 3-povezan graf in $|V(G)| > 4$, potem G vsebuje povezavo e tako, da je G/e spet 3-povezan.

Dokaz. S protislovjem: recimo, da taka povezava e v G ne obstaja. Potem za vsako povezavo xy iz $E(G)$ graf G/xy vsebuje prerez S na največ dveh točkah. Z v_{xy} označimo točko, ki jo dobimo iz x in y v G/xy . v_{xy} leži v S , ker $\kappa(G) \geq 3$ in $|S| = 2$. Potem sta vsaki dve točki, v G/xy ločeni s $S = \{v_{xy}, z\}$, v G ločeni s prerezom $T = \{x, y, z\}$. Ker nobena prava podmnožica v T ni prerez za G (zaradi 3-povezanosti), ima vsaka točka iz T sosednje točke v vsaki komponenti $G - T$.

Izberimo povezavo xy , točko z in komponento C v $G - T$ tako, da bo $|C|$ najmanjša možna. Točka v naj bo sosednja točka od z v C .



Slika 1.5: (a) Prerez T , komponenta C in točka v (b) Prerez $\{z, v, w\}$ in komponenta D

Po privzetku G/xy ni 3-povezan graf, zato obstaja w taka, da je $\{z, v, w\}$ prerez za G in podobno kot prej ima vsaka od točk z, v in w sosede v vsaki komponenti grafa $G - \{z, v, w\}$. Ker sta x in y sosednji, ima $G - \{z, v, w\}$ tako komponento D , da je $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Potem vsaka točka iz D , ki je sosednja točki v , leži v C (ker je $v \in C$), torej $D \cap C \neq \emptyset$, D smo izbrali tako, da $D \subset C$ in $D \neq C$. To pa je protislovje z izbiro xy, z in C . \square

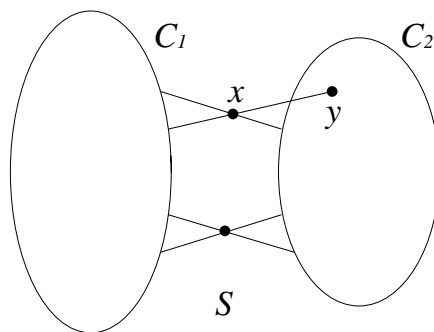
Podobno kot smo v trditvi 1.2 opisali konstrukcijo 2-povezanih grafov, bomo tudi za 3-povezane grafe dobili preprosto konstrukcijo z naslednjim izrekom:

Izrek 1.4 (Tutte). Graf G je 3-povezan, če in samo če obstaja zaporedje grafov G_0, G_1, \dots, G_n z naslednjima lastnostima:

- (i) $G_0 = K_4$ in $G_n = G$;
- (ii) G_{i+1} vsebuje tako povezavo xy , $d(x), d(y) \geq 3$, da je $G_i = G_{i+1}/xy$ za vsak $i < n$.

Dokaz. (\Rightarrow) Če je G 3-povezan, po prejšnji lemi obstaja tako zaporedje G_i , ki zadošča točkama (i) in (ii) ter so vsi G_i v njem 3-povezani.

(\Leftarrow) Naj bo G_0, G_1, \dots, G_n opisano zaporedje. Pokazali bomo, da če je $G_i = G_{i+1}/xy$ 3-povezan graf, je tudi G_{i+1} 3-povezan za $\forall i < n$. Recimo, da ni res. S naj bo prerez v G_{i+1} , $|S| \leq 2$. C_1 in C_2 komponenti v $G_{i+1} - S$. Ker sta x in y sosednji, lahko vzamemo, da je $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$. $v \notin \{x, y\}$.



Slika 1.6: Skica 2-prereza v G_i .

Če C_2 ne vsebuje hkrati obeh x in y niti v , je v grafu G_i ali v_{xy} ali v od C_1 ločena s prerezom na največ dveh točkah. Protislovje, saj je G_i 3-povezan. Torej C_2 vsebuje samo eno od točk x in y , kar pa je protislovje s predpostavko, da je $d(x), d(y) \geq 3$. \square

Induktivno 3-povezane grafe konstruiramo takole: začnemo s K_4 ; v že konstruiranem grafu izberemo poljubno točko v in jo zamenjamo z dvema sosednjima točkama v' in v'' ter ju povežemo s točkami, ki so bile prej sosednje z v . Vsaka od točk v' in v'' je incidenčna z vsaj tremi točkami in vsaka prejšnja sosedna od v postane sosednja z vsaj eno od v' in v'' .

Izrek 1.5 (Tutte). *Prostor ciklov 3-povezanega grafa je generiran iz neseparajočih induciranih ciklov.*

1.4 MENGERJEV IZREK

Izrek 1.6 (Menger). *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $A, B \subseteq V$. Potem je najmanjše število točk, ki ločijo množici A in B , enako največjemu številu (A, B) -poti v G .*

Dokaz. Imenujmo množico vseh točk, ki v G ločijo množici $A, B \subseteq V$, (A, B) -prerez in naj bo s moč najmanjšega (A, B) -prereza. Nadalje naj bo (A, B) -konektor C podgraf v G , katerega vsaka komponenta je taka (A, B) -pot, ki nima nobene notranje točke skupne z A in B . Upoštevamo, da je vsaka točka iz $A \cap B$ že (A, B) -pot.

Če je G graf brez povezav, je (A, B) -konektor kar $C = A \cap B$. Torej lahko predpostavimo: G vsebuje tako povezavo $e = xy$, da izrek velja za $G' = G - e$ in G' ima (A, B) -prerez S , $|S| < s$. Potem naj bo $P := S \cup \{x\}$ in $Q := S \cup \{y\}$. P in Q sta (A, B) -prereza za G' . Velja $|P| = |Q| = |S| + 1$. (A, P) -prerez za G' je (A, B) -prerez za G , prav tako tudi (Q, B) -prerez. Od tod sledi, da ima G' (A, B) -konektor X , ki vsebuje P , in (Q, B) -konektor Y , ki vsebuje Q . Ker je $X \cap Y = S$, potem je $C = (X \cup Y) + e$ lahko (A, B) -konektor za G . \square

Posledica 1.7. *Naj bosta a in b dve različni točki v $G = (V, E)$.*

- (i) *Če ab ni povezava iz $E(G)$, potem je najmanjše število od a in b različnih točk, ki ločijo a in b v G , enako največjemu številu neodvisnih (a, b) -poti v G .*
- (ii) *Najmanjše število povezav, ki ločijo a in b v G , je enako največjemu številu po poteh disjunktne (a, b) -poti v G .*

Dokaz. (i) Uporabimo izrek 4.1, kjer vzamemo $A := N(a)$ in $B := N(b)$.

(ii) V grafu povezav za G uporabimo izrek 4.1, vzamemo $A := E(a)$ in $B := E(b)$. \square

S pomočjo te posledice lahko dokažemo naslednji izrek:

Izrek 1.8 (Globalna verzija Mengerjevega izreka). *Velja:*

- (i) *Graf je k -povezan natanko takrat, ko vsebuje k neodvisnih poti med poljubnima dvema točkama.*

(ii) Graf je po povezavah l -povezan natanko takrat, ko vsebuje l po povezavah disjunktnih poti med poljubnima dvema točkama.

Dokaz. Izrek dokažemo ločeno za vsako od obeh trditev.

(i) Če graf G vsebuje k neodvisnih poti med dvema poljubnima točkama, potem ima več kot k točk in v njem obstaja prerez, ki nima manj kot k točk. Torej je G k -povezan.

V obratni smeri predpostavimo, da je G k -povezan in ima več kot k točk, ampak vsebuje točki a in b , med katerima ni k neodvisnih poti. Po posledici 4.1(i) sta ti dve točki sosednji. Naj bo $G' = G - ab$. Potem G' vsebuje največ $k - 2$ neodvisnih (a, b) -poti. Po posledici 4.1(i) točki a in b v grafu G loči množica X , ki ima največ $k - 2$ točk. Potem obstaja vsaj še ena točka v v G , ki ni iz $X \cup \{a, b\}$, saj $|V(G)| > k$. Sedaj vemo, da X loči točko v v G' od ene izmed a in b , vzemimo a . Vendar $X \cup \{b\}$ loči v in a v G ter ima največ $k - 1$ elementov. To pa je protislovje s k -povezanostjo G .

Trditev (ii) sledi direktno iz posledice 1.7(ii). □

1.5 MADERJEV IZREK IN IZREK O VPETIH DREVESIH

Naj bo $G = (V, E)$ graf in H inducirani podgraf v njem. Zanima nas, koliko ima G lahko največ med seboj neodvisnih H -poti. Definirajmo zgornjo mejo

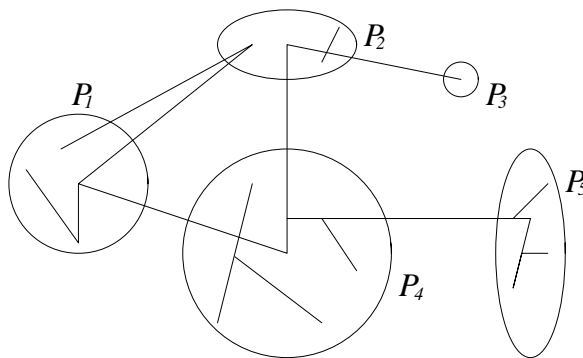
$$M_G(H) := \min(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \rfloor),$$

kjer je minimum po vseh X in F , za katere velja $X \subseteq V(G - H)$, $F \subseteq E(G - H - X)$, \mathcal{C}_F množica komponent grafa $(V(G - H), F)$, tako, da vsaka H -pot v G vsebuje točko ali povezavo iz $X \cup F$.

Izrek 1.9 (Mader). *V danem grafu G z induciranim podgrafom H je vedno vsaj $M_G(H)$ neodvisnih H -poti.*

Naj bo $G = (V, E)$ graf in P poljubna particija množice $V(G)$ na r množic. Potem ima vsako vpeto drevo v G najmanj $r - 1$ povezav, katerih krajišča ležijo v različnih množicah particije P .

Zgled 1.10. Spodnji graf ima particijo iz petih množic P_1, \dots, P_5 . Na sliki je označeno vpeto drevo s šestimi povezavami med množicami P_1, \dots, P_5 .



Slika 1.7: Particija grafa na r množic

Izrek 1.11 (Tutte; Nash-Williams). *Multigraf G vsebuje k po povezavah disjunktih vpetih dreves natanko takrat, ko ima G za vsako particijo P množice $V(G)$ najmanj $k(|P| - 1)$ povezav med množicami v particiji P .*

Opomba 1.12. Če v G obstaja k po povezavah disjunktih vpetih dreves, je G očitno po povezavah k -povezan. Obrat ne velja brez dodatnih pogojev.

Posledica 1.13. *Vsak po povezavah $2k$ -povezan multigraf G ima k po povezavah disjunktih vpetih dreves.*

LITERATURA

- [1] R. Diestel, *Graph theory*, Grad. Texts in Math, 43–58, (2005).
- [2] F. Göring, *Short proof of Menger's Theorem*, Discrete Math., **219**, 295–296 (2000).

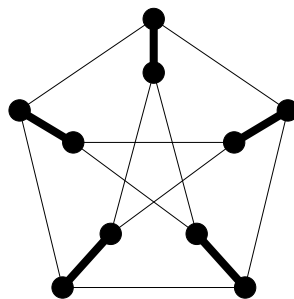
PRIREJANJA

Rok Okorn

2.1 UVOD

Naj predstavimo nekaj osnovnih pojmov, ki jih bomo potrebovali za nadaljno razlago snovi. Naj bo M množica povezav grafa G . M je *prirejanje*, če nobeni dve povezavi iz M nimata skupnega krajišča. Množica točk U grafa G je *pokrita* z M , če je vsaka točka iz U krajišče kakšni povezavi iz M . Rečemo, da M *pokriva* U . Točka je *nepokrita*, če ni krajišče nobeni povezavi iz M . Nadalje je k -faktor vpet k -regularen podgraf grafa G . Torej je podgraf H v grafu G 1-faktor oziroma *popolno prirejanje* natanko tedaj, ko $E(H)$ pokriva $V(G)$.

Sedaj, ko smo predstavili osnovne pojme, bi radi karakterizirali grafe, ki imajo 1-faktor. To bo tudi naš glavni cilj.



Slika 1: 1-faktor v Petersenovem grafu

2.2 PRIREJANJA V DVODELNIH GRAFIH

Naj bo G dvodelen graf s particijo $V(G) = A \cup B$. V tem razdelku bomo pokazali kako poiskati prirejanje v G s čimvečjim številom povezav.

Naj bo M poljubno prirejanje v grafu G . Pot, ki se začne v nepokriti točki iz A in vsebuje izmenično povezave iz $E \setminus M$ in M , se imenuje *alternirajoča pot*. Alternirajoči poti, ki se konča v nepokriti točki iz B , pravimo *povečujoča pot*.

Opomba: Naj bo P povečujoča pot. Potem je simetrična razlika $P \oplus M$ prirejanja M in povečujoče poti P večje prirejanje.

Alternirajoče poti imajo pomembno vlogo v iskanju večjih prirejanj. Še več, če začnemo s poljubnim prirejanjem in uporabljamo povečujoče poti za povečevanje prirejanja dokler ni več nobene poti, dobimo optimalno prirejanje, to je prirejanje z največjim možnim številom povezav. Naj bo $U \subseteq V(G)$ množica točk. U je *pokritje* množice povezav $E(G)$, če ima vsaka povezava iz $E(G)$ krajišče v U .

Naš prvi izrek povezuje moč prirejanja v grafu G z močjo pokritja.

Izrek 2.1 (König 1931). *Moč največjega prirejanja v dvodelnem grafu je enako moči najmanjšega pokritja.*

Dokaz. Očitno je, da je moč pokritja vedno večja od moči prirejanja. Torej moramo pokazati samo še, da velja tudi obratno. Naj bo M maksimalno prirejanje. Iz vsake povezave izberemo krajišče ter tako ustvarimo množico $U \subseteq V(G)$ z naslednjo lastnostjo: Naj bo $ab \in M$, $a \in A$, $b \in B$. Če obstaja alternirajoča pot, ki se konča v b , potem naj bo $b \in U$. Sicer naj bo $a \in U$. Radi bi videli, da je U pokritje. Naj bo $ab \in E(G)$ poljubna povezava v G . Pokažimo, da ali a ali b leži v U . Če je $ab \in M$, je to res po definiciji množice U . Torej predpostavimo, da povezava $ab \notin M$. Ker je M maksimalno prirejanje, obstaja povezava $a'b' \in M$ taka, da je ali $a' = a$ ali $b' = b$. Če je $b' = b$ in a ni pokrita, potem je povezava ab alternirajoča pot in je zato $b \in U$. Torej lahko predpostavimo, da je $a' = a$. Če $a' \notin U$, potem je $b' \in U$. Zato obstaja alternirajoča pot P , ki se konča v b' . Obstaja pa tudi alternirajoča pot Q , ki se konča v b : Q je pot P do točke b , če je $b \in P$ ali pa je $Q = Pab$, ki pa sta obe povečujoči poti. To pa nasprotuje predpostavki, da je M maksimalno prirejanje. Torej mora biti točka b pokrita in v U kot krajišče povezave v prirejanju M . \square

Izrek 2.2 (Hall 1935). *Dvodelen graf $G = (A \cup B, E)$ ima prirejanje, ki pokriva A , natanko tedaj, ko velja $|N(S)| \geq |S|$ za vsak $S \subseteq A$.*

Dokaz. (\Rightarrow) Za vsak $S \subseteq A$ imamo $|N(S)| \geq |S|$ sosedov, saj gre iz vsake točke vsaj ena povezava, ki je v prirejanju.

(\Leftarrow) Recimo, da G nima prirejanja, ki pokrije A . Torej ima po izreku 2.1 minimalno pokritje manj kot $|A|$ točk. Naj bo pokritje $C = U \cup V$, kjer je $U \subseteq A$, $V \subseteq B$. Torej je $|U| + |V| = |C| < |A|$. Ker je U pokritje grafa G , med $A \setminus U$ in $B \setminus V$ ni povezav v grafu G . Od tod je $|N(A \setminus U)| \leq |V| < |A \setminus U|$, saj je $|V| < |A| - |U| = |A \setminus U|$. Torej Hallov pogoj ne velja za $S = A \setminus U$, kar pa je protislovje s predpostavko. \square

Posledica 2.3. *Naj bo $|N(S)| \geq |S| - d$ za vsak $S \subseteq A$ in d izbrano fiksno število. Potem G vsebuje prirejanje moči $|A| - d$.*

Dokaz. Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G tako, da dodamo d novih točk množico B in jih povežemo z vsemi točkami iz A . Tako za vsak $S \subseteq A$ velja: $|N'(S)| \geq |S| - d + d = |S|$. Torej ima G' prirejanje moči $|A|$. Od tod sledi, da ima G prirejanje moči $|A| - d$. \square

Posledica 2.4. *Naj bo G dvodelen k -regularen graf. Potem ima G popolno prirejanje.*

Dokaz. Ker je G k -regularen, je $|N(S)| \geq |S|$ za vsak $S \subseteq A$. Velja tudi $k \cdot |A| = |E| = k \cdot |B|$. Od tod pa sledi, da ima G popolno prirejanje. \square

Posledica 2.5. *Naj bo G dvodelen k -regularen graf. Potem ima G k disjunktnih popolnih prirejanj.*

Dokaz. Ker je G k -regularen ima po prejšnji posledici popolno prirejanje M_1 . Nato pogledajmo graf $G - M_1$. Ta graf je očitno $(k - 1)$ -regularen in tako ima graf G po indukciji k disjunktnih popolnih prirejanj, saj se nobena povezava ne more ponoviti. \square

Posledica 2.6. *Vsak $2k$ -regularen graf G ima 2-faktor.*

Dokaz. Naj bo G $2k$ -regularen graf. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je G povezan. Ker je vsaka točka sode stopnje, ima G Eulerjev obhod $v_0 e_0 \dots e_n v_{n+1}$, pri čemer je $v_0 = v_{n+1}$. Tvorimo graf G' tako, da vsako točko $v \in V(G)$ zamenjamo s parom (v^-, v^+) in vsako povezavo $e_i = v_i v_{i+1}$ zamenjamo z usmerjeno povezavo $v_i^+ v_{i+1}^-$. Tako dobimo k -regularen dvodelen graf G' . Graf G' vsebuje 1-faktor, ki nam v G inducira 2-faktor. \square

Opomba: Iz dokaza je razvidno, da ni potrebe, da bi moral biti graf G dvodelen.

2.3 PRIREJANJA V SPLOŠNIH GRAFIH

Naj bo dan graf G . S C_G označimo množico vseh njegovih komponent, $q(G)$ pa naj bo število lihih komponent, torej komponent, ki imajo liho število točk. Če ima graf G popolno prirejanje, potem hitro vidimo, da velja *Tutteov pogoj*:

$$q(G - S) \leq |S| \text{ za vsako } S \subseteq V(G), \quad (1)$$

saj bo iz vsake lihe komponente grafa $G - S$ vsaj ena povezava iz popolnega prirejanja imela eno krajišče v S .

Pokažimo sedaj, da to ni le potreben pogoj za obstoj popolnega prirejanja, pač pa tudi zadosten.

Izrek 2.7 (Tutte 1947). *Graf G ima 1-faktor natanko tedaj, ko velja Tutteov pogoj.*

Dokaz. Vemo že, da če ima graf popolno prirejanje, velja tudi Tutteov pogoj. Implikacijo v drugo smer bomo pokazali s protislovjem. Naj bo G graf brez popolnega prirejanja. Torej moramo poiskati tako množico $S \subseteq V(G)$, ki ne ustreza Tutteovemu pogoju.

Lahko predpostavimo, da je graf G po povezavah največji graf, ki nima popolnega prirejanja. Naj bo graf G' dobljen iz grafa G z dodajanjem povezav, hkrati pa naj bo $S \subseteq V(G)$ množica, ki ne zadostuje Tutteovemu pogoju za graf G' . Potem S ne zadostuje niti Tutteovemu pogoju za graf G , saj je vsaka liha komponenta grafa $G' - S$ unija komponent grafa $G - S$, ena od teh pa je gotovo spet liha.

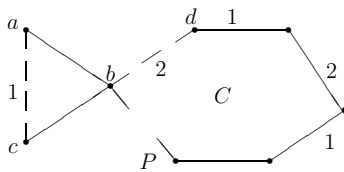
Sedaj pa nas zanima, kako graf G sploh izgleda. Vemo, da vsebuje množico S , ki ne zadošča Tutteovemu pogoju, hkrati pa je po povezavah največji graf, ki nima popolnega prirejanja. Zato velja,

- (*) *da so vse komponente grafa $G - S$ polni grafi in vsaka točka $s \in S$ je povezana z vsako točko grafa $G - \{s\}$.*

Poglejmo še drugače. Če množica $S \subseteq V(G)$ zadošča (*), potem bodisi S bodisi \emptyset ne zadošča Tutteovemu pogoju. Recimo, da S zadošča Tutteovemu pogoju. Potem lahko združimo lihe komponente grafa $G - S$ disjunktno z S in v parih povežemo preostale točke. Če pa je $|V(G)|$ liha, potem \emptyset ne zadošča Tutteovemu pogoju.

Torej je dovolj pokazati, da ima graf G množico točk S , ki zadošča (*). Naj bo S množica točk, ki so povezane z vsako drugo točko. Če tak S ne zadošča (*), potem v neki komponenti grafa $G - S$ obstajata nepovezani točki a in a' . Naj bodo a, b in c prve tri točke na najkrajši poti $a - a'$ v tej komponenti. Potem velja $ab, bc \in E(G)$ in $ac \notin E(G)$, saj bi drugače vzeli to pot za najkrajšo. Ker $b \notin S$, obstaja taka točka $d \in V(G)$, da velja $bd \notin E(G)$. Zaradi maksimalnosti grafa G obstajata popolni prirejanji M_1 množice $V(G)$ grafa $G + ac$ in M_2 množice $V(G)$ grafa $G + bd$.

Naj bo $P = d \dots v$ najdaljša pot v grafu G , ki se začne v točki d s povezavo iz M_1 , nato pa si povezave sledijo izmenično, ena iz M_1 , druga iz M_2 . Če je zadnja povezava poti P iz M_1 , potem velja $v = b$. V nasprotnem primeru bi lahko s P nadaljevali. Označimo $C := P + bd$. Če pa je zadnja povezava poti P iz M_2 , potem zaradi maksimalnosti P velja, da povezava iz M_1 , ki ima krajišče v točki v , mora biti povezava ac . Torej velja $v \in \{a, c\}$. V tem primeru definiramo cikel $C := dPvbd$.



Slika 2: Sestavljanje protislovja, če S ne zadošča (*).

V obeh primerih je C cikel sode dolžine z vsako drugo povezavo v M_2 , edina njegova povezava, ki ni v $E(G)$, pa je povezava bd . Če sedaj v M_2 zamenjamo vse povezave, ki so na ciklu C s povezavami iz $C - M_2$, dobimo popolno prirejanje množice $V(G)$, vsebovano v $E(G)$, kar pa je protislovje. \square

Posledica 2.8. Vsak kubičen graf brez mostov ima popolno prirejanje.

Dokaz. Pokazali bomo, da vsak kubičen graf brez mostov zadošča Tutteovemu pogoju.

Naj bo $S \subseteq V(G)$ dana množica. Oglejmo si liho komponento C grafa $G - S$. Ker je G kubičen graf, se stopnje točk v komponenti C seštejejo v liho število. Vendar pa le sod del te vsote izhaja iz povezav komponente C . Torej ima graf G liho mnogo povezav od S do C in zato vsaj 3 take povezave, saj G nima mostov. Število povezav med S in $G - S$ je tako vsaj $3q(G - S)$. Hkrati pa je število teh povezav največ $3|S|$, ker je G kubičen graf. Tako velja $q(G - S) \leq |S|$, kot smo želeli. \square

Posledica 2.9. Naj bo G $(r - 1)$ -povezan po povezavah, r -regularen graf in $r \geq 3$ liho naravno število. Potem ima G 1-faktor.

Dokaz. Po Tutteovem izreku ima G 1-faktor natanko takrat, ko za $\forall S$ velja $q(G - S) \leq |S|$. Izberimo poljubno množico $S \subseteq E(G)$. Naj bodo C_1, C_2, \dots, C_k lihe komponente $G - S$. Manj kot $r - 1$ povezav ne more iti iz vsakega C_i , ker bi tako dobili prerez, ki ne ustreza $(r - 1)$ -povezanosti po povezavah. Ker je r lih je zato $r - 1$ sod in tako mora iti iz vsakega C_i vsaj r povezav ven. Če to ne bi bilo res, bi dobili popolno prirejanje na lihem grafu, kar ni možno. Torej imamo $q(G - S) \cdot r \leq r \cdot |S|$ oziroma $q(G - S) \leq |S|$. To pa je ravno Tutteov pogoj in tako imamo 1-faktor. \square

Naslednji izrek nam da nekoliko močnejši rezultat, iz njega pa hitro sledi Tutteov izrek (izrek 2.7).

Izrek 2.10. Vsak graf G vsebuje množico točk S , ki ima naslednji lastnosti.

- (i) Za množico $S \subseteq V(G)$ velja, da graf H_S , ki ga dobimo iz G s skrčitvijo vsake komponente $C \in C_{G-S}$ v točko in odstranitvijo vseh povezav znotraj S , vsebuje popolno prirejanje množice S , to pomeni, da je S matchable.
- (ii) Za vsako komponento C grafa $G - S$ velja, da $C \neq \emptyset$ in $C - \{v\}$ ima popolno prirejanje za vsako točko $v \in C$, temu rečemo, vsaka komponenta C je faktor-kritična.

Graf G s tako množico S ima popolno prirejanje natanko tedaj, ko velja $|S| = |C_{G-S}|$.

Poglejmo sedaj, kako iz tega izreka sledi Tutteov izrek.

Iz (i) in (ii) sledi $|S| \leq |C_{G-C}| = q(G - S)$. Vse komponente grafa $G - S$ so lihe moči (drugače ne bi veljala predpostavka (ii)), neenakost $|S| \leq |C_{G-C}|$ pa velja po (i). Zaradi Tutteovega pogoja velja tudi $q(G - S) \leq |S|$. Zato velja enakost $|S| = |C_{G-S}|$ in po zadnji trditvi izreka 2.10 sledi, da graf G vsebuje popolno prirejanje.

LITERATURA

- [1] R. Diestel: Graph Theory, Springer-Verlang, New York, 2000

HAMILTONOVI CIKLI

Irena Drenšek

Hamiltonove poti oz. cikle imenujemo po irskem matematiku Williamu Rowanu Hamiltonu, ki si je izmislil t.i. Ikozaedersko igro [1], kjer mora igralec z danimi začetnimi oglišči na pravilnem dodekaedru poiskati Hamiltonov cikel. Hamilton je pokazal, da vedno obstaja tak cikel, ne glede na izbiro prvih petih zaporednih točk.

Za ugotavljanje hamiltonosti ni znan noben "preprost" postopek, ki bi bil uporaben za vse grafe. Poznamo pa potrebne in zadostne pogoje za Hamiltonost, ki si jih bomo ogledali v prvem razdelku. Med zadostnimi pogoji spoznamo dva pomembna izreka, Diracov in Orejev izrek. Zanimiv razred grafov so ravninski grafi, za katere je Grinberg odkril preprost potreben pogoj, da so Hamiltonovi. Te si bomo ogledali v drugem razdelku.

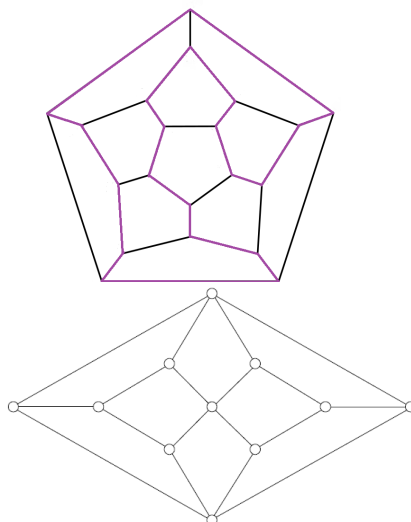
3.1 HAMILTONOVI IN NEHAMILTONOVI GRAFI

Pot P v grafu G je *Hamiltonova pot*, če gre P skozi vsako vozlišče grafa G natanko enkrat. Cikel C v grafu G je *Hamiltonov cikel*, če gre C skozi vsako vozlišče grafa G natanko enkrat. Graf G je *sledljiv* (angl. traceable), če vsebuje Hamiltonovo pot in je *Hamiltonov*, če vsebuje Hamiltonov cikel.

Dodekaeder ima Hamiltonov cikel, ki ga najdemo na sliki 3.1. Na isti sliki najdemo tudi Herschelov graf, ki pa ni Hamiltonov, ker je dvodelen in ima liho število vozlišč, je pa sledljiv.

Zgled 3.1. Oglejmo si naslednje primere hamiltonskosti:

- Vsak cikel C_n je Hamiltonov za vsak n .
- Vsak poln graf K_n je Hamiltonov za $n \geq 3$.
- Polni dvodelni graf $K_{n,m}$ je Hamiltonov za $n = m, m \geq 2$.



Slika 3: Hamiltonov in nehamiltonov graf (dodekaeder in Herschelov graf).

3.1.1 Potreben pogoj

Hamiltonov graf je \mathcal{NP} -poln problem - za njegovo reševanje ne obstaja polinomski algoritem[4]. Za obstoj Hamiltonovega cikla ne poznamo nobenega preprostega pogoja, ki bi bil hkrati potreben in zadosten. Preprost potreben pogoj je podan v naslednjem izreku, kjer s $c(G)$ označimo število komponent grafa G .

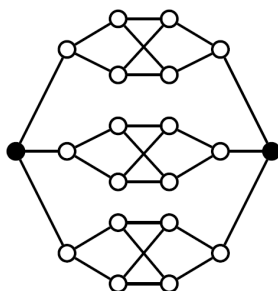
Izrek 3.2. Naj bo S množica vozlišč Hamiltonovega grafa G . Potem je

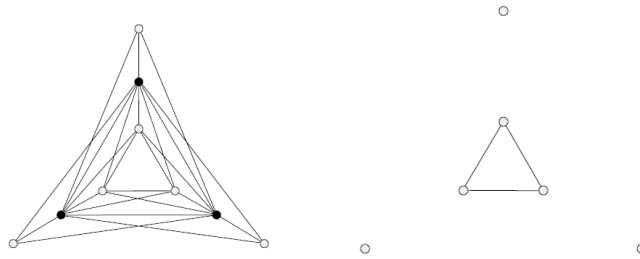
$$c(G - S) \leq |S|. \quad (2)$$

Če v neenačbi (2) velja enačaja, potem je vsaka komponenta $|S|$ grafa $G - S$ sledljiva in vsak Hamiltonov cikel grafa G vsebuje Hamiltonovo pot v vsaki od teh komponent.

Dokaz. Naj bo C Hamiltonov cikel v G . Potem ima $C - S$ največ $|S|$ komponent. Potem ima tudi $G - S$ največ $|S|$ komponent, ker je C podgraf grafa G . Če ima $G - S$ točno $|S|$ komponent, ima tudi $C - S$ točno $|S|$ komponent in komponente grafa $C - S$ so podgrafi komponent grafa $G - S$. Z drugimi besedami: C vsebuje Hamiltonovo pot v vsaki komponenti grafa $G - S$. \square

Zgled 3.3. Imejmo graf G .



Slika 4: Graf G , 3.1.1 komponente grafa $G - S$

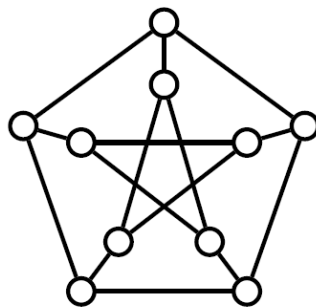
Naj bo S množica črnih vozlišč. Po izreku 3.2 je $c(G - S) = 3 > 2 = |S|$, torej pogoj (2) ni izpolnjen, zato G ni Hamiltonov.

Definicija 3.4. Graf G je *žilav* (angl. *tough*), če velja izrek 3.2 za vsako neprazno podmnožico $S \subseteq V$.

Iz izreka 3.2 sledi, da graf, ki ni žilav, ne more biti Hamiltonov.

Graf G na sliki 3.1.1 ima 9 vozlišč. Če zberemo označena 3 črna vozlišča (množico S), dobimo 4 komponente. To pomeni, da graf ni žilav in iz izreka 3.2 vemo tudi, da ni Hamiltonov.

Zgled 3.5 (Slika 5). Petersenov graf zadošča pogoju (2) za vse $S \neq \emptyset$, vendar vseeno ni Hamiltonov. Petersenov graf je sledljiv, če pa zberemo katerokoli vozlišče, dobimo Hamiltonov graf. Petersenov graf.

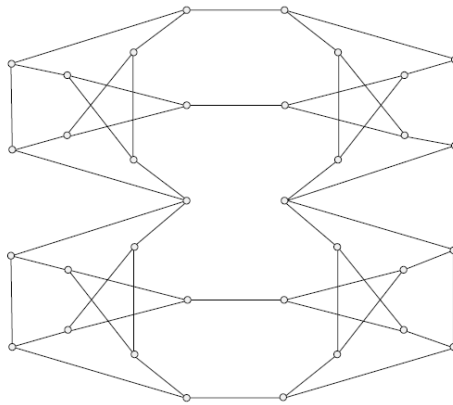


Slika 5: Petersenov graf.

Izrek 3.2 torej ni zadosten pogoj za zagotavljanje Hamiltonovega cikla.

Definicija 3.6. Graf G , ki ni Hamiltonov, je pa Hamiltonov graf $G - v$ za vsako točko v grafa G , imenujemo *hipohamiltonov graf*. Graf G , ki ni sledljiv, je pa sledljiv graf $G - v$ za vsako točko v grafa G , imenujemo *hiposledljiv graf*.

Če iz hipohamiltonovega grafa zberemo eno vozlišče, dobimo podgraf s samo eno komponento, če pa zberemo množico S , ki vsebuje vsaj 2 vozlišči, pa dobimo največ $|S| - 1$ komponent. Petersenov graf je primer vozliščno tranzitivnega [6] hipohamiltonovega grafa.



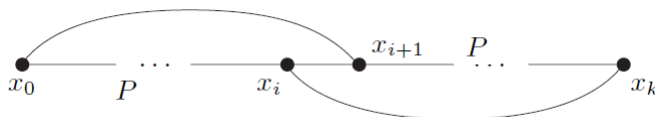
Slika 6: hiposledljiv graf

3.1.2 Zadosten pogoj

Izrek 3.7 (Dirac). Naj bo G enostaven graf z minimalno stopnjo δ , kjer je $\delta \geq \frac{n}{2}$ in $n \geq 3$. Potem je G Hamiltonov.

Dokaz. Naj bo $G = (V, E)$ graf z $n \geq 3$ in $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Potem je G povezan, sicer bi bila stopnja kateregakoli vozlišča v najmanjši komponenti C grafa G manj kot $|C| \leq \frac{n}{2}$.

Naj bo $P = x_0 \dots x_k$ najdaljša pot v G . Z maksimiziranjem P ležijo vsi sosedje od x_0 in vsi sosedje od x_k na poti P . Zatorej je izmed vozlišč $x_0 \dots x_{k-1}$ najmanj $\frac{n}{2}$ sosednjih x_k in izmed vozlišč $x_1 \dots x_k$ je najmanj $\frac{n}{2}$ vozlišč x_i takih, da $x_0 x_{i+1} \in E$. Po Dirichletovem načelu obstaja vozlišče x_i , ki ima obe ti lastnosti, torej $x_0 x_{i+1} \in E$ in $x_i x_k \in E$ za kakšen $i < k$.



Trdimo, da je $C := x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$ Hamiltonov cikel v G . Ker je G povezan, bi v nasprotnem primeru C imel soseda v $G - C$, ki bi bil lahko združen s potjo od C v pot daljšo od P . \square

Izrek 3.7 je v [3] dokazan s pomočjo barvanja grafov. Lahko pa ga dokazemo tudi s pomočjo izreka 3.9, glej [2].

V naslednjem izreku označimo s $\kappa(G)$ največje število k , za katerega je graf G k -povezan in z $\alpha(G)$ moč največje neodvisne množice v grafu G (za definicijo k -povezan oz. moč največje neodvisne množice glej [7] oz. [8], za dokaz izreka pa glej [5]).

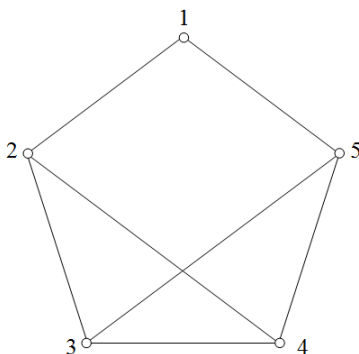
Izrek 3.8 (Chvatal-Erdos). Naj bo G graf z vsaj tremi točkami z neodvisnim številom α in povezanostjo κ , kjer $\alpha \leq \kappa$. Potem je G Hamiltonov.

Iz izreka 3.8 pa izpeljemo izreka 3.9 in 3.10.

Izrek 3.9 (Ore). *Naj bo G enostaven graf z $n \geq 3$. Če je vsota poljubnih dveh nesosednjih vozlišč najmanj n , potem je G Hamiltonov.*

Izrek 3.10 (Nash-Williams). *Naj bo G enostaven k -regularen graf z $2n + 1$ vozlišči, kjer $k \geq 2$. Potem je G Hamiltonov.*

Zgled 3.11. Uporabimo Diracov in Orejev izrek na spodnjem grafu.



Graf na sliki ima 5 vozlišč. $\delta(G) = 2 < \frac{5}{2}$, torej Diracovega izreka ne moremo uporabiti, vendar pa za poljubni dve vozlišči a in b velja $\deg(a) + \deg(b) \geq 5$, torej je po Orejevem izreku graf Hamiltonov.

Diracov in Orejev pogoj sta le zadostna pogoja za to, da je graf Hamiltonov. Če torej noben od njiju ni izpolnjen, še ne pomeni, da graf ni Hamiltonov.

3.2 NEHAMILTONOVI RAVNINSKI GRAFI

Tait [9] je pokazal, da je problem štirih barv ekvivalenten izjavi, da je vsak 3-povezan kubični ravninski graf 3-obarljiv. Mislil je, da je s tem dokazal izrek štirih barv, ker je verjel, da je vsak tak graf Hamiltonov in zato 3-obarljiv. Tutte [10] pa je pokazal, da to ne drži in sicer tako, da je skonstruiral nehamiltonov 3-povezan kubični ravninski graf. Potem pa je Grinberg [11] odkril preprost potreben pogoj, da so ravninski grafi Hamiltonovi.

Izrek 3.12 (Grinbergov izrek). *Naj bo G ravninski graf s Hamiltonovim ciklom C . Potem je*

$$\sum_{i=1}^n (i-2)(\phi'_i - \phi''_i) = 0, \quad (3)$$

kjer je ϕ'_i število lic dolžine i v $\text{Int}(C)$ in ϕ''_i število lic dolžine i v $\text{Ext}(C)$.

Dokaz. Z E' označimo podmnožico $E(G) \setminus E(C)$ vsebovano v $\text{Int}(C)$ in množico $m' := |E'|$. Potem je v C točno $m' + 1$ lic (glej sliko 8, kjer je $m' = 3$ in vsa 4 lica imajo stopnjo 4).

Torej

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = m' + 1. \quad (4)$$

Vsak rob v E' leži na meji dveh lic v $\text{Int}(C)$ in vsak rob od C leži na meji točno enega lica v $\text{int}(C)$. Torej

$$\sum_{i=1}^n i\phi_i = 2m' + n. \quad (5)$$

Z upoštevanjem enačbe (4) lahko iz enačbe (5) izločimo m' in dobimo

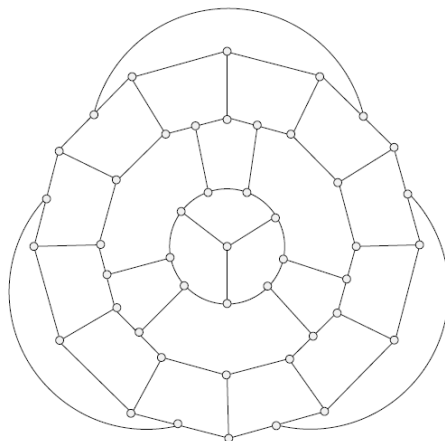
$$\sum_{i=1}^n (i-2)\phi'_i = n-2. \quad (6)$$

Prav tako velja

$$\sum_{i=1}^n (i-2)\phi''_i = n-2. \quad (7)$$

Iz enačb (6) in (7) pa dobimo enačbo (3). \square

Enačba (3) se imenuje Grinbergova identiteta. S pomočjo te identitete je npr. preprosto pokazati, da Grinbergov graf na sliki 7 ni Hamiltonov.



Slika 7: Grinbergov graf

Predpostavimo, da je graf Hamiltonov. Opazimo, da ima graf lica dolžine 5, 8 in 9. Torej po grinbergovi identiteti (3) velja

$$3(\phi'_5 - \phi''_5) + 6(\phi'_8 - \phi''_8) + 7(\phi'_9 - \phi''_9) = 0. \quad (8)$$

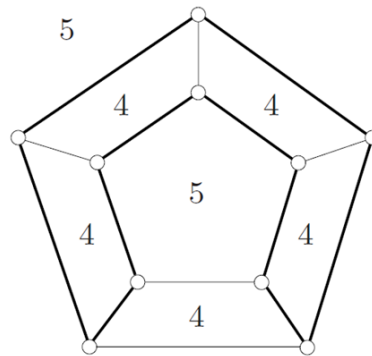
Sledi

$$7(\phi'_9 - \phi''_9) \equiv 0 \pmod{3}. \quad (9)$$

Ampak to ni mogoče, ker je vrednost na levi strani enačbe (9) lahko 7 ali -7, odvisno od tega, ali edino lice stopnje 9 leži v $\text{Int}(C)$ ali $\text{Ext}(C)$. Torej graf ne more biti Hamiltonov.

Grinbergov graf je nehamiltonov 3-povezan po povezavah [12] kubični ravninski graf. Po drugi strani pa je Tutte pokazal naslednji izrek:

Izrek 3.13 (Tutte). Vsak 4-povezan ravninski graf je Hamiltonov.



Slika 8: Skica Grinbergerjeve identitete.

Pri uporabi Grinbergove identitete igrajo ključno vlogo enakosti dolžin lic. Ta pristop ne zagotavlja primera dvodelnega nehamiltonovega 3-povezanega kubičnega ravninskega grafa. Barnette je predpostavil, da takih grafov res ni.

Hipoteza 3.14 (Barnette). *Vsak 3-povezan kubični ravninski dvodelen graf je Hamiltonov.*

Zgled 3.15. Najmanjši nehamiltonov 3-povezan ravninski graf je Herschelov graf na sliki 3.1.

3.3 ZAKLJUČEK

Iskanje Hamiltonovega cikla je težak problem, saj ne poznamo nobenega preprostega pogoja, ki bi bil hkrati potreben in zadosten. Če graf izpolnjuje potrebne pogoje, še ne pomeni, da je Hamiltonov. Primer je Petersenov graf. Prav tako neizpolnjenost zadostnih pogojev ne pomeni, da graf ni Hamiltonov.

Obstaja več primerov Hamiltonovega problema. Eden izmed njih je Problem trgovskega potnika, kjer želi trgovski potnik obiskati nekaj mest in se na koncu vrniti v začetno mesto, tako da bo vsako mesto obiskal natanko enkrat in pri tem bil skupni strošek potovanja najmanjši. V problemu Požrešni šahovski konjiček nas zanima, ali lahko konjiček obiše vsako polje na šahovnici natanko enkrat in se pri tem vrne na začetek.

Še vedno je odprto vprašanje, ali so Hamiltonovi fulereni. Preverjeno je že za mnoge fullerenske grafe, Alfred, Bau, Holton in McKay pa so pokazali, da so vsi fulereni z največ 176 vozlišči Hamiltonovi [13].

LITERATURA

- [1] *The Icosian Game*, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na <http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm>

- [2] R. Škrekovski, *Diskretne strukture II*, 2010, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/skreko/Gradiva/DS2-skripta.pdf>
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory*, Springer, New York, 2008.
- [4] Korte, B., Vygen, J., (2002). *Combinatorial optimization*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [5] R. Diestel, *Graph theory (Electronic edition)*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] *Vertex-transitive graph*, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Vertex-transitive_graph
- [7] *k-vertex-connected graph*, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/K-vertex-connected_graph
- [8] *Independent set (graph theory)*, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Independent_set_%28graph_theory%29.
- [9] P. G. Tait, *Remarks on colouring of maps*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Ser. A 10, 1880, 729.
- [10] W. T. Tutte, *On Hamiltonian circuits*, J. London Math. Soc. 21, 1946, 98-101.
- [11] E. J. Grinberg, *Plane homogeneous graphs of degree three without Hamiltonian circuits*, In Latvian Math. Yearbook 4, 1968, 51-58.
- [12] *k-edge-connected graph*, [ogled 16. 4. 2013], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/K-edge-connected_graph
- [13] D. Holton, R. E. L. Aldred, *Planar Graphs, Regular Graphs, Bipartite Graphs and Hamiltonicity*, [ogled 17. 4. 2013], dostopno na <http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/20/ocr-ajc-v20-p111.pdf>

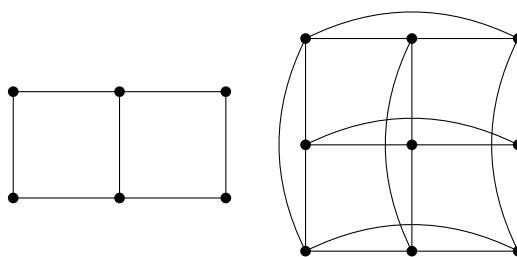
 PRODUKTI GRAFOV

Žiga Povalej

Produkt dveh grafov je graf, katerega množica točk je kartezični produkt množice točk faktorjev. Pravilo, ki določa povezave v produktnem grafu, pa je mogoče izbrati na več načinov. Obstaja dvajset različnih asociativnih produktov. Če pa upoštevamo nekatere enostavne zveze med njimi, se izkaže, da jih je smiselno študirati le pet: kartezični produkt, tenzorski produkt, krepki produkt, leksikografski produkt in ekvivalenčni produkt. Mi bomo obravnavali predvsem kartezični produkt, ogledali pa si bomo tudi tenzorski, krepki in leksikografski produkt.

4.1 KARTEZIČNI PRODUKT GRAFOV

Verjetno najenostavnejši produkt grafov G in H je *kartezični produkt* $G \square H$. Množica točk $V(G \square H)$ je definirana kot kartezični produkt točk grafov $V(G) \times V(H)$, množica povezav $E(G \square H)$ pa je množica vseh parov točk $(u, v)(x, y)$, za katere velja bodisi $u = x$ in $(v, y) \in E(H)$ bodisi $(u, x) \in E(G)$ in $v = y$.


 Slika 9: Kartezična produkta $P_2 \square P_3$ in $C_3 \square C_3$.

Preslikavi

$$\begin{aligned}
 p_1 : V(G \square H) &\rightarrow V(G) \\
 p_1 : (u, v) &\mapsto u
 \end{aligned}$$

in

$$p_2 : V(G \square H) \rightarrow V(H)$$

$$p_2 : (u, v) \mapsto v$$

imenujemo *projekciji*. Za podmnožico $S \subset V(G \square H)$ definiramo $p_i(S) := \{p_i(v); v \in S\}$ za $i \in \{1, 2\}$. Projekcije nam bodo prišle prav v dokazu naslednje trditve.

Pred tem pa se spomnimo še, da je graf G *povezan*, kadar med poljubnim parom točk iz $V(G)$ obstaja sprehod.

Trditev 4.1. *Kartezični produkt dveh grafov je povezan natanko tedaj, ko sta povezana oba faktorja.*

Dokaz. Naj bo $G \square H$ kartezični produkt dveh povezanih grafov, (u, v) in (x, y) pa dve poljubni točki iz $G \square H$. Ker sta G in H povezana grafa, obstajata poti $uu_2 \dots u_{k-1}x$ od u do x v grafu G in $vv_2 \dots v_{l-1}y$ od v do y v grafu H . Potem je

$$(u, v)(u_2, v) \dots (u_{k-1}, v)(x, v)(x, v_2) \dots (x, v_{l-1})(x, y)$$

pot od (u, v) do (x, y) v $G \square H$.

Sedaj pa predpostavimo, da je povezan graf $G \square H$. Izberimo poljubne točke $u, x \in G$ in $v, y \in H$. Potem obstaja pot Q od (u, v) do (x, y) v grafu $G \square H$. Projekcija $p_1(Q)$ je torej sprehod od u do x v G , ki pa seveda vsebuje tudi pot od u do x v grafu G . Podobno $p_2(Q)$ vsebuje pot od v do y v grafu H . \square

Definirajmo $d_G(a, b)$ kot dolžino najkrajše poti med točkama a in b v grafu G .

Posledica 4.2. *Naj bosta (u, v) in (x, y) poljubni točki kartezičnega produkta $G \square H$. Potem velja*

$$d_{G \square H}((u, v), (x, y)) = d_G(u, x) + d_H(v, y).$$

Naj bo Q najkrajša pot od (u, v) do (x, y) v $G \square H$. Potem je $p_1(Q)$ najkrajša pot od u do x v G in je $p_2(Q)$ najkrajša pot od v do y v H .

Dokaz. Po trditvi 4.1 obstaja pot od (u, v) do (x, y) natanko takrat, ko obstajata pot $P_{u,x}$ od u do x v grafu G in pot $P_{v,y}$ od v do y v grafu H . Zaradi konstrukcije teh dveh poti lahko sklepamo, da velja

$$d_{G \square H}((u, v), (x, y)) \leq d_G(u, x) + d_H(v, y).$$

Naj bo sedaj Q najkrajša pot od (u, v) do (x, y) v grafu $G \square H$. Vsaka povezava poti Q se z eno od projekcij p_1 in p_2 preslika v točko in z drugo projekcijo v povezavo. Sledi

$$d_G(u, x) + d_H(v, y) \leq |E(p_1(Q))| + |E(p_2(Q))| = |E(Q)| = d_{G \square H}((u, v), (x, y)).$$

\square

Oglejmo si nekatere lastnosti kartezičnega produkta. Očitno je, da je graf K_1 enota v tej operaciji, saj za vsak graf G velja $K_1 \square G = G = G \square K_1$. Nadalje je preslikava $\varphi : V(G \square H) \rightarrow V(H \square G)$ definirana s predpisom $\varphi(u, v) = (v, u)$ izomorfizem med $G \square H$ in $H \square G$. Torej je kartezični produkt komutativen.

Trditev 4.3. *Kartezični produkt je asociativen.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je preslikava

$$\begin{aligned} \psi : V((G_1 \square G_2) \square G_3) &\rightarrow V(G_1 \square (G_2 \square G_3)) \\ \psi : ((u_1, u_2), u_3) &\mapsto (u_1, (u_2, u_3)) \end{aligned}$$

izomorfizem grafa $(G_1 \square G_2) \square G_3$ na $G_1 \square (G_2 \square G_3)$. Takoj vidimo, da je ψ bijektivna preslikava. Dokazati je potrebno še, da sta točki u in v povezani v $(G_1 \square G_2) \square G_3$ natanko tedaj, ko sta točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$ povezani v $G_1 \square (G_2 \square G_3)$.

Če sta točki u in v povezani, morata biti različni. Zato morata vsaj en par (u_i, v_i) , kjer je $i \in \{1, 2, 3\}$, sestavljati dva različna elementa ($u_i \neq v_i$). Če je to res za natanko en par (u_k, v_k) , potem je uv povezava natanko takrat, ko je $u_k v_k$ povezava v G_k . To pa pomeni, da sta takrat povezani tudi točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$.

Če pa sta dva ali so trije pari (u_i, v_i) , kjer je $i \in \{1, 2, 3\}$, sestavljeni iz različnih elementov, potem sta nepovezani točki u in v pa tudi točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$. \square

Privzemimo sedaj, da so povezane komponente grafa G maksimalni povezani podgrafi, ki so tudi enolično določeni. Potem rečemo, da je G *disjunktna unija* svojih komponent. Bolj natančno, disjunktna unija $G_1 \cup G_2$ dveh po točkah disjunktnih grafov G_1 in G_2 je definirana z

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2) \text{ in } E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

Sedaj lahko hitro vidimo, da je kartezični produkt levo in desno distributiven z disjunktno unijo:

$$G_1 \square (G_2 \cup G_3) = G_1 \square G_2 \cup G_1 \square G_3 \text{ in } (G_1 \cup G_2) \square G_3 = G_1 \square G_3 \cup G_2 \square G_3.$$

4.1.1 Kartezični produkt več faktorjev

Ker je kartezični produkt grafov po trditvi 4.3 asociativen, lahko pišemo $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_k$. Graf G je *kartezični produkt* grafov G_1, G_2, \dots, G_k , zanj pa velja:

- (i) $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_k)$.
- (ii) $E(G)$ je množica parov (x, y) različnih točk grafa G , za katere obstaja tak indeks $j \in I = \{1, 2, \dots, k\}$, da je $(x_j, y_j) \in E_j$ in velja $x_i = y_i$ za vse $i \in I \setminus \{j\}$.

Za $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ definiramo $p_i(v) = v_i$. Preslikava p_i je projekcija na i -ti faktor grafa G , v_i pa je i -ta koordinata točke v .

Očitno je, da je kartezični produkt $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ povezan natanko tedaj, ko je povezan vsak izmed njegovih faktorjev. Tako lahko posledico 4.2 razširimo na več faktorjev.

Lema 4.4. Naj bo $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ in $u, v \in V(G)$. Potem velja

$$d_G(u, v) = \sum_{i=1}^k d_{G_i}(p_i(u), p_i(v)).$$

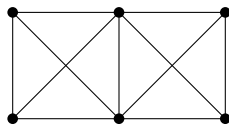
Opomba 4.5. Lema je razširitev posledice 4.2 za kartezični produkt več faktorjev zato dokaza ne bomo posebej navajali.

4.2 KREPKI PRODUKT GRAFOV

Krepki produkt $G \boxtimes H$ grafov G in H je definiran kot kartezični produkt množic točk obeh faktorjev, dve različni točki (u, v) in (x, y) iz $G \boxtimes H$ pa sta povezani, če velja

- $u = x$ in $vy \in E(H)$; ali
- $ux \in E(G)$ in $v = y$; ali
- $ux \in E(G)$ in $vy \in E(H)$.

Osnovni primer krepkega produkta je $K_4 = K_2 \boxtimes K_2$. Tako vidimo, da ga res najbolje opiše ravno znak \boxtimes . Bolj splošno pa velja tudi $K_{mn} = K_m \boxtimes K_n$.



Slika 10: Krepki produkt $P_2 \boxtimes P_3$.

Krepki produkt ima enoto K_1 in je komutativen, asociativen ter distributiven z operacijo disjunktna unije. Vse to bi lahko dokazali analogno kot pri kartezičnem produktu.

Podobno kot pri kartezičnem produktu bi lahko definirali krepki produkt več faktorjev $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \dots \boxtimes G_k$. Seveda velja tudi, da je graf G povezan natanko tedaj, ko je povezan vsak njegov faktor.

Lema 4.6. Naj bo $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \dots \boxtimes G_k$ krepki produkt povezanih grafov. Potem velja

$$d_G(u, v) = \max_{1 \leq i \leq k} d_{G_i}(u_i, v_i).$$

Dokaz. Zaradi asociativnosti krepkega produkta je dovolj dokazati za $k = 2$.

Naj bosta $u = (u_1, u_2)$ in $v = (v_1, v_2)$ poljubni točki grafa $G_1 \boxtimes G_2$. Definirajmo še $a_1 a_2 \dots a_k$ kot najkrajšo pot od u_1 do v_1 v grafu G_1 in $b_1 b_2 \dots b_l$ kot

najkrajšo pot od u_2 do v_2 v grafu G_2 . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $l \leq k$, kjer je $k = \max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\}$. Potem je

$$(a_1, b_1) \dots (a_l, b_l)(a_{l+1}, b_l) \dots (a_{k-1}, b_l)(a_k, b_l)$$

pot od (u_1, u_2) do (v_1, v_2) v $G_1 \boxtimes G_2$. Sledi

$$d_{G_1 \boxtimes G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \leq \max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\}.$$

Vzemimo sedaj P za najkrajšo pot od (u_1, u_2) do (v_1, v_2) v grafu $G_1 \boxtimes G_2$. Potem se vsaka povezava iz poti P preslika v povezavo iz G_1 ali v povezavo iz G_2 z eno od projekcij p_1 ali p_2 . Zato $p_1(P)$ vsebuje pot od u_1 do v_1 v grafu G_1 in velja $d_{G_1}(u_1, v_1) \leq |E(p_1(P))| \leq |P|$. Na enak način dobimo $d_{G_2}(u_2, v_2) \leq |P|$. Sledi

$$\max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\} \leq |P| = d_{G_1 \boxtimes G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)).$$

□

Povezave grafa $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \dots \boxtimes G_k$, ki se razlikujejo v natančno eni koordinati, se imenujejo *kartezične povezave*, ostale pa *nekartezične*. Kartezične povezave se ujemajo s povezavami iz $G_1 \square \dots \square G_k \subseteq G_1 \boxtimes \dots \boxtimes G_k$.

4.3 LEKSIKOGRAFSKI PRODUKT GRAFOV

Leksikografski produkt $G[H]$ grafov G in H je definiran na množici točk $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$, dve različni točki (u, v) in (x, y) pa sta povezani, kadar velja

- $ux \in E(G)$; ali
- $u = x$ in $vy \in E(H)$.

Leksikografski produkt bi lahko definirali tudi drugače. Vzamemo graf G in vsako njegovo točko razširimo v graf H . Sedaj dve povezani kopiji grafa H povežemo še z vsemi možnimi vmesnimi povezavami.

Opazimo, da velja $G[K_n] = G \boxtimes K_n$ in da je produkt $G[H]$ netrivialnih grafov povezan natanko tedaj, ko je povezan G . Zato velja $G[H] \cong H[G]$, kadar eden od faktorjev ni povezan, drugi pa je povezan in netrivialen. Leksikografski produkt ni nujno komutiven, tudi če sta oba faktorja povezana. Za primer si oglejmo $P_2[P_3]$ in $P_3[P_2]$ na sliki 11.

Leksikografski produkt je asociativen in ima enoto K_1 . V splošnem velja le desno-distributivnostni zakon z disjunktno unijo

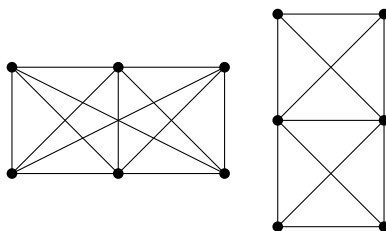
$$(A \cup B)[C] = A[C] \cup B[C].$$

Vzemimo komplement grafov in dobimo

$$\overline{(G[H])} = \overline{G[H]}.$$

Ker velja $\overline{\overline{G}} = G$, sledi

$$G[H] = \overline{\overline{(G[H])}}.$$



Slika 11: Leksikografska produkta $P_2[P_3]$ in $P_3[P_2]$.

Spoj $G + H$ grafov G in H je definiran kot

$$G + H = \overline{\overline{G} \cup \overline{H}}.$$

Tako iz desno-distributivnostnega zakona za disjunktno unijo dobimo desno-distributivnostni zakon za spoj

$$(A + B)[C] = A[C] + B[C].$$

V posebnem obstaja tudi levo-distributivnostni zakon

$$K_n[A + B] = K_n[A] + K_n[B].$$

Za popolnoma nepovezane grafe $D_n = \mathcal{C}K_n$ dobimo še en levo-distributivnostni zakon

$$D_n[A \cup B] = D_n[A] \cup D_n[B].$$

Čeprav v splošnem leksikografski produkt ni komutativen, pa velja $G[H] \cong H[G]$, če sta G in H oba polna grafa ali pa oba popolnoma nepovezana.

Trditev 4.7. Naj bo G graf in $n \geq 2$. Potem velja

- (i) $G[K_n] \cong K_n[G]$ natanko tedaj, ko je G poln graf in
- (ii) $G[D_n] \cong D_n[G]$ natanko tedaj, ko je G popolnoma nepovezan.

Dokaz. Najprej dokažimo točko (ii). Vemo že, da velja $G[D_n] \cong D_n[G]$, če graf G nima povezav. Predpostavimo $G[D_n] \cong D_n[G]$. Očitno velja

$$|E(G)| \cdot n^2 = |E(G[D_n])| = |E(D_n[G])| = n \cdot |E(G)|.$$

Sledi torej $|E(G)| \cdot (n^2 - n) = 0$. Za $n \geq 2$ je to možno le, kadar je $|E(G)| = 0$.

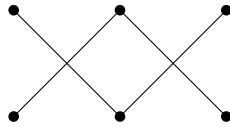
Za dokaz (i) se spomnimo na enakost $\overline{G[H]} = \overline{G}[\overline{H}]$. Ker grafa G in K_n komutirata natanko takrat, ko komutirata grafa \overline{G} in $D_n = \overline{K_n}$. Za $n \geq 2$ to velja natanko tedaj, kadar \overline{G} nima povezav, oziroma natanko tedaj, kadar je G poln graf. \square

Zaradi asociativnosti dva grafa komutirata, če sta oba (leksikografski) potenci istega grafa. Zato ta dva grafa G in H komutirata v naslednjih primerih, ki pa so tudi edini:

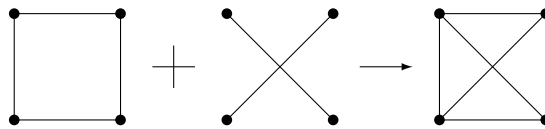
1. Grafa G in H sta polna grafa.
2. Grafa G in H sta popolnoma nepovezana grafa.
3. Obstaja graf K in taki naravni števili n in m , da velja $G = K^n$ in $H = K^m$.

4.4 TENZORSKI PRODUKT

Tenzorski produkt $G \times H$ grafov G in H definira množica točk $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, dve različni točki (u, v) in (x, y) iz $G \times H$ pa sta povezani, če velja $ux \in E(G)$ in $vy \in E(H)$. Imenujemo ga tudi kategorični, direktni, kardinalni ali Kroneckerjev produkt. Opazimo, da je unija povezav kartezič-

Slika 12: Tenzorski produkt $P_2 \times P_3$.

nega in tenzorskega produkta ravno množica povezav krepkega produkta. Poglejmo si primer na sliki 13. Hitro se da ugotoviti, da ima tenzorski pro-



Slika 13: Krepki produkt je sestavljen iz kartezičnega in tenzorskega produkta.

dukt K_1 kot enoto, je komutativen, asociativen ter distributiven z disjunktno unijo. Navedli bi še dve lastnosti tenzorske produkta, vendar ju ne bomo dokazovali.

Trditev 4.8. Naj bosta G in H dvodelna grafa. Potem je tudi njun tenzorski produkt $G \times H$ dvodelen graf.

Trditev 4.9. Tenzorski produkt $G \times H$ grafov G in H je povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa G in H in vsaj eden od njiju ni dvodelen.

Protiprimer trditvi 4.9 bi bil graf $P_2 \times P_3$, saj sta grafa P_2 in P_3 dvodelna in povezana, graf $P_2 \times P_3$ pa ni povezan.

LITERATURA

- [1] W. Imrich, S. Klavžar: (2000) *Product Graphs, structure and recognition*, Wiley, New York.
- [2] J. Žerovnik: (1995) *O kartezičnem produktu grafov*, *Obzornik mat. fiz.* **42**, 8-16.

5.1 UVOD

Hiperkocke so v zadnjih letih deležne veliko pozornosti. Njihova uporaba je namreč tesno povezana s tehnologijo paralelnega računalništva [1]. Princip večprocesorskih sistemov namreč deluje na ideji [6], da se dan problem razdeli na manjše, samostojne podprobleme. Dane podprobleme se razdeli med procesorje, ki so odgovorni za reševanje manjših, poenostavljenih problemov. Zaželjeno je, da je časovna potrata pri komunikaciji med procesorji čimmanjša. Pri tem nam pride v veliko korist struktura hiperkocke, saj nam njihova visoka povezanost in majhen premer omogočata, da zminimaliziramo čas potreben za komunikacijo med procesorskimi enotami. Hkrati je zelo pomemben faktor, da ostane mreža povezana tudi pri izgubi določenih povezav/vozlišč. Več o tem, si lahko zainteresiran bralec prebere v [7].

Hiperkocke pa imajo še eno zanimivo lastnost. V teoriji kodiranja, bolj specifično, v veji, ki se ukvarja z odpravljanjem napak (te ponavadi nastanejo pri prenosu podatkov), so zelo uporabne Grayeve kode. Grayeva koda reda n ni nič drugega kot urejeno zaporedje vseh 2^n binarnih vektorjev tako da se dva zaporedna člena v zaporedju razlikujeta v največ 1 komponenti. Primer za $n = 2$ bi torej bil 01, 00, 10, 11. Kot bomo videli so Grayeve kode tesno povezano z definicijo hiperkocke. Iskaže se, da vsaka Grayeva koda reda n ($n \geq 2$) ustreza hamiltonskemu ciklu hiperkocke Q_n .

V dani seminarski si bomo ogledali nekaj najbolj znanih rezultatov in lastnosti pozezanih z omenjenimi grafi.

DEFINICIJA. Graf hiperkocke Q_n (v nadaljevanju hiperkocka) je regularen graf na 2^n točkah. Točke hiperkocke si lahko predstavljamo kot binarne vektorje dolžine n , kjer sta dva vektorja povezana natakoli tedaj, ko se razlikujeta

le v eni koordinati. Formalno definiramo množico točk kot $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$ povezav $E(Q_n) = \{uv; |\delta(u, v)| = 1\}$ kjer $\delta(u, v)$ definiramo kot

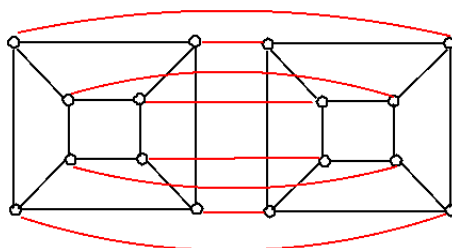
$$\delta(u, v) = \{i \in \{0, \dots, n\}; u_i \neq v_i\}.$$

Manj formalno bi lahko rekli, da predstavlja $\delta(u, v)$ množico vseh koordinat v katerih se točki u, v razlikujeta.

Ker ima v Q_n poljubna točka v natanko n sosed velja po Lemi o rokovanju, da je število povezav Q_n enako $2^{n-1} * n$.

Komplement točke v bomo označili z \bar{v} in z njim predstavili točko, kjer so vse komponente točke v invertirane (enice spremenimo v ničle in obratno). Lahko se je prepričati, da v hiperkocki Q_n velja $d(v, \bar{v}) = n$. V literaturi se za par v, \bar{v} pogostokrat uporablja izraz *antipodalni* točki.

KONSTRUKCIJA. Induktivno lahko hiperkocko Q_{n+1} konstruiramo tako, da vzamemo dve hiperkocki Q_n^0 in Q_n^1 ter povežemo istoležne točke kot prikazano na spodnjem primeru za Q_4 .



V nadaljevanju, se bomo na hiperkocki Q_n^0 in Q_n^1 sklicevali kot na "levo" in "desno"

podhiperkocko hiperkocke Q_{n+1} . Očitno je, da tvorijo novo ustvarjene povezave popolno prirejanje. Navedene povezave imenujemo tudi $(n + 1)$ -ta dimenzija hiperkocke.

5.2 LASTNOSTI

V naslednjem razdelku bodo predstavljene nekatere osnovne lastnosti hiperkock. Pri dokazovanju si bomo v veliki meri pomagali z indukcijo, saj nam rekurzivna struktura hiperkock omogoča razbijanje hiperkocke na dve manjši hiperkocki, kjer si potem lahko pomagamo z indukcijsko predpostavko.

POVEZANOST. V uvodu je bilo omenjeno, da je prednost hiperkock pred drugimi mrežnimi topologijami v tem, da je hiperkocka zelo povezan graf. Spodnja trditev dokazuje navedeno dejstvo.

Trditev 5.1. *Hiperkocka Q_n ($n \geq 2$) je po točkah n -povezan graf.*

Dokaz. V kolikor odstranimo vseh n sosed poljubne točke, razpade hiperkocka na dve komponenti. Dovolj je torej pokazati, da pri odstranitvi manjšega števila točk, ostaja graf povezan.

Pomagali si bomo z indukcijo. Trditev je očitno resnična za $n = 2$. Predpostavimo torej da je trditev resnična za vse hiperkocke Q_k ($k \leq n$) in obravnavajmo hiperkocko Q_{n+1} . Ker je hiperkocka Q_{n+1} konstruirana iz dveh manjših hiperkock Q_n^0, Q_n^1 je Q_{n+1} očitno vsaj n povezana.

V kolikor odstranimo iz Q_{n+1} n točk in pri tem odstranimo tako točke iz Q_n^0 kot tudi točke iz Q_n^1 , ostane graf, po induksijski predpostavki povezan. Potrebno se je le še prepričati, da pri odstranitvi n točk iz poljubne leve ali desne hiperkocke ostaja graf povezan.

Odstranimo torej n točk iz leve hiperkocke Q_n^0 . Pokažimo, da je iz preostalih točk Q_n^0 moč najti ustrezno pot do poljubne točke grafa. Naj bodo u, v poljubni dve izmed preostalih točk Q_n^0 . Očitno je mogoče najti pot od u do poljubne točke Q_n^1 saj je u povezana z komplementarno točko $u' \in Q_n^1$ in je Q_n^1 povezan graf. Da bi torej našli pot med u, v je torej dovolj poiskati pot od u do komplementarne točke v, v' . Po zgornjem premisleku je to očitno mogoče. □

Zgornjo trditev lahko interpretiramo tudi tako, da povezanost izrazimo kot funkcijo števila točk in sicer $k(Q_n) = \log_2(|V(Q_n)|)$.

DVODELNOST. Dvodelnost hiperkocke nam v veliki meri pomaga pri karakterizaciji hamiltonskih poti in ciklov. Kot bomo namreč pokazali, je med poljubnim parom različno obarvanih točk hiperkocke Q_n moč najti hamiltonsko pot. To pa ne velja za enako obarvani točki saj je Q_n balansiran dvodelen graf, kar tudi dokazuje spodnja trditev.

Trditev 5.2. *Hiperkocka Q_n ($n \geq 1$) je dvodelen graf.*

Dokaz. Naj bo $s(v)$ vsota komponent z vrednostjo 1 v vektorskem zapisu točke v . Definiramo barvanje $c : V(Q_n) \mapsto \{0, 1\}$ s predpisom $c(v) := s(v) \pmod{2}$. Očitno je c 2-barvanje grafa Q_n . Pokažimo še, da imata dve poljubni sosednji točki $u, v \in V(Q_n)$ različni barvi. Ker sta u, v sosednji, se razlikujeta v natanko 1 komponenti. Če ima v sodo mnogo enic ima u liho mnogo, in obratno. Sledi, da $s(v) - s(u) \equiv 1 \pmod{2}$. □

Opomba. Zgoraj definirano barvanje očitno pobarva 2^{n-1} točk z barvo 0 ter 2^{n-1} točk z barvo 1, kar posledično dokazuje, da je Q_n res balansiran dvodelen graf.

POPOLNA PRIREJANJA. Kot bomo videli v nadaljevanju, so popolna prirejanja v hiperkockah zelo zanimiva tematika. V splošnem, pravimo, da je množica povezav M grafa G *prirejanje*, v kolikor so povezave iz M paroma nesosednje. To pomeni, da poljubni dve povezavi prirejanja, nimata skupne točke. Da bi bilo M *popolno prirejanje*, mora zadostiti še dodatnemu pogoju, da se vse točke grafa G pojavijo v eni izmed povezav prirejanja M .

Naslednja trditev vspostavlja spodnjo mejo števila popolnih prirejanj v Q_n .

Trditev 5.3. Hiperkocka Q_n ($n \geq 2$) ima vsaj $2^{2^{n-2}}$ različnih popolnih prirejanj.

Dokaz. Q_2 ima natanko dve popolni prirejanji, kar ustreza trditvi. Predpostavimo torej da za $k \leq n$ trditev velja, in pogledjmo hiperkocko Q_{n+1} . V levi in desni podhiperkocki hiperkocke Q_{n+1} najdemo po $2^{2^{n-2}}$ popolnih prirejanj. Poljubno popolno prirejanje leve ter poljubno popolno prirejanje desne hiperkocke lahko združimo v popolno prirejanje Q_{n+1} . To lahko naredimo na

$$2^{2^{n-2}} * 2^{2^{n-2}} = 2^{2^{n-1}}$$

načinov. Trditev je zdaj dokazana. \square

Opomba. Pri zgornjem dokazu smo popolnoma ignorirali povezave $(n+1)$ -te dimenzije dimenzije, ki že same po sebi tvorijo popolno prirejanje. Spodnja meja števila popolnih prirejanj je torej slab približek.

AVTOMORFIZMI. V sledečem razdelku bomo obravnavali pojem avtomorfizma v hiperkockah. Spomnimo se, bijektivna preslikava

$$f : V(G_1) \mapsto V(G_2)$$

je *izomorfizem* v kolikor

$$uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2),$$

za vsak par točk u in v . V kolikor velja še $G_1 = G_2$ potem pravimo, da je f *avtomorfizem*. Iz zgornjih dveh definicij izomorfizma takoj sledi, da je f avtomorfizem hiperkocke Q_n ko:

$$|\delta(u, v)| = 1 \Leftrightarrow |\delta(f(v), f(u))| = 1.$$

Slednjo reformulacijo lahko s pridom uporabimo pri analizi izomorfizmov. Pogledjmo si, kako poljuben izomorfizem f deluje na dani točki hiperkocke. Zaradi preprostosti se omejimo na točko $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$. Privzemimo prvo da $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Iz zgornje reformulacije izomorfizma je jasno, da se mora število enic v zapisu preostalih točk ohraniti.

V kolikor zamenjujemo komponente vektorskega zapisa poljubne točke $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, potem moramo isto zamenjavo izvesti tudi na vseh ostalih točkah. Zaključimo torej lahko, da se pri permutiranju komponent vektorskega zapisa podanih točk, relacija sosednosti ohranja. Obravnavajmo zdaj primer ko $f(\mathbf{o}) = k \neq \mathbf{o}$. Vzemimo, da f ni izomorfizem Q_0 (izomorfizem je tedaj trivialen) in si pogledjmo poljubno sosedo točke \mathbf{o} , npr. v . Hitro se, da videti, da v kolikor $f(v) = v \oplus k$ potem $|\delta(k, v \oplus k)| = |\delta(\mathbf{o}, v)| = 1$. Hkrati je tudi jasno, da za $d \neq k$ $|\delta(k, v \oplus d)| = |\delta(\mathbf{o}, v)|$ ne velja. Zgornji premislek lahko zdaj strnemo v spodnjo trditev:

Posledica 5.4. Naj bo f avtomorfizem hiperkocke Q_n . Potem je f enolično določen s parom (π, τ) , kjer je $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, n\}$ poljubna permutacija komponent točke v vektorskem zapisu ter $\tau \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ poljubno število v danem intervalu. Tedaj lahko f zapišemo kot

$$f(v) = \pi(v) \oplus \tau.$$

V zgornjem zapisu z izrazom $\pi(v)$ mislimo na permutacijo, ki deluje na vektorskih komponentah dane točke, za τ pa se uporablja izraz *translacija*. Velja $f(0) = \tau$.

Posledica 5.5. *Hiperkocka Q_n ima $2^n \cdot n!$ avtomorfizmov.*

VPETA DREVESA. V naslednji trditvi bomo dokazali lastnost povezano z vpetimi drevesi v hiperkockah. Graf T je *drevo* v kolikor je povezan, in ne vsebuje ciklov. Pravimo, da je T *vpeto drevo* grafa G v kolikor je T drevo na $|V(G)|$ točkah in povezavami iz $E(G)$. Jasno je, da je T podgraf grafa G ter, da ima vsak povezan graf vsaj eno vpeto drevo. Dokaz ki sledi je lep primer uporabe Dirchletovega načela.

Trditev 5.6. *Naj bo Q_n ($n \geq 2$) hiperkocka in T vpeto drevo v hiperkocki. Potem obstaja povezava $e \in E(Q_n) \setminus E(T)$, tako da vsebuje $T + e$ cikel dolžine vsaj $2n$.*

Dokaz. Naj bo T drevo, ki ustreza predpostavki. Naj bo v poljubna točka hiperkocke in \bar{v} njen komplement. Očitno obstaja natanko ena $v\bar{v}$ pot v danem vpetem drevesu. Usmerimo začetno povezavo $v\bar{v}$ -poti proti \bar{v} . Ponojimo postopek za vse točke. Ker je število povezav v drevesu za ena manjše od števila točk, je jasno, da bo ena povezava deležna dveh usmeritev. Naj bo to povezava uv . Očitno gre $u\bar{u}$ -pot skozi v in $v\bar{v}$ -pot skozi u . Dolžina posamezne poti je vsaj $n - 1$ saj je razdalja med poljubno točko in njenim komplementom n . Očitno je tudi, da sta točki \bar{u} ter \bar{v} povezani. Iz danih dejstev lahko konstruiramo cikel

$$uP\bar{v} \cup vP\bar{u} \cup \{uv, \bar{u}\bar{v}\}$$

dolžine $2n$ kar dokazuje trditev. □

HAMILTONOST. Pri dokazovanju hamiltonosti, je uporabljen dokaz s konstrukcijo. Pri tem je skonstruiran cikel takšen, da prečka natanko dve povezavi n -te dimenzije. To pa nikakor ne pomeni, da so v Q_n vsi hamiltonski cikli takšne oblike. Da se namreč poiskati tudi takšne vpete cikle, ki prečakajo poljubne povezave danih dimeznij večkrat.

Trditev 5.7. *Hiperkocka Q_n ($n \geq 2$) je hamiltonski graf.*

Dokaz. Indukcija po n . $Q_2 \cong C_4$ je očitno hamiltonski graf, zato trditev velja za $n = 2$. Predpostavimo, da za $k \leq n$ sklep velja in pogledajmo hiperkocko Q_{n+1} . Naj bo Q_n^0 leva hiperkocka kot opisano v razdelku 5.1. Po indukcijski predpostavki vsebuje Q_n^0 hamiltonski cikel, naj bo to C^0 . Podobno vzamemo hamiltonski cikel C^1 v desni hiperkocki Q_n^1 , pri tem pazimo le na to, da je izbrani hamiltonski cikel istega tipa kot C^0 (tj. zrcalna "kopija"). Naj bosta $u, v \in V(C^0)$ sosednji točki cikla C^0 . Po konstrukciji, obstajata sosednji točki $v', u' \in V(C^1)$ tako da $u'u, v'v \in E(Q_{n+1})$. Lahko se je prepričati, da je

$$C^0 - uv + C^1 - u'v' + u'u + v'v$$

□

HAMILTONSKA POT. Dokaz je analogen zgornjemu dokazu hamiltonskega cikla. Bistvena razlika je le v tem, da v Q_n obstaja vpeta pot **samo** med različno obarvanima točkama.

Trditev 5.8. Naj bosta u, v različno obarvani točki hiperkočke Q_n ($n \geq 1$) potem obstaja hamiltonska pot med u in v .

Dokaz. Postopamo podobno kot pri dokazu trditve 5.2. Sklep očitno velja za $n = 1$ zato predpostavimo, da sklep velja in pogledamo hiperkočko Q_{n+1} . Naj bodo u, v točki, ki ustrezata predpostavki, Q_n^0, Q_n^1 ustrezni levi/desni hiperkočki tako, da $v \in Q_n^0$ in $u \in Q_n^1$. V Q_n^0 izberemo točko ustrezne barve v' . Očitno obstaja hamiltonska pot vPv' . Hkrati obstaja točka $u' \in Q_n^1$, da velja $v'u' \in E(Q_{n+1})$. Prav tako (po indukcijski predpostavki) obstaja hamiltonska pot $u'Pu$ v Q_n^1 . Konstruirana pot

$$uPu' \cup u'v' \cup v'Pv$$

je očitno ustrezna hamiltonska pot v Q_{n+1} . □

Trditev 5.9. Naj bo Q_n ($n \geq 3$) hiperkočka, ter u, v poljubni, različno obarvani točki. Velja, da je $Q_n - \{u, v\}$ hamiltonski.

Dokaz. Lahko se je prepričati, da sklep velja za $n = 3$. Privzemimo torej, da sklep velja za Q_k , $k \leq n$ in gledamo hiperkočko Q_{n+1} .

Naj bo u črna točka in v bela. Ločili bomo dva primera:

Primer 1: u, v nekomplementarni točki. Ker sta u, v nekomplementarni točki lahko razdelimo hiperkočko Q_{n+1} na ustrezno levo Q^0 , desno Q^1 podhiperkočko tako da $u, v \in Q_n^0$. Po indukcijski predpostavki obstaja v Q_n^0 hamiltonski cikel. Prav tako, po 5.2. trditvi velja, da obstaja v Q_n^1 hamiltonski cikel. Zdaj lahko ustrezen hamiltonski cikel hiperkočke Q_{n+1} konstruiramo podobno kot v dokazu trditve 5.2.

Primer 2: u, v komplementarni točki. V tem primeru, hiperkočke Q_{n+1} ni mogoče razbiti na levo, desno podhiperkočko in pri tem dobiti točki u, v v ali levi ali desni hiperkočki. Mislimo si, da točk u, v nismo še odstranili ter vzemimo levo, desno podhiperkočko Q_n^0, Q_n^1 ter $u \in Q_n^0, v \in Q_n^1$. Naj bo $u' \in Q_n^0$ poljubna, črna točka. Označimo z $v' \in Q_n^1$ ustrezno črno točko u' . Po trditvi 5.2 obstaja v Q_n^0 hamiltonska pot uPu' prav tako obstaja v Q_n^1 hamiltonska pot vPv' istega tipa. Naj bo \bar{u} sosednja točka točke u v navedeni hamiltonski poti ter \bar{v} njena komplementarna točka. Skonstruiran cikel:

$$(uPu' - \{u\} \cup vPv' - \{v\}) + \{\bar{u}\bar{v}, u'v'\}$$

se izogne u, v kar posledično potrjuje, da je $Q_{n+1} - u, v$ hamiltonski. □

ŠTEVILO NEIZOMORFNIH HAMILTONSKIH CIKLOV. Po izreku, da je hiperkocka Q_n ($n \geq 2$) hamiltonski graf, se zaradi lepe rekurzivne strukture omenjenega grafa, poraja vprašanje ali je mogoče za dano hiperkocko Q_n na lahek način prešteti vse različne (neizomorfne) hamiltonske cikle. Problem sam po sebi ni lahek. Odgovor na vprašanje "koliko hamiltonskih ciklov vsebuje hiperkocka Q_n ?" bi namreč odgovoril tudi na vprašanje "koliko cikličnih Grayjevih kod reda n obstaja?". Slednje vprašanje pa je bilo uporabljeno, pri razvoju spodnjega algoritma. Algoritem se zanaša na spodaj navedeni lemi, katerih dokaz je očitien.

Lema 5.10. Naj bo G_n ciklična Grayeva koda reda n , ($n \geq 2$). Potem, zaporedje, ki ga tvori G_n predstavlja hamiltonski cikel hiperkocke Q_n .

Lema 5.11. Naj bo Q_n hiperkocka in $v \in V(Q_n)$. Potem, so sosede v

$$N(v) = \{v \oplus 2^i; i \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$$

kjer predstavlja simbol \oplus ekskluziven ali.

Omenjen algoritem (predstavljena je implementacija v programskem jeziku C) prešteje vse možne ciklične grayeve kode. Pri tem se je potrebno zavedati, da vse ciklične kode reda n predstavljajo **usmernejne** hamiltonske cikle hiperkocke in je posledično ustreznih hamiltonskih ciklov za polovico manj.

```
#include <stdio.h>

typedef unsigned long long ul;
#define BH(x,y) (x^(1ULL<<y))

ul gnum(ul c, ul cds, unsigned n) {

    unsigned i;
    ul rez = 0;

    if (cds == 1 && (c & (c-1)) == 0)
        return 1;

    for (i = 0 ; i < n; i++)
        if ( (1ULL<<BH(c,i) & cds ))
            rez += gnum(BH(c,i), cds & ~(1ULL<<BH(c,i)), n);

    return rez;
}

int main(void) {

    unsigned i;

    for (i = 1 ; i <= 6 ; i++)
        printf("Q_%u\t %llu\n", i, gnum(0, (1ULL<<(1<<i)) - 1, i) / 2);

    return 0;
}
```

Kljub temu, da je koda zelo optimizirana, se izkaže, da je za računanje števila hamiltonskih ciklov Q_5 precej počasna (za rezultate v spodnji tabeli, je program potreboval 2 dni). Dejstvo, da je odgovor na vprašanje zelo težak problem potrjuje tudi podatek, da so do danes znane samo vrednosti za hiperkočke do vključno Q_5 . Navedene vrednosti so zbrane v spodnji tabeli. Ocenjuje se, da se vrednost za Q_6 giblje okoli števila $7 * 10^{22}$ [8]

n	Število različnih hamiltonskih ciklov Q_n
2	1
3	6
4	1344
5	906545760

BIPANICIKLIČNOST. Pred omembo trditve, je dobro, da si pogledamo definicijo bipanicikličnosti. Graf G na $|V(G)| = 2k$ točkah je *bipanicikličen* v kolikor vsebuje cikle dolžin $4, 6, \dots, 2k$.

Spodnja trditev vspostavlja omenjeno lastnost za hiperkočke.

Trditev 5.12. *Hiperkočka Q_n , ($n \geq 2$) je bipanicikličen graf.*

Dokaz. Vzemimo hiperkočko Q_n ($n \geq 2$) in jo razrežimo na levo/desno podhiperkočko Q^0 in Q^1 . Po trditvi 5.2, obstaja v Q^0 hamiltonska pot $P_0 = v_1, v_2, \dots, v_{2^{n-1}}$. Podobno označimo z $P_1 = u_1, u_2, \dots, u_{2^{n-1}}$ identično kopijo hamiltonske poti v Q^1 . Cikel željene dolžine $2k$ lahko konstruiramo tako, da vzamemo v_1, v_2, \dots, v_k odsek poti P_0 ter ustrezen u_1, u_2, \dots, u_k odsek poti P_1 in ju povežemo prek povezav v_1u_1, v_ku_k .

□

5.3 POPOLNA PRIREJANJA IN HAMILTONOST - DOMNEVA KREWERASA

V tem razdelku bomo predstavili dokaz Jiri Finka [2] katerega posledica je, da se da vsako popolno prirejanje hiperkočke Q_n ($n \geq 2$) razširiti do hamiltonskega cikla. Pred dokazom navedenega izreka, si bomo pogledali lemo, ki je ključna za dokaz trditve.

Lema 5.13. *Naj bo K_{Q_n} poln graf na 2^n točkah in P neko prirejanje, ki ni popolno. Potem, obstaja popolno prirejanje R hiperkočke Q_n , tako, da je $R \cap P = \emptyset$ in vsaka komponenta $P \cup R$ pot.*

Dokaz. Ker za $n = 2$ sklep velja, predpostavimo, da za poljubno hiperkočko Q_k , $2 \leq k \leq n - 1$ sklep velja in dokazujemo za Q_n . Ker po predpostavki P ni popolno prirejanje, obstajata neprirejeni točki u_0, u_1 . Razdelimo hiperkočko na levo in desno podhiperkočko Q^0, Q^1 tako, da $u_i \in Q^i$ $i \in \{0, 1\}$. Definiramo $K^i := K_{Q^i}$ ter $P^i := P \cap K^i$ $i \in \{0, 1\}$. Po indukcijski predpostavki obstaja popolno prirejanje R^0 hiperkočke Q^0 tako da $R^0 \cap P^0 = \emptyset$ in je vsaka komponenta $R^0 \cup P^0$ pot. Da bi lahko v Q^1 našli ustrezno popolno prirejanje, moramo ignorirati povezave, katerih izbira bi ustvarila cikel. Definiramo množico S , ki vsebuje povezave iz K^1 . Povezava $e = xy$ je v S

natanko tedaj, ko obstajata točki x', y' v Q^0 , tako da sta povezavi xx' in yy' del prirejanja P ter obstaja pot $x'Py'$ v $P^0 \cup R^0$.

Po definiciji je očitno, da je S prirejanje v K^1 od koder sledi, da je tudi $S \cup P^1$ prirejanje, ki pa ni popolno, saj ostaja točka u_1 neprirejena. Po indukcijski predpostavki obstaja popolno prirejanje R^1 hiperkocke Q^1 , da je $R^1 \cap (S \cup P^1) = \emptyset$ in je vsaka komponenta $R^1 \cup P^1 \cup S^1$ pot. Potrebno je le \checkmark e pokazati, da so vse komponente $R^0 \cup R^1 \cup P$ poti. Predpostavimo, da je C cikel v $R^0 \cup R^1 \cup P$. Očitno ima C povezave tako v K^0 kot K^1 . Vsako pot oblike $xx' \cdots yy'$, $x, y \in V(Q^0)$, $x', y' \in V(Q^1)$ (kjer je $x \cdots y$ pot v $P^0 \cup R^0$), lahko skrčimo prek povezave $xy \in S$. Posledično lahko konstruiramo cikel v $R^1 \cup P^1 \cup S$, kar je v protislovju z izbiro S . Dokaz zdaj sledi iz dejstva, da so vse točke v $R^0 \cup R^1 \cup P$ stopnje 1 ali 2. \square

Krewerasova domneva je zdaj neposredna posledica leme.

Trditvev 5.14. *Naj bo poljubno popolno prirejanje K_{Q_n} ($n \geq 2$). Potem obstaja popolno prirejanje R , hiperkocke Q_n tako da je $P \cup R$ hamiltonski cikel v Q_d .*

Dokaz. Naj P ustreza predpostavki in naj bo $e = xy$ $e \in P$. Potem, obstaja za prirejanje $P' := P \setminus \{e\}$ ustrezno popolno prirejanje R Q_n ki ustreza posledicam v lemi. Če $e \in R$ potem ima vsaka točka grafa predstavljenega s točkami $(P' \cup R) \setminus e$ sodo stopnjo, kar je v protislovju z dejstvom, da je vsaka komponenta $P \cup R$ pot. Posledično $e \notin R$. Ni se težko prepričati, da je $P' \cup R$ hamiltonska pot od x do y od koder sledi, da je $P \cup R$ hamiltonski cikel Q_n . \square

Dokaz zgornje trditve odpira nova vprašanja in sicer - Ali se da vsako, ne nujno popolno prirejanje M razširiti do hamiltonskega cikla ustrezne hiperkocke?

LITERATURA

- [1] F. Haray, J. P. Hayes, H. -J. Wu, *A survey on the theory of hypercube graphs*, Comput. Math. Appl. **15** (1988) 135–144.
- [2] J. Fink, *Perfect matchings extend to Hamiltonian cycles in hypercubes*, J. Combin Theory Ser. B **97** (2007) 1074–1076.
- [3] B. West, *Introduction to graph theory*, Addison Wesley, Illinois, 2001.
- [4] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, The Macmillan Press, Ontario, 1976.
- [5] R. Diestel, *Graph theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- [6] M. Livingston, Q. F. Stout, *Embeddings in Hypercubes*, Math. Comput. Model. **11** (1988) 222–227.
- [7] T. Dvorak, P. Gregor, *Hamiltonian fault-tolerance in hypercubes*, Electron. Notes Discrete Math., **29**, (2007), 471–477.

- [8] J. Silverman, V. Vickers, E. Virgil, J. Sampson. *Statistical estimates of the n -bit Gray codes by restricted random generation of permutations of 1 to 2^n* , IEEE Trans. Inform. Theory **29** (1983), no. 6, 894–901.

PROBLEM ŠIRIH BARV

Blaž Rugelj

6.1 UVOD

Problem štirih barv izvira iz leta 1852, ko je Francis Guthrie postavil domnevo, da lahko poljuben zemljevid pobarvamo s štirimi barvami tako, da sta poljubni območji s skupnim robom pobarvani z različnimi barvami. Problem lahko prevedemo v jezik teorije grafov tako, da namesto zemljevida obravnavamo graf, kjer meje med območji predstavljajo povezave grafa, dodati pa moramo toliko točk, da se povezave lahko sekajo le v njih. Ta graf je torej ravninski.

Domneva, da lahko poljuben zemljevid pobarvamo na zgoraj omenjen način s štirimi barvami je torej ekvivalentna domnevi, da ima poljuben dualni graf kromatično število $\chi \leq 4$. Dualni graf je vedno ravninski, torej je dovolj dokazati, da velja $\chi \leq 4$ za vse ravninske grafe. Velja pa tudi, da dualni graf ni nujno enostaven. Z vidika našega problema pa so večkratne povezave med oglišči nepomembne, zato lahko obravnavamo zgolj enostavne grafe.

Poleg tega za dokaz Guthriejeve domneve ni potrebno analizirati vseh ravninskih grafov, pač pa je dovolj pogledati zgolj triangulacije, to so ravninski grafi, ki imajo samo lica dolžine 3. Razlog za to leži v dejstvu, da lahko poljuben enostaven ravninski graf na vsaj 3 točkah dopolnimo do triangulacije z dodajanjem povezav. Če bomo torej oglišča na ta način dobljene triangulacije lahko pobarvali s 4 barvami, bo to barvanje ustrezno tudi za osnoven graf, saj se nam z odstranjevanjem povezav samo zmanjšuje število omejitev pri našem barvanju. Grafi z manj kot 3 točkami pa so očitno tudi 4-obarvljivi.

6.2 PROBLEM PETIH BARV

Precej preprost in lahko razumljiv dokaz je leta 1879 objavil Alfred Kempe v [8], vendar je 11 let kasneje Percy John Heawood v dokazu odkril napako in

ugotovil, da s Kempejevim pristopom lahko dokaže izrek petih barv [5], ki trdi, da poljuben zemljevid lahko pobarvamo s 5 ali manj barvami. Čeprav je ta izrek precej šibkejši, je njegov dokaz smiselno predstaviti, saj je osnovna ideja precej podobna kot pri dokazu izreka štirih barv.

V obeh primerih dokazujemo s protislovjem, in sicer predpostavimo, da obstajajo ravninski grafi, ki se jih ne da pobarvati s 4 oziroma 5 barvami. Med vsemi temi grafi se osredotočimo zgolj na tiste, ki imajo najmanjše število točk, recimo jim *minimalni protiprimeri*. Zanje mora veljati, da če odstranimo poljubno točko, jih lahko pobarvamo s 4 ali 5 barvami. Če bomo torej dokazali, da ne obstaja minimalni protiprimer, bomo s tem tudi dokazali naš izrek. Preden pa se lotimo dokazovanje izreka petih barv pa si pogledjmo še lemo, ki jo bomo za to potrebovali.

Lema 6.1. *Vsaka triangulacija ima vsaj eno točko, ki ima stopnjo manjšo od 6.*

Dokaz. Spomnimo se najprej na pomemben rezultat za ravninske grafe, in sicer na Eulerjevo formulo, ki pravi da za ravninski graf G velja enakost

$$n - e + f = 2,$$

kjer je n število točk, e število povezav, f pa število lic grafa G . Ker za triangulacije velja, da ima poljubno lice dolžino 3, vsaka povezava pa poteka med 2 licema, zanje velja tudi $2e = 3f$. Če vstavimo zadnjo enakost v Eulerjevo formulo in nekoliko preuredimo, dobimo

$$e = 3n - 6.$$

S pomočjo zgornje enakosti lahko dokažemo, da ima vsaka triangulacija vsaj eno točko, ki ima stopnjo manjšo od 6. Dokazujmo s protislovjem. Recimo, da imajo vse točke v neki triangulaciji stopnjo večjo od 6. Torej velja

$$6n \leq \sum_{v \in V(T)} d(v) = 2e = 6n - 12.$$

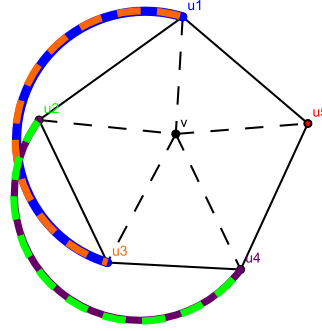
S tem smo prišli do protislovja in dokazali našo trditev. □

Izrek 6.2. *Vsaka triangulacija je 5-obarvljiva.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo T taka triangulacija na najmanjšem številu točk, ki je ne moremo ustrezno pobarvati s 5 barvami in naj bo v točka z najmanjšo stopnjo v tej triangulaciji. Na grafu $T - v$ izvedemo barvanje s 5 barvami, kar nam omogoča predpostavka.

Če so sosedi točke v pobarvani z manj kot 5 različnimi barvami, lahko za v uporabimo eno izmed manjkajočih barv, torej T ni bil res minimalni protiprimer.

To bi bilo možno zgolj v primeru, ko so sosedi točke v pobarvani s 5 različnimi barvami. Ker je v točka z najmanjšo stopnjo v T , je po zgornjem izreku edina možnost, da je njena stopnja 5. Označimo sosede točke v po vrsti z u_1, u_2, u_3, u_4 in u_5 , njihove barve v našem barvanju pa zaporedno s c_1, c_2, c_3, c_4 in c_5 .

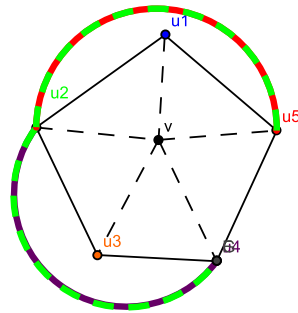
Slika 14: Prikaz dela grafa T okrog točke v .

Poglejmo si sedaj podgraf grafa $T - v$ $H_{c_1c_3}$ za naše barvanje, ki je graf, induciran s točkami, pobarvanimi s c_1 in c_3 . Točka u_1 in u_3 sta na isti povezani komponenti grafa $H_{c_1c_3}$, če obstaja v pobarvanem $T - v$ pot od u_1 in u_3 , ki poteka le po točkah, pobarvanih s c_1 in c_3 , recimo ji veriga c_1c_3 . V nasprotnem primeru u_1 in u_3 nista na isti povezani komponenti podgrafa $H_{c_1c_3}$ in lahko na komponenti točke u_3 zamenjamo barvi c_1 in c_3 ter tako dobimo ustrezno barvanje $T - v$, ki ima na opazovanem ciklu zgolj 4 barve. Podobno velja za točki u_2 in u_4 ter podgraf $H_{c_2c_4}$.

Težava bi torej obstajala le, če bi obstajali obe verigi c_1c_3 in c_2c_4 hkrati. Ker pa je T triangulacija, mora obstajati taka vložitev $T - v$ v ravnino, da znotraj našega cikla dolžine 5 ni povezav. Torej bi obe verigi morali potekati zunaj našega cikla in bi se tam tudi morali sekati. Ker pa je $T - v$ ravninski, se lahko verigi sekata le v točki, kar pa ni možno, saj bi taka točka morala biti obarvana z dvema različnima barvama. Obe verigi torej ne morata obstajati hkrati, zato lahko vsaj 1 točki na ciklu zamenjamo barvo in s tem dobimo prosto barvo za v . Situacija je predstavljena na sliki 14. \square

Kempejev dokaz izreka štirih barv je deloval na enakem principu kot zgornji dokaz, ki se po njem tudi imenuje Kempejeve verige. Pri točkah stopnje 2 in 3 je dokaz trivialen, pri točki stopnje 4 pa uporabimo enak argument kot zgoraj pri točki stopnje 5 in sicer, da ne moreta obstajati verigi, ki bi hkrati povezovali oba para nasprotnih točk na ciklu. Zaplete pa se pri točki stopnje 5. Iz izreka o petih barvah vemo, da za cikel okrog naše točke zadostujejo 4 barve. Tu pa lahko nastopi situacija, ko se v enem koraku ne moremo znebiti nobene barve. Edini tak primer je predstavljen na sliki 15, kjer povezavi med u_2 in u_4 ter u_2 in u_5 v resnici predstavljata ustrezni verigi.

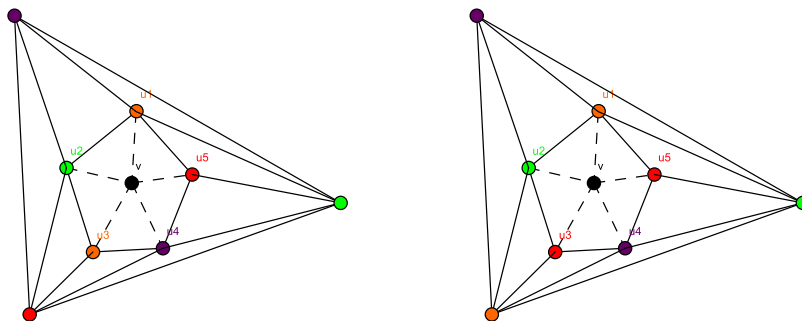
Naj bo c_1 oranžna, c_2 zelena, c_3 vijolična in c_4 rdeča barva. Ker so točke u_2 , u_4 in u_5 vse med seboj povezane z verigami ne moremo izločiti nobene od barv c_2 , c_3 in c_4 . Vendar pa med u_3 in u_5 v tem primeru zagotovo ni verige c_1c_4 , torej lahko v komponenti $H_{c_1c_4}$, v kateri leži u_3 zamenjamo barvi in tako u_3 pobarvamo z c_4 . Po enakem premisleku lahko tudi u_1 pobarvamo s c_3 in na ta način lahko v prvotnem grafu pobarvamo v s c_1 .



Slika 15: Prikaz dela grafa T okrog točke v .

Zgoraj naveden dokaz je, kot smo omenili, 11 let veljal za pravilnega. Kje se torej skriva napaka? Slika 15 je nekoliko zavajajoča, saj se zdi, da za poljubno točko v v verigi c_2c_4 velja, da je v drugi komponenti $H_{c_1c_4}$ kot u_3 , vendar to ni nujno res. Verigi c_2c_3 in c_2c_4 namreč vključujeta isto barvo, zato se lahko v točkah, pobarvanih s c_2 , sekata. Posledica tega pa je, da lahko zamenjava barve točke u_3 pretrga verigo c_2c_4 ter ustvari novo verigo c_1c_3 , ki povezuje točki u_1 in u_4 , kar nam onemogoči zamenjavo barve u_1 . To je najlažje videti na primeru na sliki 16.

Kljub temu, da je bil Kempejev dokaz nepopoln, pa njegova ideja z verigami ni bila nepomembna, saj se, kot bomo videli v nadaljevanju, pojavlja tudi v končnem dokazu Appela in Hakna [1, 2].



Slika 16: Z zamenjavo barve na u_3 se pojavi oranžno vijolična veriga med točkama u_1 in u_4

6.3 NEIZOGIBNE KONFIGURACIJE

Definicija 6.3. Konfiguracija v triangulaciji je del triangulacije, ki leži znotraj nekega cikla, ki ga poimenujemo obroč konfiguracije, število točk v njem pa velikost obroča. Za množico konfiguracij rečemo, da je neizogibna, če v poljubni triangulaciji nastopa vsaj ena izmed konfiguracij te množice.

Zgoraj smo pokazali, da je množica točk stopnje manj kot 6 neizogibna množica konfiguracij. Cilj dokaza izreka o 4 barvah je bil poiskati tako neizogibno množico konfiguracij, da bi lahko za vsak element te množice pokazali, da ne mora nastopati v minimalnem protiprimeru, kar bi pomenilo, da ta ne obstaja. Za točke stopnje manj kot 5 je to preprosto pokazati, za točko stopnje 5 pa ne, zato je bilo potrebno poiskati take konfiguracije, s katerimi bi jo lahko nadomestili. Pri tem pa je treba dokazati, da je taka množica res neizogibna.

Pri tem si pomagamo s postopkom prenašanja naboja, ki ga je prvi uporabil Heesch v [6]. Ta poteka tako, da točkam grafa na začetku dodelimo neke vrednosti, ki jim pravimo naboji. V nadaljnjih korakih lahko naboj prenašamo med sosednjimi točkami tako, da se celoten naboj ohrani.

V našem primeru naj bo začetni naboj točke v enak $6 - d(v)$.

Lema 6.4. *Za poljubno triangulacijo velja:*

$$\sum_{v \in V(T)} (6 - d(v)) = 12.$$

Dokaz. Iz dokaza leme 6.1 vemo, da velja

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 6n - 12.$$

To pomeni, da je

$$\sum_{v \in V(T)} (6 - d(v)) = 6n - (6n - 12) = 12.$$

□

Predpostavimo sedaj, da opazujemo triangulacijo, ki ne vsebuje nobene konfiguracije iz naše kandidatke za neizogibno množico. V tej množici so točke stopnje manj kot 5 ter določene konfiguracije, ki vsebujejo točke stopnje zgolj 5 ali več. Točke stopnje 5 so torej edine, ki imajo v tem grafu v začetku pozitiven naboj. Če lahko ob predpostavki, da triangulacija ne vsebuje nobene konfiguracije iz naše množice, poiščemo tak postopek prenašanja naboja, da imajo ob koncu vse točke negativen naboj, smo prišli do protislovja. V tem primeru smo dokazali, da je naša kandidatka resnično neizogibna množica konfiguracij.

6.4 REDUCIBILNOST

Definicija 6.5. Konfiguracija je reducibilna, če ne more biti vsebovana v nobenem minimalnem protiprimeru.

Reducibilnost pokažemo tako kot v primeru 5 barv. Naj bo T neka triangulacija, ki vsebuje konfiguracijo C . Če iz predpostavke, da obstaja 4-barvanje $T - C$ sledi, da obstaja tudi 4-barvanje T , potem T ne more biti minimalen protiprimer. Reducibilnost lahko ugotovljamo na dva različna načina, ki sta opisana v nadaljevanju.

6.4.1 Reducibilnost D

Prva možnost je preprosta. Ker ne vemo, kakšen je graf zunaj obroča konfiguracije, moramo preveriti vsa možna barvanja obroča pri 4-barvanju grafa $T - C$. Konfiguracija je D -reducibilna, če lahko za poljubno barvanje obroča bodisi poiščemo ustrezno barvanje konfiguracije bodisi s pomočjo Kempejevih verig spremenimo nekaj barv na obroču, da bo tako barvanje obstajalo.

Testiranje reducibilnosti na ta način je sicer načeloma preprosto, vendar za večje konfiguracije lahko tudi precej časovno zamudno, poleg tega pa za vse reducibilne konfiguracije reducibilnosti ne moremo preveriti zgolj s poskušanjem in z uporabo Kempejevih verig.

6.4.2 Reducibilnost C

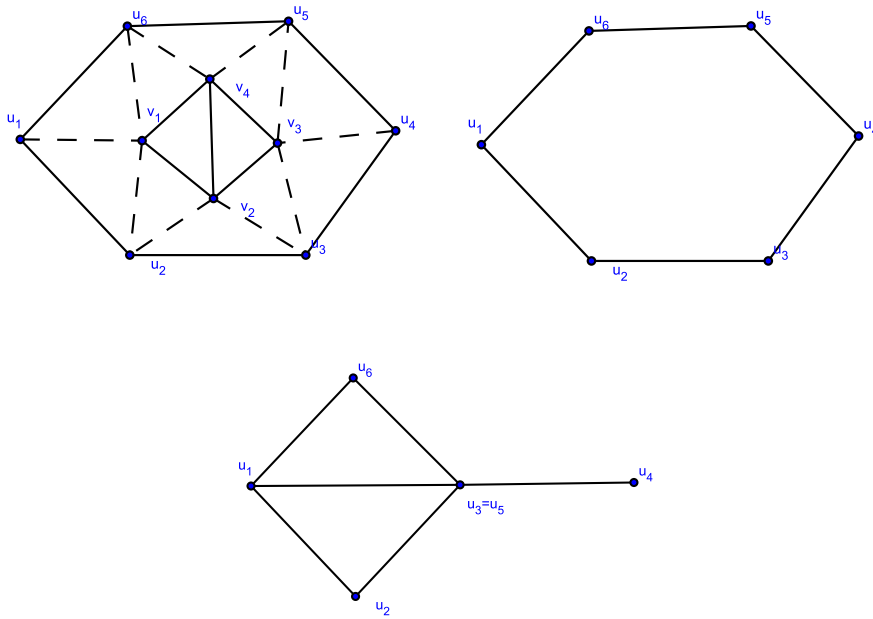
Ideja pri ugotavljanju reducibilnosti C je naslednja: v grafu $T - C$ želimo v obroču konfiguracije nekatere točke med seboj identificirati ter dodati nove povezave tako, da dobimo novo triangulacijo T' , za katero bo veljalo, da lahko njeno poljubno 4-barvanje razširimo na $T - C$. Neustrezno bi bilo npr. identificirati sosednji točki obroča, saj bi iz 4-barvanja T' dobili barvanje $T - C$ z enako pobarvanima sosednjima točkama. Ker predpostavljamo, da je T minimalni protiprimer, mora 4-barvanje T' vselej obstajati. Če lahko za poljubno 4-barvanje triangulacije T' bodisi neposredno pobarvamo celoten T bodisi z uporabo Kempejevih verig na $T - C$ poiščemo tako barvanje, da je to mogoče, potem pravimo, da je C C -reducibilna.

Prednost reducibilnosti C pred reducibilnostjo D je, da je barvanj obroča zaradi identifikacije točk in dodajanja povezav manj, je pa potrebno pri testiranju C -reducibilnosti predhodno še preoblikovati $T - C$ v T' .

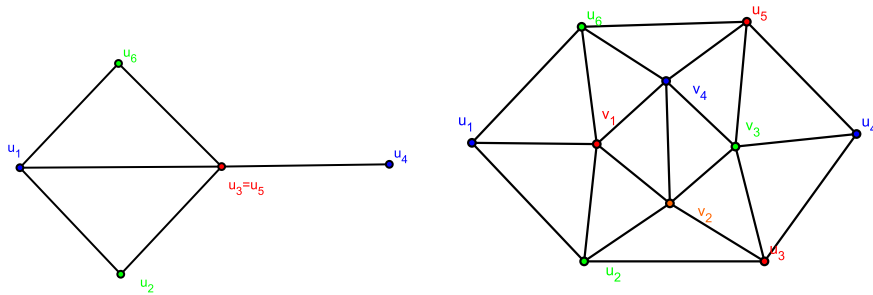
Poglejmo si primer testiranja reducibilnosti C na konfiguraciji Birkhoffov diamant, ki je prikazana na sliki 17 in se imenuje po G. D. Birkhoffu, ki je dokazal njegovo reducibilnost v [4]. Na $T - C$ najprej identificiramo točki u_3 in u_5 , potem pa dodamo še povezavo med u_1 in u_3 .

Obroč konfiguracije lahko v grafu T' pobarvamo na 6 različnih načinov, kjer si točke sledijo po vrsti $u_1, u_2, u_3 = u_5, u_4$ in u_6 : $c_1c_2c_3c_1c_2$, $c_1c_2c_3c_1c_4$, $c_1c_2c_3c_2c_2$, $c_1c_2c_3c_2c_4$, $c_1c_2c_3c_4c_2$ in $c_1c_2c_3c_4c_4$. Vsa barvanja razen $c_1c_2c_3c_2c_2$ lahko neposredno razširimo iz T' na T . Primer je prikazan na sliki 18.

Če naletimo na problematično barvanje, pa se spet spomnimo Kempejevih verig. Pri tem velja poudariti, da so grafi $H_{c_i c_j}$ podgrafi grafa $T - C$ in ne grafa T' , kjer imamo lahko nekaj dodatnih omejitev zaradi identifikacije točk in dodatnih povezav. V primeru, da točke u_2, u_4 in u_6 ne ležijo vse na isti komponenti podgrafa $H_{c_2 c_4}$, lahko eno izmed teh točk, ki leži na svoji komponenti, pobarvamo s c_4 in dobimo barvanje, ki je enakovredno enemu izmed ostalih barvanj, ki pa jih lahko razširimo na T . Posebej moramo pogledati torej le še primer, ko u_2, u_4 in u_6 vse ležijo na isti komponenti podgrafa $H_{c_2 c_4}$. Takrat pa velja, da so u_1, u_3 in u_5 vsaka na svoji komponenti podgrafa $H_{c_1 c_3}$, torej lahko pobarvamo u_3 s c_1 in s tem ne vplivamo na barve ostalih točk.



Slika 17: Prikaz preoblikovanja iz T v T' na primeru Birkhoffovega diamanta



Slika 18: Barvanje T' v nekaterih primerih neposredno inducira barvanje T .

V novem barvanju pa lahko točke v_1, v_2, v_3 in v_4 zaporedoma pobarvamo $c_4c_3c_4c_1$. Pokazali smo, da je Birkhoffov diamant res C-reducibilen.

6.5 ZAKLJUČEK

Sedaj smo spoznali vse ključne koncepte, ki sta jih Appel in Haken leta 1976 uporabila za dokaz izreka štirih barv [1], [2]. Ta dokaz je v matematiki še posebej znan in pomemben, ker je bil to prvi večji dokaz, pri katerem je bila potrebna pomoč računalnika.

Za začetek sta morala poiskati kandidatko za množico neizogibnih konfiguracij. Vsaki točki grafa sta dodelila naboj $60(6 - d(v))$, torej je bil skupni naboj na grafu 720. Z algoritmom za prenašanje naboja sta ob predpostavki, da graf ne vsebuje nobene konfiguracije iz množice kandidatke, potem skušala doseči, da so vse točke imele ničelen ali negativen naboj. Če to ni uspelo, je bilo treba poiskati drugačen algoritem ali drugo množico.

V naslednji fazi sta morala za poljubno konfiguracijo pokazati, da je reducibilna. Zopet z računalnikom sta najprej vsako konfiguracijo testirala za D-reducibilnost, nato pa še za C-reducibilnost. Če se je za kakšno izmed konfiguracij izkazalo, da ni reducibilna, je bilo treba zopet popraviti množico neizogibnih konfiguracij in začeti postopek znova.

Zanimivo je dejstvo, da sta zaradi časovne zahtevnosti testiranja čas omejila, torej sta lahko postopek prekinila tudi v primeru reducibilne konfiguracije, če je preverjanje trajalo predolgo. Končna množica neizogibnih konfiguracij je vsebovala 1879 konfiguracij.

Uporaba računalnika pa je sprožila veliko dvomov v matematični javnosti, saj se dokaza ni dalo preveriti na roke. Tveganje računalniške napake so zmanjšali z različnimi verzijami programov za dokazovanje reducibilnosti, ki so jih testirali na različnih računalnikih. Kljub temu, da se je nekaterim uporaba računalnika pri dokazovanju zdela sporna, pa sta s svojim pristopom odprla nove možnosti za razvoj matematične teorije s pomočjo tehnologije.

V naslednjih letih so skeptiki odkrili več domnevnih napak v algoritmih za prenašanje naboja, vendar sta jih Appel in Haken zavrnila v svoji knjigi, ki sta jo izdala leta 1989 [3]. Kljub temu pa se zgodba s tem ni zaključila. Zaradi težke preverljivosti dokaza so se Robertson, Sanders, Seymour and Thomas odločili napisati svoj dokaz [9], ki bi bil lažje preverljiv in bi posledično dopuščal manj možnosti za dvome. Ideja dokaza je bila podobna kot pri dokazu Appela in Hakna, so pa poenostavili algoritem prenašanja naboja in zmanjšali moč množice neizogibnih konfiguracij na 633. Poleg tega so iznašli tudi učinkovitejši algoritem za 4-barvanje grafov s časovno zahtevnostjo $O(n^2)$ za razliko od prejšnjega, $O(n^4)$ algoritma, kjer n predstavlja število točk grafa.

LITERATURA

- [1] K. Appel in W. Haken, *Every planar map is four colorable: Part I, Dis-*

- charging, *Illinois J. Math.* 21, 1977, 429–490.
- [2] K. Appel, W. Haken in J. Koch, *Every planar map is four colorable: Part II, Reducibility*, *Illinois J. Math.* 21, 1977, 491–567.
- [3] K. Appel in W. Haken, *Every planar map is four colorable*, *Contemporary Math.* 98, 1989.
- [4] G. D. Birkhoff, *The reducibility of maps*, *Amer. J. Math.* 35, 1913, 114–128.
- [5] P. J. Heawood, *Map-colour theorem*, *Quart. J. Pure Appl. Math.* 24, 1890, 332–338.
- [6] H. Heesch, *Untersuchungen zum Vierfarben problem*, B.I.Hoch-Schulscripten, 810/810a/810b, Bibliographisches Institut, Mannheim–Vienna–Zurich, 1969.
- [7] D. A. Holton in J. Sheehan, *The Petersen Graph*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 49–78.
- [8] A. Kempe, *On the geographical problem of the four colours*, *Amer. J. Math.* 2, 1879, 193–200.
- [9] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour in R. Thomas, *The four colour theorem*, *J. Combin. Theory Ser. B.* 70, 1997, 2–44.

KROMATIČNI POLINOM

Andreja Zorko, Lučka Lenič

Zelo pogost problem v študiji teorije grafov je barvanje vozlišč grafa, tako da imata vsaki dve sosednji vozlišči različni barvi. Temu pravimo pravilno barvanje grafa. Najpogosteje nas zanima najmanjše število barv, s katerim lahko graf pravilno pobarvamo. Poleg tega pa želimo prešteti koliko je različnih možnih pravilnih barvanj grafa z danim številom barv. Obe te vrednosti lahko izračunamo s posebno funkcijo, to je kromatični polinom v eni spremenljivki. Kromatični polinom je prvi predstavil George David Birkhoff leta 1912 z neuspešnim poskusom, da bi dokazal izrek štirih barv. Leta 1940 je Tutte posplošil Birkhoffov polinom tako, da je dodal še eno spremenljivko in analiziral njegove kombinatorične lastnosti.

V 7.1. razdelku si bomo pogledali definicijo kromatičnega polinoma in nekaj njegovih osnovnih lastnosti, v razdelku 7.2 bomo opisali rekurzivno metodo s katero lahko v končnem številu korakov izračunamo kromatični polinom danega grafa in si pogledali nekaj znamenitih primerov. Nato bomo v razdelkih 7.3 in 7.4 navedli še dve uporabni tehniki za izračun kromatičnega polinoma. V 7.5. razdelku bomo predstavili Tutteov polinom, ki je posplošitev kromatičnega polinoma in posebne metode, definirane v razdelku 7.2. Poleg kromatičnega polinoma bomo v zadnjem razdelku videli, kakšno povezavo imajo s Tutteovim polinomom še pretočni polinomi. Prvi štirje razdelki so v glavnem povzeti po [1, strani 57 - 63], poleg tega pa je dodanih še nekaj trditev iz [2]. Glavni vir zadnjih dveh razdelkov pa sta članka [3] in [6].

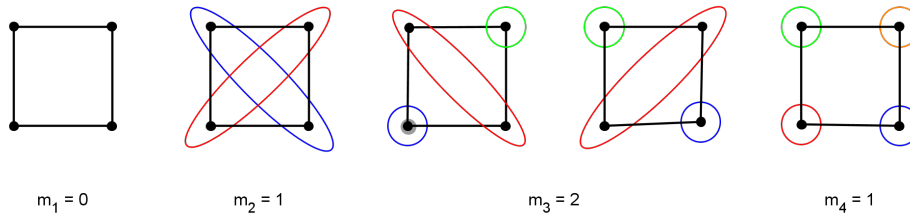
7.1 DEFINICIJE IN OSNOVNE LASTNOSTI

Definicija 7.1. Naj bo G graf in u kompleksno število. Za vsako naravno število r z $m_r(G)$ označimo število različnih barvnih particij vozlišč $V(G)$ z r barvnimi razredi. Z $u_{(r)}$ definiramo kompleksno število $u(u-1)(u-$

2) ... $(u - r + 1)$, ki mu običajno pravimo padajoča potenca. *Kromatični polinom* je polinom

$$P(G; u) = \sum_r m_r(G)u_{(r)}.$$

Zgled 7.2. Na sliki 19 je primer barvnih particij grafa C_4 glede na število barv.



Slika 19: Particije vozlišč grafa C_4

Potem je kromatični polinom grafa C_4 :

$$\begin{aligned} P(C_4; u) &= 0 \cdot u_{(1)} + 1 \cdot u_{(2)} + 2 \cdot u_{(3)} + 1 \cdot u_{(4)} \\ &= u(u - 1) + 2u(u - 1)(u - 2) + u(u - 1)(u - 2)(u - 3) \\ &= u(u - 1)(u^2 - 3u + 3). \end{aligned}$$

Trditev 7.3. Če je s naravno število, potem je $P(G; s)$ število različnih barvanj vozlišč grafa G z največ s barvami.

Dokaz. Vsako barvanje vozlišč grafa G z natanko r barvami porodi barvno particijo grafa G z r barvnimi razredi.

Obratno, vsaki barvni particiji z r barvnimi razredi lahko njenim razredom dodelimo s barv na $s(s - 1) \dots (s - r + 1)$ načinov. Od tod sledi, da je število različnih barvanj vozlišč grafa s s barvami enako $\sum m_r(G)s_{(r)} = P(G; s)$. \square

Definicija 7.4. *Kromatično število* grafa G je najmanjše število s , tako, da lahko graf G pravilno pobarvamo s s barvami.

Z drugimi besedami, kromatično število, ki ga označimo s $\chi(G)$, je najmanjše tako naravno število χ , za katerega velja $P(G; \chi) \neq 0$. Zato je problem iskanja kromatičnega števila grafa del splošnega problema iskanja ničel njegovega kromatičnega polinoma.

Nekatere enostavne lastnosti kromatičnega polinoma sledijo direktno iz njegove definicije: če ima G n vozlišč, potem je $m_r(G) = 0$, ko je $r > n$ ter $m_r(G) = 1$ za $r = n$; zato je $P(G; u)$ polinom stopnje n z vodilnim koeficientom 1. Očitno je tudi, da ima graf, ki vsebuje vsaj eno zanko, kromatični polinom identično enak 0. Ostale lastnosti sledijo iz trditve 7.3 in dejstva, da je polinom enolično določen z njegovimi vrednostmi v naravnih številih. Na primer, če G ni povezan in ima dve komponenti G_1 in G_2 , potem lahko vozlišča G_1 in G_2 neodvisno pobarvamo. Sledi, da za vsako naravno število s velja $P(G, s) = P(G_1; s)P(G_2; s)$, posledično pa je $P(G; u)$ identično enako $P(G_1; u)P(G_2; u)$.

Dokaze naslenjih dveh trditvev in posledice lahko najdemo v [2]

Trditev 7.5. Konstantni člen kromatičnega polinoma $P(G; u)$ je vedno 0.

Dokaz. Ker je za vsak $r \geq 1$ u faktor v $u_{(r)}$, sklepamo, da je $P(G; 0) = 0$ za vsak splošen graf G . Z drugimi besedami, če v kromatični polinom vstavimo $u = 0$, moramo dobiti 0, saj se grafa G ne da pobarvati z 0 barvami. \square

V zgornjem odstavku smo ugotovili, da za graf s c komponentami velja formula $P(G; u) = P(G_1; u) \cdots P(G_c; u)$, kjer so G_1, \dots, G_c komponente grafa G .

Trditev 7.6. Koeficient pri u je neničelen tedaj in natanko tedaj, ko je G povezan.

Dokaz. Vemo, da je kromatični polinom nepovezanega grafa produkt kromatičnih polinomov njegovih komponent. Če imamo vsaj dve komponenti, katerih kromatična polinoma sta deljiva z u , potem je njun produkt deljiv z u^2 , torej je koeficient pri u enak 0. \square

Posledica 7.7. Najmanjši neničelni koeficient je pri u^c , kjer je c število povezanih komponent.

Dokaz. Kromatični polinom izračunamo kot produkt kromatičnih polinomov povezanih komponent. Vsak polinom posebej naj bo deljiv z u , ne pa z u^2 . Torej je rezultat deljiv z u^c , ni pa več deljiv z u^{c+1} . Torej so koeficienti od $1 = u^0, u^1, \dots, u^{c-1}$ vsi enaki nič. \square

Očitno je tudi, da če velja $E(G) \neq \emptyset$, potem G nima barvanja vozlišč samo z eno barvo in zato $P(G; 1) = 0$ ter $(u - 1)$ je faktor v $P(G; U)$.

Zgled 7.8. Najbolj enostaven primer je kromatični polinom polnega grafa K_n . Ker je vsako vozlišče grafa K_n sosedno z vsemi ostalimi, so števila barvnih particij enaka

$$m_1(K_n) = m_2(K_n) = \dots = m_{n-1}(K_n) = 0; m_n(K_n) = 1.$$

Zato

$$P(K_n; u) = u(u - 1)(u - 2) \dots (u - n + 1).$$

7.2 METODA IZBRISA-SKRČITVE

Obstaja rekurzivna tehnika, ki nam za vsak splošen graf v končnem številu korakov dopušča izračun njegovega kromatičnega polinoma. Naj bo G splošen graf s povezavo e , ki ni zanka. Graf $G - e$, z množico povezav $E(G) - \{e\}$ in množico vozlišč $V(G)$, dobimo tako, da povezavo e odstranimo. Za graf G/e , ki ga iz $G - e$ konstruiramo tako, da krajišči povezave e iz G identificiramo, pravimo, da smo ga dobili s *skrčitvijo* povezave e . Opazimo, da ima $G - e$ eno povezavo manj kot G , G/e pa ima eno povezavo in eno vozlišče manj kot G .

Trditev 7.9. V notaciji, ki smo jo ravnokar predstavili, je

$$P(G; u) = P(G - e; u) - P(G/e; u).$$

Dokaz. Imejmo barvanje vozlišč grafa G s s barvami. Ta barvanja razpadejo v dve disjunktni množici: tiste, kjer sta krajišči povezave e obarvani različno in tiste, kjer sta krajišči e obarvani enako. Prva množica je v bijektivni korespondenci z barvanji grafa G , druga pa je v bijektivni korespondenci z barvanji grafa G/e . Zato je za vsako naravno število s $P(G - e; s) = P(G; s) + P(G/e; u)$ in rezultat sledi. \square

Zgornjo enakost imenujemo *metoda izbrisa-skrčitve*.

Z uporabo predstavljene metode lahko dokažemo nekaj naslednjih rezultatov in lastnosti kromatičnega polinoma, ki jih najdemo v [1] in [2].

Posledica 7.10. Če je T drevo z n vozlišči, potem je

$$P(T; u) = u(u - 1)^{n-1}.$$

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo po številu vozlišč, n . Rezultat je pravilen za $n = 1$. Vsako drevo z $n \geq 2$ vozlišči ima najmanj dve vozlišči s stopnjo 1 oz. dva lista. Denimo, da je rezultat pravilen za $n = N - 1$ in naj bo T drevo z N vozlišči, e pa povezava v T , incidenčna z listom. Potem ima $T \setminus e$ dve komponenti: izolirano vozlišče in drevo z $N - 1$ vozlišči; slednja komponenta je T/e . Zato je

$$P(T \setminus e; u) = uP(T/e; u)$$

in po trditvi 7.9

$$P(T; u) = (u - 1)P(T/e; u) = u(u - 1)^{N-1}$$

po indukcijski predpostavki. Zato je rezultat resničen za $n = N$ in za vse n . \square

Opomba 7.11. Pojavi se vprašanje, ali je graf s kromatičnim polinomom enolično določen. Odgovor je seveda negativen, saj imajo na primer vsa drevesa na istem številu vozlišč enak kromatični polinom. Grafom z enakim kromatičnim polinomom pravimo *kromatično ekvivalentni*. Na sliki 20, primer c) vidimo tri različna drevesa z enakim kromatičnim polinomom.

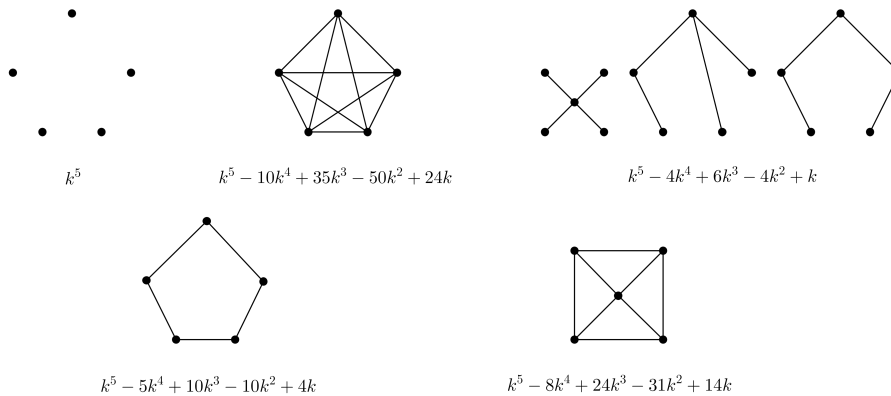
Posledica 7.12. Cikel na n vozliščih ima kromatični polinom enak

$$P(C_n; u) = (u - 1)^n + (-1)^n(u - 1).$$

Dokaz. Dokaz bo z indukcijo na število vozlišč. Pri $n = 3$ imamo $C_n = K_n$, za katerega je $P(C_3; u) = u(u - 1)(u - 2) = (u - 1)^3 + (-1)^3(u - 1)$ in trditev sledi. Sedaj pa predpostavimo, da trditev velja za cikle na $n - 1$ vozliščih ali manj. Z izbrisanjem katerekoli povezave iz cikla C_n dobimo pot (drevo) na n vozliščih, s skrčitvijo katerekoli povezave pa dobimo cikel C_{n-1} . Zato je

$$\begin{aligned} P(C_n; u) &= P(P_n; u) - P(C_{n-1}; u) \\ &= u(u - 1)^{n-1} - (u - 1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(u - 1) \\ &= (u - 1)^n + (-1)^n(u - 1). \end{aligned}$$

\square



Slika 20: Kromatični polinomi za nekaj grafov na petih vozliščih.

Trditev 7.13. Naj velja $n = |V(G)|$. V kromatičnem polinomu $P(G; u)$ je koeficient pri členu u^{n-1} enak številu povezav z negativnim predznakom, $-|E(G)|$.

Dokaz. Uporabimo metodo izbrisa-skrčitve oziroma trditev 7.9. S skrčitvijo ene povezave obravnavamo graf na $n - 1$ vozliščih, katerega kromatični polinom mora imeti vodilni koeficient enak 1, tj. koeficient pri u^{n-1} je 1. Zato mora izbris ene povezave koeficient pri u^{n-1} povečati za 1. Na grafu, ki smo mu izbrisali eno povezavo ponovno uporabimo trditev 7.9 in izbris povezave spet koeficient poveča, skrčitev pa zmanjša za 1. Tako nadaljujemo, dokler ne izbrisemo vseh povezav in dobimo koeficient pri u^{n-1} enak 0 (pri členu, ki pripada izbrisu povezave). Ker mora biti enakost $P(G - e; s) = P(G; s) + P(G/e; u)$ izpolnjena, mora biti koeficient pri u^{n-1} enak številu povezav z negativnim predznakom. \square

Trditev 7.14. Predznak koeficientov v kromatičnem polinomu alternira. Za koeficient a_j , pri u^j , velja $a_j \geq 0$, če $j \equiv n(2)$, sicer je $a_j \leq 0$.

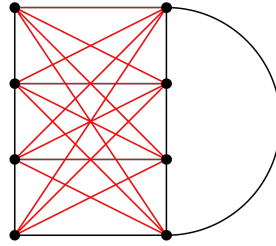
Dokaz. Trditev velja za prazni graf, tj. graf, ki nima povezav in ima samo izolirane točke - označimo ga z N_n , in se ohranja, ko naredimo korak metode izbrisa-skrčitve. \square

V nadaljevanju bomo opisali še dve uporabni tehniki za izračun kromatičnega polinoma. Prva se ukvarja z eno od oblik produkta grafov, ki se pogosto imenuje spoj grafov. Ker je ta koncept v literaturi različno definiran in poimenovan, bomo podali eksplicitno definicijo.

7.3 KROMATIČNI POLINOM SPOJA GRAFOV

Definicija 7.15. Naj bosta G_1 in G_2 enostavna grafa. Potem je $G_1 \circ G_2$ enostaven graf z množico vozlišč $V(G_1 \circ G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in množico povezav $E(G_1 \circ G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$.

Z drugimi besedami, $G_1 \circ G_2$ je sestavljen iz disjunktnih kopij G_1 , G_2 (se ne prekrivata) in povezav, ki povezujejo vsako vozlišče G_1 z vsakim vozliščem G_2 . Na sliki 21 je spoj grafov P_4 in C_4 .

Slika 21: Graf $P_4 \circ C_4$. Dodane povezave so rdeče.

Trditev 7.16. Če je $G = G_1 \circ G_2$, potem je število barvnih particij, z i razredi, za G enako

$$m_i(G) = \sum_{j+l=i} m_j(G_1)m_l(G_2).$$

Dokaz. Ker je vsako vozlišče G_1 sosedno (v G) z vsakim vozliščem v G_2 , je katerikoli barvni razred vozlišč v G bodisi barvni razred v G_1 bodisi barvni razred v G_2 . Rezultat torej sledi. \square

Zgled 7.17. $K_{3,3}$ je produkt $N_3 \circ N_3$, kjer je N_n graf z n vozlišči in brez povezav, $P(N_n; u) = u^n$. Z uporabo trditve 7.16 izračunamo

$$m_1(K_{3,3}) = \sum_{j+l=1} m_j(N_3)m_l(N_3) = 0,$$

$$m_2(K_{3,3}) = m_1(N_3)m_1(N_3) = 1,$$

$$m_3(K_{3,3}) = m_1(N_3)m_2(N_3) + m_2(N_3)m_1(N_3) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6,$$

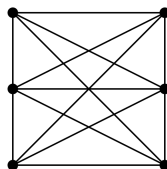
$$\begin{aligned} m_4(K_{3,3}) &= m_1(N_3)m_3(N_3) + m_2(N_3)m_2(N_3) + m_3(N_3)m_1(N_3) \\ &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_5(K_{3,3}) &= m_1(N_3)m_4(N_3) + m_2(N_3)m_3(N_3) + m_3(N_3)m_2(N_3) + m_4(N_3)m_1(N_3) \\ &= 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 = 6, \end{aligned}$$

$$m_6(K_{3,3}) = m_3(N_3)m_3(N_3) = 1.$$

Kromatični polinom $K_{3,3}$ je torej

$$\begin{aligned} P(K_{3,3}; u) &= u_{(6)} + 6u_{(5)} + 11u_{(4)} + 6u_{(3)} + u_{(2)} \\ &= u^6 - 9u^5 + 36u^4 - 75u^3 + 78u^2 - 31u. \end{aligned}$$

Slika 22: Graf $K_{3,3}$.

Posledica 7.18. Kromatični polinom grafa $G_1 \circ G_2$ je dan z

$$P(G_1 \circ G_2; u) = P(G_1; u) \circ P(G_2; u),$$

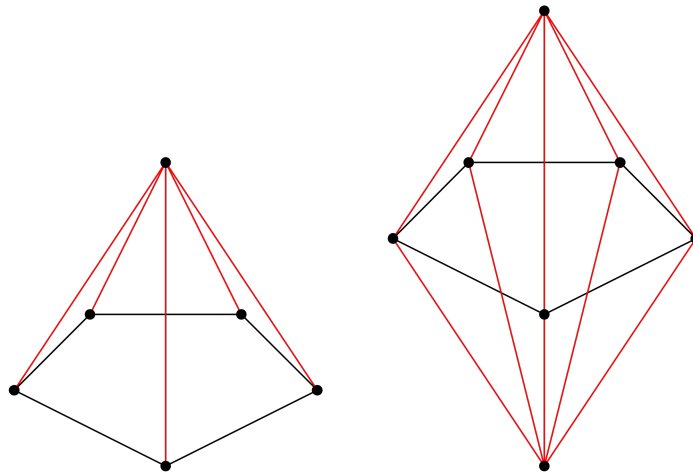
kjer operacija na polinomih \circ pomeni, da pišemo vsak polinom v obliki $\sum m_i u_{(i)}$ in padajoče potence $u_{(i)}$ množimo kot običajne potence u^i , npr. za vsak par i, j velja $u_{(i)} \cdot u_{(j)} = u_{(i+j)}$.

S pomočjo posledice 7.18 lahko izračunamo $P(K_{3,3}; u)$ hitreje kot v zgledu 7.17;

$$\begin{aligned} P(K_{3,3}; u) &= u^3 \circ u^3 \\ &= (u_{(3)} + 3u_{(2)} + u_{(1)}) \circ (u_{(3)} + 3u_{(2)} + u_{(1)}) \\ &= u_{(6)} + 6u_{(5)} + 11u_{(4)} + 6u_{(3)} + u_{(2)} \\ &= u^6 - 9u^5 + 36u^4 - 75u^3 + 78u^2 - 31u. \end{aligned}$$

Na ta način lahko najdemo kromatične polinome vseh polnih večdelnih grafov.

Grafa $N_1 \circ G$ in $N_2 \circ G$ imenujemo *stožec* in *suspenzija* grafa G in ju zapišemo kot cG in sG zaporedoma.



Slika 23: Na levi strani je $N_1 \circ C_5$, na desni pa $N_2 \circ C_5$.

Trditev 7.19. 1. $P(cG; u) = uP(G; u - 1)$,

2. $P(sG; u) = u(u - 1)P(G; u - 2) + uP(G; u - 1)$.

Dokaz. V dokazu obravnavamo dva primera.

1. Naj bo $P(G; u) = \sum m_i u_{(i)}$. Uporabimo posledico 7.18 in dejstvo, da je $u_{(i+1)} = u(u-1)_{(i)}$ in dobimo

$$\begin{aligned} P(cG; u) &= P(N_1 \circ G; u) \\ &= u \circ P(G; u) \\ &= u_{(1)} \circ \sum m_i u_{(i)} \\ &= \sum m_i u_{(i+1)} \\ &= u \sum m_i (u-1)_{(i)} \\ &= uP(G; u-1). \end{aligned}$$

2. Drugi del dokažemo podobno, z uporabo enakosti $u^2 = u_{(2)} + u_{(1)}$. Dobimo

$$\begin{aligned} P(sG; u) &= P(N_2 \circ G; u) \\ &= u^2 \circ P(G; u) \\ &= (u_{(2)} + u_{(1)}) \circ \sum m_i u_{(i)} \\ &= \sum m_i u_{(i+2)} + \sum m_i u_{(i+1)} \\ &= u \sum m_i (u-1)_{(i+1)} + u \sum m_i (u-1)_{(i)} \\ &= u(u-1) \sum m_i (u-2)_{(i)} + u \sum m_i (u-1)_{(i)} \\ &= u(u-1)P(G; u-2) + uP(G; u-1). \end{aligned}$$

□

Zgled 7.20. Stožec cikla C_n se imenuje *kolo* ali *piramida* W_n ; suspenzija C_n pa *dvojna piramida* Π_n .

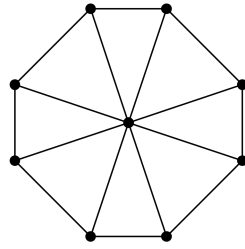
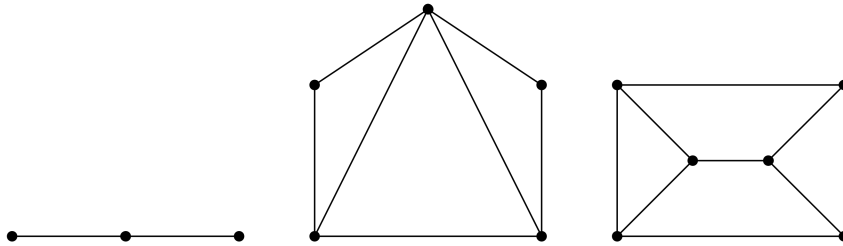
$$\begin{aligned} P(W_n; u) &= P(cC_n; u) \\ &= uP(C_n; u-1) \\ &= u(u-2)^n + (-1)^n (u-2)u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\Pi_n; u) &= P(sC_n; u) \\ &= u(u-1)P(C_n; u-2) + uP(C_n; u-1) \\ &= u(u-1)(u-3)^n + u(u-2)^n + (-1)^n u(u^2 - 3u + 1). \end{aligned}$$

Še ena uporabna tehnika izračuna kromatičnega polinoma velja za grafe, ki so opisani v naslednjem poglavju, povzetem po [1].

7.4 KROMATIČNI POLINOM KVAZI-SEPARABILNIH GRAFOV

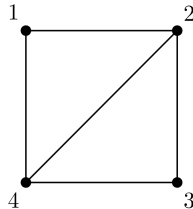
Definicija 7.21. Splošen graf G je *kvazi-separabilen*, če obstaja podmnožica $K \subseteq V(G)$ tako, da je podgraf induciran z množico vozlišč K , označimo s $\langle K \rangle$, poln in induciran podgraf $\langle V(G) - K \rangle$ je nepovezan. Graf G je *separabilen*, če je K prazna (v tem primeru je že sam G nepovezan) ali če $|K| = 1$ (rečemo, da je edino vozlišče v K *prerezna točka*).

Slika 24: Kolo cikla na osmih ogliščih, W_8 .

Slika 25: Zgoraj so zaporedoma separabilen, kvazi-separabilen ter neseparabilen graf.

Sledi, da v kvazi-separabilnem grafu obstajata množici V_1 in V_2 , da je $V(G) = V_1 \cup V_2$, kjer je $\langle V_1 \cap V_2 \rangle$ poln in ne obstajajo povezave v G , ki bi povezovali $V_1 - (V_1 \cap V_2)$ z $V_2 - (V_1 \cap V_2)$.

Najmanjši graf, ki je kvazi-separabilen in ni separabilen je na sliki 26, množici V_1 in V_2 sta $V_1 = \{1, 2, 4\}$ in $V_2 = \{2, 3, 4\}$.



Slika 26: Najmanjši kvazi-separabilen graf, ki ni separabilen.

Trditev 7.22. Če je graf G kvazi-separabilen, potem imamo, v notaciji iz definicije 7.21,

$$P(G; u) = \frac{P(\langle V_1 \rangle; u)P(\langle V_2 \rangle; u)}{P(\langle V_1 \cap V_2 \rangle; u)}.$$

Dokaz. Če je $V_1 \cap V_2$ prazen, se dogovorimo, da je imenovalec enak 1 in rezultat je posledica opomb o nepovezanih grafih, ki sledijo trditvi 7.3. Naj bo $\langle V_1 \cap V_2 \rangle$ poln graf K_t , $t \geq 1$. Ker G vsebuje ta poln graf, na G nimamo barvanja z manj kot t barvami in tako je $u_{(t)}$ faktor v $P(G; u)$. Za vsako naravno

število $s \geq t$, je $P(G; s)/s_{(t)}$ število načinov razširitve danega barvanja grafa $\langle V_1 \cap V_2 \rangle$ na cel graf G , pri čemer uporabimo največ s barv.

Oba grafa, $\langle V_1 \rangle$ in $\langle V_2 \rangle$, vsebujeta poln graf $K_t = \langle V_1 \cap V_2 \rangle$ in tako ima $P(\langle V_i \rangle; s)/s_{(t)}$ ($i = 1, 2$) enako interpretacijo v teh dveh grafih. Ampak nimamo povezav v G , ki bi povezovale $V_1 - (V_1 \cap V_2)$ in $V_2 - (V_1 \cap V_2)$, tako, da sta razširitvi barvanja iz $\langle V_1 \cap V_2 \rangle$ na $\langle V_1 \rangle$ in na $\langle V_2 \rangle$ neodvisni. Torej

$$\frac{P(G; s)}{s_{(t)}} = \frac{P(\langle V_1 \rangle; s)}{s_{(t)}} \frac{P(\langle V_2 \rangle; s)}{s_{(t)}},$$

za vse $s \geq t$. Torej od tu rezultat za vse u sledi. \square

Formula iz trditve 7.22 je uporabna pri ročnem izračunu kromatičnih polinomov za majhne grafe. Na primer, kromatični polinom grafa na sliki 26 je

$$\frac{u(u-1)(u-2)u(u-1)(u-2)}{u(u-1)} = u(u-1)(u-2)^2. \quad (10)$$

7.5 TUTTEOV POLINOM

Tutteov polinom je polinom dveh spremenljivk, ki je posplošitev kromatičnega polinoma in metode izbrisa-skrčitve, opisane v razdelku 7.2. Definiran je za vsak neusmerjen graf in vsebuje informacije o njegovi povezanosti. Veliko grafovskih polinomov, ki prihajajo iz različnih vej matematike in celo fizike, so v bistvu posebni primeri Tutteovega polinoma. Mi si bomo poglobljeje pogledali kako sta s Tutteovim polinomom izražena kromatični in pretočni polinom, več primerov pa lahko najdemo npr. v [2] in [3]. Do sedaj smo delali z enostavnimi grafi, v nadaljevanju pa bomo dopuščali tudi zanke in večkratne povezave. V naslednjih podrazdelkih si bomo pogledali nekaj ekvivalentnih definicij Tutteovega polinoma, na koncu pa še povezavo z drugimi polinomi.

7.5.1 Linearna rekurzivna definicija

Na splošno gledano, je linearna rekurzivna relacija množica redukcijskih pravil z upoštevanjem nekaj končnih oblik. Redukcijska pravila razdelijo graf na osnovne oblike grafov, ki so na nek način manjši oziroma bolj enostavni od prvotnega grafa. Nato spet na teh manjših grafih uporabimo radukcijo in tako dobimo rekurzijo. Ta rekurzivni proces se na koncu ustavi na dobro definirani množici najbolj enostavnih grafov, ki s temi redukcijskimi pravili niso več reducibilni. Vsakega od teh potem identificiramo z monomom neodvisnih spremenljivk, kar nam da polinom. Bistvena je ugotovitev, da so ta redukcijska pravila neodvisna od vrstnega reda uporabe, glej [3].

Tutteov polinom lahko definiramo z linearno rekurzivno relacijo, podano z izbrisanjem in skrčitvijo navadnih povezav. Navadna povezava je povezava, ki ni zanka oziroma most. Najbolj enostavni končni grafi pa so gozdovi z zankami.

Definicija 7.23. Naj bo $G = (V, E)$ graf in e navadna povezava. Potem je

$$T(G; x, y) = T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y). \tag{11}$$

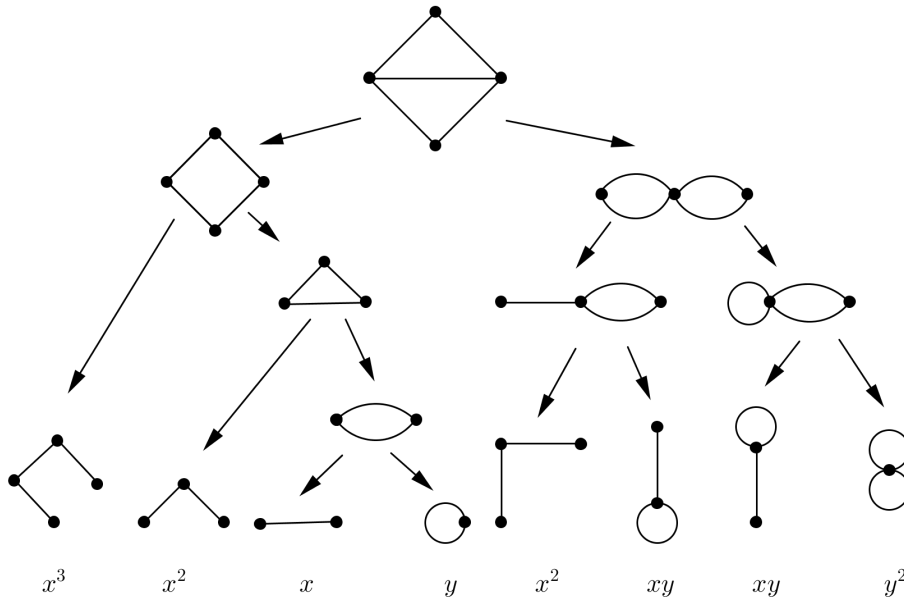
V drugače pa, ko G vsebuje i mostov in j zank, je

$$T(G; x, y) = x^i y^j. \tag{12}$$

Z drugimi besedami, T lahko izračunamo rekurzivno z določitvijo vrstnega reda povezav in ponovno uporabo enačbe 11. Tutteov polinom je tako dobro definiran in neodvisen od vrstnega reda izbire povezav. To se da dokazati tako, da pokažemo, da je ta definicija polinoma ekvivalentna rangovni rodovni obliki (angl. rank generating form), ki jo bomo predstavili v definiciji 7.28. Dokaz lahko najdemo v [4].

Zgled 7.24. Na sliki 27 lahko vidimo enostaven izračun polinoma T za graf K_4 brez ene povezave (videli smo ga že na sliki 26), z uporabo definicij 11 in 12. Z dodajanjem monomov na dnu slike 27 vidimo, da je

$$T(G; x, y) = x^3 + 2x^2 + x + 2xy + y + y^2. \tag{13}$$



Slika 27: Izračun Tutteovega polinoma z rekurzijo.

Poglejmo si sedaj, kaj je enotočkovni spoj.

Definicija 7.25. *Enotočkovni spoj* $G * H$ grafov G in H dobimo tako, da identificiramo vozlišče u grafa G z vozliščem v grafa H v eno samo vozlišče w grafa $G * H$. Tako postane w prerezno vozlišče.

Naslednja trditev pove, kako dobimo Tutteov polinom dveh grafov, ki ju dobimo z enotočkovnim spojem in disjunktno unijo dveh manjših grafov.

Trditev 7.26. Naj bosta G in H grafa. Potem je

$$T(G \cup H) = T(G)T(H) \quad \text{in} \quad T(G * H) = T(G)T(H).$$

To sledi direktno iz definicije 7.23 z indukcijo na število navadnih povezav v $G * H$ oziroma $G \cup H$.

7.5.2 Definicija rangovno-nične rodovne funkcije

Za Tutteov polinom poznamo precej različnih oblik rodovne funkcije in vsaka ima svoje prednosti. Eno od teh bomo obravnavali tukaj, za ostale oblike pa glej [4]. Še pred naslednjo definicijo Tutteovega polinoma si pogledajmo definicijo ranga in ničnosti grafa. To sta funkciji, definirani na mreži podmnožic množice povezav grafa. Pri tem so vsi grafi, inducirani s temi podmnožicami, vpeti grafi. Notacijo poenostavimo tako, da podmnožico povezav A grafa G enačimo z vpetim podgrafom grafa G , ki ga A inducira.

Definicija 7.27. Za $A \subseteq E(G)$ sta *rang* in *ničnost* (angl. nullity), označimo ju z $r(A)$ in $n(A)$, definirani kot

$$r(A) = |V(G)| - c(A) \quad \text{in} \quad n(A) = |A| - r(A).$$

S $c(A)$ označimo število povezanih komponent v A . Če je G ravninski graf in je G^* njegov dual, potem lahko rang duala, označimo ga z r^* , izrazimo kot

$$r^*(A) = |A| - r(E) + r(E \setminus A). \quad (14)$$

Sedaj imamo vse pripravljeno za naslednjo ekvivalentno definicijo Tutteovega polinoma, ki je poznana tudi kot Whitneyeva rangovna rodovna funkcija (Whitney rank generating function), glej [5].

Definicija 7.28. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Potem lahko Tutteov polinom $T(G; x, y)$ grafa G zapišemo v naslednji obliki

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} (y-1)^{n(A)}. \quad (15)$$

Iz te definicije je jasno razvidno, da je T polinom v spremenljivkah x in y . Prednost te rodovne oblike je, da nam olajša štetje. Veliko različnih evalvacij Tutteovega polinoma sledi neposredno iz definicije 7.28.

Z rutinskim preverjanjem lahko z uporabo definicije 7.28 in enačbe 14 lahko pokažemo naslednjo lepo lastnost Tutteovega polinoma.

Trditev 7.29. Naj bo G ravninski graf in G^* njegov dual. Potem velja

$$T(G; x, y) = T(G^*; y, x). \quad (16)$$

Še ena precej uporabna rodovna definicija Tutteovega polinoma deluje na principu vpetih dreves in velja za povezane grafe. Za njeno predstavitev bi potrebovali kar nekaj predpriprave, zato jo bomo v tem seminarju izpustili. Bralec jo lahko najde v [1] in v [3], kjer je zelo lepo predstavljena.

Poglejmo sedaj, kako je Tutteov polinom povezan s kromatičnim polinomom.

7.5.3 Kromatični polinom kot posebni primer Tutteovega polinoma

Za naslednji izrek je zaslužen G. D. Birkhoff, neodvisno od njega pa tudi H. Whitney. Dokaz, ki temelji na načelu vključitev in izključitev, lahko najdemo v [3].

Izrek 7.30. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Potem je

$$P(G; u) = \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} u^{c(A)}. \quad (17)$$

Iz izreka lepo vidimo, da je $P(G; u)$ res polinom v spremenljivki u . Z uporabo zveze 17 in definicije 7.28 pa lahko dokažemo naslednji izrek o neposredni povezavi med Tutteovim in kromatičnim polinomom.

Izrek 7.31. Naj bo $G = (V, E)$ graf. Potem je

$$P(G; u) = (-1)^{r(E)} u^{c(G)} T(G; 1 - u, 0).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} P(G; u) &= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} u^{c(A)} \\ &= (-1)^{r(E)} u^{c(G)} \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A| - r(A)} (-u)^{r(E) - r(A)} \\ &= (-1)^{r(E)} u^{c(G)} T(G; 1 - u, 0), \end{aligned}$$

kjer zadnja enakost sledi iz definicije 7.28. □

Če v (13) vstavimo $x = 1 - u$ in $y = 0$ ter pomnožimo z $-u$ (ker je $|V(G)| = 4$ in $c(E) = 1$), dobimo $P(G; u) = u(u - 1)(u - 2)^2$, kar je res enako (10).

7.6 PRETOČNI POLINOM

V tem poglavju si bomo ogledali kako je s Tutteovim polinomom izražen pretočni polinom ter povezavo s kromatičnim polinomom. V prejšnjem poglavju smo delali z neusmerjenimi grafi, tukaj pa bomo povezave usmerili in jim dodelili neko količino *pretoka* ali *utež*, pri čemer bomo upoštevali, da bo imela ista povezava v obratni smeri negativno vrednost. Lahko si predstavljamo, da te vrednosti predstavljajo količino dobrin, ki jo transportiramo preko teh poti oziroma povezav, kot je sugerirano v [2]. Če predvidevamo, da ni nobenih posebnosti, posebnih dobaviteljev, potrošnikov, ali skladišč, potem mora biti v vsakem vozlišču pripeljana količina enaka odpeljani. Z drugimi besedami, veljati mora *Kirchoffov zakon*. V grafih še vedno dovoljujemo večkratne povezave in zanke.

7.6.1 Pretoki

Poglejmo si najprej definicije izrazov, ki jih bomo uporabljali in tistih, ki smo jih spoznali že v uvodu. Spodnje definicije najdemo v [6].

Definicija 7.32. Utež je funkcija $f : E(G) \rightarrow A$, kjer je A Abelova grupa.

Najpogosteje bomo uporabljali celoštevilске grupe \mathbb{Z}_k .

Definicija 7.33. Usmeritev grafa je predpis, ki vsaki povezavi določi eno od dveh možnih smeri. Z usmeritvijo D grafa G dobimo usmerjen graf, ki ga označimo z $D(G)$.

Kot je bilo že prej omenjeno, bomo pri usmeritvi upoštevali

$$D(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{povezava } uv \text{ je usmerjena od } u \text{ proti } v, \\ -1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej za vsako povezavo velja $D(u, v) = -D(v, u)$.

Definicija 7.34. Pretok grafa je urejeni par (D, f) , ki izpolnjuje Kirchoffov pogoj,

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v, u) f(vu) = 0,$$

kjer je D usmeritev, f utež grafa G in $N(v)$ označuje vse sosede vozlišča v .

Definicija 7.35. Za utež f grafa G je nosilec množica povezav $e \in E(G)$, za katere velja $f(e) \neq 0$, označimo ga s $\text{supp}(f)$.

Pretok (D, f) grafa G je *nikjer-ničelni* pretok, če je $\text{supp}(f) = E(G)$. Kadar f slika v grupo $(\mathbb{Z}, +)$, par (D, f) imenujemo *celoštevilski* pretok. Kadar velja $|f(e)| < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$, celoštevilski pretok (D, f) imenujemo *k-pretok*. Ekvivalentno bi lahko rekli, da imamo *k-pretok*, kadar f slika v grupo $(\mathbb{Z}_k, +)$. Podobno poimenujemo *A-pretok*, če f slika v poljubno Abelovo grupo. Kadar imamo *k-pretok*, pri katerem ima vsaka povezava nenegativno utež, ga imenujemo *nenegativni k-pretok*. Če pa ima vsaka povezava pozitivno utež, mu rečemo *pozitivni k-pretok*.

Naštejmo še nekaj lastnosti, ki jih najdemo v [6] in so uporabne pri računanju pretočnih polinomov.

1. Graf z mostovi ne dopušča nikjer-ničelnega pretoka.
2. Če graf dopušča nikjer-ničelni k -pretok, potem tudi za vsak $h \geq k$ dopušča nikjer-ničelni h -pretok.
3. Naj bo (D, f) nikjer-ničelni k -pretok grafa G in naj bo F poljubna podmnožica množice $E(G)$. Naj bo D_F usmeritev, ki jo dobimo iz D s spremembo smeri vsaki povezavi iz F . Pripadajoče uteži definiramo s predpisom

$$f_F(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin F \\ -f(e), & e \in F. \end{cases}$$

Tedaj je par (D_F, f_F) tudi nikjer-ničelni pretok grafa G .

7.6.2 Definicija in lastnosti pretočnega polinoma

Posvetimo se sedaj pretočnemu polinomu, ki ga označimo z $F(G; A)$. Funkcija $F(G; A)$ nam vrne število različnih nikjer-ničelnih A -pretokov grafa G za vnaprej podano usmeritev D in Abelovo grupo A . Če je A Abelova grupa reda k , potem velja $F(G; A) = F(G; k)$ in $F(G; k)$ označuje število različnih nikjer-ničelnih k -pretokov. V nadaljevanju bomo ves čas uporabljali Abelovo grupo reda k .

Najprej nas zanima ali je $F(G; k)$ polinom nedoločenske k . Odgovor na to vprašanje je seveda pozitiven, kar je razvidno iz naslednje trditve iz [6]. Tudi tukaj uporabimo skrčitve in izbrise povezav.

Trditev 7.36. Funkcija $F(G; k)$ ima naslednje lastnosti

1. $F(G; k) = 0$, če je G povezava ali če ima G most,
2. $F(G; k) = 1$, če je G brez povezav,
3. $F(G; k) = k - 1$, če je G zanka ali cikel,
4. $F(G; k) = (k - 1)F(G - e, k)$, če je $e \in E(G)$ zanka,
5. $F(G; k) = F(G/e, k) - F(G - e, k)$, če $e \in E(G)$ ni zanka.

Naslednji izrek pa nam bo podal $F(G; k)$ v polinomski obliki. Izrek in namige za dokaz najdemo v [6].

Izrek 7.37. Naj bo A končna Abelova grupa reda k in naj bo D poljubna usmeritev grafa G . Za usmeritev D je število nikjer-ničelnih A -pretokov grafa G

$$F(G; A) = F(G; k) = \sum_{H \subseteq E(G)} (-1)^{|E(G) \setminus H|} k^{|H| - c(H)},$$

kjer $c(H)$ označuje število komponent podgrafa v G , ki je induciran z množico povezav $H \subseteq E(G)$.

Po tem izreku pa lahko podamo tudi povezavo med pretočnim in Tutteovim polinomom, najdeno v [8] in [9]. Velja

$$F(G; A) = (-1)^{|E(G)| - |V(G)| + c(G)} T(G; 0, 1 - k), \quad (18)$$

kjer je $c(G)$ število povezanih komponent grafa G in k red Abelove grupe A . Če je graf G ravninski, obstaja povezava še s kromatičnim polinomom. Namreč, če je G ravninski velja enakost

$$k^{c(G)} F(G; k) = P(G^*; k),$$

kjer G^* označuje dual grafa G . Zgornja enakost sledi tudi iz izreka 7.31 in enačbe 18, najdemo pa jo tudi v [8].

Poglejmo še nekaj lastnosti pretočnega polinoma, vzetih iz [7], večino dokazov prepustimo bralcu.

Trditev 7.38. $F(G; k)$ je polinom stopnje $v = |E(G)| - |V(G)| + c(G)$. Koeficient pri k^v je $(-1)^v$ in vsi členi v $F(G; k)$ imajo enak predznak.

Trditev 7.39. Če je G sestavljen iz dveh grafov H in K tako, da sta ali disjunktna, $G = H \cup K$, ali pa imata skupno eno točko, $H \cap K = \{v\}$, potem velja

$$F(G;k) = F(H;k) \cdot F(K;k).$$

Dokaz. V primeru, da je G disjunktna unija H in K izračunamo pretočna polinoma za H in K neodvisno. Če pa imamo prerezno vozlišče oziroma imata H on K skupno točko v , potem mora biti vsota uteži v tej točki v grafu H enaka nič in prav tako v G . Torej lahko spet neodvisno določimo pretočna polinoma. \square

Očitno je 4. lastnost iz trditve 7.36 posledica zadnjega izreka.

Trditev 7.40. $F(G;k)$ je topološka invarianta, zato imata poljubna homeomorfna grafa enak pretočni polinom.

Lastnosti pretočnega polinoma $F(G)$ grafa G iz trditve 7.36, 7.38, 7.39 in 7.40 je postavil Tutte v [10]. Naj bo K_2^h graf, sestavljen iz dveh točk in h povezav med njimi. Velja naslednja trditev iz [6].

Trditev 7.41. Naj bo G povezan graf s prerezno množico T moči $h \leq 3$ in $M_1 = G/E(H_1)$ in $M_2 = G/E(H_2)$, kjer sta H_1 in H_2 komponenti grafa $G \setminus T$. Tedaj velja

$$F(G;k) \cdot F(K_2^h;k) = F(M_1;k) \cdot F(M_2;k).$$

Dokaz. Trditev dokažemo z indukcijo po številu povezav G . Najprej, če je $|E(G)| = h$, velja $G \cong M_1 \cong M_2 \cong K_2^h$. Torej ni težko preveriti, da enakost velja. Naprej predpostavimo, da obstaja povezava $e \in E(G) \setminus T$ in recimo, da je $e \in E(H_2)$. Od tod je $e \in E(M_1)$. Kadar je e zanka, velja

$$\begin{aligned} F(G;k) \cdot F(K_2^h;k) &= (k-1)F(G-e;k) \cdot F(K_2^h;k) \\ &= (k-1)F(M_1 \setminus e;k) \cdot F(M_2^h;k) \\ &= F(M_1;k) \cdot F(M_2;k). \end{aligned}$$

V primeru, ko e ni zanka pa je

$$\begin{aligned} F(G;k) \cdot F(K_2^h;k) &= \\ &= [F(G/e;k) - F(G-e;k)] \cdot F(K_2^h;k) \\ &= F(G/e;k) \cdot F(K_2^h;k) - F(G-e;k) \cdot F(K_2^h;k) \\ &= F(M_1/e;k) \cdot F(M_2^h;k) - F(M_1 \setminus e;k) \cdot F(M_2^h;k) \\ &= F(M_1;k) \cdot F(M_2;k). \end{aligned}$$

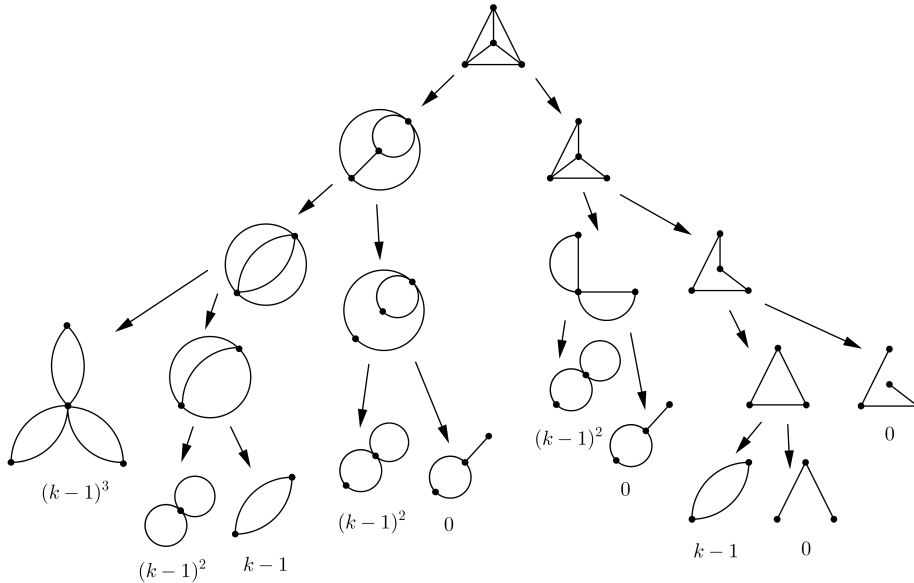
Kar pa nas pripelje na konec dokaza. \square

Zgled 7.42. Izračunajmo pretočna polinoma $F(K_4;3)$ in $F(K_4;4)$. Pomagamo si s sliko 28, kjer smo iz grafa K_4 s pomočjo skrčitev in izbrisov povezav

dobili manjše grafe, za katere poznamo pretočne polinome. Nato pa uporabimo lastnosti iz trditve 7.36 in dobimo

$$\begin{aligned} F(K_4, k) &= \left[(k-1)^3 - \left((k-1)^2 - (k-1) \right) - \left((k-1)^2 - 0 \right) \right] \\ &\quad - \left[\left((k-1)^2 \right) - (k-1) \right] = \\ &= (k-1)^3 - 3(k-1)^2 + 2(k-1). \end{aligned}$$

Iskana rezultata sta torej $F(K_4; 3) = 0$ in $F(K_4; 4) = 6$.



Slika 28: Izračun pretočnega polinoma za K_4 .

7.6.3 Odstranitev šopa povezav

Naj bo G graf, ki vsebuje šop povezav z večkratnostjo n , tj. večkratna povezava, ki nastopa n -krat, in naj bo K graf, ki ga dobimo iz G tako, da ta šop povezav skrčimo v vozlišče ter H naj bo graf, dobljen tako, da smo ta šop povezav izbrisali. Read in Whitehead [11] sta večkrat zaporedoma uporabila 5. lastnost iz trditve 7.36 in prišla do formule pri odstranitvi šopa povezav ali ŠRF (angl. Shef Removal Formula)

$$F(G; k) = (-1)^n \left[\frac{k^n - 1}{1 - k} F(K; k) + F(H; k) \right],$$

kot navajajo v [7].

Za graf G z zankami ne obstaja pravilno barvanje, torej je $P(G; u) = 0$. Podobno, kot smo že videli, graf z mostovi ne more imeti nobenega nikjer ničelnega k -pretoka, torej $F(G; k) = 0$. Podobno, kot za dva grafa rečemo, da sta kromatično ekvivalentna, rečemo, da sta G in H pretočno ekvivalentna če velja $F(G; k) = F(H; k)$.

7.6.4 *Tuttove domneve*

Kot zanimivost pa si v sledečem poglavju pogledajmo še nekaj domnev v zvezi s pretoki. Poglavje je povzeto po [6] in [7].

Definicija 7.43. *Pretočno število $\kappa(G)$ grafa G pomeni najmanjše število k , za katero G dopušča nikjer-ničelni k -pretok. Če tak k ne obstaja, potem definiramo $\kappa(G) = \infty$.*

Prvi dve domnevi govorita o zgornji meji pretočnega števila.

Hipoteza 7.44 (o zgornji meji). *Obstaja tako naravno število k , da vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni k -pretok.*

Hipoteza 7.45 (o 5-pretoku). *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka in se ne da vložiti v ravnino.

Hipoteza 7.46 (o 4-pretoku). *Vsak graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Hipoteza 7.47 (o 3-pretoku). *Vsak graf brez mostov in brez 3-prereza dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Domnevo 7.44, o zgornji meji, sta neodvisno dokazala Jaeger in Killpatrick. Oba sta pokazala, da ima vsak graf brez mostov nikjer-ničelni 8-pretok. Seymour pa je še izboljšal zgornjo mejo za pretočno število, pokazal je, da je zgornja meja 6. To je hkrati tudi najboljši približek domnevi 7.45, o 5-pretoku.

7.7 ZAKLJUČEK

Osnovna naloga v sem sestavku, je bilo opisati kromatični polinom, posplošitev le-tega pa predstavlja obširnejši Tuttov polinom. Kromatični polinom je bil rezultat dela na izreku o 4 barvah [12] in igra posebno vlogo v kombinatoriki in statistični fiziki. Kot rezultat tega, je o kromatičnem polinomu veliko več govora kot o Tuttovem polinomu. Željeno je bilo predstaviti najrazličnejše povezave s kromatičnim polinomom, zato je del seminarske posvečen tudi pretokom in pretočnim polinomom, ki prav tako izhajajo iz Tuttovega polinoma. Videli smo, da med vsemi tremi obstajajo formule, ki jih povezujejo pa tudi vsak posebej je bil podrobneje predstavljen. Omeniti velja, da lahko iz Tuttovega polinoma dobimo tudi *verjetnostni polinom*, vendar mu v tej nalogi nismo namenili besed, ker ni tesno povezan s kromatičnim polinomom. V [9] je opisana implementacija učinkovitega algoritma za izračun Tutteovega, pretočnega in kromatičnega polinoma. Bralec, ki ga širša tema te seminarske naloge podrobneje zanima lahko v [3], [2], [6] in [7] najde še veliko gradiva povezanega z različnimi lastnostmi naštetih polinomov.

LITERATURA

- [1] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, Cambridge University Press, (1974), 57–63.
- [2] T. Hubai in L. Lovasz, *The chromatic polynomial*, verzija 2009, [ogled 14. 5. 2013], dostopno na http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2009/hubai_tamas.pdf.
- [3] J. A. Ellis-Monaghan in C. Merino, *Graph polynomials and their applications I: The Tutte polynomial*, verzija 2008, [ogled 15. 7. 2013], dostopno na <http://arxiv.org/pdf/0803.3079v2.pdf>.
- [4] T. Brylawski in J. Oxley, *The Tutte Polynomial and its Applications*, Cambridge University Press, (1992).
- [5] *Tutte polynomial*, verzija 18. 6. 2013, [ogled 15. 7. 2013], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/tutte_polynomial.
- [6] R. Škrekovski, *Pretoki in pokritja grafov*, verzija 14. 6. 2010, [ogled 1. 8. 2013], dostopno na <http://www.fmf.uni-lj.si/~skreko/Gradiva/PP-skripta.pdf>.
- [7] H. Shahmohamad, *A survey on Flow Polynom*, verzija 18. 9. 2002, [ogled 3. 8. 2013], dostopno na <http://ritdml.rit.edu/bitstream/handle/1850/4728/HShahmohamadArticle2002.pdf?sequence=1>.
- [8] D. Welsh, *The Tutte Polynomial*, verzija 19. 3. 1999, [ogled 3. 8. 2013], dostopno na <http://www.math.ucdavis.edu/~deloera/MISC/BIBLIOTECA/trunk/Welsh/welsh-tutte-polynomial.pdf>.
- [9] G. Haggard, D. J. Pearce in G. Royle, *Computing Tutte Polynomials*, [ogled 3. 8. 2013], dostopno na <http://homepages.ecs.vuw.ac.nz/~djp/files/HPR-TUTTE-TR08.pdf>.
- [10] W. T. Tutte, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1984).
- [11] R. C. Read, E. G. Whitehead Jr., *Chromatic Polynomials of homeomorphism classes of graphs*, *Discrete Math.*, **204** (1999), 337–356.
- [12] K. Appel, W. Hakken in J. Koch, *Every planar map is four colorable*, *Illinois J. Math.*, **21** (1977), 439–567.

8.1 UVOD IN MOTIVACIJA

Pri navadnem barvanju točk grafa je pomembno, da sta sosednji točki različno pobarvani. Torej smo upoštevali le točke na razdalji ena. Mi pa bomo obravnavali barvanja pri katerih se bodo barve točk morale razlikovati, ne le na razdalji ena, ampak tudi na večjih razdaljah. Obstaja več različnih konceptov za taka barvanja. Mi si bomo ogledali $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanja. Podrobneje bomo obravnavali taka barvanja za cikle, poti in drevesa. Poiskali bomo zgornjo mejo za razpon nekega grafa G in pokazali tesno povezavo med našim barvanjem in NP-polnim problemom Hamiltonske poti.

Zgoraj omenjeni tip barvanja utemeljimo z slednjo motivacijo. Postaviti želimo mrežo radijskih oddajnikov. Pri tem poznamo lokacijo vsakega oddajnika. Oddajnikom moramo dodeliti frekvence, v katerih bodo oddajali. Vemo, da se morajo frekvence bližnjih oddajnikov razlikovati za neko fiksno število, sicer bi se med sabo motili. Bližje kot sta si dva oddajnika, večja mora biti razlika med njunima frekvencama. Poleg tega želimo doseči, da je razlika med največjo in najmanjšo frekvenco čim manjša.

8.2 DEFINICIJE.

Imejmo končen graf G in nenegativna cela števila p_1, \dots, p_k . $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje ($L(p_1, \dots, p_k)$ -labeling) grafa G je barvanje njegovih točk pri čemer morata točki na razdalji $i \leq k$ imeti barvi različni vsaj za p_i . S simboli zapisano to pomeni

$$L(p_1, \dots, p_k) : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

in če sta točki u in v na razdalji $d(u, v) = i$, mora veljati

$$|L(p_1, \dots, p_k)(u) - L(p_1, \dots, p_k)(v)| \geq p_i.$$

Razpon (*span*) $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanja je razlika med največjo in najmanjšo barvo.

Tukaj velja omeniti, da lahko brez izgube za splošnost najmanjšo barvo vedno postavimo na nič, kar se večinoma kar privzame. To je očitno, saj lahko od poljubnega $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanja odštejemo najnižjo barvo in tako dobimo barvanje z najnižjo barvo nič. Tako razpon postane največja barva v našem grafu. Naš cilj je seveda najti $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje z najmanjšim možnim razponom.

Najmanjši možen razpon označimo z $\lambda_{p_1, \dots, p_k}(G)$ ali $\lambda(G; p_1, \dots, p_k)$. Tako

$L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje imenujemo *razdaljno barvanje*.

UPORABA V TELEFONIJI. Ta in podobna barvanja so se pojavila kot model za dodeljevanje frekvenc radio oddajnikom ali antenam za mobilna omrežja. Oddajnike predstavimo kot točke v grafu in tiste, ki so zelo blizu povežemo s povezavami. Največ interference seveda povzročijo oddajniki, ki so zelo blizu manj pa tisti, ki so daleč narazen. Zakup frekvenčnega pasu je seveda drag in tako iščemo čim manjši frekvenčni pas, tako da se frekvence bližnjih oddajnikov zelo razlikujejo, frekvence tistih ki so blizu a ne zelo blizu pa se razlikujejo le nekoliko. Tako razmišljanje nas vodi prav do definicije razdaljnega barvanja, kot smo ga opisali zgoraj.

POVEZAVA Z NAVADNIM BARVANJEM. Razdaljna barvanja so povezana z navadnim barvanjem. Če je $k = 1$ in $p_1 = 1$ je to navadno barvanje in velja $\lambda(G; 1) = \chi(G) - 1$. Če je recimo $p_1 = \dots = p_k = 1$ se naš problem prevede na navadno barvanje k -te potence našega grafa G . Spomnimo se, da je k -ta potenca grafa G graf G^k za katerega velja:

$$V(G^k) = V(G) \quad \text{in} \quad uv \in E(G^k) \Leftrightarrow d_G(u, v) \leq k.$$

Torej povezava uv je v grafu G^k če velja da sta točki u in v v grafu G na razdalji manjši ali enaki k . Tako velja $\lambda(G; p_1, \dots, p_k) = \chi(G^k) - 1$.

8.3 HIPOTEZA Δ^2

Večina raziskovanja se dela na osnovnem primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$, torej $L(2, 1)$ -barvanje. Ena najpomembnejših hipotez na tem področju, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [1]:

Hipoteza 8.1. Vsak graf G z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 2$ ima $L(2, 1)$ -barvanje z obsegom največ Δ^2 .

Hipoteza še vedno ni ne potrjena ne ovržena skoraj petnajst let po njeni objavi. Uspešno so jo dokazali za nekatere posebne razrede grafov kot so ravninski grafi z najvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$, Hamiltonski grafi, grafi z najvišjo stopnjo dva in drugi. Gonçaves [2] pa je postavil trenutno najboljšo zgornjo mejo $\Delta^2 + \Delta - 2$.

Naslednji korak v raziskovanju je bil prehod na realna števila. V praksi seveda ni nobenega razloga, da bi razlika frekvenc bila celoštevilska. Tako definiramo

$$L(p_1, \dots, p_k) : V(G) \rightarrow [0, \infty) \quad \text{za } p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}.$$

Ostale definicije pa ostanejo enake.

Tukaj opazimo lastnost razmerja (*scaling property*):

Trditev 8.2. Za vsako realno število $\alpha > 0$ velja:

$$\alpha \lambda(G; p_1, \dots, p_k) = \lambda(G; \alpha p_1, \dots, \alpha p_k).$$

Dokaz. Naj bo f $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje grafa G z razponom $\lambda(G; p_1, \dots, p_k)$. Če ga pomnožimo z α očitno dobimo $L(\alpha p_1, \dots, \alpha p_k)$ -barvanje f' z najmanjšim možnim razponom $\alpha \lambda(G; p_1, \dots, p_k)$, saj smo največjo barvo pomnožili z α . Če razpon ne bi bil najmanjši možen bi imeli barvanje z manjšim razponom, ki bi ga delili z α in dobili $L(p_1, \dots, p_k)$ -barvanje z manjšim razponom, kar pa je protislovje. Dokaz v drugo smer je identičen, le da sedaj delimo z α . \square

V posebnem če je $k = 2$ lahko vrednost $\lambda(G; p_1, p_2)$ povsem določimo že s funkcijo za $p_2 = 1$. Torej lahko za študij $L(p, q)$ -barvanj študiramo kar $L(x, 1)$ -barvanja.

Griggs in Jin [3] sta dokazala, da je $\lambda(G; x, 1)$ zvezna odeskoma linearna funkcija.

Dokažimo sedaj prvo zgornjo mejo za razpon, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [1]:

Trditev 8.3. Naj bo G graf z najvišjo stopnjo Δ . Potem velja $\lambda(G; 2, 1) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.

Dokaz. Poljubno uredimo točke grafa in jih po vrsti barvamo z najnižjo dovoljeno barvo. Točka $v \in V(G)$ ima največ Δ sosedov in tako največ $\Delta(\Delta - 1)$ točk na razdalji dva. Ko želimo pobarvati v je tako prepovedanih največ $3\Delta + \Delta^2 - \Delta$ barv. Torej je razpon kvečjemu $\Delta^2 + 2\Delta$, saj začnemo z barvo 0 in imamo tako na voljo $\Delta^2 + 2\Delta + 1$ barv. \square

Očitna spodnja meja pa je $\Delta + 1$, ki jo dosežemo z grafom $K_{\Delta, 1}$ za $\Delta \geq 2$.

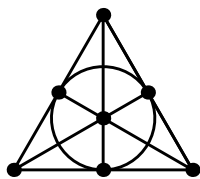
Končna projektivna ravnina reda n je množica $n^2 + n + 1$ točk s sledečimi lastnostmi:

1. Poljubni dve točki tvorita premico,
2. Poljubni dve premici se sekata v eni točki,
3. V vsaki točki se seka $n + 1$ premic in
4. Vsaka premica vsebuje $n + 1$ točk.

Taka projektivna ravnina obstaja če je n potenca praštevila. Znana hipoteza pravi, da so to edine končne projektivne ravnine, ki obstajajo. Dokaz te hipoteze pa je eden izmed pomembnejših nerešenih problemov v diskretni matematiki.

Pravimo, da je graf G incidenčni graf projektivne ravnine $\Pi(n)$ reda n , če je $G = (A, B, E)$ dvodelen graf, da velja

- (1) $|A| = |B| = n^2 + n + 1$,
- (2) vsak $a \in A$ predstavlja točko p_a v $\Pi(n)$ in vsak $b \in B$ predstavlja premico l_b v $\Pi(n)$,
- (3) $E = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B \text{ tako da velja } t_a \in p_b \text{ v } \Pi(n)\}$.



Slika 29: Končna projektivna ravnina reda 2 (Fanova ravnina)

Iz definicije $\Pi(n)$ vemo, da je tak G $(n + 1)$ -regularen. Za vsak $x, y \in A$ je $d_G(x, y) = 2$ in za vsak $u, v \in B$ je $d_G(u, v) = 2$. Prav tako, če $a \in A$ in $b \in B$ nista sosednja, sta na razdalji $d_G(a, b) = 3$. V [4] imamo sledeči izrek.

Trditev 8.4. Če je $G = (A, B, E)$ incidenčni graf projektivne ravnine reda n je $\lambda(G; 2, 1) = n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$, kjer je $\Delta = n + 1$ maksimalna stopnja grafa G .

Dokaz. Pokažimo najprej spodnjo mejo. V A imamo $n^2 + n + 1$ točk in poljubni dve sta na razdalji dve. Torej morata poljubni dve točki biti pobarvani različno. Torej potrebujemo razpon enak vsaj $n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$.

Pomožna definicija: *Prيرهjanje (matching)* grafa G je množica disjunktnih povezav, torej množica povezav, za katero velja, da poljubni dve povezavi nimata skupne točke. *Popolno prierejanje (perfect matching)* je prierejanje z $\frac{n}{2}$ povezavami torej največje možno. To seveda pomeni, da imajo lahko le grafi s sodo mnogo točkami popolna prierejanja.

Lema 8.5. (*Hallov kriterij*): Naj bo A neka množica točk, potem je množica $N(A)$ množica sosedov točk iz A . Dvodelen graf G s particijama X in Y ima popolno prierejanje natanko tedaj ko velja $|N(A)| \geq |A|$ za vse podmnožice $A \subset X$. Brez dokaza.

Za zgornjo mejo si oglejmo komplementarni dvodelen graf $G' = K_{n,n} - E(G)$. Ta graf je dvodelen in n^2 regularen, saj je G $n + 1$ -regularen. Pogoj Hallovega kriterija je torej izpolnjen, torej ima G' popolno prierejanje. To pomeni, da imamo $n^2 + n + 1$ povezanih parov točk. Graf je dvodelen torej ima vsak tak par eno točko v A in drugo v B . Vsakega od teh parov točk lahko v originalnem grafu G pobarvamo z isto barvo, saj tam te točke niso povezane in hkrati niso na razdalji dve. Iz dokaza spodnje meje vidimo, da

bo barvanje pravo, če bodo te barve paroma različne in tako smo dokazali še zgornjo mejo. \square

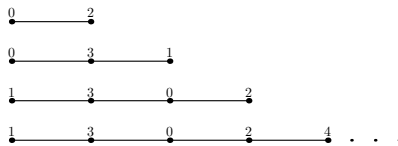
8.4 BARVANJA POTI, CIKLOV IN DREVES

Poglejmo si sedaj $L(2,1)$ -barvanja za poti, cikle in drevesa.

Trditev 8.6. Naj bo P_n pot na n točkah. Potem velja:

- (i) $\lambda(P_2; 2, 1) = 2;$
- (ii) $\lambda(P_3; 2, 1) = \lambda(P_4; 2, 1) = 3;$
- (iii) $\lambda(P_n; 2, 1) = 4$ za $n \geq 5.$

Dokaz. (i) Očitno. (ii) Barvanji: 0, 3, 1 in 1, 3, 0, 2 Poti dolžine tri ne moremo $L(2,1)$ -pobarvati s tremi barvami, saj moramo P_2 pobarvati z najmanj dvema. Preostala tretja barva pa ne more biti sosednja nobeni že pobarvani točki. (iii) Pot barvamo z barvami v tem vrstnem redu: 1, 3, 0, 2, 4, ... P_5 pa se ne da pobarvati s štirimi barvami saj imamo v množici $\{0, 1, 2, 3\}$ le tri možne pare za sosednje točke (0, 2), (0, 3) ter (1, 3), kar pa ni dovolj, da bi sestavili pot dolžine pet. \square



Slika 30: $L(p, q)$ -barvanje poti

Trditev 8.7. Naj bo C_n cikel na n točkah. Potem je $\lambda(C_n; 2, 1) = 4$ za katerikoli n .

Dokaz. Za $n = 3, 4$ je zelo lahko pokazati trditev. Naj bo sedaj $n \geq 5$. Vsak cikel dolžine vsaj pet vsebuje kot podgraf pot dolžine pet. Za to pa že vemo, da ima razpon $\lambda(P_5; 2, 1) = 4$ iz prejšnje trditve. Torej imamo spodnjo mejo $\lambda(C_n; 2, 1) \geq 4$, sedaj pa želimo dokazati, da velja še $\lambda(C_n; 2, 1) \leq 4$. Dovolj je torej pokazati, da obstaja $L(2,1)$ -barvanje cikla s petimi barvami. Uredimo točke cikla v_0, \dots, v_{n-1} kot se nahajajo na ciklu, torej v_i je sosednja z v_{i+1} , $0 \leq i \leq n-2$ in v_0 je sosednja z v_{n-1} . Definirajmo barvanje:

- (1) Če je $n \equiv 0 \pmod{3}$ naj bo

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{če } i \equiv 0 \pmod{3}; \\ 2, & \text{če } i \equiv 1 \pmod{3}; \\ 4, & \text{če } i \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

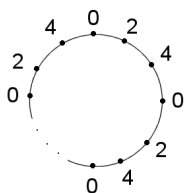
- (2) Če je $n \equiv 1 \pmod{3}$ predefiniramo konec barvanja iz (1) tako:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & i = n - 4; \\ 3, & i = n - 3; \\ 1, & i = n - 2; \\ 4, & i = n - 1. \end{cases}$$

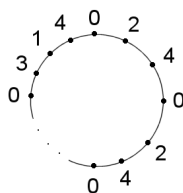
(3) Če je $n \equiv 2 \pmod{3}$ predefiniramo konec barvanja iz (1) tako:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1, & i = n - 2, \\ 3, & i = n - 1. \end{cases}$$

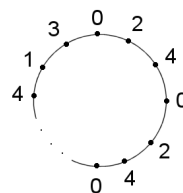
f je očitno $L(2, 1)$ -barvanje cikla C_n za vsak n . Torej $\lambda(C_n; 2, 1) \leq 4$ in s tem je naša trditev dokazana. \square



Slika 31: $n \equiv 0 \pmod{3}$



Slika 32: $n \equiv 1 \pmod{3}$



Slika 33: $n \equiv 2 \pmod{3}$

Trditev 8.8. Naj bo T drevo z največjo stopnjo $\Delta \geq 1$. Velja

$$\Delta + 1 \leq \lambda(T; 2, 1) \leq \Delta + 2.$$

Dokaz. Ker T vsebuje $K_{\Delta, 1}$, vemo da velja $\lambda(T; 2, 1) \geq \Delta + 1$. Zgornjo mejo pa dobimo s požrešnim algoritmom. Najprej uredimo točke $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ tako, da za vsak $i > 1$ velja v_i je sosednja le z točko eno iz $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. To je možno, saj je T drevo. Pobarvajmo v_1 z barvo nič. Sedaj po vrsti barvamo točke z najmanjšo možno barvo. V i -tem koraku je točka v_i sosednja z eno $v_j, j < i$ in za dva oddaljena od največ $\Delta - 1$ točk. To da skupaj največ $\Delta + 2$ prepovedi, mi pa imamo $\Delta + 3$ barv. \square

Oglejmo si še eno zanimivo povezavo med razdaljnim barvanjem in iskanjem Hamiltonske poti.

Trditev 8.9. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

- (1) Obstaja injekcija $f : V(G) \rightarrow [0, |V| - 1]$, da velja $|f(u) - f(v)| \geq 2$ za vsako povezavo $u, v \in E(G)$;
- (2) G^c ima Hamiltonsko pot.

Dokaz. (1) \Rightarrow (2): Naj bo f injekcija kot v (1). Ker je f injektivna obstaja inverz f^{-1} . Uredimo točke $V(G)$: $v_i = f^{-1}(i), 0 \leq i \leq |V| - 1$. Potem je v_i sosednja v_{i+1} v G^c za $0 \leq i \leq |V| - 1$. Torej je pot $v_0 v_1 \dots v_{|V|-1}$ Hamiltonska pot v G^c .

(2) \Rightarrow (1): Naj bo $P = v_0, v_1 \dots v_{|V|-1}$ Hamiltonska pot v G^c . Definiramo funkcijo $f : V(G) \rightarrow [0, |V| - 1]$ $f(v_i) = i$, $0 \leq i \leq |V| - 1$. f je očitno injektivna. Naj bo sedaj $\{t, u\} \subseteq V(G)$. Velja $f(t) = f(v_i) = i$ in $f(u) = f(v_j) = j$ za neka i, j hkrati pa velja še $|i - j| \geq 2$, saj t in u nista povezani v G^c . Torej je f injekcija, ki jo potrebujemo. \square

8.5 $L(p, q)$ -BARVANJA - DODATEK

V tem dodatku se na kratko seznanimo z nekaj naprednimi lastnostmi $L(p, q)$ -barvanj.

Scaling Property: Za končen graf G in realna števila $d, k_i \geq 0$; $i = 1, \dots, p$ velja $\lambda(G; d \cdot k_1, \dots, d \cdot k_p) = d \cdot \lambda(G; k_1, \dots, k_p)$.

Ostale lastnosti $\lambda(G; k_1, \dots, k_p)$:

- $\lambda(G; k_1, \dots, k_p)$ je zvezna kosoma linearna funkcija spremenljivk k_i ; $i = 1, \dots, p$ iz končnega števila kosov z nenegativnimi celimi koeficienti.
- Zaradi zveznosti je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, \dots, k_p)$ za racionalne k_i , zaradi Scaling Property pa je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, \dots, k_p)$ za celoštevilске k_i .
- Primer $p = 2$:
Vemo že, da je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, k_2)$ za celoštevilске k_1 in k_2 . Zaradi Scaling Property pa lahko funkcijo $\lambda(G; k_1, k_2)$ obravnavamo kot funkcijo $\lambda(G; k, 1)$ ene same spremenljivke $k = \frac{k_1}{k_2}$. Torej je dovolj, da poznamo $\lambda(G; k, 1)$ za racionalne k . D-Set Theorem nam zagotavlja, da je to zvezna kosoma linearna nepadajoča funkcija iz končnega števila kosov oblike $mk + n$; $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$.
- $\lambda(G; 1, 0) = \chi(G) - 1$, $\lambda(G; 1, 1) = \chi(G^2) - 1$

Posledica 8.10 (Griggs, Yeh). *Za vsak graf maksimalne stopnje $\Delta \geq 2$ obstaja $L(2, 1)$ -barvanje z razponom največ Δ^2 .*

Trenutno najboljša zgornja meja je $\Delta^2 + \Delta - 2$. Znani so grafi, ki zahtevajo razpon $\Delta^2 - \Delta$, ne pa tudi grafi, ki zahtevajo večji razpon.

8.6 ZAKLJUČEK

Povedali smo kaj je razdaljno barvanje in zakaj je pomembno pri določanju frekvenc oddajnikov. Sedaj točno poznamo $L(2, 1)$ -barvanja poti, ciklov, dreves in incidenčnih grafov projektivnih ravnin. Nakazali smo pomembno hipotezo Δ^2 in pokazali, da mora biti dejanska meja blizu Δ^2 . Ugotovili smo tudi, da je razdaljno barvanje težak problem, torej NP poln. Bralec, ki ga zanima več, si lahko ogleda članek [5]. Tam je natančno obdelano $L(x, 1)$ -barvanje posebne družine Kneserjevih grafov, ki jih dobimo kot komplement povezavnega grafa na polnem grafu K_n .

LITERATURA

- [1] J. R. Griggs, R. K. Yeh: *Labelling graphs with a condition at distance 2*, SIAM J. Discrete Math. 5 (1992), 586–595.
- [2] D. Gonçalves, *On the $L(p, 1)$ -labeling of graphs*, Discrete Math. and Theor. Comp. Science AE (2005), 81–86.
- [3] J. R. Griggs, X. T. Jin: *Real number graph labellings with distance conditions*, izide v SIAM J. Discrete Math.
- [4] R. K. Yeh: *Labelling graphs with a condition at distance two*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, SC, 1990.
- [5] R. Erman, S. Jurečič, D. Kral, K. Stopar, N. Stopar, *Optimal real number graph labelings of a subfamily of Kneser graphs*, University of Ljubljana and IMFM Preprint Series, 2006.

9.1 UVOD

Uradni začetki raziskav o popolnih grafih segajo v leto 1960, ko se je raziskovanja lotil Claude Berge [7], [8]. Claude Berge je bil francoski matematik, poznan po modernih odkritjih v kombinatoriki in teoriji grafov. V teoriji grafov je še posebej pomembna njegova domneva o popolnih grafih, katera pa je bila dokazana kar 40 let kasneje s strani Chudnovskyja, Robertsona, Seymoura in Thomasa [3]. Danes se Bergeova domneva imenuje tudi Krepki izrek o popolnih grafih (Strong perfect graph theorem).

Raziskovanja popolnosti grafov pa se je lotil tudi madžarsko-ameriški matematik László Lovász [9], [10], [11]. Rezultat njegovih raziskav je bila posledica Bergeove domneve, ki jo imenujemo Šibki izrek o popolnih grafih (Weak perfect graph theorem).

Omenjena izreka sta glavna tema te seminarske naloge, spoznali pa bomo tudi nekaj drugih znanih izrekov, primere popolnih grafov, nepopolne grafe in operacije, ki ohranjajo popolnost grafa. Popolni grafi so sicer zelo pomemben objekt v teoriji grafov, v linearnem programiranju in kombinatorični optimizaciji.

9.2 ZAČETNE DEFINICIJE

Oglejmo si nekaj osnovnih definicij:

- Podmnožica vozlišč grafa $G, K \subseteq V(G)$ je *klika*, če za poljubni različni vozlišči $u, v \in K$ velja, da je $uv \in E(G)$.
- Podmnožica vozlišč grafa $G, S \subseteq V(G)$ je *antiklika* ali *neodvisna množica točk*, če za vsaka $u, v \in S$ velja, da $uv \notin E(G)$.
- *Število klike*, $\omega(G)$, je velikost največje klike v grafu G .

- Število pokritja s klikami, $\kappa(G)$, je najmanjše število klik, ki pokrijejo vozlišča grafa G .
- Neodvisnostno število grafa G , $\alpha(G)$, je velikost največje neodvisne množice v grafu G .
- Kromatično število, $\chi(G)$, je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo, da pobarvamo vozlišče grafa G tako, da sta poljubni sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama. To število je enako številu pokritja z antiklikami oz. najmanjšemu številu neodvisnih množic, ki pokrijejo vozlišča grafa G .
- Graf H je podgraf grafa G , oznaka $H \subseteq G$, če velja $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.
- Enostavni graf na n vozliščih imenujemo polni graf, če so vsa vozlišča paroma sosednje. Označimo ga s K_n .

V poljubnem grafu G veljajo naslednje lastnosti:

- $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$
- $\kappa(G) = \chi(\overline{G})$
- $\omega(G) \leq \chi(G)$
- $\alpha(G) \leq \kappa(G)$.

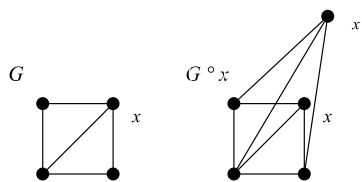
Prvi dve enakosti sta očitni, saj neodvisne množice v komplementu grafa ustrezajo klikam v originalnem grafu. Tretja neenakost je očitna, saj je jasno, da mora biti število barv v pravilnem barvanju grafa G večje ali enako moči največje klike. Zadnja neenakost pa sledi iz prvih treh, saj velja:

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G}) = \kappa(G).$$

Definicija 9.1. Definirajmo tri lastnosti:

- P_1 : Graf G je χ -popoln, če velja $\omega(G_A) = \chi(G_A)$ za vsak $A \subseteq V(G)$.
- P_2 : Graf G je α -popoln, če velja $\alpha(G_A) = \kappa(G_A)$ za vsak $A \subseteq V(G)$.
- P_3 : Za vsak $A \subseteq V(G)$ velja $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$.

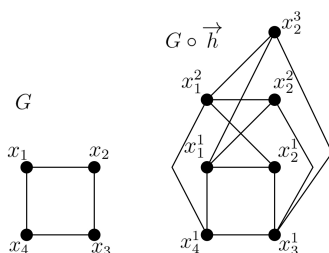
Graf G je popoln, če je χ -popoln in α -popoln.

Slika 34: Graf $G \circ x$

9.3 IZREK O POPOLNIH GRAFIH

Naj bo $G = (V, E)$ graf, $x \in V$ pa vozlišče grafa G . Graf $G \circ x$ dobimo iz grafa G tako, da množici vozlišč dodamo novo vozlišče x' , ki je povezana z vsemi sosedi vozlišča x . Taki operaciji pravimo pomnožitev grafa z vozliščem. Prikazana je na sliki 34.

Naj bodo x_1, x_2, \dots, x_n vozlišča grafa G in naj bo $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ vektor nenegativnih celih števil. Pomnožitev vozlišč grafa G z vektorjem \vec{h} predstavlja graf $H = G \circ \vec{h}$, v katerem množica vozlišč vsebuje h_i kopij vsakega vozlišča $x_i \in V(G)$, in kjer so kopije vozlišča x_i sosednje x_j v H natanko tedaj, ko sta vozlišči x_i in x_j sosednji vozlišči v grafu G . Primer je na prikazan na sliki 35.

Slika 35: Primer pomnožitve vozlišč: $h = (2, 3, 1, 1)$

Lema 9.2 ([4], str. 53). Naj bo H graf, ki ga dobimo iz grafa G s pomnožitvijo vozlišč. Potem velja:

- Če je graf G χ -popoln, je tudi graf H χ -popoln.
- Če je graf G α -popoln, je tudi graf H α -popoln.

Lema 9.3 ([4], str. 54). Naj bo G tak neusmerjen graf, da za njegov poljuben pravi inducirani podgraf velja lastnost P_2 . Naj bo H graf, ki ga dobimo iz grafa G s pomnožitvijo vozlišč in naj za graf G velja lastnost P_3 . Potem tudi za graf H velja lastnost P_3 .

Izrek 9.4 ([4], str. 56). Naj bo $G = (V, E)$ enostaven neusmerjen graf. Naslednje trditve so ekvivalentne:

- $\omega(G_A) = \chi(G_A)$ za vsak $A \subseteq V(G)$;
- $\alpha(G_A) = \kappa(G_A)$ za vsak $A \subseteq V(G)$;
- $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$ za vsak $A \subseteq V(G)$.

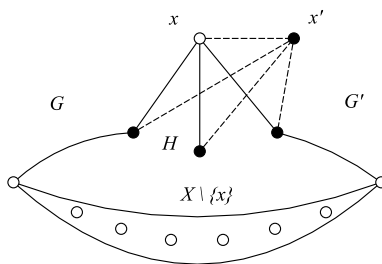
Ker je graf, ki je χ -popoln in α -popoln, popoln, bomo od zdaj naprej take grafe poimenovali popolni grafi.

Iz izreka 9.4 in obeh lem 9.2 in 9.3 zdaj očitno sledita še posledica in pa izrek:

Posledica 9.5. *Graf G je popoln natanko tedaj, ko je poljuben graf H , ki ga dobimo iz grafa G s pomnožitvijo vozlišč, popoln.*

Izrek 9.6 (Šibki izrek o popolnih grafih, [1], str. 112). *Graf G je popoln natanko takrat, kadar je popoln njegov komplement.*

Podali bomo dva dokaza tega izreka. Na prvi dokaz o popolnih grafih se pripravimo z naslednjo lemo. Naj bo G graf in $x \in V(G)$ vozlišče ter G' graf pridobljen iz G z dodajanjem vozlišča x' in povezovanjem tega vozlišča z x in z vsemi sosednimi vozlišči x . Pravimo, da je G' pridobljen iz G z razširitvijo vozlišča x do roba xx' .



Slika 36: Razširitev vozlišča x . Beli krogi predstavljajo vse ostale točke v grafu G , ki niso povezane s točko x , zajete pa so z dvema črtama, ki predstavljajo povezave med temi točkami.

Lema 9.7 ([1], str. 113). *Vsak graf pridobljen iz popolnega grafa z razširitvijo vozlišča je spet popolni graf.*

Dokaz. Uporabimo postopek indukcije na številu vozlišč izbranega popolnega grafa. V bazi indukcije razširimo vozlišče iz K_1 na K_2 , K_2 pa je popolni graf. Za indukcijski korak naj bo G netrivialen popolni graf in naj bo G' pridobljen iz G z razširitvijo vozlišča $x \in G$ do roba xx' . Za naš dokaz, da je G' graf popoln je dovolj pokazati, da velja $\chi(G') \leq \omega(G')$: vsak pravi inducirani podgraf H grafa G' je ali izomorfen induciranimu podgrafu G ali pridobljen iz pravega inducirane podgrafa G z razširitvijo x ; v vsakem primeru je H popolni graf po predpostavki in indukcijski hipotezi in je lahko zato pobarvan z $\omega(H)$ barvami. Vemo, da v poljubnem grafu G' velja lastnost $\omega(G') \leq \chi(G')$. Če dokažemo, da velja tudi obratno $\chi(G') \leq \omega(G')$,

potem za graf G' velja enakost $\omega(G') = \chi(G')$. Če je za nek graf ta enakost izpolnjena, je ta graf popoln.

Naj bo $\omega(G) =: \omega$; potem je $\omega(G') \in \{\omega, \omega + 1\}$. Če velja $\omega(G') = \omega + 1$, potem

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega + 1 = \omega(G').$$

Torej za ta primer smo dokazali, da velja $\chi(G') \leq \omega(G')$. Nato še predpostavimo, da velja $\omega(G') = \omega$. Potem x ne leži v $K_\omega \subseteq G$: skupaj z x' bi to prineslo $K_{\omega+1}$ v G' . Pobarvajmo G z ω barvami. Ker vsak $K_\omega \subseteq G$ ustreza barvnemu razredu množice X , ki ne vključuje x , ima graf $H := G - (X \setminus \{x\})$ klično število $\omega(H) < \omega$ (slika 36). Ker je G popolni graf bomo lahko tako pobarvali H z $\omega - 1$ barvami. Množica X je neodvisna zato je tudi niz $(X \setminus \{x\}) \cup \{x'\} = V(G' - H)$ neodvisen. Tako lahko razširimo $(\omega - 1)$ -barvanje grafa H na ω -barvanje grafa G' in tako pokažemo, da velja $\chi(G') \leq \omega = \omega(G')$ kot smo želeli. \square

Sedaj imamo razjasnjene vse pojme in se lahko lotimo dokaza izreka o popolnih grafih, 9.6. Dokaz sicer najdemo v literaturi [1], str. 112.

Dokaz. Dokazovanja se lotimo z indukcijo po številu vozlišč grafa G . Z uporabo indukcije bomo pokazali, da je komplement \bar{G} kateregakoli grafa G spet popoln graf. Očitno je, da izrek velja za graf z enim samim vozliščem in brez povezav, zato gledamo grafe na dveh in več vozliščih, torej grafe za katere velja $|G| \geq 2$. Ker velja, da je vsak induciran podgraf \bar{G} komplement inducirane podgrafa G , je primerno uporabiti indukcijo. Postavimo $\alpha(G) =: \alpha$ in naj bo \mathcal{A} množica vseh vozlišč A v grafu G z lastnostjo $|A| = \alpha$, ter naj \mathcal{K} označuje množico vseh vozlišč končnih podgrafov grafa G . Za popolnost \bar{G} je dovolj dokazati neenakost $\chi(\bar{G}) \leq \omega(\bar{G}) (= \alpha)$. Da neenakost dokažemo, moramo najti množico $K \in \mathcal{K}$, tako da bo veljalo $K \cap A \neq \emptyset$ za vse $A \in \mathcal{A}$ in nato pokazati, da velja

$$\omega(\bar{G} - K) = \alpha(G - K) < \alpha = \omega(\bar{G})$$

in po indukcijski predpostavki

$$\chi(\bar{G}) \leq \chi(\bar{G} - K) + 1 = \omega(\bar{G} - K) + 1 \leq \omega(\bar{G}),$$

kar pa ravno želimo. Recimo, da ne obstaja tak K , da velja, da za vsak $K \in \mathcal{K}$ obstaja množica $A_k \in \mathcal{A}$ z lastnostjo $K \cap A_k = \emptyset$. Zamenjajmo vsako vozlišče x v grafu G s končnim grafom G_x reda

$$k(x) := |\{K \in \mathcal{K} \mid x \in A_k\}|,$$

ki združi vsa vozlišča G_x in G_y , ko sta x in y sosednji točki v G . Tako dobljen graf označimo z G' in ima množico vozlišč $\cup_{x \in V} V(G_x)$ in dve vozlišči $x \in G_x$ in $w \in G_y$ sta sosednji v G' , če in samo če velja $x = y$ ali $xy \in E$. Poleg tega lahko G' dobimo s ponavljajočo širitvijo točk iz grafa $G[\{x \in V \mid k(x) > 0\}]$. Tak graf je induciran podgraf od G , ki je popoln po predpostavki, torej je G' popoln. V splošnem,

$$\chi(G') \leq \omega(G'). \quad (19)$$

Da bi dobili protislovje z (19), sedaj izračunamo dejanske vrednosti $\omega(G')$ in $\chi(G')$. Iz strukture G' , ima vsak maksimalno končen podgraf grafa G' obliko $G'[\cup_{x \in V} G_x]$ za nekatere $X \in \mathcal{K}$. Torej obstaja množica $X \in \mathcal{K}$, tako da je

$$\begin{aligned} \omega(G') &= \sum_{x \in X} k(x) \\ &= |\{(x, K) : y \in X, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |X \cap A_K| \\ &\leq |\mathcal{K}| - 1; \end{aligned} \tag{20}$$

kjer zadnja neenakost izhaja iz dejstva, da je $|X \cap A_k| \leq 1$, za vse K (kjer je A_k neodvisna in $G[X]$ končen graf) in $|X \cap A_x| = 0$ (z izbiro A_x). Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} |G'| &= \sum_{x \in V} k(x) \\ &= |\{(x, K) : x \in V, K \in \mathcal{K}, x \in A_K\}| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{K}} |A_K| \\ &= |\mathcal{K}| \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Ker $\alpha(G') \leq \alpha$ zaradi strukture G' , to pomeni

$$\chi(G') \geq \frac{|G'|}{\alpha(G')} \geq \frac{|G'|}{\alpha} = |\mathcal{K}|. \tag{21}$$

Združimo (20) in (21) skupaj, ter dobimo

$$\chi(G') \geq |\mathcal{K}| > |\mathcal{K}| - 1 \geq \omega(G'),$$

kar je v protislovju z (19). □

Izrek 9.8 (Lovász 1972, [1], str. 115). *Graf G je popoln natanko takrat, kadar velja*

$$|H| \leq \alpha(H) \cdot \omega(H) \tag{22}$$

za vsak inducirani podgraf $H \subseteq G$.

Podamo zgolj idejo dokaza, celoten dokaz pa si lahko ogledamo v literaturi [1], str. 115.

Dokaz. Imamo množico vozlišč $V(G) =: V =: \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in postavimo $\alpha := \alpha(G)$ in $\omega := \omega(G)$. Neenakost (22) neposredno pomeni: če je graf G popoln, potem lahko vsak podgraf H grafa G razdelimo na največ $\omega(H)$ barvnih razredov, ki vsebujejo največ $\alpha(H)$ vozlišč in (22) sledi. Da dokažemo zadostnost zgornjega pogoja, uporabimo indukcijo po vseh vozliščih grafa G in privzamemo, da vsak inducirani podgraf H grafa G zadošča (22)

in predpostavimo, da G ni popoln. Po indukcijski predpostavki je vsak inducirani podgraf grafa G popoln. Že takoj lahko pokažemo, da graf G je popoln, saj vsaka neprazna neodvisna množica $U \subseteq V$ zadošča

$$\chi(G - U) = \omega(G - U) = \omega.$$

Dejansko, ko prva enakost sledi iz definicije popolnosti grafa $G - U$, za drugo enostavno velja: neenakost " \leq " bi bila očitna, ko bi $\chi(G - U) < \omega$ pomenil $\chi(G) \leq \omega$, torej je graf G popoln v nasprotju z našo predpostavko. Potrebno je še dokazati neenakost (22), kjer pa si pomagamo z barvnimi razredi grafa in uporabo nekaj algebraične teorije. \square

9.4 PRIMERI POPOLNIH GRAFOV

Naštejmo nekaj skupin grafov, ki so popolni. To so polni grafi, intervalni grafi, tetivni grafi in razdeljeni grafi (split graphs). Popolni so tudi dvodelni grafi in pa komplementi dvodelnih grafov. Če želimo te primere obravnavati bolj podrobno, moramo za začetek dokazati, da so tetivni grafi popolni. Graf je tetiven, če ima vsak njegov cikel, dolžine vsaj 4, tetivo ali drugače, če ne vsebuje induciranih ciklov razen trikotnikov. Da lahko pokažemo, da so tetivni grafi popolni, bomo za začetek karakterizirali njihovo strukturo. Če je G graf z induciranimi podgrafi G_1, G_2 in S , tako da $G = G_1 \cup G_2$ in $S = G_1 \cap G_2$, pravimo da G nastane iz G_1 in G_2 z lepljenjem teh grafov vzdolž S .

Trditev 9.9 ([1], str. 111). *Graf je tetiven le, če je lahko rekurzivno zgrajen z lepljenjem vzdolž polnih podgrafov, z začetkom s polnimi grafi.*

Trditev 9.10 ([1], str. 112). *Vsak tetivni graf je popolni graf.*

Dokaz. Ker so polni grafi popolni, zadostuje po trditvi 9.9 pokazati, da je vsak graf G , pridobljen iz popolnih grafov G_1 in G_2 tako da ju lepimo skupaj ob polnem podgrafu S , zopet popolni graf. Naj bo $H \subseteq G$ inducirani podgraf, pokažimo, da velja $\chi(H) \leq \omega(H)$.

Naj bo $H_i := H \cap G_i$ za $i=1,2$ in naj bo $T := H \cap S$. Potem je T zopet poln graf in H dobimo, če H_1 in H_2 lepimo ob T . Kot inducirani podgraf G_i je lahko vsak H_i pobarvan z $\omega(H_i)$ barvami. Ker je T poln graf in pobarvan z določenim številom barv, dve taki barvanji, ena od H_1 in ena od H_2 , sta lahko združeni v barvanje H z največjim številom barv $\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$ - če je potrebno z zamenjavo vrstnega reda barv v enem izmed H_i . \square

Pokažimo še, da so dvodelni grafi zelo lep primer za popolnost.

Definicija 9.11. Graf G je *dvodelen*, če lahko njegovo množico vozlišč razdelimo na dve neodvisni množici.

Znano je, da je graf dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje ciklov lihe dolžine. Ta karakterizacija nam bo pomagala pri dokazu naslednjega izreka:

Izrek 9.12. *Vsak dvodelen graf je popoln.*

Dokaz. Vzemimo dvodelen graf G in $A \subseteq V(G)$. Če v grafu G_A ni nobene povezave, je $\chi(G_A) = 1 = \omega(G_A)$. Če je v grafu G kakšna povezava, je zaradi dvodelnosti $\chi(G_A) = 2$ in ker v grafu ni trikotnika, torej cikla lihe dolžine, je $\omega(G_A) = 2$. Torej velja $\chi(G_A) = \omega(G_A)$. Graf G je popoln. \square

Posledica 9.13. *Drevesa so popolni grafi.*

Dokaz. Vsako drevo je dvodelni graf, zato so drevesa popolni grafi. \square

9.5 MINIMALNO NEPOPOLNI GRAFI IN BERGEOVA DOMNEVA

V tem poglavju si bomo ogledali grafe, ki jim do popolnosti le malo manjka in Bergeovo domnevo o popolnih grafih.

Definicija 9.14. Graf G , je *minimalno nepopoln graf*, če G ni popoln, vsak njegov inducirani podgraf pa je popoln.

Naslednja trditev je neposredna posledica definicije minimalnih nepopolnih grafov.

Trditev 9.15. *Naj bo G minimalno nepopoln graf in x poljubno vozlišče grafa G . Potem veljata naslednji enakosti: $\alpha(G - x) = \kappa(G - x)$ in $\omega(G - x) = \chi(G - x)$.*

Izrek 9.16 ([5], str. 209). *Naj bo G minimalno nepopoln graf z n vozlišči. Potem velja:*

- $n = \alpha(G)\omega(G) + 1$,
- $\alpha(G) = \kappa(G - x)$ in $\omega(G) = \chi(G - x)$ za vsako vozlišče $x \in V(G)$.

Dokaz. G naj bo minimalno nepopoln graf. Iz šibkega izreka o popolnih grafih lahko izpeljemo: $n > \alpha(G)\omega(G)$ in $n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x)$ za vsako vozlišče $x \in V$. Torej velja: $n - 1 \leq \alpha(G - x)\omega(G - x) \leq \alpha(G)\omega(G) < n$, iz česar pa lahko izpeljemo $n - 1 = \alpha(G - x)\omega(G - x)$, poleg tega pa velja še $\alpha(G) = \alpha(G - x) = \kappa(G - x)$ in $\omega(G) = \omega(G - x) = \chi(G - x)$. \square

Do danes so edini znani minimalno nepopolni grafi lihi cikli C_{2k+1} , za $k \geq 2$, in njihovi komplementi \bar{C}_{2k+1} . To lahko hitro preverimo. Cikel z lihimi številom vozlišč ni popoln graf, ker je $\alpha(C_{2k+1}) = k$ in $\kappa(C_{2k+1}) = k + 1$, poleg tega pa je $\omega(C_{2k+1}) = 2$ in $\chi(C_{2k+1}) = 3$. Poljuben podgraf cikla z lihimi številom vozlišč je množica poti, torej dvodelen in zato tudi popoln. Zato je C_{2k+1} minimalno nepopoln graf in po šibkem izreku o popolnih grafih je minimalno nepopoln tudi njegov komplement \bar{C}_{2k+1} .

Hipoteza 9.17 (Krepki izrek o popolnih grafih, Berge 1960, [1], str. 117). *Edini minimalno nepopolni grafi so lihi cikli in njihovi komplementi.*

Ekvivalentne oblike domneve so:

- Graf G je popoln natanko tedaj, ko v njem in v njegovem komplementu \bar{G} ni inducirane podgrafa, ki bi bil izomorfen lihemu ciklu s 5 ali več vozlišči: C_{2k+1} , $k \geq 2$.

- Graf G je popoln natanko tedaj, ko v njem ni inducirane podgrafa, ki bi bil izomorfen C_{2k+1} ali \bar{C}_{2k+1} , $k \geq 2$.
- Graf G je popoln natanko tedaj, ko je v G in v \bar{G} v vsakem ciklu z lihim številom vozlišč in dolžine več kot 5 vsaj ena tetiva.

Od tod potem sledi definicija, ki pravi:

Definicija 9.18. Enostaven graf G je *Bergeov graf*, če niti G , niti \bar{G} ne vsebuje inducirane podgrafa, ki bi bil izomorfen lihemu ciklu s pet ali več vozlišči.

Iz napisanega sledi, da so vsi popolni grafi tudi Bergeovi grafi, iz krepke domneve o popolnih grafih, pa sledi da so tudi vsi Bergeovi grafi popolni.

9.6 OPERACIJE, KI OHRANJAJO POPOLNOST

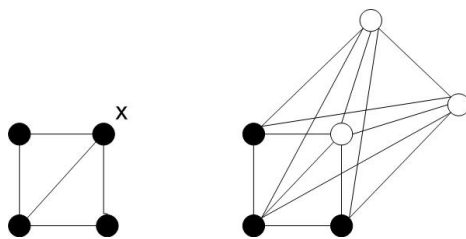
V tem poglavju bomo navedli nekaj operacij, ki ohranjajo popolnost in s pomočjo katerih lahko iz že znanih popolnih grafov konstruiramo nove popolne grafe.

Operacije, ki ohranjajo popolnost grafov so:

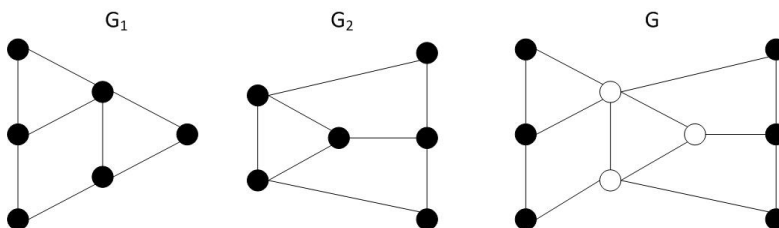
- *Induciran podgraf popolnega grafa je popoln graf.*
- *Komplement popolnega grafa je popoln graf.*
- *Graf dobljen s pomnožitvijo vozlišč popolnemu grafu je popoln graf.*
Če popolnemu grafu G pomnožimo vozlišča, dobimo nov graf $H = G \circ h$ in graf H je popoln.
- *Graf dobljen z razpihnenjem vozlišča v kliko je popoln graf.*
Operacija, ki je podobna operaciji pomnožitvi vozlišč, je razpihnenje vozlišča v kliko. Tu vsako vozlišče nadomestimo s kliko poljubne velikosti in tudi ta operacija ohranja popolnost. Primer je prikazan na sliki 37.
- *Graf dobljen s klično vsoto dveh grafov je popoln graf.* Zanimiva operacija pa je tudi klična vsota, kjer novi graf dobimo tako, da v danih dveh grafih G_1 in G_2 identificiramo kliko: $G = G_1 \cup G_2$ in $G_1 \cap G_2 = K$, kjer je K neka klika v G_1 in G_2 . Oglejmo si klično vsoto dveh grafov na spodnjem primeru, slika 38.

Zgled 9.19. Primer nakazuje razpihnenje vozlišča x v kliko velikosti tri. Vozlišča dodane klike so označene z belimi krogci.

Zgled 9.20. Graf G na sliki je dobljen iz grafov G_1 in G_2 s klično vsoto, kjer identificiramo kliko velikosti 3, katere vozlišča so v grafu G označene z belimi krogci.



Slika 37: Razpihnjenje vozlišča v kliko



Slika 38: Graf G dobljen iz grafov G_1 in G_2 s klično vsoto

9.7 ZAKLJUČEK

Namen seminarske naloge je bil spoznati grafe, pri katerem je kromatično število $\chi(G)$ poljubnega inducirane podgrafa G , enako številu klike $\omega(G)$. Take grafe imenujemo popolni grafi.

V prvem delu seminarske naloge smo spoznali osnovne definicije grafov, popolnih grafov in glavne izreke, ki veljajo v popolnih grafih. Kot glavni izrek smo spoznali Šibki izrek o popolnih grafih, izrek 9.6, ki pravi, da je graf G popoln natanko takrat, kadar je popoln njegov komplement. Za dokaz tega izreka smo potrebovali tudi nekaj drugih manjših izrekov in jih prav tako dokazali. Za lažjo predstavo in razumevanje lastnosti popolnih grafov smo omenjene definicije in izreke predstavili tudi na primerih. Tako smo spoznali, da so popolni grafi polni grafi, intervalni grafi, tetivni grafi, razdeljeni grafi, dvodelni grafi ter njihovi komplementi in tudi drevesa. Nekaj od teh trditev smo tudi dokazali. V nadaljevanju seminarske naloge smo spoznali tudi minimalno nepopolne grafe in pomembno domnevo, ki ji pravimo Bergova domneva. Imenuje se Krepki izrek o popolnih grafih, domneva 9.17, in pravi, da so edini minimalno nepopolni grafi lihi cikli pa njihovi komplementi. V zadnjem delu seminarske naloge pa smo si ogledali nekaj pomembnih operacij, katere ohranjajo popolnost grafa. To so inducirani graf, komplement grafa, pomnožitev vozlišča v grafu in pa razpihovanje vozlišča v kliko v grafu.

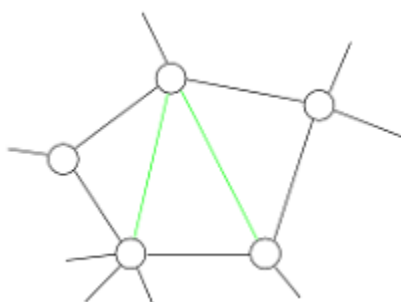
Za tiste bralce, ki bi želeli pridobiti več znanja na temo popolnih grafov, predlagamo podrobnejši pogled v navedeno literaturo na koncu seminarske naloge, saj je v nalogi zajet le majhen del vsebine. Priporočamo pa tudi knjigo z naslovom *Topics on Perfect Graphs*, ki sta jo napisala V. Chvátal in C. Berge.

LITERATURA

- [1] R. Diestel, *Graph Theory*, 2000, (Electronic Edition) (2000), 110–117.
- [2] U. Brandes, T. Erlebach, *Network Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [3] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., Thomas, R. (2006). *The strong perfect graph theorem*. *Ann. Math.*, 51–229.
- [4] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, 57, Elsevier, 2004, 51–60.
- [5] G. S. Gasparian, *Minimal Imperfect Graphs: A simple approach*, February 2, 1995, 209–212.
- [6] M. Alberti, *Small Survey on Perfect Graphs*, December 8, 2010, 1–12.
- [7] C. Berge, *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, 10 *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* 1961, 88.
- [8] C. Berge, *Perfect graphs*, Six Papers on Graph Theory, Calcutta: Indian Statistical Institute, 1963, 1–21.
- [9] L. Lovász, *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*, (*Discrete Math.* 2 (3)), 1972.
- [10] L. Lovász, *A characterization of perfect graphs*, (*J. Comb. Theory, Ser. B* 13 (2)), 1972.
- [11] L. Lovász, "Perfect graphs", *Selected topics in graph theory* 2, 1983, 55–87.

10.1 PREDSTAVITEV TETIVNIH GRAFOV

Graf je *tetiven* (ang. *chordal*), če ima vsak cikel dolžine 4 ali več tetivo. Kjer je *tetiva* (ang. *chord*) povezava med dvema vozliščema na ciklu, tetiva sama pa ni del cikla. Primer tetive je prikazan na sliki 39. Z drugimi besedami, v tetivnem grafu je največji cikel brez tetiv trikotnik C_3 oz. K_3 .

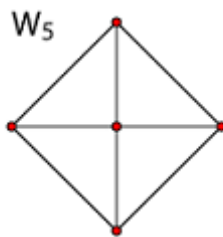
Slika 39: Tetivi v ciklu C_5

Oglejmo si, katere že poznane družine grafov spadajo med tetivne grafe:

- *poti, drevesa* (ker nimajo ciklov);
- *polni grafi* (ker imajo vse tetive).

Res je, da so tetivni grafi na prvi pogled sestavljeni iz trikotnikov. Toda bodimo pozorni, grafi z obliko koles so sicer sestavljeni iz trikotnikov, vendar pa ti grafi ne spadajo med tetivne grafe. Kot primer si oglejmo kolo W_5 na sliki 40, katerega zunanji cikel C_4 nima tetive.

Opazili smo, da so tetivni grafi sestavljeni iz polnih grafov zlepljenih v drevesno strukturo. Tetivne grafe res gradimo z nekakšnim lepljenjem, in

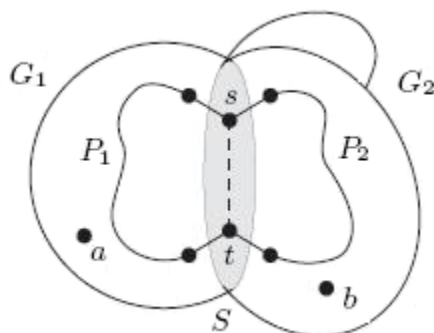
Slika 40: Kolo W_5 ne spada med tetivne grafe

sicer po naslednjem postopku. Naj ima graf G inducirane podgrafe G_1, G_2 in S , tako da velja: $G = G_1 \cup G_2$ in $S = G_1 \cap G_2$ in S je poln graf. Potem rečemo, da smo G sestavili z lepljenjem G_1 in G_2 vzdolž S .

Lema 10.1. *Graf G je tetiven natanko tedaj, ko ga lahko rekurzivno sestavimo z lepljenjem vzdolž polnih grafov, začnemo z polnim grafom.*

Dokaz. Če je graf G sestavljen z lepljenjem dveh tetivnih grafov G_1 in G_2 vzdolž polnega inducirane podgrafa, potem je G ravno tako tetiven. Pokažimo, da ima v G vsak inducirani cikel z štirimi vozlišči ali več tetivo. Imamo namreč dve možnosti. Ena izmed situacij je, da cikel leži bodisi samo v G_1 bodisi samo v G_2 . Tu nimamo težav, saj sta G_1 in G_2 tetivna. Druga možna situacija je, da cikel leži v G_1 in G_2 . V tem primeru ima cikel vsaj dva vozlišča v preseku G_1 in G_2 . Toda, ker je presek poln inducirani podgraf in tako obstaja povezava med poljubnima vozliščema, lahko cikel razdelimo na dva manjša cikla. Posamezen manjši cikel pa je inducirani podgraf v tetivnem grafu G_1 ali v tetivnem grafu G_2 . S tem smo dokazali, da je vsak graf skonstruiran po zgoraj opisanem postopku tetiven.

Za dokazovanje v nasprotno smer predpostavimo, da je graf G tetiven. Sedaj moramo z indukcijo na $|V(G)|$ pokazati, da lahko G skonstruiramo po zgoraj opisanem postopku. Trivialno je preveriti, če je G poln graf. Zato sedaj predpostavimo, da G ni poln graf in $|V(G)| > 1$. Očitno je, da so vsi manjši grafi sestavljeni po opisanem postopku, saj je ena sama točka poln graf K_1 . Naj bosta sedaj a in b dve nesosedni vozlišči in naj bo $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ najmanjša množica vozlišč, ki loči a in b . Označimo z C komponento $G - x$, ki vsebuje a . Definirajmo $G_1 := G[V(C) \cup X]$ in $G_2 := G - C$. Torej je G sestavljen z lepljenjem G_1 in G_2 vzdolž $S := G[X]$. Toda G_1 in G_2 sta oba tetivna, saj sta po indukciji skonstruirana na enak način. Dovolj je pokazati, da je S poln inducirani podgraf grafa G . Predpostavimo, da s in t nista sosedni vozlišči v S . Ker je $X = V(S)$ minimalna množica vozlišč, ki loči a in b , imata torej oba s in t sosede v C . Torej v $G_1 - X$ obstaja najkrajša pot P_1 od s do t . Po enakem razmisleku obstaja najkrajša pot P_2 od s do t v $G_2 - X$. Tako smo skonstruirali cikel $P_1 \cup P_2$ dolžine najmanj 4, ki je brez tetive. Prišli smo v protislovje s predpostavko, da je G tetiven. Torej sta s in t povezana. Ker sta bila s in t poljubna, sledi, da je S poln inducirani podgraf grafa G . \square



Slika 41: Skica dokaza Leme 10.1

10.2 UMESTITEV TETIVNIH GRAFOV MED POPOLNE GRAFE

Graf G je *popoln* (ang. *perfect*), če za vsak induciran podgraf H grafa G velja:

$$\chi(H) = \omega(H).$$

Kjer je $\chi(H)$ dobro poznano kromatično število, z $\omega(H)$ pa smo označili moč največje klike v H . Posebej uporabna lastnost popolnih grafov je, da je komplement popolnega grafa tudi popoln graf, ki jo je dokazal *L. Lovász* leta 1972. Zaradi te lastnosti je teorija popolnih grafov prisotna tudi v Linearnem programiranju. Preplet teorije grafov in linearnega programiranja si lahko podrobneje ogledate v monografiji [1].

Med popolne grafe spadajo tudi nekatere že poznane družine grafov:

- *poti*: Največji induciran poln podgraf je K_2 in lahko jih pobarvamo z dvema barvama.
- *drevesa*: Enako kot poti imajo dravesa največji induciran poln podgraf K_2 in kromatično število je 2.
- *polni graf*: Očitno je vsak induciran graf poln podgraf.
- *dvodelni grafi*: Tudi tu je največji induciran poln graf K_2 in po definiciji se jih da obarvati z dvema barvama.
- *grafi povezav dvodelnih grafov*: Posplošitev Königovega izreka [3] nam pove, da je kromatičen indeks dvodelnega grafa $K_{m,n}$ enak maksimalni stopnji oziroma $\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})$. Kliko v grafu povezav tvori ravno množica tistih povezav v grafu, ki imajo skupno vozlišče. Torej velja:

$$\omega(L(K_{m,n})) = \Delta(K_{m,n}) = \chi'(K_{m,n}) = \chi(L(K_{m,n})).$$

- *tetivni grafi*: Dokaz sledi v nadaljevanju.
- *kolesa z lihimi številom vozlišč*: Ker imamo liho vozlišč, je zunanji cikel sode dolžine in ga lahko obarvamo z dvema barvama. Os pa moramo obarvati z novo tretjo barvo. Očitno je največji induciran poln podgraf K_3 .

Pokažimo sedaj, da vsak tetiven graf spada med popolne grafe.

Izrek 10.2. *Vsak tetiven graf je popoln graf.*

Dokaz. Uporabimo izrek 10.2 skupaj z lemo 10.1. Dobimo torej, da rekurzivni postopek za gradnjo tetivnih grafov velja tudi za popolne grafe. Torej je vsak graf G sestavljen z lepljenjem popolnih grafov G_1 in G_2 vzdolž polnega grafa S tudi popoln graf. Za dokaz izreka 10.2 moramo pokazati, da za vsak induciran podgraf H , velja $\chi(H) \leq \omega(H)$.

Označimo z $H_1 := H \cap G_1$, $H_2 := H \cap G_2$ in z $T := H \cap S$. Očitno je T poln graf in H sestavljen z lepljenjem H_1 in H_2 vzdolž T . Toda ker je H_1 induciran podgraf popolnega grafa G_1 , lahko tudi H_1 pobarvamo z $\omega(H_1)$ barvami. Za H_2 analogno velja $\chi(H_2) = \omega(H_2)$. Ker je H sestavljen iz H_1 in H_2 , lahko obarvamo H s kveĀtjemu $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$ barvami. Morda je potrebno v enem od H_1 ali H_2 permutirati barve, ker je T barvan dvakrat kot podgraf H_1 in kot podgraf H_2 . Pokazali smo, da za vsak induciran podgraf H , velja $\chi(H) \leq \omega(H)$. \square

10.3 BARVANJE TETIVNIH GRAFOV

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da je vsak tetiven graf tudi popoln. Torej je kromatično število grafa enako velikosti najveĀe klike. Oglejmo si, kako določimo kromatiĀen polinom tetivnega grafa. V ta namen bomo uporabili posebno lastnost tetivnih grafov.

VozlišĀe je *enostavno* (ang. *simplicial*), Āe njemu sosednja vozlišĀa tvorijo kliko. *Zaporedje enostavnega odstranjevanja* (ang. *simplicial elimination ordering*) je zaporedje vozlišĀ v_1, \dots, v_n , ki predstavlja vrstni red odstranjevanja vozlišĀ iz grafa. Vsako vozlišĀe v_i v zaporedju enostavnega odstranjevanja mora biti enostavno v podgrafu induciranem z vozlišĀi $\{v_i, \dots, v_n\}$.

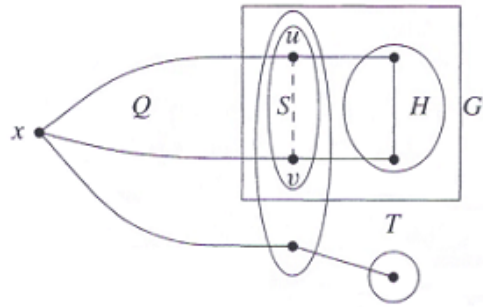
Lema 10.3 (Voloshin (1982), Farber-Jamison (1986)). *Za vsako vozlišĀe x v tetivnem grafu G obstaja enostavno vozlišĀe iz množice najbolj oddaljenih vozlišĀ od x v G .*

Dokaz. Uporabimo indukcijo po številu enostavnih vozlišĀ $n(G)$ v grafu G . V osnovnem primeru pri $n(G) = 1$ imamo graf K_1 , ki ima eno samo vozlišĀe in to je enostavno. Za indukcijski korak pri $n(G) \geq 2$ pa loĀimo dva primera.

V prvem primeru je x sosed vsem ostalim vozlišĀem v G , nadaljujemo z indukcijsko predpostavko na grafu $G - x$. Vsako enostavno vozlišĀe y v $G - x$ je enostavno tudi v G , saj je x sosed vseh vozlišĀ $N(y) \cup \{y\}$.

Poglejmo primer, ko x ni sosed vsem ostalim vozlišĀem v G . OznaĀimo z T množico najbolj oddaljenih vozlišĀ od x v G in naj bo H komponenta $G[T]$. Naj bo S množica sosednjih vozlišĀ množice $V(H)$, S leŹi v $G - T$. Z Q pa oznaĀimo komponento $G - S$, ki vsebuje x .

PokaŹimo najprej, da je S klika. Vsako vozlišĀe v S ima soseda v $V(H)$ in v Q . Torej za poljubna razliĀna vozlišĀa u in v iz S velja, da je unija poti P_1 in P_2 cikla dolŹine najmanj 4. Kjer z P_1 oznaĀimo najkrajšo pot od H Āez u do Q in analogno P_2 oznaĀuje najkrajšo pot od H Āez v do Q . Ker je G tetiven



Slika 42: Skica k dokazu Leme 10.3

in ker med $V(H)$ in $V(Q)$ ni nobene povezave, je torej tetiva našega cikla povezava uv . Ker smo vozlišči u in v izbrali poljubno, je S klika.

Če je v $V(H)$ eno samo vozlišče z , je z tudi enostaven, saj sosedna vozlišča z tvorijo kliko S . Sicer označimo $z' = G[S \cup V(H)]$. Graf G' ne vsebuje x , zato je G' manjši kot G . Sedaj uporabimo indukcijsko predpostavko na G' in vozliščem u iz S . Postopek ponavljamo, dokler nam v H ne ostane eno samo vozlišče z , ki je enostavno v G' . Ker velja $N_G(z) \subseteq V(G')$, je z enostaven tudi v G . Poiskali smo torej enostavno vozlišče z iz množice najbolj oddaljenih vozlišč od x v G . \square

Lema 10.3 nam zagotovi, da ima vsak tetiven graf vsaj eno enostavno vozlišče. Pokažimo sedaj, da ima vsak tetiven graf zaporedje enostavnega odstranjevanja.

Izrek 10.4 (Dirac). *Enostaven graf ima zaporedje enostavnega odstranjevanja natanko tedaj, ko je graf tetiven.*

Dokaz. Graf G naj ima zaporedje enostavnega odstranjevanja in cikel C dolžine najmanj 4. Z v označimo vozlišče, kjer se začne zaporedje enostavnega odstranjevanja na C . Sosedje v tvorijo kliko. Klika vsebuje tudi najmanj dva vozlišča iz C , ki sta tako povezana z tetivo. Graf G torej ne vsebuje ciklov dolžine 4 ali več, ki nimajo tetive.

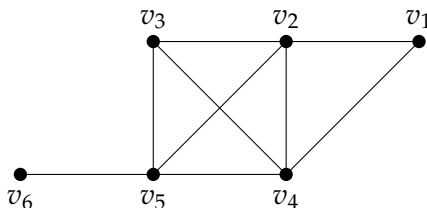
Pokažimo, da velja implikacija tudi v nasprotno smer. Uporabimo Lemo 10.3, torej ima vsak tetiven graf enostavno vozlišče. Ker je vsak induciran podgraf tetivnega grafa tetiven, lahko uporabimo indukcijo po $n(G)$ in tako dobimo zaporedje enostavnega odstranjevanja. \square

Zgled 10.5. *Kako iz zaporedja enostavnega odstranjevanja konstruirati kromatičen polinom? Naj ima graf G zaporedje enostavnega odstranjevanja v_1, \dots, v_n . Predpostavimo, da je množica vozlišč $P_i := \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ že obarvana. Torej lahko vozlišče v_i pobarvamo na $k - d(v_i)$ načinov, kjer je $d(v_i) := |N(v_i) \cap P_i|$. Faktor $k - d(v_i)$ torej ni odvisen od tega, kako smo obarvali P_i , saj sosedje vozlišča v_i v induciranem podgrafu $G[P_i]$ tvorijo kliko velikosti $d(v_i)$. Ker premislek velja za vsak v_i iz zaporedja enostavnega odstranjevanja grafa G , je kromatičen polinom grafa G enak produktu linearnih faktorjev oblike $k - d(v_i)$. Po izreku 10.4 je graf tetiven natanko tedaj, ko ima zaporedje*

enostavnega odstranjanja. Torej je kromatičen polinom tetivnega grafa G oblike:

$$\chi(G, k) = \prod_{k=1}^n [k - d(v_i)].$$

Za graf G iz slike 43 je v_1, \dots, v_6 zaporedje enostavnega odstranjanja. Torej velja: $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 1$, $d(v_6) = 0$. Kromatičen polinom grafa G je tako $\chi(G, k) = (k - 2)(k - 3)(k - 2)(k - 1)(k - 1)k$.



Slika 43: Zaporedje enostavnega odstranjanja na grafu

LITERATURA

- [1] D. B. West: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, New Jersey, 2001.
- [2] R. Diestel: Graph Theory, Springer-Verlang, New York, 2000.
- [3] Wikipedia contributors. "Perfect graph." Wikipedia, The Free Encyclopedia. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 1 Oct. 2014. Web. 12 Apr. 2015.

PARAMETRI RAVNINSKOSTI IN PLOSKVE VIŠJIH
REDOV

Tinkara Delibegović

11.1 PARAMETRI RAVNINSKOSTI

Problem, ki je zgodovinsko pomembnejši v teoriji grafov, je maksimalno kromatično število ravninskega grafa in s tem povezan problem barvanja zemljevidov: ali lahko države sveta pobarvamo z različnimi barvami tako, da bodo države z netrivialno mejo imele različne barve? Kasnejša motivacija za študij ravninskih grafov je povezana z razvojem računalniške in komunikacijske tehnologije, predvsem VLSI vezja. To so vezja zelo visoke stopnje integracije oz. vezja, ki vsebujejo več kot deset tisoč vrat oziroma več kot sto tisoč tranzistorjev.

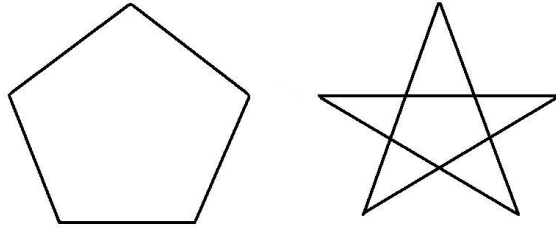
V tem poglavju bomo tako obravnavali parametre, ki merijo koliko odstopa splošni graf od ravninske oblike.

11.1.1 *Debelina grafa*

Ravninski graf je graf, ki se ga da narisati v ravnini brez sekanja povezav, razen v skupnih krajiščih. Splošni graf ni nujno ravninski, lahko pa ga sestavimo iz večih ravninskih grafov. Eden izmed naravnih parametrov ravninskega grafa je število ravninskih grafov, ki jih potrebujemo, da tvorimo dani graf.

Definicija 11.1. Debelina grafa G je minimalno število ravninskih grafov, ki jih dobimo pri dekompoziciji grafa G na ravninske grafe. Debelino grafa G označimo s $t(G)$.

Zgled 11.2. Debelina vsakega ravninskega grafa je enaka 1, debelina grafa K_5 pa je enaka 2, saj lahko K_5 dobimo iz dveh ciklov dolžine 5.

Slika 1: Ravninska grafa, ki sestavljata K_5

Enostavno je dobiti spodnjo mejo za $t(G)$, ki zelo pogosto da pravilno vrednost.

Uporabili bomo zvezo: $\lceil \frac{a}{b} \rceil = \lfloor (a + b - 1) / b \rfloor$.

Trditve 11.3. Naj bo G enostavno povezan graf z n točkami in m povezavami. Potem je:

1. $t(G) \geq \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil$;
2. če v G ni trikotnikov, potem je $t(G) \geq \lceil \frac{m}{2n-4} \rceil$.

Dokaz. 1. Če je G povezan enostaven ravninski graf z n (≥ 3) točkami in m povezavami, potem je $m \leq 3n - 6$. Za ravninsko risbo grafa G z f lici je, po lemi o rokovanju za ravninske grafe, $2m \geq 3f$ saj je stopnja vsakega lica enostavnega grafa vsaj 3, zato je $f \leq \frac{2}{3}m$. Če to uporabimo v Eulerjevi formuli $f = m - n + 2$, dobimo $3m - 3n + 6 \leq 2m$, torej je $m \leq 3n - 6$.

Ker je vseh povezav skupaj m , mora biti ravninskih grafov vsaj $\frac{m}{3n-6}$. Število grafov je celo naravno število, zato velja $t(G) \geq \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil$.

2. Za dokaz druge točke uporabimo: Naj bo G povezan ravninski enostaven graf z n (≤ 3) točkami in m povezavami in naj bo brez trikotnikov. Potem je $m \leq 2n - 4$.

Za ravninski graf G z f lici je po lemi o rokovanju $2m \geq 4f$ (saj je stopnja vsakega lica enostavnega grafa brez trikotnikov vsaj 4), zato je $f \leq \frac{1}{2}m$. Če to uporabimo v Eulerjevi formuli, dobimo $m - n + 2 \leq \frac{1}{2}m$, torej $m \leq 2n - 4$.

□

Zgled 11.4. V $G = K_n$ je $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Iz točke 1. Trditve 1.1 sledi $t(K_n) \geq \frac{n(n-1)}{2(3n-6)}$. Izraz lahko poenostavimo:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n(n-1)}{6(n-2)} \right\rceil &= \left\lfloor \frac{n(n-1) + 2(3n-6) - 1}{2(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{2(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+7)(n-2)}{6(n-2)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Torej $t(K_n) \geq \lfloor \frac{1}{6}(n+7) \rfloor$.

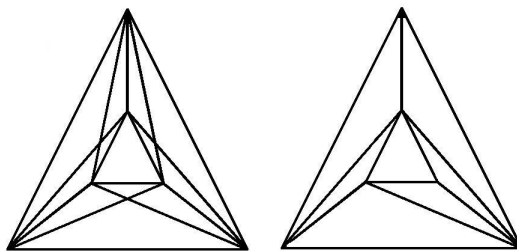
11.1.2 Križno število

Včasih moramo narisati graf v ravnino, čeprav sam graf ni ravninski. Kot primer si oglejmo vezje čipa, ki predstavlja sliko grafa. Križanje žic vpliva na samo ceno čipov, zato poskušamo število presečišč minimizirati.

Definicija 11.5. Križno število $\nu(G)$ grafa G je najmanjše število sekajočih se povezav pri risanju grafa G v ravnino.

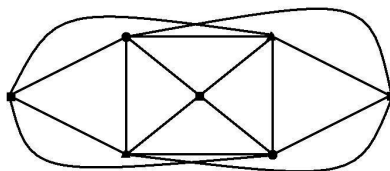
Zgled 11.6. Dokažimo, da je $\nu(K_6) = 3$ in $\nu(K_{3,2,2}) = 2$. Presečno število majhnega grafa lahko dobimo s pomočjo maksimalnega ravninskega podgrafa. Recimo, da imamo graf G narisani v ravnini (le narisani je v ravnini, ni nujno ravninski graf). Če je H maksimalen ravninski podgraf te slike, potem vsaka povezava grafa G , ki ni v podgrafu H , seka nekaj povezav grafa H . Od to sledi, da ima slika grafa G najmanj $e(G) - e(H)$ presečišč, kjer je $e(G)$ velikost množice $E(G)$ in $e(H)$ velikost množice $E(H)$. Če ima G n vozlišč, potem je $e(H) \leq 3n - 6$. Če G nima trikotnikov, potem velja $e(H) \leq 2n - 4$.

Narišimo oba grafa in pogledjmo kakšna je spodnja meja.



Slika 2: Levi graf je K_6 , desni graf pa je njegov maksimalen ravninski podgraf

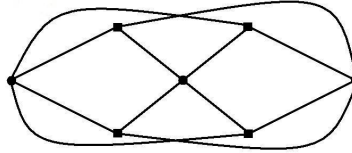
Ker ima K_6 15 povezav in ima ravninski graf na 6 vozliščih največ 12 povezav, od tod sledi, da je $\nu(K_6) \geq 3$.



Slika 3: Graf $K_{3,2,2}$

Graf $K_{3,2,2}$ ima 16 povezav in 7 vozlišč. Ravninski graf s 7 vozlišči ima največ 15 povezav. Od tod sledi $\nu(K_{3,2,2}) \geq 1$. Najbolj ravninska slika grafa $K_{3,2,2}$ ima dve presečišči. Ali je to res najboljša možna vložitev grafa v ravnino?

Opazimo, da $K_{3,2,2}$ vsebuje $K_{3,4}$.

Slika 4: Graf $K_{3,4}$

Graf $K_{3,4}$ nima trikotnikov, zato ima ravninski podgraf grafa $K_{3,4}$ največ $2 \times 7 - 4 = 10$ povezav. Od tod sledi (ker ima $K_{3,4}$ 12 povezav), da je $\nu(K_{3,4}) \geq 2$. Kakorkoli narišemo graf $K_{3,2,2}$, le - ta vedno vsebuje $K_{3,4}$. Od tod sledi, da je $\nu(K_{3,2,2}) \geq \nu(K_{3,4}) \geq 2$.

Trditvev 11.7. Naj ima graf G n vozlišč in m povezav. Če je k maksimalno število povezav v ravninskem podgrafu grafa G , potem je $\nu(G) \geq m - k$. Oziroma velja celo $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$.

Dokaz. Imejmo podano sliko grafa G v ravnini in naj bo H maksimalni podgraf grafa G , katerega povezave se ne sekajo na tej sliki. Vsaka povezava, ki ni v H se seka z najmanj eno povezavo v H , saj jo drugače lahko dodamo v graf H . Ker ima H največ k povezav, imamo $m - k$ presečišč med povezavami H in povezavami $G - E(H)$. Ko odstranimo $E(H)$ iz grafa G , nam ostane najmanj $m - k$ povezav. Enak sklep nam pove, da ostane najmanj $(m - k) - k$ presečišč na sliki, za vsak $t = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$. Iterativno tako dobimo, da ostane najmanj $\sum_{i=1}^t (m - ik)$ presečišč za $t = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$. Vemo, da je vsota enaka

$$\sum_{i=1}^t (m - ik) = mt - \frac{1}{2}kt(t+1).$$

Zapišimo sedaj $m = tk + r$, kjer je $0 \leq r \leq k - 1$. Zamenjamo $t = \frac{1}{k}(m - r)$ v vrednosti vsote, poenostavimo in dobimo:

$$\begin{aligned} \nu(G) &\geq mt - kt(t+1) \frac{1}{2} \\ &= m(m-r) \frac{1}{k} - k(m-r) \frac{1}{k} \left((m-r) \frac{1}{k} + 1 \right) \frac{1}{2} \\ &= m^2 \frac{1}{k} - mr \frac{1}{k} - (m-r)^2 \frac{1}{2k} - (m-r) \frac{1}{2} \\ &= m^2 \frac{1}{k} - mr \frac{1}{k} - m^2 \frac{1}{2k} + 2mr \frac{1}{2k} - r^2 \frac{1}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r}{2} \\ &= m^2 \frac{1}{2k} - \frac{m}{2} + r \frac{r-1}{2k}. \end{aligned}$$

□

Opomba 11.8. Prva meja $m - k$ iz prejšnje trditve je uporabna, ko ima G malo povezav. Križno število enostavnega grafa je vsaj $e(G) - 3n + 6$ in če je graf G dvodelen, vsaj $e(G) - 2n + 4$. Iteracija argumenta izboljša mejo za večje $e(G)$, vendar je spodnja meja za goste grafe šibka.

Oglejmo si kot primer graf K_n . Točnega odgovora nimamo, zato upamo vsaj na stopnjo vodilnega člena v polinomskem izrazu za $v(K_n)$. Tega zapišemo kot $an^k + O(n^{k-1})$, s čimer označimo polinom stopnje k za n , pri čemer je an^k vodilni člen.

Vsak ravninski graf ima največ $3n - 6$ povezav, polni grafi pa imajo $\frac{1}{2}n(n - 1)$ povezav. Tako dobimo:

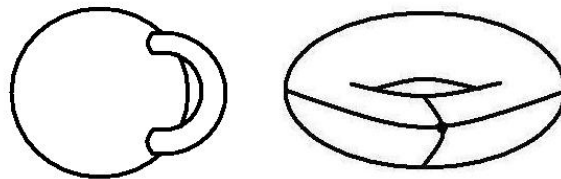
$$\begin{aligned} v(K_n) &\geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} = \frac{m(m-k)}{2k} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 \right)}{2(3n-6)} \\ &= \frac{n(n-1)(n(n-1) - 6n + 12)}{8(3n-6)} = \frac{n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n}{24n - 48} \\ &\geq \frac{1}{24}n^3 + O(n^2). \end{aligned}$$

Križno število ne more biti večje kot $\binom{n}{4}$, saj lahko narišemo točke grafa na krožnico in jih povežemo med seboj. Za K_n vsaka množica štirih vozlišč prispeva natanko eno presečišče. Ta predstavitev je v resnici najslabša možna ravnočrna slika grafa K_n , saj pri vsaki ravnočrtni sliki vsaka množica štirih vozlišč prispeva največ eno presečišče. Število presečišč znotraj teh štirih točk je odvisno od tega ali ena točka leži znotraj trikotnika, ki ga tvorijo ostale tri točke ali zunaj.

11.2 PLOSKVE VIŠJIH REDOV

Namesto, da bi minimalizirali število presečišč v ravnini, lahko zamenjamo ploskev na katero bi radi vozili graf in se jih s tem izognemo. To je kot, da bi gradili podhode in nadhode namesto semaforjev.

Definicija 11.9. Ročaj je valj, ki povezuje luknji izrezani iz ploskve. Torus je ploskev, ki jo dobimo, če dodamo en ročaj sferi.



Slika 5: Sfera z ročajem in torus

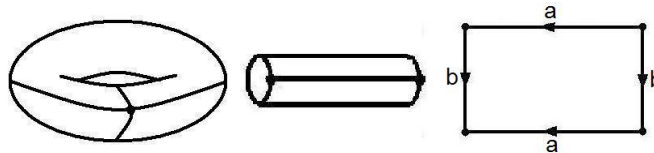
Torus je topološko gledano enak sferi z ročajem v smislu, da lahko eno ploskev zvezno transformiramo v drugo. Velik graf ima lahko veliko presečišč in zato bomo potrebovali več ročajev. Tako lahko za vsak graf, če le dodamo dovolj ročajev na sfero, odpravimo vsa presečišča in dobimo vložitev tega grafa na to ploskev. Način na katerega dodajamo ročaje ni pomemben, saj so vse ploskve, ki jih dobimo, ko dodamo enako število ročajev sferi, topološko gledano enaki.

Definicija 11.10. Rod površine, ki jo dobimo z dodajanjem ročajev sferi, je število teh dodanih ročajev. Ploskev z rodom γ označimo s S_γ .

Definicija 11.11. Rod grafa G je najmanjši rod ploskve, na katero lahko vložimo graf G .

Risanje velikih grafov na ploskve velikih redov je težko sledljivo. Lokalno gledano ploskev izgleda kot list papirja. Da lažje narišemo graf, bi radi celotno ploskev sploščili. To pa lahko dosežemo le z razrezom ploskve. Če označimo kako se morajo posamezni robovi združiti nazaj, da dobimo prvotno površino, potem lahko opišemo ploskev na listu papirja.

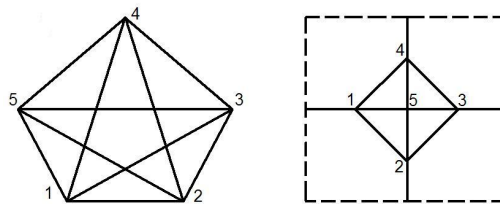
Zgled 11.12. Kombinatorični opis torusa. Če prerežemo torus prečno, dobimo cev / valj. Če prerežemo valj vzdolžno, dobimo pravokotnik. Stranice pravokotnika, ki so enako označene, so si identične. Vedeti moramo kako so si stranice identične, ker povezave vložitve na ta naš torus, lahko sekajo tak prerez.



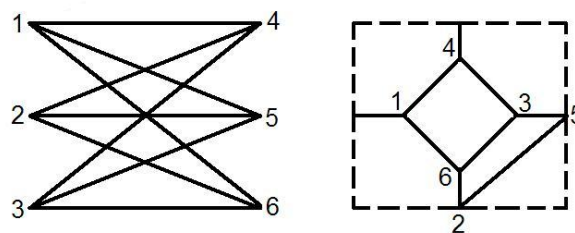
Slika 6: Torus

Ko povezava doseže en rob pravokotnika, doseže eno stran imaginarnega prereza. Ko seka prerez, se pojavi v identični točki na drugi strani kopije te meje. Štirje "vogali" pravokotnika ustrezajo eni sami točki na ploskvi skozi katero potekata oba reza.

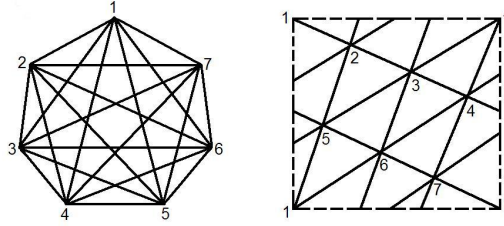
Zgled 11.13. Zgornja predstavitev vodi do lepih vložitev grafov na torus. Oglejmo si vložitve grafov K_5 , $K_{3,3}$ in K_7 .



Slika 7: Graf K_5 in njegova vložitev na torus



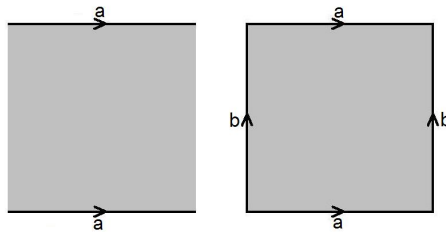
Slika 8: Graf $K_{3,3}$ in njegova vložitev na torus



Slika 9: Graf K_7 in njegova vložitev na torus

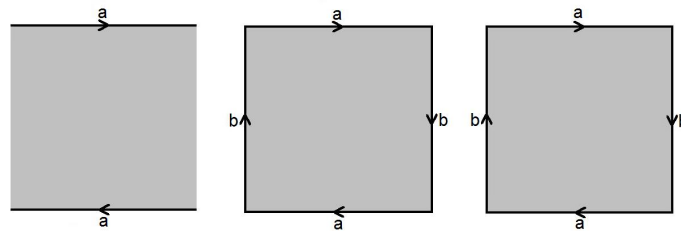
Definicija 11.14. Z N_q označimo graf, ki ga dobimo, če v sferi naredimo q lukenj in na le-te dodamo Möbiusove trakove.

V splošnem delimo ploskve na orientabilne in neorientabilne. Vsaka sklenjena orientabilna ploskev je homeomorfna eni od ploskev S_γ , za $\gamma \geq 0$.



Slika 10: Orientabilni ploskvi: valj in torus

Podobno velja, da je vsaka sklenjena neorientabilna ploskev homeomorfna eni od ploskev N_q , za $q \geq 0$.



Slika 11: Neorientabilne ploskve: Möbiusov trak, Kleinova steklenica, \mathbb{R} projektivna ravnina

Opomba 11.15. Če je Σ sklenjena ploskev, potem velja:

$$\chi(\Sigma) = \begin{cases} 2 - 2\gamma & ; \text{za orientabilne ploskve} \\ 2 - q & ; \text{za neorientabilne ploskve.} \end{cases}$$

Opomba 11.16. Posplošena Eulerjeva formula Naj bo G povezan graf z rodnom γ in $V(G) = n$, $E(G) = m$ in f število lic vložitve grafa G na ploskev z rodnom γ . Potem velja $n - m + f = 2 - 2\gamma$.

Zgled 11.17. Vložitev grafa K_7 na torus ima 7 vozlišč, 21 povezav in 14 lic. Preverimo, če podatki ustrezajo posplošeni Eulerjevi formuli $7 - 21 + 14 = 0 = 2 - 2$.

Lema 11.18. Vsak enostaven graf z n vozlišči, ki je vložen na S_γ , ima največ $3(n - 2 + 2\gamma)$ povezav.

Dokaz. Iz posplošene Eulerjeve formule izrazimo število vozlišč: $m = n + f - 2 - 2\gamma$. Lema o rokovanju nam pove, da velja $3f \leq 2m$, s čimer dobimo zgornjo neenakost $m \leq 3(n - 2 + 2\gamma)$. \square

Če obrnemo zgornjo enačbo, dobimo spodnjo mejo za število ročajev, ki jih moramo dodati, da bomo lahko vložili G .

Posledica 11.19. Za enostaven graf G z n točkami in m povezavami velja

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{1}{16} (m - 3n) + 1 \right\rceil.$$

Zgled 11.20. Za polne grafe K_n velja $m = \frac{1}{2}n(n - 1)$. Od tod naračunamo:

$$\begin{aligned} \gamma(K_n) &\geq \left\lceil \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}n(n - 1) - 3n \right) + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12} (n(n - 1) - 6n) + \frac{12}{12} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{12}n - \frac{6}{12}n + \frac{12}{12} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{12}n + \frac{12}{12} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{12} (n^2 - 7n + 12) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12} (n - 3)(n - 4) \right\rceil. \end{aligned}$$

V dobljeno enačbo vstavimo $n = 7$ in dobimo:

$$\gamma(K_7) \geq \left\lceil \frac{1}{12} (7 - 3)(7 - 4) \right\rceil = 1.$$

Definicija 11.21. Kromatično število ploskve S definiramo kot maksimum kromatičnih števil grafov, ki jih lahko vložimo na ploskev S in ga označimo s $\chi(S)$ oziroma

$$\chi(S) = \max \{ \chi(G); \text{ graf } G \text{ lahko vložimo na ploskev } S \}.$$

Zgled 11.22. $\chi(\text{ravnine}) = \chi(\text{sphere}) = 4$ in $\chi(\text{torusa}) = 7$.

Izrek 11.23 (Heawood [4]). Če se da graf G vložiti na S_γ , za $\gamma > 0$, potem

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{(7 + \sqrt{1 + 48\gamma})}{2} \right\rfloor.$$

Dokaz. Naj bo $c = \frac{1}{2} (7 + \sqrt{1 + 48\gamma})$. Dovolj je pokazati, da ima vsak enostaven graf, ki se ga da vložiti na S_γ vozlišče, ki ima stopnjo največ $c - 1$. Mejo $\chi(G)$ dosežemo z indukcijo po $n(G)$. Vsak graf z največ c vozlišči ima $\chi(G) \leq c$, zato si moramo ogledati le grafe, ki imajo $n(G) > c$.

Uporabimo lemo 2.1, da dokažemo, da je povprečna (in zato minimalna) stopnja največ $c - 1$. Iz enačbe $c = \frac{1}{2} (7 + \sqrt{1 + 48\gamma})$, za $\gamma > 0$, izrazimo $12\gamma - 12 = c(c - 7)$. Upoštevamo še, da je $n > c$ ter $m \leq 3(n - 2 + 2\gamma)$. Tako dobimo, da povprečna stopnja ustreza zahtevani meji.

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{6(n - 2 + 2\gamma)}{n} = 6 + \frac{12\gamma - 12}{n} \leq 6 + \frac{12\gamma - 12}{c} = 6 + \frac{c(c - 7)}{c} = c - 1.$$

\square

LITERATURA

- [1] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. (2001) 233–251.
- [2] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, E. Szemerédi, Crossing - free subgraphs, *Ann. Discr. Math.* **12** (1982) 9–12.
- [3] P. Erdős, R. K. Guy, Crossing number problems, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973) 52–58.
- [4] P. J. Heawood, *Map - colour theorem*, *Q. J. Math.* **24** 332–339 (1930) 271–283.
- [5] J. Pach, G. Tóth, Graphs drawn with few crossings per edge, *Combinatorica* **17** (1997) 427–439.

DISJUNKTNA VPETA DREVESA

Katja Korenjak

Globalna verzija Mengerjevega izreka nam zagotavlja obstoj k po povezavah disjunktne neodvisnih poti v k po povezavah k -povezanih grafih. Izkaže pa se, da je včasih bolj učinkovito zahtevati več kot samo k -povezanost. Vzemimo recimo primer, ko graf G vsebuje k po povezavah disjunktne vpetih dreves. Tak graf potem očitno vsebuje k kanoničnih poti med dvema poljubnima točkama, v vsakem izmed dreves eno.

Vprašajmo se sedaj, kdaj torej takšna drevesa obstajajo? Če imamo v grafu k po povezavah disjunktne dreves, potem je tak graf očitno k -povezan. V obratnem primeru, ko privzamemo k -povezanost po povezavah, pa nam ta obstoj k po povezavah disjunktne vpetih dreves ne more zagotavljati. Pogoje, na podlagi katerih lahko z gotovostjo trdimo, da graf vsebuje k po povezavah disjunktne vpetih dreves nam podaja Tutte-ov izrek, ki je tudi glavna tema tega seminarja.

Poglejmo najprej nekaj očitno potrebnih pogojev za obstoj k po povezavah disjunktne vpetih dreves. Vzemimo poljubno particijo $V(G)$ v r množic. Vsako vpeto drevo grafa G potem vsebuje vsaj $r - 1$ navzkrižnih povezav (glej definicijo 4), iz česar sledi, da za graf s k po povezavah disjunktne drevesi očitno velja, da vsebuje vsaj $k(r - 1)$ navzkrižnih povezav.

Kot bomo videli kasneje in to pravi tudi Tutte-ov izrek je ta očitno potreben pogoj tudi zadosten. Ker je dokaz Tutte-ovega izreka nekoliko bolj tehnične narave najprej sledi krajši uvod, v katerem bomo vpeljali nekaj novih definicij in oznak.

12.1 UVOD

Naj bo $G = (V, E)$ multigraf in $k \in \mathbb{N}$. Vpeljimo oznako $\|G\|$ za število povezav grafa G in definirajmo operaciji $G + e$, $G - e$. Z $G + e$ označimo graf G , ki smo mu dodali povezavo e , z $G - e$ pa graf G , kateremu povezavo e odstranimo. Ker obravnavamo multigrafe dovolimo podvajanje povezav in zanke.

Naj bo sedaj F k -terica

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_k),$$

kjer so F_i za vsak $i = 1, 2, \dots, k$ po povezavah disjunktne vpeta drevesa in sestavljajo t.i. po povezavah disjunkten vpet gozd. Naj velja še

$$E[F] := E(F_1) \cup E(F_2) \cup \dots \cup E(F_k) \quad \text{in} \quad \|F\| := |E[F]|.$$

Množico vseh zgoraj opisanih gozdov, za katere velja še, da je $\|F\|$ maksimalen, bomo označili z \mathcal{F} .

Vzemimo sedaj poljuben $F = (F_1, F_2, \dots, F_k) \in \mathcal{F}$ in povezavo $e \in E \setminus E[F]$, torej poljubno povezavo ki ni vsebovana v nobenem izmed F_i za $i = 1, 2, \dots, k$. Če sedaj vsakemu vpetemu drevesu F_i dodamo povezavo e velja, $F_i + e$ vsebuje cikel C_i za vsak $i = 1, 2, \dots, k$. V nasprotnem primeru bi lahko v F zamenjali F_i z $F_i + e$, to pa bi bilo v protislovju s predpostavko, da je $\|F\|$ maksimalen.

Fiksirajmo sedaj i in vzemimo eno od e različno povezavo $e \neq e' \in E[C_i]$ iz tega cikla. Definirajmo novo k -terico vpetih dreves F' z

$$F' := (F'_1, F'_2, \dots, F'_k),$$

kjer so $F'_i := F_i + e - e'$ in $F'_j := F_j$, za vse $j \neq i$. Potem velja, da $F' \in \mathcal{F}$. Rečemo, da smo F' dobili iz F s postopkom zamenjave povezave e' s povezavo e .

Opomba 12.1. Pri zgoraj opisani zamenjavi se množica točk komponente F_i , ki vsebuje povezavo e' , pri prehodu v F'_i ne spremeni. Zato velja, za vsako pot $x \cdots y \subseteq F'_i$ obstaja enolično določena pot $x F_i y \subseteq F_i$. To lastnost dreves bomo rabili kasneje.

Vzemimo sedaj k -terico $F^0 = (F_1^0, F_2^0, \dots, F_k^0) \in \mathcal{F}$ in označimo z \mathcal{F}^0 množico vseh k -teric v \mathcal{F} , ki jih lahko z nizom zamenjav dobimo iz F^0 . Vpeljimo najprej oznaki

$$E^0 := \bigcup_{T \in \mathcal{F}^0} (E \setminus E[T]) \quad \text{in} \quad G^0 := (V, E^0),$$

pri prvi ne smemo pozabiti, da $F^0 \in \mathcal{F}^0$. Za povezavo $e^0 \in E \setminus E[F^0]$, pa še oznako

$C^0 :=$ komponenta(maksimalen povezan podgraf) grafa G , ki vsebuje e^0 .

Lema 12.2. Naj bo $T = (T_1, T_2, \dots, T_k) \in \mathcal{F}^0$ in naj bo $T' = (T'_1, T'_2, \dots, T'_k)$ pridobljen iz T z zamenjavo povezave iz T_i . Če sta x in y krajišči poti v $T'_i \cap C^0$, potem velja $x T_i y \subseteq C^0$.

Dokaz. Naj bo $e = vw$, za $v, w \in V(G)$, nova povezava v $E[T'_i] \setminus E[T]$. Torej je e edina povezava, ki ne leži v T_i . Predpostavimo

$$e \in x T'_i y.$$

V nasprotnem primeru je $x T'_i y = x T_i y$. Če sedaj pokažemo, da

$$v T_i w \subseteq C^o \quad (23)$$

bo veljalo, da je $(x T'_i y - e) \cup v T_i w$ povezan podgraf v $T_i \cap C^o$, ki vsebuje x in y , torej vsebuje tudi $x T_i y$. Dokažimo da (23) res velja.

Naj bo e' poljubna povezava iz $v T_i w$. Ker z zamenjavo povezave e' z povezavo e v T dobimo element \mathcal{F}^o , ki ne vsebuje e' , sledi $e' \in E^o$. Ker je bila e' poljubna, velja

$$v T_i w \subseteq G^o.$$

Če sedaj upoštevamo še dejstvo $v, w \in x T'_i y$ in predpostavko $x T'_i y \subseteq T_i \cap C^o$, dobimo $v T_i w \subseteq C^o$ in smo končali. \square

Lema 12.3. Za vsako povezavo $e^o \in E \setminus E[F^o]$ obstaja množica $U \subseteq V$, ki je povezana v F_i^o za vsak $i = 1, \dots, k$ in vsebuje krajišči povezave e^o .

Dokaz. Vzemimo povezavo $e^o \in E \setminus E[F^o]$. Vemo da velja $F^o \in \mathcal{F}^o$, torej velja tudi $e^o \in E^o$. Definirajmo sedaj

$$U := V(C^o)$$

in pokažimo, da je podgraf induciran z U povezan v F_i^o za poljuben $i = 1, 2, \dots, k$. Tega se bomo lotili na naslednji način. Pokazali bomo, da za vsako povezavo $xy \in C^o$ obstaja pot $x F^o y$, ki v celoti leži v C^o . Ker je C^o povezana komponenta, bo unija vseh takih poti povezan vpet podgraf grafa $F_i^o[U]$. Iz tega pa bo sledilo, da je U povezana v F_i^o za vsak $i = 1, 2, \dots, k$.

Naj bo $e = xy \in C^o$. Ker je $e \in E^o$, obstaja $s \in \mathbb{N}$ in obstajajo take k -terice

$$F^r = (F_1^r, F_2^r, \dots, F_k^r) \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

da lahko F^r dobimo iz F^{r-1} z zamenjavo povezave in velja $e \in E \setminus E[F^s]$. Torej povezava e ni v nobenem izmed F_i^s za $i = 1, 2, \dots, k$.

Naj bo $F := F^s$ in F' tak gozd, da ga dobimo iz F z zamenjavo povezave e . Velja $e \in F'$ in $e \in C^o$. Z uporabimo leme 1, kjer povezavo e obravnavamo kot pot dolžine 1, dobimo

$$x F_i^s y \in C^o.$$

Podobno kot prej naj bo sedaj $F := F^{s-1}$. Z zamenjavo povezave v F dobimo $F' := F^s$. Ker velja $x F_i^s z \in C^o$, lahko na podoben način kot prej spet uporabimo lemo 1 in dobimo

$$x F_i^{s-1} y \in C^o.$$

Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do $F := F^0$, kjer bo $F' := F^1$ in bo po lemi 1 sledilo

$$x F_i^0 y \in C^o.$$

\square

Definicija 12.4. Naj bo $G = (V, E)$ multigraf. Navzkrižna povezava je povezava z krajišči v dveh različnih množicah particije množice $V(G)$.

V dokazu izreka se bomo sklicevali na naslednjo posledico, njen dokaz je preprost in ga zato prepuščamo bralcu.

Posledica 12.5. *Povezan graf na n točkah je drevo natanko tedaj, ko ima $n - 1$ povezav.*

12.2 TUTTE-OV IZREK

Izrek 12.6 (Tutte, 1961 [2]; Nash-Williams, 1964 [3]). *Multigraf $G = (V, E)$ vsebuje k po povezavah disjunktne vpetih dreves, če in samo če ima vsaka particija P množice V , vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav.*

Dokaz. (\implies) Očitno.

(\impliedby) Dokazujemo s pomočjo indukcije na $|V(G)|$. Za $|V(G)| = 2$ obstajata particiji moči $|P| = 1, 2$. V netrivialnem primeru, ko je $|P| = 2$, imamo vsaj k navzkrižnih povezav, torej k disjunktne vpetih dreves, za vsako povezavo eno. Za prvi korak indukcije izrek velja.

Indukcijski korak: Predpostavimo, da imamo za vsako particijo P množice $V(G)$ vsaj

$(|P| - 1) \cdot k$ navzkrižnih povezav in skonstruirajmo k po povezavah disjunktne vpetih dreves v G . Izberimo k -terico $F^o = (F_1^o, F_2^o, \dots, F_k^o) \in \mathcal{F}$. Če je F_i^o drevo za vsak $i = 1, 2, \dots, k$ potem smo našli k po povezavah disjunktne vpetih dreves in smo končali. Če ne, pa zaradi posledice 5 velja

$$\|F^o\| = \sum_{i=1}^k \|F_i^o\| < k \cdot (|V(G)| - 1).$$

Po drugi strani pa po predpostavki, da ima vsaka particija množice $V(G)$ vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav, s particijo grafa G v posamezne točke dobimo

$$\|G\| \geq k \cdot (|V(G)| - 1).$$

Torej obstaja povezava $e^o \in E \setminus E[F^o]$. Po lemi 2 potem obstaja množica $U \subseteq V$, ki je povezana v F_i^o za vsak $i = 1, 2, \dots, k$ in vsebuje krajišči povezave $e^o = x^o y^o$. Torej $x^o, y^o \in U$, kar nam da $|U| \geq 2$.

Ker vsaka particija skrčitve multigrafa G/U inducira particijo G -ja z enakimi navzkrižnimi povezavami, ima G/U vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav za vsako particijo (predpostavka). Ker velja $|V(G/U)| < |V(G)|$, saj je $|U| \geq 2$, ima po indukcijski predpostavki G/U k po povezavah disjunktne vpetih dreves. Označimo ta drevesa z T_1, T_2, \dots, T_k . Če sedaj v vsakem izmed T_i točko v_U (skrčitev U -ja) zamenjamo z vpetim drevesom $F_i^o \cap G[U]$ grafa $G[U]$, dobimo tudi v grafu G k po povezavah disjunktne vpetih dreves. To lahko naredimo, ker je U povezana v vsaki F_i^o . \square

LITERATURA

[1] R. Diestel, **Graph Theory**, Springer-Verlag, New York (2000).

- [2] W. T. Tutte, *On the problem of decomposing a graph into n -connected factors*, J. London Math. Soc. **36** (1961) 221–230.
- [3] C. St. J. A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc. **36** (1964) 445–450.

PREŠTEVANJA VPETIH DREVES

Nikolaj Zalokar

Obstaja $2^{\binom{n}{2}}$ enostavnih grafov z množico vozlišč $[n] = \{1, \dots, n\}$, kjer lahko vsak par vozlišč tvori povezavo ali ne. Koliko od teh grafov je dreves? V tem poglavju nalogi se bomo ukvarjali z preštevanjem vpetih dreves v poljubnem grafu.

13.1 PREŠTEVANJA DREVES

Na grafih z enim ali dvema vozliščema lahko najdemo le eno vpeto drevo. Za [3] imamo en izomorfnih razred, vendar je matrika sosednosti določena s tem, katero vozlišče je na sredini. Tako dobimo tri vpeta drevesa. Množica [4] nam da 16 dreves in množica [5] nam da 125 dreves. Opazimo, da nam množica $[n]$ da n^{n-2} dreves. To je *Cayley-eva formula*.

Označimo s S množico n števil. Obstaja natanko n^{n-2} načinov, da iz elementov S sestavimo seznam dolžine $n - 2$. Množico seznamov označimo s S^{n-2} in elementi te množice bodo predstavljali drevesa z množico vozlišč S . Seznamu, ki pripada drevesu T , pravimo *Prüfer-jeva koda*.

ALGORITEM 1 (Prüfer-jeva koda)

vhod: drevo T z množico vozlišč $S \subseteq \mathbb{N}$

izhod: koda $f(T) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$

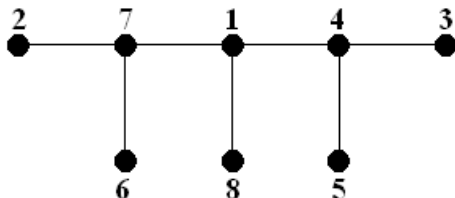
iteracija: Na i -tem koraku zbrisi najmanjši preostali list in naj bo a_i njegov sosed.

Zgled 13.1. Po $n - 2$ ponovitvah ostane samo ena od začetnih $n - 1$ povezav. Dobili pa smo seznam $f(T)$ dolžine $n - 2$ s podatki iz S . V drevesu spodaj je najmanjši list 2, zberemo ga in zapišemo v seznam 7. Potem zberemo 3 pa 5 in vsakič zabeležimo 4. Najmanjši list, ki nam je ostal v drevesu na 5 točkah je 4 in tako nadaljujemo.

Koda, ki jo dobimo je $(7, 4, 4, 1, 7, 1)$ in točki, ki na koncu ostaneta sta 1 in 8. Po prvem koraku je ostanek Prüfer-jeve kode Prüfer-jeva koda poddrevesa T_0 z množico točk $V(T) - 2$.

Če poznamo množico točk S , lahko iz kode a nazaj dobimo drevo. Ideja

je v tem, da najdeš vse povezave. Začnemo z množico izoliranih točk S . Na vsakem koraku dodamo eno povezavo in označimo eno točko. Ko razmišljamo o a_i , nam ostane $n - i + 1$ neoznačenih točk in $n - i - 1$ znakov iz a (vključno z a_i). Tako se vsaj dve od neoznačenih točk ne pojavljata med ostalimi znaki v a . Naj bo x najmanjši od teh znakov. Dodaj povezavo xa_i in označi x . Po $n - 2$ korakih, nam ostaneta dve neoznačeni točki; povežemo ju in s tem dodamo zadnjo povezavo.



Ogledimo si zgornjo sliko. Najmanjši element množice S , ki ni v kodi a je 2. Tako bo prva povezava, ki jo bomo dodali povezovala 2 in 7, in označimo 2. Sedaj je najmanjši element, ki manjka v kodi 3. Zato povežemo 3 z 4, ki je a_2 . Ko nadaljujemo, obnavljamo povezave po vrstnem redu, kot so bile izbrisane, ko smo iskali a iz T .

V tem procesu ima vsaka komponenta grafa, ki smo ga gradili eno neoznačeno točko. Če bi dodali povezavo med tema dvema neoznačenima točkama, bi med seboj povezali dve komponenti grafa. Po tem, ko označimo eno točko nove povezave, ima zopet vsaka komponenta eno neoznačeno točko. Po $n - 2$ korakih, imamo dve neoznačeni točki in zato dve komponenti. S tem, ko dodamo zadnjo povezavo med tema dvema točkama, tvorimo povezan graf. Zgradili smo povezan graf z n točkami in $n - 1$ povezavami. To je drevo, nismo pa še dokazali, da je njegova Prüfer-jeva koda enaka a .

Izrek 13.2 (Cayley-eva formula, 1889). *Za množico $S \subseteq \mathbb{N}$ moči n , obstaja n^{n-2} dreves, katerih množica vozlišč je S .*

Dokaz. Za $n = 1$ drži, zato predpostavimo $n \geq 2$. Dokažimo, da zgornji algoritem določa bijekcijo f iz množice dreves z množico točk S v množico S^{n-2} , ki je množica seznamov dolžine $n - 2$ z elementi iz množice S . Za vsak $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S^{n-2}$ moramo pokazati, da natanko eno drevo T z množico točk S zadošča $f(T) = a$. Dokažimo to z indukcijo po n . Baza indukcije: $n = 2$. Imamo eno drevo z dvema točkama. Prüferjevava koda je seznam dolžine 0 in je edini tak seznam.

Indukcijski korak: $n > 2$. Računanje $f(T)$ zniža stopnjo vsake točke na 1 in jo potem po možnosti izbriše. Zato se vsaka točka, ki ni list pojavi v $f(T)$. V $f(T)$ pa ni nobenega lista, ker bi to pomenilo, da je list sosed lista, kar pa je možno le v drevesu z eno samo točko, mi pa smo predpostavili, da imamo več kot 2 točki. Zato so listi T elementi S , niso pa nujno elementi $f(T)$. Če $f(T) = a$, potem je prvi list, ki ga izbrišemo, najmanjši element iz S , ki ni v a (imenujmo ga x), in sosed od x je a_1 .

Dan imamo $a \in S^{n-2}$ in iščemo vse rešitve $f(T) = a$. Pokazali smo

že, da ima vsako tako drevo točko x kot najmanjši list in povezavo xa_1 . Ko izbrišemo x nam ostane drevo z množico točk $S' = S - x$. Njegova Prüferjeva koda je $a' = (a_2, \dots, a_{n-2})$.

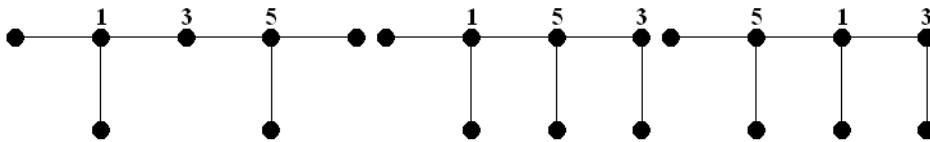
Po induksijski predpostavki obstaja natanko eno drevo T' na množici točk S' in s Prüferjevo kodo a' . Ker vsako drevo s Prüferjevo kodo a dobimo tako, da takšnemu drevesu dodamo povezavo xa_1 , obstaja največ ena rešitev za $f(T) = a$. Še več, če T' dodamo povezavo xa_1 , dobimo drevo z množico točk S in Prüferjevo kodo a , torej obstaja vsaj ena rešitev. In zato obstaja natanko ena. \square

Posledica 13.3. Naj bodo d_1, d_2, \dots, d_n pozitivna cela števila, katerih vsota je $2n - 2$. Potem obstaja natanko $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!}$ dreves z množico točk $[n]$ takšnih, da ima točka i stopnjo d_i za vsak i .

Dokaz. Med konstruiranjem Prüferjeve kode drevesa T , zapišemo x vsakič, ko izbrišemo soseda od x , dokler ne izbrišemo x samega ali pa ga pustimo med zadnjima dvema točkama. Tako se vsaka točka x pojavi $d_x - 1$ krat v Prüferjevi kodi.

Zato štejemo drevesa s stopnjami teh točk tako, da štejemo sezname dolžine $n - 2$, ki ima za vsak i $d_i - 1$ kopij i . Če kopijam vsakega i dodamo indekse, da jih razlikujemo, potem permutiramo $n - 2$ različnih predmetov in imamo $(n - 2)!$ seznamov. Dokler nismo razlikovali kopij i , smo šteli vse željene razvrstitve $\prod(d_i - 1)!$ krat. \square

Zgled 13.4. Drevesa s stalno stopnjo. Razmislimo o drevesih s točkami $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ki so po vrsti stopnje $\{3, 1, 2, 1, 3, 1, 1\}$. Izračunajmo $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i-1)!} = 30$; drevesa so predstajvena spodaj. Le točke $\{1, 3, 5\}$ niso listi. Ko zberemo liste dobimo poddrevo na točkah $\{1, 3, 5\}$. Imamo tri taka poddrevesa, določena s tem, katera točka je na sredini.



Da dopolnimo vsako drevo, dodamo primerno število sosednjih listov vsaki točki, ki ni list, da dobi željeno stopnjo. Šest možnosti je, da dopolnimo prvo drevo (iz preostalih štirih točk izberemo dve, ki bosta sosednji točki 1) in dvanajst možnosti, da dopolnimo vsakega od ostalih dveh grafov (izberemo sosednjo točko točke 3 iz preostalih štirih točk in potem soseda centralne točke od preostalih treh).

13.2 VPETA DREVESNA V GRAFIH

Cayley-eva formula nam ne pove nič drugega kot to, koliko vpetih dreves je v polnem grafu z n vozlišči. Sedaj bomo problem vpetih dreves gledali na poljubnih grafih.

Če v grafu G odstranimo povezavo e , njeni krajišči pa identificiramo, potem temu pravimo *skrčitev povezave e* . Dobljeni graf označimo z G/e .

Trditev 13.5. Naj bo $\tau(G)$ število vpetih dreves grafa G . Če $e \in E(G)$ ni zanka, potem je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$.

Dokaz. Vpeta drevesa, ki ne vsebujejo e , so natanko vpeta drevesa grafa $G - e$. Da bi pokazali, da G ima $\tau(G/e)$ vpetih dreves, moramo pokazati, da skrčitev povezave e definira bijekcijo med množico vpetih dreves G -ja, ki vsebujejo e in množico vpetih dreves grafa G/e .

Ko skrčimo povezavo e v vpetem drevesu, ki vsebuje e , dobimo vpeto drevo grafa G/e . S skrčenjem se ostale povezave ohranijo, tako da nobeni dve drevesi dobljeni s skrčitvijo ne tvorita istega vpetega drevesa grafa G/e . Če naredimo obratno operacijo in novo vozlišče razširimo nazaj v e , dobimo vpeto drevo grafa G . Ker vsako vpeto drevo grafa G/e dobimo natanko enkrat, je funkcija bijekcija. \square

$\tau(G)$ lahko računamo tudi z uporabo determinante. Ta tehnika je mnogo hitrejša, saj $n \times n$ determinante lahko izračunamo v manj kot n^3 operacijah.

Izrek 13.6. Naj bo G graf brez zank, z $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in naj bo a_{ij} število povezav z krajiščema v_i in v_j . Naj bo Q matrika z $q_{ij} = -a_{i,j}$, če $i \neq j$ in $q_{ii} = d(v_i)$ za vsak i . Q^* naj bo matrika, ki jo dobimo, če v Q zberemo s -to vrstico in t -ti stolpec. Potem je $\tau(G) = (-1)^{s+t} \det(Q^*)$.

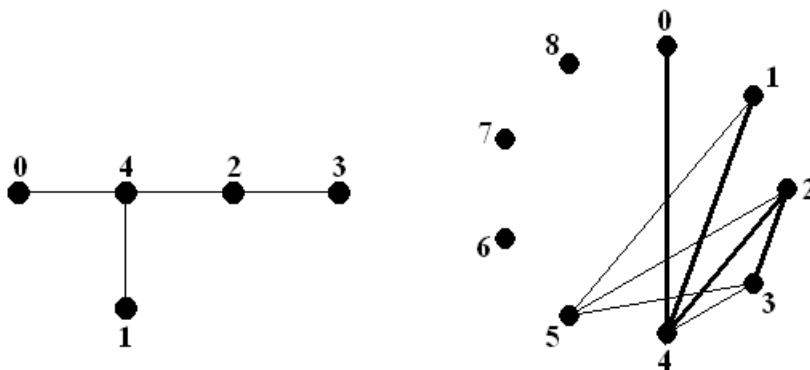
13.3 DEKOMPOZICIJA IN LEPA OZNAČITEV

Hipoteza 13.7 (Ringel, 1964). Če je T fiksno drevo z m vozlišči, potem lahko graf K_{2m+1} dekomponiramo na $2m + 1$ kopij drevesa T .

Lepa označitev grafa G z m povezavami je funkcija $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, m\}$, ki različna vozlišča različno oštevilči in velja $\{|f(u) - f(v)|; uv \in E(G)\} = \{1, \dots, m\}$. Graf je *lep*, če ima lepo označitev.

Hipoteza 13.8 (Ringel, Kotzig, 1964). Vsako drevo ima lepo označitev.

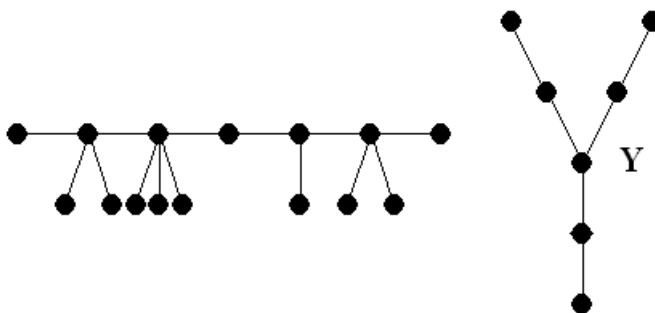
Izrek 13.9 (Rosa, 1967). Če ima drevo T z m povezavami lepo označitev, potem ima graf K_{2m+1} dekompozicijo na $2m + 1$ kopij T .



Dokaz. Poglejmo na točke grafa K_{2m+1} kot na kongruenčne razrede po modulu $2m + 1$, urejene ciklično. Razlika med dvema kongruenčnima razredoma je 1, če sta zaporedna, 2, če je en razred med njima in tako naprej do razlike m . Povezave grafa K_{2m+1} razvrstimo v skupine glede na razliko med končnimi točkami. Za $1 \leq j \leq m$ obstaja $2m + 1$ povezav z razliko j .

Glede na lepo označitev drevesa T definiramo kopije drevesa T v K_{2m+1} ; te kopije so T_0, T_1, \dots, T_{2m} . Točke drevesa T_k so $k, \dots, k + m \pmod{2m + 1}$ pri čemer je $k + i$ sosednja $k + j$ natanko takrat, ko je i sosednji j v lepi označitvi drevesa T . Kopija T_0 izgleda kot lepa označitev in ima povezave z vsako razliko. V vsaki naslednji kopiji se vse povezave premaknejo v druge in razlike se ohranijo, če dodamo ena k imenu vsake končne točke. Vsi različni razredi povezav imajo eno povezavo v vsakem T_k in zato T_0, \dots, T_{2m} razčleni K_{2m+1} . \square

Gosenica je drevo, v katerem je odlikovana pot (hrbtenica) sosednja z (ali vsebuje) vsako povezavo.



Grafa gosenica in Y , ki ni gosenica.

Izrek 13.10. *Drevo je gosenica natanko takrat, ko ne vsebuje drevesa Y na sliki.*

Dokaz. Naj G' označuje drevo, ki ga dobimo iz drevesa G , če izbrišemo vse liste drevesa G . Ker nobena od točk, ki ostanejo v G' niso listi v G , ima G' najvišjo točko stopnje vsaj 3 natanko takrat, ko se Y pojavi v G . Torej G nima kopij drevesa Y natanko takrat, ko je $\Delta(G') \leq 2$. To pa pomeni da je G' pot, kar je ekvivalentno, da je G gosenica. \square

13.4 NAVZVEN USMERJENA DREVESA IN EULERJEVI DIGRAFI

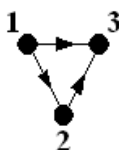
Z $d^+(v)$ oz. $d^-(v)$ označimo izhodno oz. vhodno stopnjo vozlišča v , to je število povezav iz oz. proti v .

Navzven usmerjeno drevo je drevo, v katerem obstaja med korenom in vsakim njegovim listom usmerjena pot od korena proti listu. Če obrnemo vse povezave dobimo *navznoter usmerjeno drevo*.

Izrek 13.11. *Dan je digraf brez zank. Naj bo $Q^- = D^- - A'$ in $Q^+ = D^+ - A'$, kjer sta D^- in D^+ diagonalni matriki, kjer je $d_{ii}^- = d^-(v_i)$ in $d_{ii}^+ = d^+(v_i)$, A' pa je matrika, kjer je a_{ij} število povezav od v_j proti v_i . Število vpetih navzven*

usmerjenih dreves (navznoter usmerjenih dreves) grafa G s korenom v_i je vrednost vsakega kofaktorja v i -ti vrstici matrice Q^- (i -tem stolpcu Q^+).

Zgled 13.12. Digraf spodaj ima dve navzven usmerjeni drevesi s korenom 1 in dve navznoter usmerjeni drevesi s korenom 3.



$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Digraf je *krepro povezan*, če obstaja usmerjena pot med poljubnim urejenim parom točk.

Lema 13.13. V *krepro povezanih digrafih* je vsako vozlišče koren navzven (navznoter) usmerjenega drevesa.

Dokaz. Premislimo za vozlišče v . Iterativno dodajamo povezave, ki so usmerjene iz v . Naj bo S_i množica vozlišč, ki jih dosežemo, ko smo dodali i -to povezavo, $S_0 = \{v\}$. Ker je digraf *krepro povezan*, obstaja povezava iz S_i . Ko jo dodamo dobimo S_{i+1} . To delamo, dokler ne dosežemo vseh vozlišč. Za navznoter usmerjena drevesa delamo podobno. \square

ALGORITEM 2 (Euler-jev obhod v digrafu)

vhod: Euler-jev digraf G brez izoliranih vozlišč in navznoter usmerjeno vpeto drevo T s korenom v .

1. **korak:** Za vsak $u \in V(G)$ določi vrstni red povezav, ki zapuščajo u tako, da za $u \neq v$ povezava, ki zapušča u v drevesu T pride zadnja.
2. **korak:** Začenjsi z v , konstruiraj Euler-jev obhod tako, da vedno zapustiš trenutno vozlišče u po naslednji neuporabljeni povezavi po vrstnem redu določenem za u .

Izrek 13.14. Zgornji algoritem vedno vrne Euler-jev obhod.

Dokaz. S ponočjo zgornje leme skonstruiramo navznoter usmerjeno drevo z korenom v . Z zgornjim algoritmom skonstruiramo sled. Zadostuje, da pokažemo, da se sled lahko konča le v v in le takrat, ko prepotuje vse povezave.

Ko smo v vozlišču $u \neq v$, povezava, ki zapušča u v drevesu T , še ni bila uporabljena, ker je $d^+(u) = d^-(u)$. Kadarkoli tako vstopimo v u , vedno obstaja povezava ven. Zato se sled lahko konča le v v .

Končamo, ko ne moremo več nadaljevati. Smo v v in smo porabili vse izhodne povezave. Ker je $d^+(u) = d^-(u)$, smo porabili tudi vse vhodne povezave v v . Ker ne moremo uporabiti povezave iz T dokler ni to zadnja možnost, ne moremo uporabiti vseh vhodnih povezav v v , dokler nismo obdelali vseh drugih vozlišč, saj T vsebuje pot iz kateregakoli vozlišča v v . \square

Izrek 13.15 (van Aardenne-Ehrenfest, Bruijn, 1951). V Euler-jevem digrafu z $d_i = d^+(v_i) = d^-(v_i)$ je število Euler-jevih obhodov $c \prod_i (d_i - 1)!$, kjer c šteje navznoter (navzven) usmerjena drevesa pri kateremkoli vozlišču.

Dokaz. Dokazati moramo le da prejšnji algoritem poišče vse Euler-jeve obhode.

Da najdemo drevo in vrstni red, ki generira Euler-jev obhod C , sledi C iz e in si zapomni vrstni red povezav, ki zapuščajo vsako vozlišče. Naj bo T usmerjen podgraf sestavljen iz zadnje povezave na C , ki izhaja iz kateregakoli vozlišča razen iz v . Ker se zadnja povezava iz vozlišča pojavi v C šele potem, ko so vse povezave vstopile vanj, se vsaka povezava v T razširi v pot v T , ki doseže v . T tako z $n - 1$ povezavami tvori navznoter usmerjeno drevo s korenem v . C je obhod ki ga dobimo s prejšnjim algoritmom iz T in vrstnega reda povezav, ki smo ga zapisali. \square

LITERATURA

- [1] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Vol. 2, Upper Saddle River: Prentice Hall (2001).

Del II

POGLAVJA IZ KOMBINATORIKE

LATINSKI KVADRATI

David Žnidaršič

14.1 DEFINICIJA LATINSKEGA KVADRATA $n \times n$

Latinski kvadrat reda n je

- $n \times n$ tabela (kvadratna shema oziroma matrika), napolnjena z n različnimi znaki, tako da se vsak znak pojavi le enkrat v vsaki vrstici oziroma enkrat v vsakem stolpcu.
- četverec $(R, C, S; L)$, kjer so R, C in S množice števil in je L preslikava $L : R \times C \rightarrow S$, tako da ima za vsak $i \in R$ in $x \in S$ enačba $L(i, j) = x$ za edino rešitev $j \in C$. Prav tako pa velja, da ima ta enačba ob vsakih $j \in C, x \in S$ enolično rešitev $i \in R$. Katerakoli od teh spremenljivk je torej enolično določena z ostalima dvema, tako da skupaj tvorijo $L(i, j) = x$. Elementi iz R se imenujejo *vrstice*, elemente iz C *stolpci*, elementi iz S pa *simboli* oziroma *vnosi*. Latinski kvadrat je običajno opisan kot $n \times n$ razporeditev pri kateri celica v vrstici i in stolpcu j vsebuje simbol $L(i, j)$.

Primeri latinskih kvadratov reda 4 in 5.

1	2	3	4	a	b	c	d	e
2	3	1	4	b	a	e	c	d
3	4	2	1	c	d	b	e	a
4	1	3	2	d	e	a	b	c
				e	c	d	a	b

Slika 44: Zgleda latinskega kvadrata

Zapis: Če, tako kot v definiciji, vsak element latinskega kvadrata zapišemo kot trojico (r, c, s) , kjer je r vrstica, c stolpec in s znak, dobimo množico

n^2 trojk, ki se imenuje *zapis kvadrata v obliki pravokotne vrste*. Tak zapis zgornjega prvega latinskega kvadrata je: $\{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4), (2, 1, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (2, 4, 4), (3, 1, 3), (3, 2, 4), (3, 3, 2), (3, 4, 1), (4, 1, 4), (4, 2, 1), (4, 3, 3), (4, 4, 2)\}$, kjer, na primer, trojka $(3, 4, 1)$ pomeni, da se v 3. vrstici in 4. stolpcu nahaja element 1. Latinski kvadrat lahko tedaj ponovno definiramo kot množico n^2 trojk oblike (r, c, s) , za katere velja $1 \leq r, c, s \leq n$, in so med seboj različni vsi pari (r, c) , (c, s) ter (r, s) . Lahko pa ga zapišemo tudi kot *vrstično polje*.

1	3	2	R	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	1	3	C	1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	2	1	E	1	3	2	2	1	3	1	2	3

Slika 45: 3×3 vrstično polje

uporaba: V začetku so ga uporabljali pri poskusih v agronomiji, sedaj pa je latinski kvadrat pogosto uporabljen v eksperimentiranju, saj lahko z njegovo pomočjo določimo zaporedje poskusov, organiziramo srečanja, itd

14.2 KONSTRUKCIJA LATINSKIH KVADRATOV

Latinski kvadrat je *skrčen*, če sta tako prva vrstica kot prvi stolpec naravno urejena. Oba latinska kvadrata na sliki 1 sta skrčena, saj sta v vsakem od njiju prva vrstica ter stolpec urejena (pri prvem 1, 2, 3, pri drugem pa a, b, c, d). Vsak latinski kvadrat lahko s permutacijami prevedemo na skrčeno obliko.

delni latinski kvadrat reda n : dobimo tako, da zapolnimo nekatere celice $n \times n$ polja s števili $1, \dots, n$ tako, da se vsako pojavi kvečjemu enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.

vprišanje: Kdaj lahko delni latinski kvadrat dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda? Primer (za $n = 5$):

- Zapolnjene imamo štiri vrstice. Delni latinski kvadrat lahko dopolnimo do latinskega kvadrata na en sam način.

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	4	2	5	1
4	5	1	2	3

- Zapolnjeno imamo le eno vrstico. Delni latinski kvadrat najlažje dopolnimo do latinskega kvadrata tako, da vrstico ciklično premikamo v levo. Takšen latinski kvadrat imenujemo **ciklični latinski kvadrat**.

4	1	3	2

4	1	3	2
1	3	2	4
3	2	4	1
2	4	1	3

- Delni latinski kvadrat ima zapoljenih le $n = 5$ celic, a ga ne moremo dopolniti do latinskega kvadrata.

1	2	3	4	
				5

1				
	1			
		1		
			1	
				2

vprišanje: Ali lahko delni latinski kvadrat, ki ima napoljenih manj kot n celic, vedno dopolnimo do latinskega kvadrata?

To je problem, ki ga je leta 1960 zastavil Trevor Evans. Da je to vedno res, je leta 1961 dokazal Bohdan Smetniuk.

Dokaz. Če permutiramo vrstice, dobimo vrstično polje nekega drugega latinskega kvadrata.

$$R \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow R$$

3×3 vrstično polje:

R	1	2	3	1	2	3	1	2	3
C	1	3	2	2	1	3	1	2	3
E	1	1	1	2	2	2	3	3	3

Ta kvadrat sedaj izgleda takole:

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	2	3
3	1	2
2	3	1

□

Delni latinski kvadrat, ki ima popolnoma zapolnjenih prvih r vrstic, ostale celice pa so prazne, imenujemo $(r \times n)$ latinski pravokotnik.

Lema 14.1. Vsak $(r \times n)$ latinski pravokotnik, $r < n$, lahko razširimo na $((r + 1) \times n)$ latinski pravokotnik in postopoma do latinskega kvadrata.

V dokazu nam bo v pomoč:

Izrek 14.2 (Hall). V dvodelnem grafu obstaja popolno prirejanje natanko tedaj, ko za vsak $C \subseteq X$ velja $\|C\| \leq \|G(C)\|$, kjer $\|C\|$ pomeni moč množice C , oziroma koliko elementov ta množica vsebuje.

Dokaz. Uporabimo Hallov izrek. Naj bo A množica števil, ki se ne pojavijo v j -tem stolpcu. $(r + 1)$. vrstici odgovarja sistem različnih predstavnikov iz množic A_1, \dots, A_n . Da dokažemo lemo, moramo dokazati Hallov pogoj. Vsaka množica A_j ima $n - r$ elementov in vsak element se nahaja v natanko $n - r$ množicah A_j , saj se r krat pojavi v prvih r vrsticah. Poljubnih m množic vsebuje $m(n - r)$ elementov in zato vsaj m različnih, kar pa zadošča Hallovemu pogoju. □

Lema 14.3. Naj bo P delni latinski kvadrat reda n , ki ima napolnjenih kvečjemu $n - 1$ celic s kvečjemu $\frac{n}{2}$ različnimi elementi. Potem lahko P dopolnimo do latinskega kvadrata reda n .

Dokaz. Problem prevedemo na enostavnejšo obliko. S konjugiranjem lahko pogoj "največ $\frac{n}{2}$ različnih elementov" spremenimo v pogoj "največ $\frac{n}{2}$ različnih vrstic". Predpostavimo lahko, da so zapolnjene zgornje vrstice. Naj bodo te vrstice $1, 2, \dots, r$ s f_i zapolnjenimi celicami v vrstici i , kjer je $r < \frac{n}{2}$ in

$$\sum_{i=1}^r f_i \leq n - 1.$$

S permutacijo vrstic lahko predpostavimo, da je $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$. Postopoma zapolnimo vrstice $1, 2, \dots, r$, da dobimo $(r \times n)$ latinski pravokotnik, ki ga lahko po prejšnji lemi dopolnimo do latinskega kvadrata. □

Izrek 14.4. Delni latinski kvadrat, ki ima napolnjenih največ $n - 1$ celic, lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo po n . Ugotovimo, da je za $n \leq 2$ to trivialno. Sedaj recimo, da je P delni latinski kvadrat reda $n + 1$, ki ima zapolnjenih največ n celic. Po zadnji lemi predpostavimo, da imamo $\frac{n+1}{2}$ različnih elementov ter da obstaja element, recimo mu $n + 1$, ki se pojavi le enkrat.

Kot prej predpostavimo, da je število delno zapolnjenih vrstic r : s_1, \dots, s_r s f_1, \dots, f_r zapolnjenimi celicami. $\sum_{i=1}^r f_i \leq n$. Recimo, da se element $n + 1$ nahaja v vrstici s_1 . Premaknili bomo vse napolnjene celice nad diagonalo, razen celico z elementom $n + 1$, ki bo premaknjena na diagonalo. Na prvem koraku bomo premaknili s_1 na $n + 2 - f_1$. S permutiranjem stolpcev premaknemo nasprotno celico na levo, tako da je element $n + 1$ zadnji v svoji vrstici.

Na drugem koraku prestavimo s_2 na $n + 1 - f_1 - f_2$ in napolnjene celice čim bolj levo. Na i -tem koraku prestavimos $_i$ na $n + 1 - f_1 - f_2 - \dots - f_i$ in napolnjene celice čim bolj levo.

Glavna ideja dokaza: zberemo element $n + 1$ in zadnjo vrstico ter zadnji stolpec. Ostal nam je delni latinski kvadrat reda n , ki ga lahko po indukcijski predpostavki dopolnimo do latinskega kvadrata reda n . Ta kvadrat odrežemo, tako da ohranimo celice nad in na diagonali (L), izpraznimo pa spodnji del in dodamo vrstico (L'). Dobimo na pol napolnjen $((n + 1) \times n)$ pravokotnik. Če lahko spodnji del pravokotnika napolnimo z elementi $1, 2, \dots, n$, tako da obdržimo delni latinski kvadrat reda $n + 1$, potem lahko diagonalo napolnimo z elementom $n + 1$. Nato dodamo zadnji stolpec (sledi iz prve leme) in dokaz bo končan.

Pri napolnjevanju vrstic si pomagamo z napolnjenim latinskim kvadratom reda n .

Naj bo $k \geq 3$ in predpostavimo, da smo vrstice $3, \dots, k - 1$ napolnili z upoštevanjem naslednjih pogojev:

- $k - 2$ elementov stolpca j v L' (različnih od $n + 1$ spadajo med prve $k - 1$ elemente stolpca j v L , za $n - k + 3 \leq j \leq n$. Ostane nam natanko en manjkajoč element za vsak stolpec.
- Ti elementi x_j so različni.

Nadaljujemo z vrstico k . Naj bodo y_{n-k+2}, \dots, y_n elementi vrstice k . Element y_{n-k+2} je manjkajoči element stolpca $n - k + 2$. V prvem poskusu napolnimo vrstico k z elementi y_{n-k+3}, \dots, y_n . $x_j \neq y_j$ za vsak y_j iz L . To bo delovalo razen v primeru $x_j = y_{n-k+2}$ za nekatere $j \geq n - k + 3$, ker ne zadoščajo pogojem manjkajočih elementov. V tem primeru zamenjamo $x_j = y_s$. Končali smo, razen če $x_l = y_j$ za nek $l \neq j$. Potem zamenjamo x_l in y_j in to ponavljamo, dokler ne zadoščajo vsem pogojem. Tako zapolnimo vse vrstice do n . Zadnjo vrstico $n + 1$ zapolnimo z manjkajočimi elementi in dokaz bo končan. \square

Izrek 14.5. *Naj bo A latinski kvadrat reda n ter naj bo B mreža dimenzije $n + 1 \times n + 1$, katere element na (i, j) -tem mestu je enak (i, j) -tem mestu v A za $i, j \geq 1, i + j \leq n$, ki ima simbol α na glavni kodiagonali, mesta pod to diagonalo pa so prazna. B tedaj lahko dopolnimo do latinskega kvadrata reda $n + 1$.*

Dokaz. Naj bo C mreža dimenzije $n \times n$, narejena z odstranitvijo zadnje vrstice ter stolpca B -ja. V našem primeru torej izgleda tako:

Algoritem, ki napolni prazna polja C -ja, napišemo kot polnjenje polj po vrsticah z omejitvijo, da bomo po prvih r vrsticah imeli latinski pravokotnik dimenzije $r \times n$ z $n + 1$ simboli $1, 2, \dots, n, \alpha$, tako da j -ti stolpec vsebuje enake elemente v podobnem vrstnem redu, kot so bili v prvih r vrsticah A -ja, razen "manjkajočega" v vsakem stolpcu, ki vsebuje x , tako da je med sabo različnih vseh $r - 1$ simbolov.

1	2	3	4	5
4	3	5	1	2
2	5	1	3	4
5	1	4	2	3
3	4	2	5	1

1	2	3	4	5	α
4	3	5	1	α	
2	5	1	α		
5	1	α			
3	α				
α					

1	2	3	4	5
4	3	5	1	α
2	5	1	α	
5	1	α		
3	α			

Slika 46: Primer razširitve latinskega kvadrata reda n na red $n + 1$

Za $r = 1$ ter $r = 2$ je to trivialno. Predpostavimo zdaj, da to velja za nek $r, 2 \leq r < n$ ter da so "manjkajoči" simboli sedaj

$$x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \dots, x_n.$$

Za dopolnitev $(r + 1)$ -te vrstice naredimo takole:

Naj bodo zadnji r simbolov v $(r + 1)$ -ti vrstici A -ja (odstranjeni med konstrukcijo C -ja)

$$y_{n-r+1}, y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \dots, y_n.$$

Tu je y_{n-r+1} simbol, nadomeščen z α ter bo torej novi manjkajoči element v tem stolpcu. Preverimo vstavljanje $y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \dots, y_n$ v $r + 1$ -to vrstico. Ugotovimo, da morajo biti $y_{n-r+1}, x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \dots, x_n$ (naši novi manjkajoči simboli) različni. Če niso, uporabimo zaporedje

$$y_{n-r+1} = x_{k_1}$$

$$y_{k_1}$$

$$\vdots$$

$$y_{k_{m-1}} = x_{k_m},$$

ki ga razširimo, kolikor se da, s tem da y_{k_m} ne sme biti enak nobenemu od x_j -em. Vrstico $r + 1$ sedaj napolnimo z $y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \dots, y_n$, kjer elemente $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}$ izpustimo in vsakega od njih zamenjamo z $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$. Preveriti moramo še, da $r + 1$ -ta vrstica res vsebuje različna števila. Novi manjkajoči simbol bo sedaj y_{n-r+1} ter $x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \dots, x_n$, pri čemer $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ izpustimo in zamenjamo z $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}$. Preverimo še, da so med seboj različni.

Ko napolnimo prazne celice C -ja (ter s tem tudi B -ja), dopolnimo B -ju še zadnjo vrstico z manjkajočim simbolom vsakega stolpca do r -tega elementa. Po prejšnji lemi pa smo s tem enolično določili latinski kvadrat reda $n + 1$. □

ekvivalenčni razredi latinskih kvadratov: Veliko operacij na latinskem kvadratu nam da nov latinski kvadrat. Najpreprostejši primer tega je, da ga obrnemo.

Ostali načini pridobivanja novih latinskih kvadratov pa so, da permutiramo

stolpce, vrstice in/ali znake.

Operacija $R_{i,j}(A)$ zamenja i -to in j -to vrstico, $C_{k,l}(A)$ zamenja k -ti in l -ti stolpec, pri $R_{a,b}(A)$ pa zamenjamo znaka a in b .

1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2

4	1	3	2
2	3	1	4
3	4	2	1
1	2	4	3

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

Slika 47: Zgleda permutacij vrstic in stolpcev

Ti latinski kvadrati so si v nekem smislu enaki. Latinski kvadrat je lahko informacijska tabela, ki jo lahko pokažemo na več načinov.

ŠTEVILO LATINSKIH KVADRATOV: (Vsaj trenutno) še ne poznamo nobene lahko izračunljive formule za izračun števila latinskih kvadratov velikosti $n \times n$. Vemo pa, da je to enako $n!(n-1)!$ krat število skrčenih latinskih kvadratov.

Število latinskih kvadratov reda $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ je $1, 2, 12, 576, 161280, 812851200, 61479419904000, 108776032459082956800, \dots$

14.3 OSTALE VARIANTE ALI VERZIJE LATINSKIH KVADRATOV

14.3.1 *Sudoku*

Ena od različic latinskega kvadrata, ki je sedaj zelo popularna, se imenuje *sudoku*. Pri tej verziji imamo latinski kvadrat reda 9×9 , za katerega poleg ostalih pravil za latinske kvadrate velja še, da se morajo vsa števila pojaviti v vsakem od 9 kvadratov velikosti 3×3 , ki sestavljajo sudoku. Število postavitvev je 6670903752021072936960, od tega jih je 5472730538 bistveno različnih.

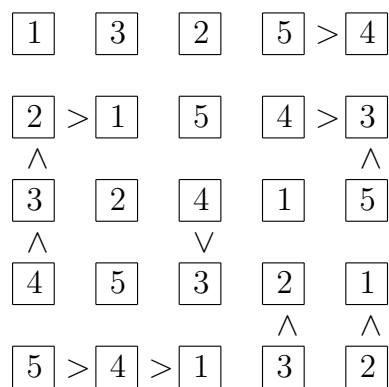
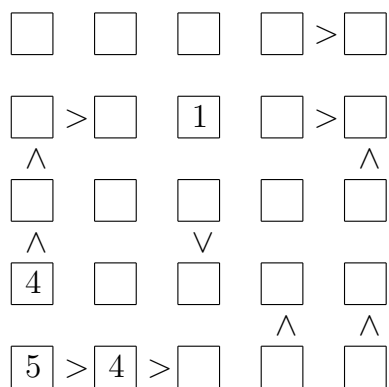
14.3.2 *Futoshiki*

Futoshiki je igra, pri kateri rešujemo delno izpolnjen latinski kvadrat reda 5. Že rešenim poljem so dodane tudi oznake $<$ in $>$. Za raziko od sudokuja futoshikiji niso enolično rešljivi. Vsak petek izhaja v britanskem časniku *Guardia*, vendar zaradi majhnega števila rešitev (56) nikdar ni dosegla priljubljenosti Sudokuja.

		2	7	3		9	1	
	8	7	2	1		4	5	
1	9		6				7	
	3				4	2	9	
7		1	2				8	
4			8		7			
5			4	1				
		8		6		5	7	3
			3	7				

				7	1		5	
	3				8	9		4
					4			
6		3			9			2
		4						5
	2	5	7	9		6		
7	8		2					
				4				9

Slika 48: Dva primera sudokuja



Slika 49: Primer Futoshikija ter ena od njegovih rešitev

14.3.3 *Magični kvadrat*

Magični kvadrat reda n je razporeditev n^2 običajno različnih števil v kvadratno mrežo, tako da je vsota katerekoli vrstice, stolpca ali diagonale venomer enaka nekemu k -ju.

Normalni magični kvadrat vsebuje številke od 1 do n^2 . Normalni magični kvadrati so razen reda $n = 2$ trivialne oblike.

2	7	6
5	9	1
4	3	8

Slika 50: Magični kvadrat reda 3

14.3.4 *Grško-latinski kvadrat*

Grško-latinski oziroma **Eulerjev kvadrat** reda n z množicama S in T , od katerih ima vsaka po n simbolov, je $n \times n$ porazdelitev celic, od katerih vsaka vsebuje urejen par (s, t) , $s \in S, t \in T$, tako da

- vsak stolpec in vsaka vrstica vsebuje natanko eno pojavitev $s \in S$ in natanko eno pojavitev $t \in T$
- ne obstajata dve celici z enakim urejenim parom simbolov.

Množici simbolov S in T sta pogosto $S = \{A, B, C, \dots\}$ – velike latinske črke ter $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ – male grške črke oziroma prvih n simbolov vsake od njiju.

Ta predpis nam tako za grške kot tudi za latinske znake ustvari latinski kvadrat.

$A\gamma$	$B\beta$	$C\alpha$
$B\alpha$	$C\beta$	$A\gamma$
$C\beta$	$A\alpha$	$B\gamma$

$A\alpha$	$B\gamma$	$C\delta$	$D\beta$
$B\beta$	$A\delta$	$D\gamma$	$C\alpha$
$C\alpha$	$D\gamma$	$A\beta$	$B\delta$
$D\delta$	$C\beta$	$B\alpha$	$A\gamma$

Slika 51: Grško-latinska kvadrata redov 3 in 4

LITERATURA

- [1] Weisstein, Eric W. *Latin Square*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html>

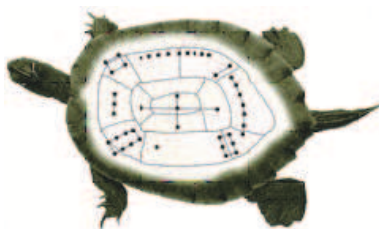
- [2] Wikipedia contributors, *Latin square*, Wikipedia, The Free Encyclopedia. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 31 Mar. 2015. Web. 16 Apr. 2015.
- [3] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press (1998).
- [4] M. Hall: *Combinatorial theory*, Wiley Interscience (1986).

MAGIČNE KOCKE IN MAGIČNI GRAFI

Vida Vukašinić

15.1 MAGIČNI KVADRATI IN MAGIČNE KOCKE

Prvi magični kvadrati so se začeli pojavljati že v obdobju 2000 let p.n.š. Po Kitajski legendi je takratni cesar Yu, med sprehodom ob Rumeni reki, na njenem bregu zagledal želvo, ki je na oklepu imela nenavaden vzorec. Cesar



Slika 52: Vzorec Lo Shu iz Rumene reke.

se je odločil, da bo ta nenavaden vzorec s slike 52 poimenoval Lo Shu. Lo Shu predstavlja najstarejši magični kvadrat, prikazan na sliki 53. Naslednji

4	9	2
3	5	7
8	1	6

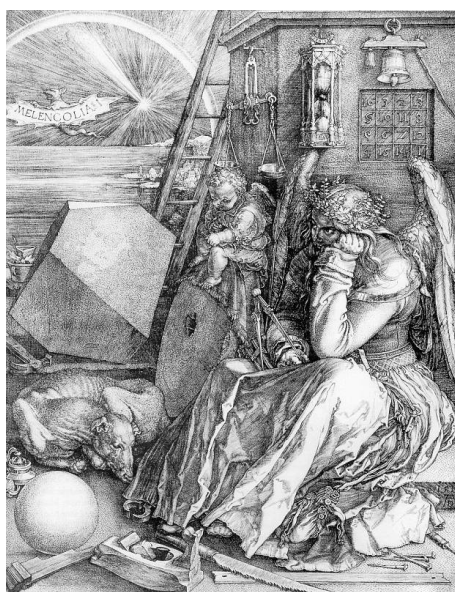
Slika 53: Magični kvadrat reda 3.

najbolj znan magični kvadrat s slike 54 pa je uprizoril nemški slikar Albrecht Durer leta 1514 na svoji grafiki Melanholija I (slika 55). V sredini spodnje vrstice magičnega kvadrata je upodobljena letnica njenega nastanka.

Magični kvadrat reda n je $n \times n$ matrika $Q_n = [q(i, j); 1 \leq i, j \leq n]$, ki vsebuje naravna števila $1, 2, \dots, n^2$, tako da je vsota vseh števil znotraj

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Slika 54: Magični kvadrat reda 4.



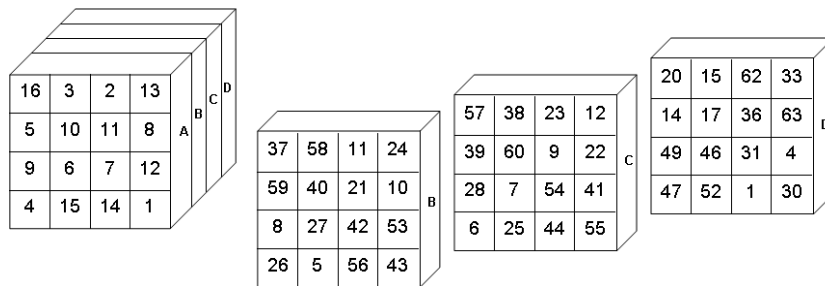
Slika 55: Melanholija slikarja Albrechta Durerja.

posameznih stolpcev, vrstic in glavnih diagonal konstantna. Lahko je pokazati, da je ta konstanta enaka $\frac{n(n^2+1)}{2}$ za magični kvadrat reda n . Hitro lahko tudi vidimo, da magični kvadrat reda 2 ne obstaja, saj bi sicer za štiri različna števila a, b, c in d , moralo veljati $a + b = a + c = a + d$.

Posplošitev magičnih kvadratov so magične kocke. *Magična kocka* reda n je 3-dimenzionalna $n \times n \times n$ matrika $Q_n = [q(i, j, k); 1 \leq i, j, k \leq n]$, ki vsebuje naravna števila $1, 2, \dots, n^3$ v takem vrstnem redu, da velja

$$\sum_{x=1}^n q(x, j, k) = \sum_{x=1}^n q(i, x, k) = \sum_{x=1}^n q(i, j, x) = \frac{n(n^3 + 1)}{2}$$

za vsak $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pri konstrukciji magične kocke ne zahtevamo pogoja konstantne vsote znotraj diagonal. Trojico (i, j, k) imenujemo *koordinata* elementa $q(i, j, k)$. Magični kvadrat reda 1 je magična kocka reda 1. Podobno kot pri magičnem kvadratu, tudi magična kocka reda 2 ne obstaja.



Slika 56: Magična kocka reda 4.

Izrek 15.1. Za vsako naravno število $n \neq 2$ obstaja magična kocka reda n .

Predno dokažemo izrek definirajmo Latinske kvadrate, ki jih bomo uporabili v dokazu. *Latinski kvadrat* $R_n = [r(i, j); 1 \leq i, j, \leq n]$ reda n je $n \times n$ matrika, pri čemer je vsaka vrstica in vsak stolpec permutacija naravnih števil $\{1, 2, \dots, n\}$. Latinska kvadrata $R_n = [r(i, j)]$ in $S_n = [s(i, j)]$ reda n sta *ortogonalna*, če za vsak $i, i', j, j' \in \{1, 2, \dots, n\}$ za katere velja $r(i, j) = r(i', j')$ in $s(i, j) = s(i', j')$ sledi, da je $i = i'$ in $j = j'$.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Slika 57: Ortogonalna latinska kvadrata reda 4.

Leta 1960 so R. C. Bose, S. S. Shrikhande in E. T. Parker dokazali, da ortogonalna kvadrata reda n obstajata natanko tedaj, ko $n \neq 2, 6$. To bomo uporabili v našem dokazu izreka 15.1.

Dokaz. Naj bosta $R_n = [r(i, j); 1 \leq i, j, \leq n]$ in $S_n = [s(i, j); 1 \leq i, j, \leq n]$ ortogonalna latinska kvadrata reda n in naj bo $M_n = [m(i, j); 1 \leq i, j, \leq n]$ magični kvadrat reda n . Definirajmo kocko $Q_n = [q(i, j, k); 1 \leq i, j, k \leq n]$ na naslednji način: naj bo za vsak $1 \leq i, j, k \leq n$, $q(i, j, k) = [s(i, r(j, k)) - 1]n^2 + m(i, s(j, k))$.

V štirih korakih bomo dokazali, da je Q_n magična kocka:

1. Vsi elementi latinskih kvadratov R_n in S_n so iz množice $\{1, 2, \dots, n\}$ in vsi elementi magičnega kvadrata M_n so iz množice $\{1, 2, \dots, n^2\}$, zato vsi elementi Q_n ustrezajo pogoju $1 \leq q(i, j, k) \leq n^3$.
2. V tej točki bomo dokazali, da imata poljubna elementa z različnimi indeksi iz Q_n različne vrednosti. Recimo, da velja $q(i, j, k) = q(i', j', k')$. Pokazali bomo, da od tod sledi, da je $i = i'$, $j = j'$ in $k = k'$. Po definiciji Q_n velja:

$$(s(i, r(j, k)) - 1)n^2 + m(i, s(j, k)) = (s(i', r(j', k')) - 1)n^2 + m(i', s(j', k'))).$$

Če enačbo preuredimo, dobimo:

$$-(s(i, r(j, k)) - s(i', r(j', k'))))n^2 = m(i, s(j, k)) - m(i', s(j', k')). \quad (24)$$

Ker so vsi elementi M_n iz množice $\{1, 2, \dots, n^2\}$ velja za desno stran enačbe (24), da ni večkratnik števila n^2 . Leva stran enačbe pa je očitno večkratnik števila n^2 . Torej mora veljati, da je $s(i, r(j, k)) - s(i', r(j', k')) = 0$, zato velja

$$s(i, r(j, k)) = s(i', r(j', k')) \quad \text{in} \quad m(i, s(j, k)) = m(i', s(j', k')). \quad (25)$$

V magičnem kvadratu pa nobena dva elementa nista identična. Če sta dva elementa v M_n enaka, so njune koordinate enake, torej iz enačbe (25) sledi $i = i'$ in $s(j, k) = s(j', k')$. Z zamenjavo i' z i v levi enačbi (25) dobimo $s(i, r(j, k)) = s(i, r(j', k'))$. Ker je S_n latinski kvadrat, iz enakosti prve koordinate sledi enakost druge koordinate $r(j, k) = r(j', k')$ (v poljubnem stolpcu oz. vrstici so vsi elementi različni). Ker pa sta S_n in R_n ortogonalna latinska kvadrata ter smo pokazali, da velja $s(j, k) = s(j', k')$ in $r(j, k) = r(j', k')$, sledi $j = j'$ in $k = k'$.

3. V tej točki bomo dokazali, da je vsota vseh členov v vsaki 'vrstici' enaka. Imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n q(x, j, k) &= \sum_{x=1}^n (s(x, r(j, k)) - 1)n^2 + \sum_{x=1}^n m(x, s(j, k)) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)n^2 + \frac{n(n^2+1)}{2} \\ &= \frac{n(n^3+1)}{2}. \end{aligned}$$

Potem, ker

$$\sum_{x=1}^n s(x, r(j, k)) = \sum_{x=1}^n s(i, r(x, k)) = \sum_{x=1}^n s(i, s(j, x))$$

in podobno

$$\sum_{x=1}^n m(x, s(j, k)) = \sum_{x=1}^n m(i, s(x, k)) = \sum_{x=1}^n m(i, s(j, x))$$

dobimo

$$\sum_{x=1}^n q(i, x, k) = \sum_{x=1}^n q(i, j, x) = \frac{n(n^3 + 1)}{2}.$$

4. Zgornja konstrukcija magične kocke bazira na uporabi ortogonalnih latinskih kvadratov in zato ne velja za $n = 6$. Obstoj Q_6 dokažemo s konkretnim primerom (slika 58).

6	192	193	199	30	31	212	26	23	14	191	185
72	174	168	49	151	37	146	47	53	167	62	176
103	138	85	96	115	114	113	83	128	125	98	104
139	79	126	127	102	78	74	137	95	86	116	143
150	61	55	162	43	180	71	152	158	56	173	41
181	7	24	18	210	211	35	206	194	203	11	2

214	28	16	21	189	183	213	9	15	22	208	184
148	45	57	160	64	177	39	172	166	51	153	70
76	117	87	94	135	142	75	136	88	93	118	141
111	100	124	129	82	105	112	81	123	130	99	106
69	154	165	52	171	40	178	63	58	159	46	147
33	207	202	195	10	4	34	190	201	196	27	3

5	209	200	197	8	32	1	187	204	198	25	36
179	44	50	164	65	149	67	169	157	60	156	42
140	80	131	122	101	77	144	97	132	121	84	73
107	134	92	89	119	110	108	120	91	90	133	109
38	155	161	59	170	68	145	66	54	163	48	175
182	29	17	20	188	215	186	12	13	19	205	216

Slika 58: Magična kocka reda 6.

□

Opomba 15.2. Konstrukcija magične kocke reda 4 s slike 56 bazira na magičnemu kvadratu s slike 54 in na ortogonalnih latinskih kvadratih s slike 57. Na primer:

$$\begin{aligned}
q(2, 3, 4) &= (s(2, r(3, 4)) - 1) \cdot 16 + m(2, s(3, 4)) \\
&= (s(2, 2) - 1) \cdot 16 + m(2, 1) \\
&= 3 \cdot 16 + 5 = 53.
\end{aligned}$$

Opomba 15.3. Vzorec ortogonalnih latinskih kvadratov reda 5 s slike 59 se da enostavno posplošiti na ortogonalne latinske kvadrate poljubnega lihega reda. Z uporabo tega vzorca in magičnega kvadrata opisanega spodaj se da enostavno sprogramirati računalniški program, ki skonstruira magično kocko za vsako liho število. Namesto magičnega kvadrata M_n lahko uporabimo kvadrat $M'_n = [m'(i, j)]$, kjer velja za vse $1 \leq i, j \leq n$:

$$m'(i, j) = (r(i, j) - 1)n^2 + s(i, j).$$

V tem primeru je vsota elementov po vrsticah in stolpcih enaka, medtem ko po diagonalah ni, zato M_n ni magični kvadrat v običajnem smislu. Vendar pa to ni problematično, ker vsota po diagonalah ni uporabljena znotraj našega dokaza konstrukcije magične kocke.

Opomba 15.4. Magične kocke lahko posplošimo na magične hiperkocke v p -dimenzionalnem evklidskem prostoru. Magična p -dimenzionalna hiperkocka reda n je p -dimenzionalna $n \times n \times \dots \times n$ matrika $Q_n^p = [q^p(i_1, i_2, \dots, i_p)]$, ki vsebuje naravna števila $1, 2, \dots, n^p$ v nekem vrstnem redu, tako da je vsota števil v vsaki 'vrstici' enaka $\frac{n(n^p+1)}{2}$ (z vrstico Q_n^p -magične kocke mislimo n -terico elementov, ki imajo na $(n-1)$ mestih identične koordinate). Latinska p -dimenzionalna hiperkocka U_n^p reda n je p -dimenzionalna $n \times n \times \dots \times n$ matrika katere elementi vsake 'vrstice' so permutacija števil $1, 2, \dots, n$.

Z generalizacijo prejšnega dokaza lahko dokažemo, da za vsako naravno število različno od 2 in 6 ter za $p \geq 2$ obstaja magična hiperkocka Q_n^p . Magična hiperkocka Q_1^p reda 1 vsebuje samo 1 element. Podobno kot ne obstaja magični kvadrat M_2 reda 2, ne obstaja tudi magična hiperkocka Q_2^p . Podali bomo induktivno konstrukcijo magične hiperkocke Q_n^p za vsa naravna števila $n \geq 3$, $n \neq 6$ in $p \geq 2$.

Naj bo $n \geq 3$ in $n \neq 6$. Če je $p = 2$, potem je U_n^2 latinski kvadrat reda n in Q_n^2 magični kvadrat reda n . Recimo, da je $p > 2$ in da sta $(p-1)$ -dimenzionalna latinska hiperkocka $U_n^{p-1} = [u^{p-1}(i_1, i_2, \dots, i_{p-1})]$ in magična hiperkocka $Q_n^{p-1} = [q^{p-1}(i_1, i_2, \dots, i_{p-1})]$ že skonstruirani. Latinsko hiperkocko $U_n^p = [u^p(i_1, i_2, \dots, i_p)]$ dimenzije p in reda n ter magično hiperkocko $Q_n^p = [q^p(i_1, i_2, \dots, i_p)]$ dimenzije p in reda n definiramo takole:

$$\begin{aligned}
u^p(i_1, i_2, \dots, i_p) &= u^{p-1}(i_1, i_2, \dots, i_{p-2}, r(i_{p-1}, i_p)), \\
q^p(i_1, i_2, \dots, i_p) &= (u^{p-1}(i_1, i_2, \dots, i_{p-2}, r(i_{p-1}, i_p)) - 1)n^{p-1} \\
&\quad + q^{p-1}(i_1, i_2, \dots, i_{p-2}, s(i_{p-1}, i_p)),
\end{aligned}$$

za vse $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq n$.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Slika 59: Ortogonalna latinska kvadrata reda 5.

15.2 MAGIČNI IN POLMAGIČNI GRAFI

Naj bo G neusmerjen graf, brez zank, večkratnih povezav in izoliranih vozlišč. Graf G je *magičen*, če obstaja preslikava $f : E(G) \rightarrow \mathbf{R}^+$ tako da velja:

1. $f(e_i) \neq f(e_j)$ za vse različne $e_i, e_j \in E(G)$,
2. $\sum_{e \in E(G)} \eta(v, e) f(e) = r$ za vse $v \in V(G)$,

pri čemer je $\eta(v, e) = \begin{cases} 1, & \text{če sta vozlišče } v \text{ in povezava } e \text{ incidentni;} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$

Funkcijo prirejanja imenujemo *magično barvanje* grafa G in vrednost r *indeks* magičnega barvanja f . Graf G je *polmagičen*, če obstaja preslikava f , ki zadostuje zgolj drugemu pogoju iz prejšnje definicije. Če za polmagičen graf G obstaja polmagično barvanje z indeksom r , rečemo, da ima G indeks r . Podgraf F grafa G imenujemo *faktor* grafa G , če velja $V(G) = V(F)$. Faktor F je $(1, 2)$ -faktor grafa G , če je vsaka njegova komponenta regularni graf prve ali druge stopnje. Z F^1 oz. F^2 označujemo podgraf grafa F , ki je sestavljen z izoliranimi povezavami oz. z vsemi cikli grafa F . Pravimo, da $(1, 2)$ -faktor *ločuje povezavi* e_1 in e_2 , če je vsaj ena od njiju vsebovana v F in niti F^1 niti F^2 ne vsebuje obeh hkrati.

15.2.1 Polmagični grafi

Lema 15.5. Če je graf G polmagičen graf z indeksom r , potem:

1. vsaka izolirana povezava grafa G je barve r ;
2. povezan del grafa G , ki vsebuje več kot eno povezavo, ne vsebuje vozlišča prve stopnje.

Dokaz zgornje leme je očitno.

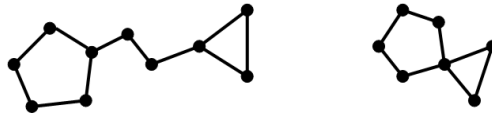
Lema 15.6. Če polmagičen graf G vsebuje sod cikel C , potem obstaja polmagičen faktor H grafa G , tako da H ne vsebuje vseh povezav cikla C .

Dokaz. Naj bo f polmagično barvanje grafa G in $m = \min\{f(e) : e \in E(C)\}$. Označimo povezave cikla C z e_1, e_2, \dots, e_{2n} in naj bo (brez škode za splošnost) $f(e_1) = m$. Definirajmo novo barvanje:

$$\begin{aligned} h(e_{2i-1}) &= f(e_{2i-1}) - m \\ h(e_{2i}) &= f(e_{2i}) + m \\ h(e_j) &= f(e_j) \text{ za vse } e_j \notin E(C). \end{aligned}$$

Očitno velja $h(e_1) = 0$. Če odstranimo iz G vse povezave, za katere velja $h(e) = 0$, dobimo polmagičen faktor, ki ne vsebuje vseh povezav cikla C in ima hkrati enak indeks kot graf G . \square

Graf G se imenuje *ročka*, če je sestavljen iz dveh lih ciklov C_1 in C_2 , pri čemer sta C_1 in C_2 brez skupnih povezav, povezana s potjo P ali pa imata samo eno skupno vozlišče.



Slika 60: Primera grafov ročk.

Lema 15.7. Če polmagičen graf G vsebuje kot podgraf ročko D , potem obstaja polmagičen faktor H grafa G , ki ne vsebuje vseh povezav podgrafa D .

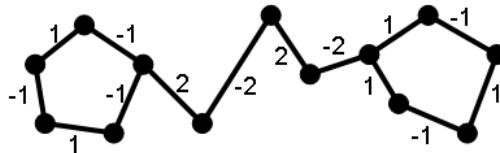
Dokaz. Naj bo f polmagično barvanje grafa G , pri čemer graf G vsebuje ročko D , ki je sestavljen iz dveh ciklov C_1, C_2 in potjo P oz. iz dveh ciklov C_1, C_2 .

Naj bo $m = \min\{m_1, m_2\}$, kjer sta:

$$m_1 = \min\{f(e) : e \in E(C_1) \cup E(C_2)\} \quad \text{in} \quad m_2 = \frac{1}{2} \min\{f(e) : e \in E(P)\}.$$

Naj bo e' povezava, ki realizira $m = \min\{m_1, m_2\}$.

Definirajmo pomožno barvanje p , tako da povezave cikla pobarvamo z vrednostmi 1 in -1 in povezave poti z vrednostmi 2 in -2 tako, da je vsota vrednosti povezav pri vsakem vozlišču enaka 0 in je vrednost povezave e' negativna. Vse ostale povezave grafa imajo vrednost 0.



Slika 61: Primer pomožnega barvanja p .

Opazujmo barvanje $h(e) = f(e) + mp(e)$ za vsak $e \in E(G)$. Vozlišča grafa G z vsemi povezavami, za katere velja $h(e) > 0$, tvorijo polmagičen faktor H grafa G enakega indeksa kot graf G . \square

Lema 15.8. Če je G polmagičen graf, potem obstaja polmagičen $(1, 2)$ -faktor F grafa G z enakim indeksom.

Lema 15.9. Če je G polmagičen graf, potem je vsaka povezava e' grafa G vsebovana v $(1, 2)$ -faktorju.

Dokaz. Naj bo e' poljubna povezava grafa G in naj bo F nek $(1, 2)$ -faktor grafa G .

Recimo, da e' ni povezava v F . Potem definiramo pomožno barvanje q , tako da:

$$q(e) = \begin{cases} 2 & e \in E(F^1) \\ 1 & e \in E(F^2) \\ 0 & e \notin E(F), \end{cases}$$

kjer je $m = \min\{\frac{f(e)}{q(e)} : e \in E(F)\}$.

Obravnavajmo barvanje $h(e) = f(e) - mq(e)$ za vsak $e \in E(G)$. Odstranimo iz grafa G vse povezave za katere velja $h(e) = 0$. Ostane polmagičen faktor H , ki vsebuje povezavo e' . Naj bo F' $(1, 2)$ -faktor faktorja H , torej je F' tudi $(1, 2)$ -faktor grafa G .

Če $e' \notin E(F')$ ponovimo konstrukcijo od prej. V končno mnogo korakih nam ostane $(1, 2)$ -faktor grafa G , ki vsebuje povezavo e' . \square

Lema 15.10. Če vsaka povezava grafa G pripada nekemu $(1, 2)$ -faktorju, potem je G polmagičen.

Dokaz. Polmagično barvanje grafa G dobimo s končnim številom ponovitev naslednjega postopka: Naj bo f barvanje povezav z nenegativnimi števili, tako da je vsota vseh barv pri nekem vozlišču incidenčnih povezav, enaka. Za vsak graf tako barvanje obstaja, saj lahko enostavno vse povezave pobarvamo z 0.

Naj bo e povezava, za katero velja $f(e) = 0$ in naj bo F $(1, 2)$ -faktor, tako da $e \in E(F)$. Naj bo $m = \max\{f(e) : e \in E(G)\} + 1$. Definirajmo barvanje:

$$h(e) = \begin{cases} f(e) + 2m & e \in E(F^1) \\ f(e) + m & e \in E(F^2) \\ f(e) & e \notin E(F). \end{cases}$$

Vsak $(1, 2)$ -faktor je razpet na vseh vozliščih grafa G . Če se v vozlišču stikata dve povezavi opazovanega faktorja, povezavama dodamo najvišjo trenutno vrednost povezave v grafu G in nato to vrednost za 1 povečamo. Če pa je vozlišče povezano samo z eno povezavo opazovanega $(1, 2)$ -faktorja, pa povezavi dodamo dvokratno trenutno najvišjo vrednost povezave v grafu G in nato to vrednost za 1 povečamo. Na tak način se vsota povezav okoli vozlišč sicer spremeni, vendar je pri vsakem vozlišču še vedno enaka. S tem postopkom v končno mnogo korakih spremenimo vse ničelne povezave v pozitivne in dobimo polmagično barvanje grafa G . \square

Iz lem 15.9 in 15.10 sledi:

Izrek 15.11. Graf G je polmagičen natanko tedaj, ko je vsaka povezava grafa G vsebovana v $(1, 2)$ -faktorju.

15.2.2 Magični grafi

Lema 15.12. Če je vsak par povezav e_1 in e_2 polmagičnega grafa G ločen z nekim $(1, 2)$ -faktorjem, potem je G magičen.

Dokaz. Naj bo f polmagično barvanje grafa G . Če velja $f(e_1) \neq f(e_2)$ za vsak par povezav e_1, e_2 , potem je G magičen. Sicer izberemo $(1, 2)$ -faktor F , ki ločuje povezavi e_1 in e_2 in definiramo barvanje kot v lemi 15.10. Po končnem številu ponovitev tega koraka nam ostane magični graf. \square

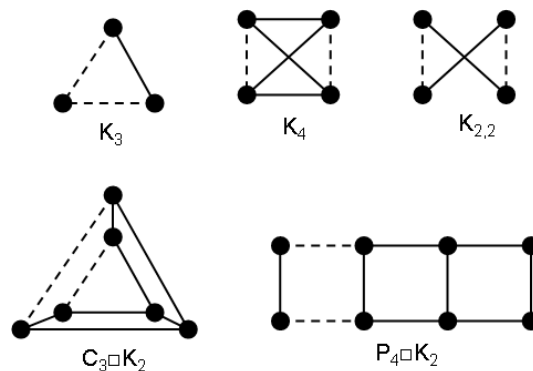
Iz Izreka 15.11 in leme 15.12 sledi naslednji izrek:

Izrek 15.13. Graf G je magičen natanko tedaj, ko vsaka povezava grafa G pripada nekemu $(1, 2)$ -faktorju in je vsak par povezav e_1 in e_2 ločen z $(1, 2)$ -faktorjem.

Posledica 15.14. Če je G magičen graf, potem obstaja magično barvanje grafa G s pozitivnimi celimi števili.

Dokaz. Magičen graf G je polmagičen, po izreku 15.13 velja, da vsaka povezava grafa G pripada nekemu $(1, 2)$ -faktorju, torej lahko kot v dokazu leme 15.10 definiramo polmagično barvanje grafa G s pozitivnimi celimi števili. Prav tako po izreku 15.13 velja, da je vsak par povezav e_1 in e_2 ločen z $(1, 2)$ -faktorjem, torej s ponovitvijo postopka iz dokaza leme 15.12 pridemo do magičnega barvanja grafa G s pozitivnimi celimi števili. \square

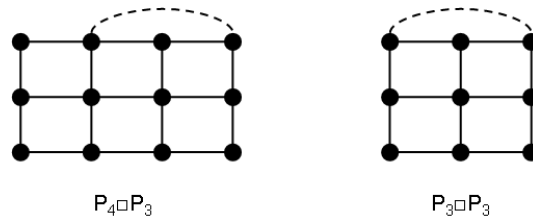
Lahko je pokazati, da grafi K_3 , K_4 , $K_{2,2}$, $C_3 \square K_2$ in $P_4 \square K_2$ niso magični. Če magičnemu grafu dodamo eno povezavo, se lahko spremeni v nemagič-



Slika 62: Primeri grafov, kjer para povezav, označenega s črtkano črto, ne moremo ločiti z $(1, 2)$ -faktorjem.

nega. Velja pa tudi obratno. Obstajajo grafi, ki z dodano povezavo postanejo magični. Primera takih grafov sta predstavljena na sliki 63.

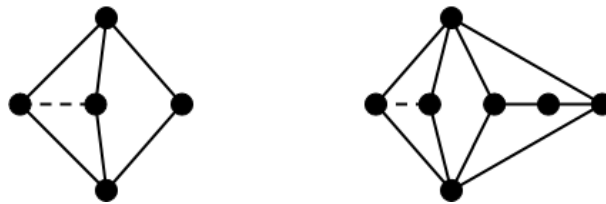
Izrek 15.15. Če magičnemu grafu G dodamo povezavo e , ki pripada nekemu $(1, 2)$ -faktorju dobljenega grafa $G' = G + e$, potem je G' magičen.



Slika 63: Če magičnemu grafu $P_4 \square P_3$ dodamo črtkano povezavo, dobimo nemagičen graf. Če nemagičnemu grafu $P_3 \square P_3$ dodamo črtkano povezavo dobimo magičen graf.

Dokaz. Očitno vsaka povezava grafa G' pripada nekemu $(1, 2)$ -faktorju. Če je e povezava, ki jo dodamo grafu G , potem za poljubno povezavo e_i velja, da sta povezavi e in e_i ločeni z nekim faktorjem F grafa G , tako da $e \in E(F)$. Vsak par povezav v grafu G je ločen z nekim $(1, 2)$ -faktorjem, ker je G magičen. Torej je vsak par povezav v grafu G' ločen z nekim $(1, 2)$ -faktorjem. \square

Izrek 15.16 (Doob). Naj bo G regularen graf stopnje $d \geq 3$ in naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n povezane komponente grafa G . Potem je graf G magičen natanko tedaj, ko je G_i magičen za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Slika 64: Primer nemagične unije neregularnih magičnih grafov.

Doobov izrek ne velja za neregularne grafe. Na sliki 64 oba neregularna grafa vsebujeta povezavo (črtkano označena), ki pripada cikličnemu delu vseh $(1, 2)$ -faktorjev. V obeh grafih (komponentah unije) mora imeti črtkana povezava vrednost $\frac{r}{2}$, kjer je r vsota vrednosti povezav incidentnih poljubnemu vozlišču. Unija obeh grafov ni magičen graf, ker imata označeni povezavi vedno enako vrednost.

Izrek 15.17. Če je G polmagičen graf brez K_2 komponente in za vsak $e \in E(G)$ velja, da obstaja $(1, 2)$ -faktor, tako da e ni element cikličnega dela $(1, 2)$ -faktorja, potem je $G \square K_2$ magičen.

Dokaz. Naj bodo $v_i, i = 1, 2, \dots, |V(G)|$, vozlišča polmagičnega grafa G . Za $v_i v_j \in E(G)$ označimo z $F_{i,j}$ $(1, 2)$ -faktor grafa G , ki vsebuje povezavo $v_i v_j$. Graf $G \square K_2$ je sestavljen iz dveh G -vlak, ki ju označimo z G^1 in G^2 . Za $i = 1, 2, \dots, |V(G)|$ in $s = 1, 2$, ki med seboj ločuje vlakni, je graf $G \square K_2$ sestavljen iz $2|V(G)|$ vozlišč v_i^s in $(2|E(G)| + |V(G)|)$ povezav $v_i^1 v_i^2$ in $v_i^s v_i^s$. Pokazati moramo, da $G \square K_2$ zadošča pogojem izreka 15.13.

Za vsak par povezav e in f grafa $G \square K_2$ opišimo $(1, 2)$ -faktor, ki vsebuje povezavo e in ločuje povezavi e in f . Pri tem ločimo štiri primere:

1. $e = v_i^s v_j^s, f = v_h^s v_k^s$ pripadata istemu G -vlaknu grafa $G \square K_2$. Graf $G \square K_2$ vsebuje dve G -vlakni, prvo vlakno vsebuje F^1 faktor in drugo F^2 faktor. Če $v_h v_k \notin E(F_{i,j})$, sledi da je $F_{i,j}^1 \cup F_{i,j}^2$ $(1, 2)$ -faktor. Če $v_h v_k \in E(F_{i,j})$, sledi da je $F_{i,j}^1 \cup F_{i,j}^2 - v_h^1 v_k^1 - v_h^2 v_k^2 + v_h^1 v_h^2 + v_k^1 v_k^2$ $(1, 2)$ -faktor.
2. $e = v_i^1 v_i^2$ pripada nekemu K_2 -vlaknu in $f = v_h^s v_k^s$ pripada nekemu G -vlaknu. Ločevalni $(1, 2)$ -faktor je graf $D_{|V(G)|} \square K_2$, kjer je $D_{|V(G)|}$ popolnoma nepovezan graf z $|V(G)|$ vozlišči.
3. $e = v_i^1 v_i^2, f = v_j^1 v_j^2$ pripadata dvema K_2 -vlaknema. Naj bo $v_i v_k \in E(G), k \neq j$. Sledi $(1, 2)$ -faktor je $F_{i,k}^1 \cup F_{i,k}^2 - v_i^1 v_k^1 - v_i^2 v_k^2 + v_i^1 v_i^2 + v_k^1 v_k^2$ ter ločuje povezavi e in f .
4. $e = v_i^1 v_j^1, f = v_h^2 v_k^2$ sta v različnih vlaknih grafa G . Če sta $v_i v_j$ in $v_h v_k$ različni povezavi faktorja G je ločevalni $(1, 2)$ -faktor enak kot v prvem primeru. Sicer velja $e = v_i^1 v_j^1$ in $f = v_i^2 v_j^2$ in obravnavamo dva podprimera:
 - a) če $v_i^1 v_j^1 \in C(F_{i,j})$ potem izberemo $(1, 2)$ -faktor F' , tako da $v_i^2 v_j^2 \notin C(F')$. $(1, 2)$ -faktor je $F_{i,j}^1 \cup F'$, vsebuje e in ločuje e in f .
 - b) naj bo $v_i v_j \in L(F_{i,j})$ (linearnem delu faktorja $F_{i,j}$) in $v_i v_k \in E(G)$ za $k \neq j$ ločevalni $(1, 2)$ -faktor $F = F_{i,j}^1 \cup F_{i,k}^2$.

□

Izrek 15.18. Naj bodo G_1, G_2, \dots, G_n povezane komponente grafa G . Če so G_i magični za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ in ima največ en G_i povezavo, ki je svebovana v cikličnem delu vseh $(1, 2)$ -faktorjev, potem je G magičen.

Osnovna ideja za dokaz zgornjega izreka sledi iz dokaza izreka 15.17.

Izrek 15.19. Če je graf G polmagičen brez komponente K_2 in je H graf katerega povezane komponente vsebujejo vsaj tri vozlišča, potem je $G \square H$ magičen.

Dokaz je analogen dokazu izreka 15.17.

LITERATURA

- [1] S. Jezný, M. Trenkler, *Characterization of Magic Graphs*, Czech. Math. Journal 33, Praha, 1983.
- [2] M. Trenkler, *Some Results on Magic Graphs*, Proceedings of Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory, Leipzig, 1983.
- [3] M. Trenkler, *Magic Cubes*, The Mathematical Gazette 82 (1998) 56–61.
- [4] M. Doob, *Characterization of regular magic graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 25 (1978) 94–104.

Recimo, da proizvajalec proizvaja neke izdelke. Razvil je v inačic tega izdelka in želi izvesti testiranje. Da bi testiranje dalo čimbolj uporabne rezultate, določi naslednja dva pogoja.

- Vsak potrošnik naj testira isto število inačic.
- Vsako inačico naj testira isto število potrošnikov.

Izvedba takega testiranja ni enostavna. V ta namen se je razvila teorija načrtov. Področje spada v kombinatoriko. Teorija, ki se je tu razvila, je zelo uporabna, hkrati pa so nekateri izreki zelo pomembni tudi v teoretični diskretni matematiki.

Teorija načrtov ima dolgo in bogato zgodovino. Njeni začetki segajo v reševanje zelo specifičnih problemov v algebri, geometriji, topologiji in teoriji števil. V praksi se največkrat uporablja za načrtovanje izvedb eksperimentov ali za popravljanje napak v kodah. V zadnjem času se zato področje razvija v tesni povezavi s kriptografijo. Praktična uporaba teorije načrtov daje strokovnjakom velike možnosti raziskovanja v povsem nova področja. Nove teorije so tako motivirane predvsem z dejanskimi problemi, le malo je povsem teoretičnih. Več o zgodovini teorije načrtov je lepo predstavljeno v članku [3].

V 1. razdelku bomo predstavili kaj sploh je načrt in si njegovo uporabo pogledali na nekaj primerih, v 2. razdelku bomo predstavili t -načrt, ki jo splošitev osnovnega načrta. V 3. razdelku si bomo pogledali, kako bi načrte in t -načrte tvorili. V 4. razdelku pa bomo pridobljeno znanje uporabili in dokazali znamenito Fisherjevo neenakost.

16.1 NAČRTI

Poglejmo si najprej, kaj sploh je načrt.

Definicija 16.1. Družina \mathcal{B} k -podmnožic množice X , $|X| = v$, je načrt s parametri (v, k, λ) , če se vsak element $x \in X$ pojavi v natanko λ množicah družine \mathcal{B} .

Opomba 16.2. Podmnožico s k elementi bomo krajše poimenovali k -podmnožica.

Zgled 16.3. Vinogradnik v Goriških Brdih je pridelal v različnih vrst vina. Trgovsko podjetje, ki želi njegovo vino odkupiti, pošlje k njemu nekaj degustatorjev, da preizkusijo kakovost vina. Vsak degustator lahko testira k vzorcev. Vinogradnik želi, da vsako vrsto vina testirajo λ -krat. Testiranje, ki ga bodo izvedli degustatorji, lahko predstavimo z načrtom (v, k, λ) .

Pri konstrukciji načrtov zaradi poenostavitve za množico X vzamemo $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Ko načrt uporabimo v praksi, vsaki številki iz X priredimo svoj izdelek.

Zgled 16.4. Naj bo $X = \mathbb{N}_8$ (torej $v = 8$) in $k = 4$. Skonstruirajmo nekaj načrtov. Vsako število se mora pojaviti v istem številu množic.

- 1458, 2367 je načrt s parametri $(8, 4, 1)$.
- 1478, 1356, 2356, 2478 je načrt s parametri $(8, 4, 2)$.
- 1234, 5678, 1357, 2468, 1247, 3568 je načrt s parametri $(8, 4, 3)$.

Opomba 16.5. Načrte bi sicer formalno morali pisati kot družino množic, vendar jih običajno pišemo poenostavljeno (kot v zgledu zgoraj). Prvi načrt bi formalno zapisali kot $\{\{1, 4, 5, 8\}, \{2, 3, 6, 7\}\}$.

Elemente iz \mathcal{B} imenujemo *bloki načrta*. Število blokov označimo z b .

Trditev 16.6. Naj bo \mathcal{B} (v, k, λ) -načrt. Tedaj je $b \cdot k = v \cdot \lambda$.

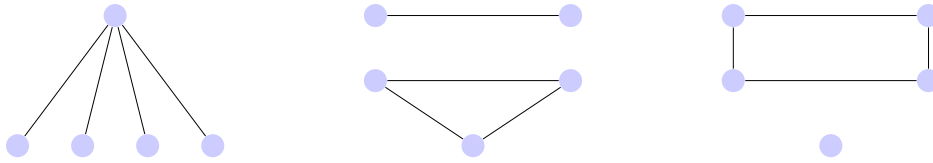
Dokaz. Trditev bomo dokazali z dvojnim preštevanjem. Stolpci naj predstavljajo bloke načrta, vrstice pa elemente množice X . V tabeli naredimo \circ , če element x leži v bloku B . Preštejmo število krogcev \circ v stolpcih. V vsakem stolpcu je k krogcev, saj ima vsak blok k elementov. Vseh blokov je b , torej je krogcev $b \cdot k$. Preštejmo jih še v vrsticah. Vsak element iz X se pojavi v λ blokih, vseh elementov pa je v . Torej je krogcev $v \cdot \lambda$.

Poglejmo si opisano dvojno preštevanje še na primeru prvega načrta iz zadnjega zglada.

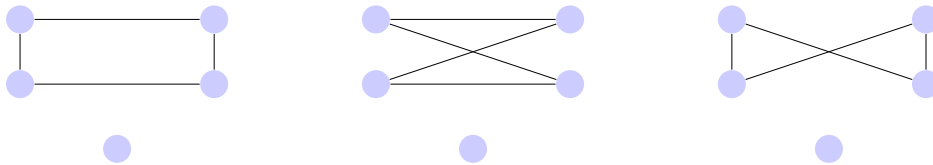
	1458	2367
1	\circ	
2		\circ
3		\circ
4	\circ	
5	\circ	
6		\circ
7		\circ
8	\circ	

□

Zgled 16.7. Poglejmo si zgled iz teorije grafov. Naj bo $X = E(K_5)$. V družini \mathcal{B} naj bodo podmnožice štirih povezav naslednjih treh oblik.



Blokov prvega tipa je 5, drugega tipa pa 10 (saj izmed petih vozlišč izberemo dva, ki nista v ciklu). Blokov tretjega tipa je 15, saj nepovezано vozlišče izberemo na 5 načinov, nato pa preostale povežemo na 3 mogoče načine, kar prikazuje naslednja slika.



Skupno število blokov je torej $5 + 10 + 15 = 30$. Da pa je pravkar predstavljena družina množic res načrt, se mora vsaka povezava nahajati v enakem številu blokov. To očitno drži, saj je graf K_5 povsem simetričen in ima v grafu vsaka povezava enako vlogo. Torej je to res načrt. Moč množice X je enaka 10, k je 4, b pa 30. Po zgoraj dokazani enakosti $b \cdot k = v \cdot \lambda$ lahko izračunamo λ . Najprej izrazimo λ :

$$\lambda = \frac{b \cdot k}{v},$$

nato pa vstavimo vrednosti in dobimo

$$\lambda = \frac{30 \cdot 4}{10} = 12.$$

Vsaka povezava se torej pojavi v natanko 12 množicah in imamo načrt s parametri $(10, 4, 12)$.

Vprašajmo se, ali načrt lahko vedno tvorimo. Odgovor je jasno ne, saj je potrebno, da je izpolnjenih nekaj pogojev. Denimo, da sta v in k vnaprej določena. Potem načrta ne moremo tvoriti za vsak λ .

Izrek 16.8. Načrt s parametri (v, k, λ) obstaja natanko tedaj, ko $k|v\lambda$ in $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$.

Dokaz. Denimo, da načrt obstaja. Ker velja enakost $b \cdot k = v \cdot \lambda$, je jasno, da $k|v\lambda$. Število λ predstavlja število blokov, v katerih je x . Izmed vseh preostalih elementov moramo izbrati še $k - 1$ elementov v posamezen blok. Torej je $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$ (vsako množico namreč lahko izberemo kvečjemu enkrat). Očitno velja tudi neenakost $b \leq \binom{v}{k}$, ki pa je pravzaprav ekvivalentna $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$ (sledi direktno z uporabo formule $b = \frac{v\lambda}{k}$).

Denimo sedaj, da velja $k|v\lambda$ in $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$. Izberimo poljubno družino \mathcal{C} (z b elementi) k -podmnožic množice X , $|X| = v$. Če je \mathcal{C} načrt, smo dokaz

končali. Če pa ni, potem obstaja $x_1 \in X$, ki se pojavi v manj kot λ podmnožicah in obstaja $x_2 \in X$, ki se pojavi v več kot λ podmnožicah iz \mathcal{C} . To velja, ker se posamezni element v povprečju pojavi λ -krat. Sedaj definiramo naslednji dve družini množic iz \mathcal{C} : v \mathcal{C}_1 naj bodo natanko tiste množice, ki vsebujejo element x_1 in ne vsebujejo elementa x_2 , v \mathcal{C}_2 pa naj bodo tiste množice, ki vsebujejo element x_2 in ne vsebujejo elementa x_1 . V družini \mathcal{C}_2 je očitno več množic kot v \mathcal{C}_1 . Sedaj množice iz \mathcal{C}_2 spremenimo tako, da element x_2 v vsaki od množic zamenjamo z x_1 . Med temi množicami pa je zagotovo vsaj ena nova, poimenujmo jo C^* , ki jo ni v \mathcal{C} (ker je \mathcal{C}_2 večja od \mathcal{C}_1). Množico, iz katere smo dobili C^* , poimenujmo C^{**} . Sedaj popravimo načrt \mathcal{C} tako, da iz njega odstranimo C^{**} in mu dodamo C^* . Ta postopek ponavljamo, dokler se vsi elementi ne pojavijo λ -krat. Vprašajmo se še, ali je postopek končan v končno korakih. Najbolj ekstremen primer bi bil, če bi se k elementov na začetku pojavilo v vseh b podmnožicah, ostali pa nikjer. Potem bi se zgoraj opisani postopek končal v natanko $(b - \lambda) \cdot k$ korakih. Če začetna razporeditev ni tako ekstremna, potem je postopek končan še hitreje.

□

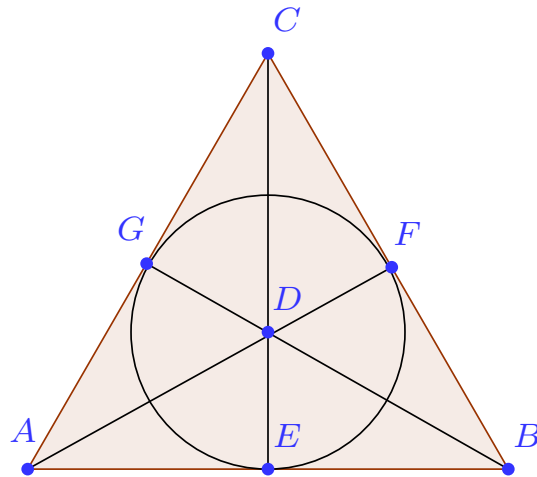
16.2 T-NAČRTI

Nekateri proizvajalci bi radi svoj izdelek testirali še bolje. Radi bi, da v blokih načrta nekateri pari izdelkov ne bi nastopali večkrat, nekateri pa nikoli. Na primer, pri testiranju vina bi degustator lahko kakšno vino ocenil za slabšega kot je v resnici, če bi poleg njega vedno testiral tudi neko zelo kakovostno vino, nikoli pa slabšega. Zaradi potrebe po izboljšavi navadnih načrtov se je pojavil t -načrt (več o njih lahko najdemo v [7]).

Definicija 16.9. Družina k -množic \mathcal{B} je t -načrt s parametri (v, k, λ_t) , če se vsaka t -podmnožica v -množice pojavi v natanko λ_t blokih.

Zgled 16.10. Iz definicije takoj preberemo, da je 1-načrt natanko navaden načrt.

Zgled 16.11. Zanimive primere t -načrtov lahko dobimo v končni geometriji. Ena takih je t.i. *Fanova ravnina*.



Elementi, ki jih bomo razvrstili v načrt, so označene točke. V istem bloku ležijo tiste točke, ki ležijo na isti premici v tej končni geometriji. Dobimo načrt z bloki ABE , ACG , BCF , ADF , BDG , CDE in EFG . Vidimo, da se vsak par točk pojavi v natanko enem bloku. Skonstruirali smo torej 2-načrt s parametri $(7, 3, 1)$.

Definicija 16.12. 2-načrt s parametri $(v, 3, 1)$ imenujemo *Steinerjev sistem trojk*.

Zgled 16.13. Skonstruirajmo še 3-načrt. Množica X naj bo \mathbb{N}_8 , podmnožice pa naj bodo velikosti 4.

1235	4678
1346	2578
1457	2368
1568	2347
1267	3458
1378	2456
1248	3567

To je 3-načrt s parametri $(8, 4, 1)$.

Zdi se, da je vsak 2-načrt tudi načrt (torej 1-načrt). V resnici pa velja še splošnejši izrek.

Izrek 16.14. Naj bo \mathcal{B} t -načrt. Tedaj je \mathcal{B} tudi s -načrt za vse $s = 1, 2, \dots, t - 1$.

Dokaz. Zadostuje že, da izrek dokažemo za $s = t - 1$. Imejmo t -načrt \mathcal{B} s parametri (v, k, λ_t) . Oglejmo si poljubno podmnožico M množice X , za katero velja $|M| = t - 1$. Najprej naredimo tabelo, v kateri so stolpci posamezni bloki načrta \mathcal{B} , vrstice pa elementi iz X . V tabeli naredimo \circ natanko tedaj, ko $x \notin M$ in ko $M \cup \{x\} \subseteq B$. Preštejmo krogce \circ v vrsticah. Ker so \circ v vrsticah, ko $x \notin M$, imamo krogce v $v - (t - 1)$ vrsticah. Oglejmo si tipično vrstico, ki ima \circ . Tedaj je $|M \cup \{x\}| = t$. Ker imamo t -načrt, to pomeni, da je v tej vrstici λ_t krogcev. Torej imamo v vrsticah $\lambda_t \cdot (v - t + 1)$

krogcev. Preštejmo še število krogcev v stolpcih. Recimo, da je M v λ_s blokih. Če je M v bloku B , potem imamo v tem stolpcu $k - (t - 1)$ krogcev, torej skupaj $\lambda_s \cdot (k - t + 1)$. Veljati mora enakost

$$\lambda_s \cdot (k - t + 1) = \lambda_t \cdot (v - t + 1),$$

torej

$$\lambda_s = \lambda_t \cdot \frac{v - t + 1}{k - t + 1}.$$

Ugotovili smo, da je število blokov, v katerih se pojavi M , neodvisno od izbire množice M , torej je vsaka $(t - 1)$ -podmnožica v natanko $\lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$ blokih načrta \mathcal{B} . \square

Dokaz izreka 16.14 nam za vsak s -načrt pove tudi njegov parameter λ_s .

Posledica 16.15. Če je \mathcal{B} t -načrt s parametri (v, k, λ_t) , tedaj je tudi s -načrt za $s = 1, 2, \dots, t - 1$ in pri tem velja

$$\lambda_s = \lambda_t \cdot \frac{(v - s) \cdot (v - s + 1) \cdots (v - t + 1)}{(k - s) \cdot (k - s + 1) \cdots (k - t + 1)}.$$

Dokaz. Iz dokaza izreka 16.14 vemo

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \frac{v - t + 1}{k - t + 1}.$$

Sledi

$$\lambda_{t-2} = \lambda_{t-1} \cdot \frac{v - t + 2}{k - t + 2} = \lambda_t \cdot \frac{v - t + 2}{k - t + 2} \cdot \frac{v - t + 1}{k - t + 1}.$$

Nadaljujemo induktivno. \square

Za zaključek si pogledajmo še 2 zgleda.

Zgled 16.16. Pogledajmo si še enkrat Fanovo ravnino. Vemo: $\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{v-1}{k-1}$. Ker je $\lambda_2 = 1$, sledi $\lambda_1 = 1 \cdot \frac{7-1}{3-1} = 3$. Fanova ravnina je torej tudi načrt s parametri $(7, 3, 3)$.

Zgled 16.17. Pogledajmo si 3-načrt iz zgleda 16.13. Izračunajmo λ_2 in λ_1 :

$$\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{v - 2}{k - 2} = 1 \cdot \frac{8 - 2}{4 - 2} = 3,$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \cdot \frac{v - 1}{k - 1} \cdot \frac{v - 2}{k - 2} = 1 \cdot \frac{8 - 1}{4 - 1} \cdot \frac{8 - 2}{4 - 2} = 7.$$

Dani 3-načrt je tudi 2-načrt s parametri $(8, 4, 3)$ in načrt s parametri $(8, 4, 7)$.

16.3 CIKLIČNE KONSTRUKCIJE NAČRTOV

Sedaj ko vemo, kaj so načrti, si pogledajmo nekaj malega o tem, kako bi jih tvorili. V tem poglavju naj bo $X = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_n$. Definirajmo množico $S + i = \{x + i \mid x \in S\}$. Očitno velja $|S| = |S + i|$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$. Porodi se nam ideja, da bi množice $S + i$ lahko tvorile bloke nekega načrta. Kdaj bo to res?

Zgled 16.18. Naj bo $S = \{0, 3\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Kakšne so množice $S + i$?

$$S + 0 = \{0, 3\} = S + 3$$

$$S + 1 = \{1, 4\} = S + 4$$

$$S + 2 = \{2, 5\} = S + 5$$

Dana množica S očitno ne bo dobra za konstrukcijo načrta, saj bi se nekatere podmnožice v načrtu pojavile večkrat.

Zgled 16.19. Naj bo sedaj $S = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}_6$.

$$S + 0 = \{0, 1\}$$

$$S + 1 = \{1, 2\}$$

$$S + 2 = \{2, 3\}$$

$$S + 3 = \{3, 4\}$$

$$S + 4 = \{4, 5\}$$

$$S + 5 = \{0, 5\}$$

Ta množica S pa je za konstrukcijo načrta dobra, saj se vsak element pojavi natanko dvakrat.

Torej: če so množice $S + i$ paroma različne (seveda pa ne nujno disjunktne), tvorijo načrt. Kakšen je, nam pove naslednji izrek.

Izrek 16.20. Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ in naj bodo $S + i$ paroma različne množice za $i \in \mathbb{Z}_n$. Tedaj $\{S + i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ tvori načrt s parametri $(n, |S|, |S|)$.

Dokaz. Dokazati moramo le, da λ obstaja in da je enaka $|S|$, ostala dva parametra sta očitna. Naj bo $a \in \mathbb{Z}_n$. Kdaj je $a \in S + i$? Natanko tedaj, ko velja $a = x + i$ za nek $x \in S$, oziroma, ko velja $x + (i - a) = 0$ za nek $x \in S$. Sklep: $a \in S + i$ natanko tedaj, ko $0 \in S + (i - a)$. Sledi, da sta a in 0 v istem številu množic $S + i$, saj je $a \in S + i_1, \dots, S + i_r$ natanko tedaj, ko $0 \in S + (i_1 - a), \dots, S + (i_r - a)$. Ker je a poljuben, so torej vsi elementi v istem številu množic $S + i$. Imamo načrt. Koliko je λ ? Izračunajmo:

$$\begin{aligned} b \cdot k &= v \cdot \lambda, \\ n \cdot |S| &= n \cdot \lambda, \\ \lambda &= |S|. \end{aligned}$$

□

Naučili smo se, kako preprosto tvoriti načrt. Sedaj nas zanima več - kako bi tvorili 2-načrt? Očitno bo od množice S potrebno zahtevati še več.

Definicija 16.21. Množica $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ je *množica razlik*, če se vsak neničelni element iz \mathbb{Z}_n pojavi enakokrat kot razlika $x - y$, $x \neq y$, $x, y \in S$.

Zgled 16.22. Naj bo $S = \{0, 2, 3, 4, 8\} \subseteq \mathbb{Z}_{11}$. Poglejmo si vse razlike različnih elementov iz S .

	0	2	3	4	8
0	-	9	8	7	3
2	2	-	10	9	5
3	3	1	-	10	6
4	4	2	1	-	7
8	8	6	5	4	-

Vsak element iz \mathbb{Z}_{11} se kot razlika pojavi natanko dvakrat. Množica S je množica razlik.

S pomočjo množic razlik lahko tvorimo 2-načrte. Kakšne, nam pove naslednji izrek.

Izrek 16.23. Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ množica razlik, $|S| = k$. Tedaj $\{S + i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ tvori 2-načrt s parametri $(n, k, \frac{(k-1)k}{n-1})$.

Dokaz. Ponovno moramo dokazati le obstoj λ in njeno vrednost. Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq b$. Dokazati želimo, da se $\{a, b\}$ pojavi v fiksnem številu $(\frac{(k-1)k}{n-1})$ množic $S + i$. Ker $a - b \neq 0$, se $a - b$ pojavi enakokrat kot razlika $x - y$ za $x, y \in S$. Vseh razlik je $(k-1)k$ in vseh neničelnih elementov je $n-1$, zato ima enačba

$$a - b = x - y \tag{26}$$

natanko $\frac{(k-1)k}{n-1}$ rešitev. Vsaki taki rešitvi priredimo število $i_x = a - x$. Imamo torej

$$f: (x, y) \mapsto i_x = a - x.$$

Sledi:

$$a = x + i_x$$

in

$$b = a - x + y = y + i_x.$$

Množica $\{a, b\}$ je torej podmnožica $S + i_x$. Prireditev f je injektivna, od koder sledi, da je $\{a, b\}$ v toliko množicah $S + i$, kolikor je rešitev enačbe 26. To pa je $\frac{(k-1)k}{n-1}$. □

Zgled 16.24. Napravimo 2-načrt iz množice S z zgleda 16.22.

$$S = \{0, 2, 3, 4, 8\} \subseteq \mathbb{Z}_{11}$$

0,	2,	3,	4,	8
1,	3,	4,	5,	9
2,	4,	5,	6,	10
3,	5,	6,	7,	0
4,	6,	7,	8,	1
5,	7,	8,	9,	2
6,	8,	9,	10,	3
7,	9,	10,	0,	4
8,	10,	0,	1,	5
9,	0,	1,	2,	6
10,	1,	2,	3,	7

Kakšen 2-načrt je to? Vemo: $n = 11$, $k = 5$, $\lambda_2 = \frac{(k-1)k}{n-1} = \frac{4 \cdot 5}{10} = 2$. Imamo torej 2-načrt s parametri $(11, 5, 2)$. Če še enkrat pogledamo bloke 2-načrta, vidimo, da se vsak par elementov iz \mathbb{Z}_{11} v 2-načrtu res pojavi natanko dvakrat. Skonstruirani 2-načrt pa je seveda tudi navaden načrt. Izračunajmo λ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{v-1}{k-1} = 2 \cdot \frac{11-1}{5-1} = 5.$$

Parametri načrta so $(11, 5, 5)$.

Vsaka množica razlik S očitno ustreza tudi pogoju iz izreka 5. Vsak 2-načrt, skonstruiran ciklično z množico razlik, je torej po izreku 16.20 tudi načrt s parametri $(n, |S|, |S|)$. Preverimo, ali je to res:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{n-1}{|S|-1} = \frac{(|S|-1) \cdot |S|}{n-1} \cdot \frac{n-1}{|S|-1} = |S|.$$

Očitno je ciklična konstrukcija načrtov dobro definirana, hkrati pa je tudi zelo uporabna, saj lahko sorazmerno velike in zapletene načrte skonstruiramo zelo hitro.

16.4 FISHERJEVA NEENAKOST

V zadnjem poglavju si bomo pogledali enega najbolj znamenitih izrekov iz teorije načrtov, t.i. *Fisherjevo neenakost*. Ronald Fisher(1890-1962) je bil angleški statistik, genetik in razvojni biolog. Pustil je velik pečat v statistiki, finančni matematiki in teoriji verjetnosti (več v [5]). Znanih je mnogo formul, enakosti in testov, ki nosijo ime po njem. Še pomembnejše pa je njegovo udejstvovanje v biologiji in genetiki (več v [6]). Razvil je kar nekaj revolucionarnih modelov za tisti čas, kar je razumljivo, saj je bil evgenik. Richard Dawkins je zanj celo dejal, da je največji biolog po Darwinu. Izrek, ki ga bomo dokazali tudi mi, je kot prvi dokazal leta 1940 (originalen članek najdemo v [8]).

Izrek 16.25 (Fisherjeva neenakost). *Naj bo \mathcal{B} 2-načrt s parametri (v, k, λ_2) nad množico X . Naj bo $v > k$ (sicer je načrt trivialen). Tedaj velja $|\mathcal{B}| \geq |X|$ (torej $b \geq v$).*

Opomba 16.26. Izrek 16.23 nam pove, da je Fisherjeva neenakost najboljša možna. S ciklično konstrukcijo z množico razlik dobimo namreč natanko enakost $b = v([1])$.

Dokaz. Dokaz je izredno zanimiv, saj v njem uporabimo kar nekaj pojmov iz linearne algebre. Naj bosta $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ in $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$. Sestavimo incidenčno matriko načrta A :

$$(A)_{ij} = a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } x_i \in B_j; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Matrika A je velikosti $v \times b$. Poglejmo si, kako izgleda AA^T . Matrika AA^T je velikosti $v \times v$. Element $(AA^T)_{ij}$ je skalarni produkt i -te in j -te vrstice A . Velja namreč:

$$(AA^T)_{ij} = \sum_{k=1}^b a_{ik} \cdot a_{kj}^T = \sum_{k=1}^b a_{ik} \cdot a_{jk}.$$

Element $(AA^T)_{ij}$ je torej enak številu pojavitev enic na istem mestu v i -ti in j -ti vrstici matrike A . Ker je \mathcal{B} 2-načrt, velja:

$$(AA^T)_{ij} = \begin{cases} \lambda_2, & \text{če } i \neq j; \\ \lambda_1, & \text{če } i = j. \end{cases}$$

Matrika AA^T je torej oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo njeno determinanto:

$$\begin{aligned}
\det(AA^T) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda_1 + (v-1)\lambda_2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda_1 + (v-1)\lambda_2}{-\lambda_2} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_2 & -\lambda_2 & \cdots & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\lambda_1 + (v-1)\lambda_2}{-\lambda_2} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_2 & -\lambda_2 & -\lambda_2 & \cdots & -\lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda_1 + (v-1)\lambda_2) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{v-1}.
\end{aligned}$$

Pri izračunu determinante smo najprej 1. vrstici prišteli vse ostale. Nato smo konstantno 1. vrstico izpostavili, jo pomnožili z $-\lambda_2$, na koncu pa vsaki vrstici razen 1. odšteli ravno 1. vrstico. Prvi faktor v produktu $(\lambda_1 + (v-1)\lambda_2) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{v-1}$ je očitno pozitiven. Kolikšen pa je drugi faktor? Ker velja enakost $\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \frac{v-1}{k-1}$, je tudi drugi faktor pozitiven, saj smo privzeli $v > k$. Sledi, da je determinanta matrice AA^T strogo pozitivna in matrika je obrnljiva. Rang AA^T je poln, torej enak v . Iz linearne algebre vemo, da velja naslednja neenakost([2]):

$$\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}. \quad (27)$$

Recimo sedaj, da je $b < v$. Potem je rang matrik A in A^T kvečjemu b . Po neenakosti 27 je torej $\text{rang}(AA^T) \leq b < v$, protislovje. Izrek je dokazan. \square

16.5 ZAKLJUČEK

Prav dokaz Fisherjeve neenakosti je bil eden izmed najpomembnejših razlogov, da sem se odločil predelati in predstaviti teorijo načrtov. Moj cilj je bil predstaviti teorijo, katere izpeljava je motivirana na nekem povsem praktičnem primeru. Naslov seminarske naloge sicer ni najbolj korekten, saj sem v resnici predstavil kombinatorično teorijo načrtov. V [4] je predstavljeno še nekaj alternativnih teoretičnih pristopov. Najbolj znane so verjetnostna metoda za razvoj načrtov, slučajnostna teorija načrtov in raziskovalna teorija načrtov. Razvoj posameznih panog ni povsem strogo matematičen,

zelo pogosto so uporabljeni prijemi iz vseh najpomembnejših naravoslovno-tehniških smeri.

LITERATURA

- [1] D. R. Stinson, *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*, Springer (2003), 1–21.
- [2] B. C. Bose, *A Note on Fisher's Inequality for Balanced Incomplete Block Designs*, *Annals of Mathematical Statistics* **20**(4) (1949), 619–620.
- [3] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, D. R. Stinson, *Applications of combinatorial designs to communications, cryptography, and networking*, Faculty of Mathematics, University of Waterloo (1999), 37–100.
- [4] C. R. Rao, *Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays*, *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society* **9**(1) (1947), 128–139.
- [5] E. S. Pearson, *Some reflections on continuity in the development of mathematical statistics 1890-94*, *Biometrika* **54** (1967), 341–355.
- [6] J. C. Gower, *Ronald Aylmer Fisher 1890-1962*, *Mathematical Spectrum* **23** (1990-91), 76–86.
- [7] R. A. Bailey, *Association Schemes: Designed experiments, Algebra and Combinatorics*, Cambridge University Press (2004), 51–54.
- [8] R. A. Fisher, *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, *Annals of Eugenics* **10**(1) (1940), 52–75.

17.1 POSTULATI

Matroide si lako predstavljamo na več različnih načinov, saj v raznih vejah matematike najdemo strukture, ki tvorijo matroide. Najenostavnejša primera matroida sta končna množica vektorjev skupaj z družino svojih linearno neodvisnih podmnožic in končen graf skupaj z družino vseh svojih podgrafov, ki so brez ciklov.

Ker se matroidi pojavljajo na tako različnih področjih, se izkaže, da je tudi načinov, kako definirati matroid, kar precej. Nekaj si jih bomo ogledali v nadaljevanju.

Matroid $M = (S, \mathcal{I})$ definiramo kot končno množico S skupaj z družino $\mathcal{I} \subseteq 2^S$, za katero velja:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Če je $X \in \mathcal{I}$ in $Y \subseteq X$, potem je tudi $Y \in \mathcal{I}$.
3. Če sta $X, Y \in \mathcal{I}$ in velja $|X| = |Y| - 1$, potem obstaja tak $y \in Y \setminus X$, da je $X \cup \{y\} \in \mathcal{I}$.

Množicam iz \mathcal{I} pravimo *neodvisne množice* matroida M .

Množica $B \in \mathcal{B}$ je *baza* matroida M , če je neodvisna in ni prava podmnožica nobene neodvisne množice. Družino vseh baz matroida M označimo z \mathcal{B} .

Za vsako podmnožico $X \subseteq S$ definiramo *rang* množice X kot

$$\rho(X) = \max\{|Y|; Y \in \mathcal{I}, Y \subseteq X\}.$$

Rang matroida M je $\rho(S)$.

Izrek 17.1 (Dopolnitveni izrek). Če sta X in Y neodvisni množici matroida M in $|X| < |Y|$, potem obstaja množica $Z \subseteq Y \setminus X$, da je $|X \cup Z| = |Y|$ in $X \cup Z$ neodvisna množica.

Dokaz. Naj bo Z_1 po moči maksimalna med takšnimi množicami Z , za katere velja $Z \subseteq Y \setminus X$ in $X \cup Z \in \mathcal{I}$. Takšna množica očitno obstaja, saj že prazna množica zadostuje temu pogoju.

Recimo, da je $|X \cup Z_1| < |Y|$. Naj bo $Y_1 \subseteq Y$ takšna, da je $|X \cup Z_1| + 1 = |Y_1|$. Po točki (2) iz definicije matroida je $Y_1 \in \mathcal{I}$ in po (3) obstaja nek $y \in Y_1 \setminus (X \cup Z_1)$, da je $(X \cup Z_1) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$. Nova množica $Z_1 \cup \{y\}$ tudi zadostuje zgornjim zahtevam za Z in, ker je $|Z_1| < |Z_1 \cup \{y\}|$, Z_1 ni maksimalna in imamo protislovje.

Torej je $|X \cup Z_1| \geq |Y|$. Ker je $|X| < |Y|$, mora obstajati $Z_2 \subseteq Z_1$, da je $|X \cup Z_2| = |Y|$. Po (2) iz definicije matroida je očitno $X \cup Z_2 \in \mathcal{I}$, torej je to naša iskana množica Z . \square

Iz tega izreka očitno sledi naslednja posledica:

Posledica 17.2. *Vse baze matroida M imajo enako moč in ta je enaka rangu matroida M .*

Če bi namreč imeli dve bazi različnih moči, bi lahko eno povečali po dopolnitvenem izreku in zato ne bi bila baza, saj bi bila prava podmnožica neke neodvisne množice. Zato so baze po moči največje neodvisne množice v matroidu in je torej njihova moč enaka rangu tega matroida.

Iz tega izreka pa tudi vidimo, da lahko katerokoli neodvisno množico dopolnimo z elementi iz neke baze in tako dobimo novo množico, ki je spet baza. Torej je vsaka neodvisna množica podmnožica neke baze.

Izrek 17.3 (Izmenjalni aksiom). *Če sta $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ in $x \in B_1 \setminus B_2$, potem obstaja nek $y \in B_2 \setminus B_1$, da je $B_1 \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.*

Izmenjalni aksiom sledi iz prej definiranih aksiomov za matroid, če za neodvisni množici $B_1 \setminus \{x\}$ in B_2 uporabimo točko (3).

Neodvisne množice matroida določajo družino baz. Velja tudi obratno; če družino baz definiramo z izmenjalnim aksiomom, ta določa družino neodvisnih množic

$$\mathcal{I} = \{X; \exists B \in \mathcal{B} : X \subseteq B\}.$$

Da bo definicija dobra, mora ta družina zadoščati aksiomom za matroid.

Izrek 17.4. *Naj bo \mathcal{B} neprazna družina podmnožic končne množice S , ki zadostuje izmenjalnemu aksiomu. Tedaj je \mathcal{B} družina baz matroida M nad S , katerega družina neodvisnih množic je določena z*

$$\mathcal{I} = \{X; \exists B \in \mathcal{B} : X \subseteq B\}.$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da imajo vse baze enako moč. Predpostavimo, da je nimajo. Izberimo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tako, da bo $|B_1| > |B_2|$ in bo imel $B_1 \setminus B_2$ najmanjšo moč. Naj bo $x \in B_1 \setminus B_2$. Zaradi 17.3 obstaja $y \in B_2 \setminus B_1$, da je $B_3 := (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. To pa je protislovje, saj ima $B_3 \setminus B_2$ manj elementov kot $B_1 \setminus B_2 = B_3 \setminus B_2 \oplus \{x\}$, kjer \oplus označuje disjunktno unijo. Torej so vse množice v \mathcal{B} enake moči.

Naj bo \mathcal{I} določen kot v izreku. Preveriti moramo če se sklada z definicijo matroida. Točki (1) in (2) sta očitni. Naj bosta sedaj $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ in $|I_1| = |I_2| - 1$. Torej je $I_1 \subseteq B_1$ in $I_2 \subseteq B_2$, za neka $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Radi bi našli $y \in I_2 \setminus I_1$, da bo $I_1 \cup \{y\} \subseteq B_3$ za nek $B_3 \in \mathcal{B}$. Najprej dopolnimo I_1 do B_1 in I_2 do B_2 :

$$B_1 = I_1 \oplus \{l_1, l_2, \dots, l_s\}, \quad B_2 = I_2 \oplus \{k_1, k_2, \dots, k_t\}.$$

Ker imajo vse baze enako moč, je $s = t + 1$. Če je $I_2 \cap \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ neprazen, je iskani y poljuben element tega preseka, saj je $I_1 \cup \{y\} \subseteq B_1$.

V nasprotnem primeru pa obstaja $l_i \in B_1 \setminus B_2$ za nek i . Po izmenjalnem aksiomu obstaja $y \in B_2 \setminus B_1$, da velja $B_3 := (B_2 \setminus \{l_i\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Baza B_3 ima z B_2 več skupnih elementov kot B_1 , zato se ta postopek enkrat konča. Takrat je $I_2 \cap \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$ neprazen, zato se prevede na prejšnji primer. \square

Matroid pa lahko definiramo tudi na podlagi funkcije ranga. Ker pa tega ne bomo potrebovali v nadaljevanju, je dokaz izpuščen. Tako bomo le dokazali, da za funkcijo ranga veljajo naslednji izreki, ne pa tudi, da so funkcije, ki zadoščajo naslednjim izrekom funkcije ranga nekega matroida.

Izrek 17.5. *Naj bo ρ funkcija ranga matroida M . Tedaj za vsak $X \subseteq S$ in za poljubna elementa $y, z \in S$ velja:*

1. $\rho(\emptyset) = 0$.
2. $\rho(X) \leq \rho(X \cup \{y\}) \leq \rho(X) + 1$.
3. Če je $\rho(X \cup \{y\}) = \rho(X \cup \{z\}) = \rho(X)$, potem je $\rho(X \cup \{y\} \cup \{z\}) = \rho(X)$.

Dokaz. Lastnosti (1) in (2) sledita direktno iz definicije ranga. Pokažimo sedaj lastnost (3). Recimo, da je $\rho(X \cup \{y\} \cup \{z\}) > \rho(X)$. Tedaj iz točke (2) sledi $\rho(X \cup \{y\} \cup \{z\}) = \rho(X \cup \{y\}) + 1 = \rho(X) + 1$. Ker se množici razlikujeta le za element $\{z\}$, mora biti ta vsebovan v vsaki maksimalni neodvisni podmnožici $X \cup \{y\} \cup \{z\}$. Naj bo X_1 maksimalna neodvisna množica v X in X_2 maksimalna neodvisna množica v $X \cup \{y\} \cup \{z\}$. Tedaj lahko po definiciji matroida najdemo nek $w \in (X \cup \{y\} \cup \{z\}) \setminus X = \{y, z\}$, da je $|X_1 \cup \{w\}| = |X_2| = \rho(X \cup \{y\} \cup \{z\})$. Brez škode splošnosti recimo, da je $z = y$. To pa je protislovje, saj vemo, da je $X_1 \cup \{y\} \subseteq X \cup \{y\}$ in zato $|X_1 \cup \{y\}| = \rho(X \cup \{y\}) = \rho(X) = \rho(X \cup \{y\} \cup \{z\}) - 1$. \square

Za naslednji izrek se izkaže, da je ekvivalenten zgornjemu, zato bi lahko tudi na podlagi tega definirali matroid. Dokaz ekvivalence izpuščamo.

Izrek 17.6. *Naj bo ρ funkcija ranga matroida M . Tedaj za vsak $X \subseteq S$ in za poljubna elementa $y, z \in S$ velja:*

1. $0 \leq \rho(X) \leq |X|$.
2. Če je $X \subseteq Y$, je $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
3. $\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Lastnost (2) iz zgornjega izreka imenujemo *monotonost*, lastnost (3) pa *submodularnost* funkcije ρ .

Dokaz. Lastnosti (1) in (2) očitno sledita iz definicije ranga. Naj bo $I \subseteq X \cap Y$ neodvisna množica, za katero velja $|I| = \rho(I) = \rho(X \cap Y)$. Po dopolnitvenem izreku lahko I dopolnimo do neke maksimalne neodvisne podmnožice $J \subseteq X \cup Y$. Sedaj lahko zapišemo $J = I \oplus A \oplus B$, kjer sta $A = J \cap (X \setminus Y)$ in $B = J \cap (Y \setminus X)$ neodvisni množici. Ker sta $I \oplus A$ in $I \oplus B$ neodvisni, velja:

$$\begin{aligned} \rho(X) + \rho(Y) &\geq |I \oplus A| + |I \oplus B| \\ &= 2|I| + |A| + |B| \\ &= |I| + |I \oplus A \oplus B| \\ &= \rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y). \end{aligned}$$

□

17.2 OPERATOR ZAPRTJA

Naj bo S končna množica. Tedaj je *operator zaprtja* predpis $\sigma : 2^S \rightarrow 2^S$, ki ima naslednje lastnost:

1. $X \subseteq S \Rightarrow X \subseteq \sigma(X)$;
2. $X \subseteq Y \subseteq S \Rightarrow \sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$;
3. $X \subseteq S \Rightarrow \sigma(X) = \sigma(\sigma(X))$.

Za operator zaprtja na matroidih običajno uporabimo naslednji predpis:

$$\sigma(X) = \{x \in S; \rho(X \cup \{x\}) = \rho(X)\}.$$

Pokažimo, da ta predpis zadošča zgornjim lastnostim za zaprtje. Lastnost (1) je očitna. Lastnosti (2) tudi ni težko pokazati: videti moramo, da iz $X \subseteq Y$ in $\rho(X \cup \{x\}) = \rho(X)$ sledi $\rho(Y \cup \{x\}) = \rho(Y)$ za vsak $x \in \sigma(X)$. Če je $x \in Y$ je to očitno, sicer pa uporabimo submodularnost funkcije ranga 17.6(3) na množicah $X \cup \{x\}$ in Y :

$$\begin{aligned} \rho(Y \cup \{x\}) + \rho(X) &= \rho((X \cup \{x\}) \cup Y) + \rho((X \cup \{x\}) \cap Y) \\ &\leq \rho(X \cup \{x\}) + \rho(Y) \\ &= \rho(X) + \rho(Y). \end{aligned}$$

Zaradi monotonosti ranga je torej enakost: $\rho(Y \cup \{x\}) = \rho(Y)$. Pri dokazu lastnosti (3) si bomo pomagali z naslednjo lemo:

Lema 17.7. Če imamo operator zaprtja σ definiran z zgornjim predpisom, je za vsak $X \subseteq S$:

$$\rho(X) = \rho(\sigma(X)).$$

Dokaz. Naj bo I maksimalna neodvisna množica v X in J maksimalna neodvisna množica v $\sigma(X)$. Recimo, da zgornja enakost ne velja, torej je $|I| < |J|$. Po definiciji obstaja $x \in J \setminus I$, da je $I \cup \{x\}$ neodvisna. To je očitno maksimalna neodvisna množica v $X \cup \{x\}$, zato velja:

$$\rho(X \cup \{x\}) = |I \cup \{x\}| = |I| + 1 = \rho(X) + 1,$$

vendar je $x \in \sigma(X)$, zato po definiciji σ velja $\rho(X) = \rho(X \cup \{x\})$. To pa je protislovje. \square

Vsebovanost $\sigma(X) \subseteq \sigma(\sigma(X))$ sledi iz definicije zaprtja. Recimo, da je $\sigma(X) \subset \sigma(\sigma(X))$. Potem obstaja $z \in \sigma(\sigma(X)) \setminus \sigma(X)$. Ker $z \notin \sigma(X)$, z uporabo 17.5(2) dobimo $\rho(X \cup \{z\}) = \rho(X) + 1$. Po drugi strani je $\rho(\sigma(X) \cup \{z\}) = \rho(\sigma(X))$, saj je $z \in \sigma(\sigma(X))$. Torej velja:

$$\rho(X) + 1 = \rho(X \cup \{z\}) \leq \rho(\sigma(X) \cup \{z\}) = \rho(\sigma(X))$$

To pa je v protislovju s prejšnjo lemo.

17.3 PRIMERI MATROIDOV

VEKTORSKI MATROIDI. Naj so S končna množica vektorjev iz danega vektorskega prostora V . Če za \mathcal{I} vzamemo linearno neodvisne podmnožice S , dobimo matroid. Vsak matroid, ki je izomorfen tako dobljenemu matroidu, imenujemo *vektorski matroid*.

ENAKOMERNI MATROIDI Naj bosta k in n naravni števili in $0 \leq k \leq n$. Naj bo $|S| = n$ in \mathcal{I} družina vseh njenih podmnožic s kvečjemu k elementi. $U_{n,k} = (S, \mathcal{I})$ je tedaj matroid. Baze so ravno vse množice moči k , rang $A \in \mathcal{I}$ pa je $\rho(A) = |A|$, če je $|A| \leq k$ oziroma $\rho(A) = k$, če je $|A| > k$. Matroidu $U_{n,k}$ pravimo *enakomerni matroid* ranga k .

ALGEBRAJSKI MATROIDI. Recimo, da je \mathbb{F} polje in K njegova razširitev. Potem so elementi $x_1, x_2, \dots, x_k \in K$ *algebrajsko neodvisni*, če obstaja tak neničelni polinom $p \in \mathbb{F}[y_1, y_2, \dots, y_k]$, da je $p(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$.

Naj bo sedaj $S \subseteq K$ neka končna množica in \mathcal{I} družina vseh njenih algebrajsko neodvisnih podmnožic. Izkaže se, da je dobljena struktura matroid.

GEOMETRIJSKI MATROIDI. Geometrijske matroide konstruiramo podobno kot vektorske, le da namesto linearne neodvisnosti uporabimo afino; množica vektorjev $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afino neodvisna*, če za vsa števila $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, ki zadostijo pogojema

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$$

in

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0,$$

sledi $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Naj bo S končna podmnožica \mathbb{R}^d in \mathcal{I} družina vseh afino neodvisne podmnožice iz S . Tedaj je (S, \mathcal{I}) matroid.

GRAFOVSKI MATROIDI. Naj bo G graf, ki ni nujno enostaven; dopuščamo tudi zanke. Naj bo $S = E(G)$. Družina $\mathcal{I} \subseteq 2^S$ vsebuje natanko tiste množice povezav, ki ne tvorijo nobenega cikla v grafu G . Dobljeni matroid $M(G) = (S, \mathcal{I})$ imenujemo *matroid ciklov* grafa G . Vsak matroid, ki je izomorfen matroidu ciklov kakega grafa, imenujemo *grafovski matroid*.

Baze v matroidu ciklov grafa G ustrezajo vpetim drevesom, če je G povezan, oziroma vpetim gozdovom, če graf G ni povezan. Naj bosta T in T' vpeti drevesi grafa G in $e = xy \in E(T) \setminus E(T')$. Če odstranimo povezavo e iz T , potem T razpade na drevesi T_1 in T_2 . Pot v T' od x do y vsebuje neko povezavo $e' \neq e$, ki ima eno krajišče v T_1 in drugo v T_2 . Torej je $(E(T) \setminus e) \cup e'$ spet vpeto drevo. Ker to velja za vsako komponento grafa G , velja tudi za vpete gozdove. Torej za vpete gozdove velja izmenjalni aksiom 17.3. Ker vsak graf vsebuje vpet gozd, po izreku 17.4 dobimo matroid. Podmnožice vpetih gozdov tako tvorijo \mathcal{I} . Rang podgrafa F definiramo kot $|E(H)|$, če je H največje vpeto drevo v F .

17.4 POŽREŠNA METODA

Posplošimo Kruskalov algoritem za iskanje najcenejšega vpetega drevesa v grafu. Vpeta drevesa namreč ravno ustrezajo bazam matroida ciklov.

Naj bo $M = (S, \mathcal{I})$ matroid nad množico S . Recimo, da ima vsak element $x \in S$ ceno $w(x) \in \mathbb{R}$. Tedaj za poljubno množico $X \subseteq S$ definiramo ceno $w(X)$ kot

$$w(X) = \sum_{x \in X} w(x).$$

Problem iskanja najcenejšega vpetega drevesa se tako prevede na *problem najcenejše baze*. Za ta problem sestavimo naslednji postopek:

Naj bo B neodvisna množica, v katero bomo dodajali elemente in bo na koncu tvorila bazo, Y pa množica kandidatov za vstop v bazo, torej množica tistih elementov y , za katere je $B \cup \{y\} \in \mathcal{I}$. Na začetku je $B = \emptyset$ in $Y = S$. Dokler ni $Y = \emptyset$ ponavljamo naslednji postopek: iz Y izvzamemo vse tiste elemente y , za katere $B \cup \{y\} \notin \mathcal{I}$. Potem izberemo najcenejši $y \in Y$ in ga dodamo v B .

Zgornji postopek lahko še izboljšamo, tako da imamo elemente iz Y sortirane po ceni, da nam ni potrebno vsakokrat iskati najcenejšega elementa. Nadalje lahko za začetni Y vzamemo $S \setminus \sigma(\emptyset)$; če bi bila namreč za nek $y \in \sigma(\emptyset)$ množica $B \cup \{y\}$ neodvisna, bi bila tudi $\{y\}$ neodvisna, torej $\rho(\{y\}) = 1$. Ker pa je $y \in \sigma(\emptyset)$, bi veljalo $\sigma(\emptyset) \geq \rho(\{y\}) = 1$, kar pa je v nasprotju z lemo 17.7.

Izrek 17.8. *Požrešna metoda za iskanje najcenejše baze pri poljubnem matroidu M nad množico S in dani funkciji cene $w : S \rightarrow \mathbb{R}$ kot rezultat vrne najcenejšo bazo matroida M .*

Dokaz. Iz konstrukcije množice B je očitno, da je ta na koncu postopka neodvisna. Preprosto je videti tudi, da je B baza matroida M . Recimo, da B ni baza. Ker se da vsako neodvisno množico dopolniti do baze, velja $B \subset B'$ za neko bazo B' . Poljuben $x \in B' \setminus B$ z B in vsako njeno podmnožico tvori neodvisno množico, torej ni mogel izpasti iz Y . Zato je $Y \neq \emptyset$ in postopek še ni zaključen.

Pokazati moramo še, da je B najcenejša baza. Recimo, da ni najcenejša baza. Tedaj obstaja baza B' , za katero velja $w(B') < w(B)$. Med vsemi najcenejšimi bazami za B' izberemo tisto, ki ima največji presek z B . Recimo, da je postopek v B po vrsti dodajal elemente $x_1, \dots, x_{|B|}$. Naj bo t najmanjši indeks, za katerega $x_t \notin B'$. Množica $B' \cup \{x_t\}$ očitno vsebuje natanko en cikel C . Ker je B brez ciklov, obstaja $y \in C \setminus B$. Sedaj lahko tvorimo novo bazo $B'' = (B' \cup \{x_t\}) \setminus \{y\}$. To je res baza, saj je enake moči kot B' in ne vsebuje cikla, ker smo izvzeli s povezavo y , ki leži na ciklu C . Ker je B' najcenejša baza, mora biti $w(B'') \geq w(B')$ in torej $w(x_t) \geq w(y)$. Opazimo, da je $\{x_1, \dots, x_{t-1}, y\}$ neodvisna množica. Ker požrešna metoda na t -tem kotaku ni izbrala y , sledi $w(x_t) \leq w(y)$, torej velja enakost. Zato je tudi B'' najcenejša baza. Vendar B'' ima več skupnih elementov z B , kar je v nasprotju z našo izbiro baze B' . \square

LITERATURA

- [1] B. Mohar, *Teorija matroidov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1996.

Marko Kandič

Za začetek si oglejmo naslednji primer. Recimo, da imamo v galeriji polno vrednih slik in nočemo, da bi jih kdo ukradel. Seveda si želimo, da bi lahko to preprečili. V ta namen postavimo stražarje v galerijo in sicer tako, da so v vsakem trenutku vse slike pod nadzorom. Predstavili bomo nekaj primerov stražarjev in umetnostnih galerij ter podali temeljne rezultate in hipoteze iz tega področja.

18.1 OSNOVNE DEFINICIJE IN LASTNOSTI

Definicija 18.1. V \mathbb{R}^2 imamo za $n \geq 3$ zaporedje točk v_1, \dots, v_n , ki jih povežemo z odsekoma linearno krivuljo sestavljeno iz daljic $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, \dots, e_n = v_nv_1$. Ta krivulja omejuje poligon, če velja:

- (a) Zaporedni daljici se sekata v natanko eni točki.
- (b) Poljubni nezaporedni daljici se ne sekata.

Poblížje si oglejmo zgornjo definicijo. Za $i = 1, \dots, n - 1$ velja

$$e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1} \quad \text{ter} \quad e_1 \cap e_n = v_1.$$

Povedali smo le kaj omejuje poligon, nismo pa še povedali kaj poligon točno je.

Definicija 18.2. Poligon je zaprtje omejene komponente množice $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n e_i$ in ga označimo z P . Rob poligona pa označimo ∂P kar je v našem primeru unija daljic e_i .

Definicija 18.3. Če ima poligon P stranice vzporedne osem x ter y , potem mu pravimo ortogonalni poligon.

Definicija 18.4. Če pa ima poligon P v svoji notranjosti m disjunktnih poligonov P_1, \dots, P_m , potem poligonu P pravimo poligon z luknjami. Luknje predstavljajo poligoni P_1, \dots, P_m . K ogliščem poligona z luknjami štejemo še oglišča lukenj.

Opomba 18.5. Naj bo P poligon z luknjami P_1, \dots, P_m . Potem naš poligon z luknjami označimo kot $P \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i$.

Naj bo P poligon in $p \in P$ neka točka. Potem rečemo, da je točka p vidna točki q , če cela daljica pq leži v P . Množica točk, ki so vidne točki p je kompaktna, saj je unija končno mnogo zaprtih trikotnikov. Trikotnike dobimo tako, da iz p potegnemo premice skozi oglišča poligona P . Tako smo dobili trikotnike, ki so vidni iz p . Ker je množica vidnih točk kompaktna, potem je tudi zaprta, saj je \mathbb{R}^2 Hausdorffov prostor. Torej je množica točk, ki niso vidne iz točke p ravno odprta množica kot komplement zaprte. Naj bo p' poljubna točka iz množice nevidnih točk. Zaradi odprtosti obstaja neka okolica točke p' za katero velja, da nobena točka v njej ni vidna iz točke p .

Definicija 18.6. Naj bo P poligon ter $S \subseteq P$ neka njegova podmnožica. Pravimo, da je P zastražen z množico S , če je vsaka točka $p \in P$ vidna neki točki iz S . Točke iz S imenujemo stražarji.

Seveda poznamo več vrst stražarjev. Najpreprostejši so t -stražarji. Ti so poljubne točke v poligonu. Če pa poligon zastražimo s stražarji v ogliščih poligona, potem jih imenujemo o -stražarji.

18.2 CHVÁTALOV IZREK

Chvátal je prvi dokazal, da je $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev vedno dovolj, da zastražimo poljuben poligon z n oglišči. Ker je njegov dokaz precej obsežen, bomo predstavili Friskov dokaz.

Definicija 18.7. Diagonala poligona P je vsaka daljica $ab \subseteq P$, ki povezuje oglišča $a, b \in P$ ter zanjo velja $ab \cap \partial P = \{a, b\}$.

S pomočjo definicije diagonale lahko definiramo triangulacijo poligona. Triangulacija poligona P je razdelitev poligona na trikotnike z dodajanjem diagonal, ki se sekajo samo v ogliščih poligona. Naslednjo lemo, ki je intuitivno jasna, bomo navedli brez dokaza.

Lema 18.8. Vsak poligon z vsaj 4-imi oglišči ima diagonalo.

Lema 18.9. Vsak poligon z $n \geq 3$ oglišči lahko trianguliramo z dodajanjem 0 ali več diagonal. Triangulacija poligona z n oglišči vsebuje $n - 3$ diagonal.

Dokaz. Za $n = 3$ trditev drži, saj imamo trikotnik in dodamo 0 diagonal. Naj za $n \geq 3$ trditev drži. Poligonu z $n + 1$ oglišči dodamo diagonalo. Diagonala obstaja po prejšnji lemi. Poligon tako razpade na dva dela. Oba dela sta spet poligona z n_1 in n_2 oglišči, dodana diagonala pa predstavlja stranico, ki je skupna obema poligonoma. Vsak poligon ima n ali manj oglišč saj nismo dodali nobenega oglišča in v vsakem delu je poleg krajišč diagonale vsaj še eno oglišče. Torej lahko na obeh delih uporabimo indukcijsko predpostavko. Po predpostavki oba poligona vsebujeta $n_1 - 3$ in $n_2 - 3$ diagonal zapored. Vemo, da velja

$$n_1 + n_2 = (n + 1) + 2 = n + 3,$$

saj smo dva oglišča dvakrat šteli. Torej je vseh diagonal v prvotnem poligonu ravno

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n + 1) - 3.$$

□

Lema 18.10. *Triangulacija poligona z n oglišči vsebuje vsaj dve oglišči stopnje 2.*

Dokaz. Če je $n = 3$, potem imamo trikotnik in trditev drži. Predpostavimo, da trditev drži za $n \geq 3$. Z indukcijo bomo pokazali, da trditev drži tudi za $n + 1$. V triangulaciji poligona z $n + 1$ oglišči imamo $n - 2$ diagonale. Naj bo D ena od njih. Diagonala D triangulacijo deli na dve novi triangulaciji in vsaka od njiju ima n al manj oglišč, saj je v vsaki poleg krajišč diagonale D vsaj še eno oglišče. Uporabimo indukcijsko predpostavko na obeh triangulacijah. V vsaki dobimo vsaj dve oglišči stopnje 2 od katerih vsaj eno ni krajišče diagonale D , sicer že na začetku ne bi imeli triangulacije. Torej smo v vsakem delu dobili vsaj eno oglišče stopnje 2, ki ni krajišče diagonale D . Triangulaciji spet združimo in dobimo vsaj dve oglišči stopnje 2, saj se stopnja spremeni le ogliščema, ki sta bila krajišči diagonale D . □

Lema 18.11. *Graf, ki ga določa triangulacija poligona z n oglišči, ima 3–barvanje točk.*

Dokaz. Lemo bomo dokazali s pomočjo matematične indukcije. Za $n = 3$ imamo trikotnik in trditev drži. Predpostavimo, da trditev drži za $n \geq 3$. Pokažimo, da trditev drži za $n + 1$. V triangulaciji poligona z $n + 1$ točkami izberemo točko stopnje dve, ki obstaja po prejšnji lemi. Točko označimo z v , njeni sosedi pa z a in b . Odstranimo točko v , tako da povezavi av in bv nadomestimo s povezavo ab . Ker trikotnik avb vsebuje samo oglišča a, v in b ter stranice, ki povezujejo ta tri oglišča, dobimo triangulacijo poligona z n točkami. Triangulacija ima 3–barvanje po indukcijski predpostavki. Sedaj točko v dodamo poligonu in jo pobarvamo z barvo, s katero nismo pobarvali točk a in b . □

Izrek 18.12 (Chvátal). *Poljuben poligon z n oglišči lahko vedno zastražimo z $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarji.*

Dokaz. Poligon trianguliramo z dodajanjem diagonal. Po lemi ima triangulacija 3–barvanje. Označimo barve z a, b, c . Naj b T_x , $x \in \{a, b, c\}$ množica točk, ki smo jih pobarvali z barvo x . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $|T_a| \leq |T_b| \leq |T_c|$. Potem je $|T_a| \leq \frac{n}{3}$. Stražarje postavimo v oglišča, ki smo jih pobarvali z barvo a . Poljubna točka p poligona P leži v enem izmed trikotnikov, ta pa vsebuje tudi oglišče $q \in T_a$. Ker je trikotnik konveksen lik, q vidi p . □

Hipoteza 18.13 (Shermer). *Vsak poligon z n točkami in h luknjami se lahko zastraži z $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ o –stražarji.*

Izrek 18.14 (Bjorling-Suchs). *Če ima poligon h lukenj in n točk skupaj, potem je $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ stražarjev vedno dovolj in včasih tudi potrebno, da zastražimo poligon.*

18.3 TRADICIONALNA UMETNOSTNA GALERIJA

Pod pojmom tradicionalne umetnostne galerije si predstavljamo pravokotno stavbo s pravokotnimi stenami ter s sobami, ki so povezani z vratmi, če imata sobi skupno stranico. Spet nas zanima koliko stražarjev moramo postaviti na vrata med sobami, da bodo vse sobe zastražene.

Opomba 18.15. Če je stražar postavljen med vrati obeh sob, potem vidi obe sobi.

Liha komponenta grafa G je neka komponenta K za katero velja, da je moč množice K liho število. To pomeni, da je $|K|$ liho število. Definirajmo še pojem prirejanja in popolnega prirejanja. Prirejanje grafa G je neka množica povezav M za katero velja, da nobeni dve izmed povezav množice M nimata skupnega vozlišča. Če za vsako vozlišče v grafa G obstaja povezava $e \in M$, da je v njeno krajišče, potem je M popolno prirejanje.

Izrek 18.16. Graf G ima popolno prirejanje natanko takrat, ko za vsako podmnožico $S \subseteq V(G)$ velja, da število lihih komponent grafa $G \setminus S$ ni večje od $|S|$.

Tudi dokaz tega izreka bomo izpustili. Z njegovo pomočjo pa lahko dokažemo naslednji izrek:

Izrek 18.17. Tradicionalno galerijo z n sobami lahko zastražimo z $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ t -stražarji.

Dokaz. Naj bo T tradicionalna galerija z n sobami: S_1, \dots, S_n . Z $G(T)$ označimo prirejeni graf galerije T : vsaka soba S_i predstavlja točko v_i grafa $G(T)$ in vsaka vrata, ki povezujejo dve sobi S_i in S_j predstavljajo povezavo e_{ij} v $G(T)$. Ker je celotna galerija povezana, je tudi njen prirejeni graf povezan.

Pokazali bomo: če ima graf $G(T)$ sodo mnogo točk, potem ima popolno prirejanje M . S tem pa bomo dokazali tudi našo trditev, saj lahko $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ stražarjev izberemo s pomočjo prirejanja M . Za vsako povezavo $e_{ij} \in M$ postavimo stražarja med vrata sob S_i in S_j in tako zastražimo celo galerijo T . Če imamo v galeriji T liho sob, potem pa poljubno sobo galerije razdelimo na dve sobi in uporabimo pravkar dokazano trditev za sodo število sob.

Predpostavimo sedaj, da ima $G(T)$ sodo mnogo mnogo točk. Da ima $G(T)$ popolno prirejanje bomo dokazali s pomočjo prejšnjega izreka. Naj bo S poljubna podmnožica množice $V(G(T))$ in k število povezanih komponent grafa $G(T) \setminus S$. Opazimo lahko, da vsaka povezana komponenta C_i grafa $G(T)$ predstavlja ortogonalen poligon $P_i \subseteq T$. Vsak poligon P_i ima najmanj štiri oglišča, zato je vsota oglišč po vseh komponentah $G(T) \setminus S$ najmanj $4k$. Označimo vsoto števil oglišč po vseh k komponentah z v_k . Torej velja $v_k \geq 4k$.

Če sedaj pravokotnik, ki ustreza točki iz S , damo nazaj v T , se vsota števila oglišč vseh novih komponent zmanjša za največ štiri oglišča. Torej je vsota oglišč po vseh komponentah vsaj $v_k - 4$. Če je kakšno oglišče v v_k dvakrat ali večkrat šteto, kar se lahko zgodi, ko se sobe stikajo, lahko z dodajanjem pravokotnika ne zmanjšamo vsote v_k , oziroma jo zmanjšamo za ena namesto za dve ali za dve namesto za tri ali za tri namesto za štiri.

Ko dodamo vse pravokotnike, ki ustrezajo množici S , nam ostanejo samo štiri oglišča, ki pripadajo galeriji T . V vsakem od $|S|$ korakov se je vsota V_k zmanjšala za največ štiri. Torej velja

$$4k \leq v_k \quad \text{in} \quad v_k - 4|S| \leq 4.$$

Odkoder sledi $k \leq |S| + 1$. Če je komponent natanko $|S| + 1$ in so vse lihe, dobimo protislovje s predpostavko, da ima $G(T)$ sodo mnogo točk. Torej je vsaj ena komponenta soda in je zato število lihih komponent v $G(T) \setminus S$ manjše ali enako $|S|$. \square

Zgled 18.18. Podajmo primer tradicionalne galerije z n sobami za katero potrebujemo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ t -stražarjev. Če je n sodo, potem postavimo stražarja med vrata prve in druge sobe, med vrata tretje in četrte sobe in tako naprej. Tako postavimo $\frac{n}{2}$ stražarjev. V primeru, ko je n liho pa postavljamo stražarje na podoben način kot v primeru, ko je bil n sod. Sedaj bo ostala ena soba nezastražena. Primer, ko je $n = 9$, je predstavljen spodaj. Seveda bi lahko za poljubno naravno število n skonstruirali podoben zgled.



18.4 OSTALI PRIMERI UMETNOSTNIH GALERIJ

18.4.1 Umetnostna galerija z notranjimi stenami

Umetnostna galerija, ki jo predstavimo kot poligon z n oglišči in m diagonalami, ki se ne sekajo, imenujemo umetnostna galerija z notranjimi stenami. Diagonale predstavljajo notranje stene in imajo nameščena majhna vrata.

Izrek 18.19 (Kündgen). $\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor$ stražarjev je vedno dovolj, da zastražijo umetnostno galerijo z notranjimi stenami in n oglišči. Če je $m = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 2$, potem velja celo enakost.

18.4.2 Poligoni z mobilnimi stražarji

Stražarjem, ki jim dovolimo premikanje po daljici, ki je vsebovana v celoti v poligonu pravimo mobilni stražarji oziroma m -stražarji. m -stražar vidi vse točke, ki so vidne katerikoli točki na daljici, po kateri se lahko premika. Zato je cela daljica m -stražar.

Izrek 18.20 (O'Rourke). Če želimo zastražiti poligon z m -stražarji, ki se premikajo po diagonalah poligona z n oglišči, potem jih potrebujemo $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$

Izrek 18.21 (Aggarwal). Da zastražimo ortogonalen poligon potrebujemo $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ m -stražarjev.

Izrek 18.22 (Györy-Hoffman-Kriegel-Shermer). *Imejmo ortogonalen poligon na n ogliščih in h luknjami. Potem potrebujemo $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$ mobilnih stražarjev, da ga zastražimo.*

18.4.3 r -zastraženi poligoni

Definicija 18.23. Stražarji, ki se lahko premikajo po stranici poligona, se imenujejo r -stražarji. Torej so r -stražarji ravno stranice.

Hipoteza 18.24 (Touissant). *Za poligone z $n \geq 14$ oglišči je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ r -stražarjev vedno dovolj, da zastražijo poligon z n oglišči.*

Izrek 18.25 (Shermer). $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor$ r -stražarjev vedno lahko zastraži poligon z n oglišči za vsak $n \in \mathbb{N} \setminus \{3, 6, 13\}$.

18.4.4 Problem zapora in trdnjave

Zanima nas koliko r -stražarjev potrebujemo, da zastražimo zunanost poljubnega poligona z n oglišči. To je problem trdnjave. Podobno nas zanima koliko o -stražarjev potrebujemo, da zastražimo zunanost in notranost poligona z n oglišči. To pa je problem zapora.

Predstavimo važnejše rezultate iz tega področja.

Izrek 18.26 (O'Rourke-Wood). *V poljubnem poligonu z n oglišči $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ o -stražarjev reši problem trdnjave. Če je poligon tudi konveksen, potem jih toliko tudi potrebujemo.*

Izrek 18.27 (Aggarwal). $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ o -stražarjev reši problem trdnjave za ortogonalne poligone na n ogliščih.

Za konec podajmo še O'Rourkovo hipotezo.

Hipoteza 18.28 (O'Rourke). $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ o -stražarjev je dovolj, da zastražijo zunanost in notranost poligona z n oglišči.

LITERATURA

- [1] A. Aggarwal, *The art gallery theorem: its variations, applications and algorithmic aspects*, The Johns Hopkins University (1984).
- [2] V. Primožič, M. Juvan, *Problem umetnostne galerije za ortogonalne poligone (diplomsko delo)*, (2003).
- [3] J. O'Rourke, *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvátal's theorem*, *Geometriae Dedicata* **14**, 273–283 (1983).
- [4] P. Zylinski, *Placing guards in art galleries by graph colouring*, *Graph Colourings*, **352** (2004).

NAPREDNI PRISTOPI ZA PROBLEM UMETNOSTNE GALERIJE

Žiga Povalej

Prvotni problem umetnostne galerije je bil določiti najmanjše število nepremičnih stražarjev, ki lahko nadzorujejo notranjost celotne umetnostne galerije z n stenami. Prvi je ta problem rešil Chvátal leta 1975 [2], mi pa si bomo ogledali bolj elegantno Fiskovo rešitev problema iz leta 1978 [3]. Število stražarjev, ki jih potrebujemo, je odvisno tudi od oblike poligona, ki predstavlja umetnostno galerijo. Zato lahko število stražarjev podamo tudi v odvisnosti od števila konveksnih delov poligona.

Potrebno število stražarjev se zmanjša, kadar je dani poligon ortogonalen. Problem so leta 1980 prvi rešili Kahn, Klawe in Kleitman [4], v literaturi pa najdemo tudi drugačne pristope iz kasnejšega obdobja. Mi si bomo ogledali rešitev problema preko konkavnih točk in navpičnih ter vodoravnih prerezov.

Nazadnje se bomo ukvarjali še s problemom pokritja zunanosti poligona, ti. problemom trdnjave. Zanimivo je, da za rešitev te naloge potrebujemo več stražarjev kot za rešitev problema umetnostne galerije.

19.1 OSNOVNE DEFINICIJE

Poligon P je zaprto območje v ravnini, ki ga omejuje množica n različnih točk v_1, v_2, \dots, v_n in množica n takih povezav $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$, da nobeni dve nesosednji povezavi ne vsebujeta iste točke. Množici točk in povezav bomo poimenovali *rob poligona* P in označili z ∂P . Rekli bomo, da točka $x \in P$ *pokriva* točko $y \in P$, kadar cela daljica xy leži v polgonu P . Omenjena daljica se lahko tudi dotika roba ∂P .

Naj $G(P)$ predstavlja najmanjše tako število $k \in \mathbb{N}$, za katerega obstaja množica k točk $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ in za poljubno točko $y \in P$ velja, da obstaja tak $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, da x_i pokriva y . Oznaka $g(n)$ naj predstavlja največjo vrednost $G(P)$ po vseh poligonih P , ki imajo n točk.

Sedaj lahko problem umetnostne galerije prevedemo na problem določiti vrednost $g(n)$. Stražarji, ki se lahko zasukajo okrog svoje osi za 360° , so točke, notranjost umetnostne galerije pa je poligon. Funkcija $g(n)$ predstavlja največje število stražarjev, ki so potrebni za nadzorovanje kateregakoli poligona na n točkah. Kot bomo videli v nadaljevanju, je včasih to tudi potreben pogoj.

19.2 TRIANGULACIJA

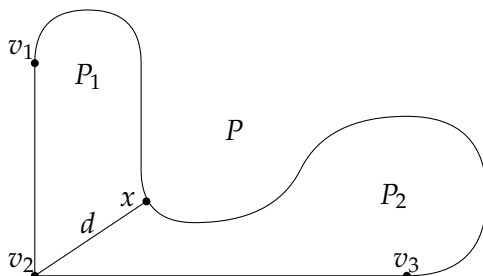
Poligon na n točkah si bomo predstavljali kot graf z n točkami in n povezavami. Prvo vprašanje bo, ali ima vsak poligon na n točkah triangulacijo.

Izrek 19.1 (Izrek o triangulaciji). [6] *Poligon na n točkah lahko razdelimo na $n - 2$ trikotnikov tako, da dodamo $n - 3$ notranje diagonale.*

Preden si ogledamo dokaz izreka, definirajmo pojem *konveksne točke*. To je taka točka v_i poligona P , pri kateri je kot, ki ga oklepata povezavi, ki izhajata iz te točke, manjši od 180° .

Dokaz. Dokaz bomo opravili z indukcijo po številu točk. Očitno izrek drži za $n = 3$. Naj bo P poligon na $n \geq 4$ točkah. Zanj velja, da obstaja vsaj ena konveksna točka. V nasprotnem primeru bi bil kot pri vseh točkah večji od 180° in bi bila notranjost poligona pravzaprav zunanost. Brez škode za splošnost naj bo v_2 konveksna točka poligona P . Oglejmo si zaporedne točke v_1, v_2 in v_3 . Poiščimo notranjo diagonalo d . Če daljica v_1v_3 ne seka ∂P , definiramo $d = v_1v_3$, sicer mora trikotnik $v_1v_2v_3$ vsebovati vsaj eno točko P . Naj bo $x \in P$ tista točka, ki je najbližja v_2 . Pri tem ne upoštevamo točk v_1 in v_3 . Definiramo $d = v_2x$ (slika 65).

V obeh primerih diagonala d razdeli poligon P na poligona P_1 in P_2 . Naj bo n_i število točk poligona P_i , $i = 1, 2$. Potem velja $n_1 + n_2 = n + 2$, saj sta krajišči diagonale d šteti v obeh poligonih P_1 in P_2 . Očitno je $n_i \geq 3$, $i = 1, 2$, zato velja $n_i < n$, $i = 1, 2$. Uporabimo indukcijsko predpostavko za poligona P_1 in P_2 . Poligon P ima $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ trikotnikov in $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$ diagonal, kjer upoštevamo tudi diagonalo d . \square



Slika 65: Daljica xv_2 je notranja diagonala.

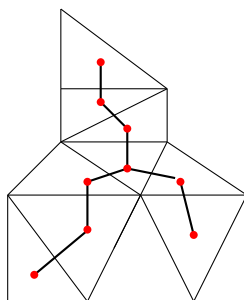
Ogledali si bomo pomembno lastnost, kako so sestavljeni trikotniki v triangulaciji poligona. Dokaz je predstavljen v [6].

Lema 19.2. Šibki dualni graf triangulacije poligona je drevo z maksimalno stopnjo največ tri.

Dualni graf grafa G je graf, katerega točke so lica grafa G . Med dvema točkama dualnega grafa obstaja povezava, če sta bili lici grafa G , ki pripadata tema dvema točkama, sosednji. Šibki dualni graf grafa G je dualni graf grafa G , ki nima točke, ki bi pripadala zunanjemu licu grafa G . Primer si oglejmo na sliki 66.

Sedaj dokažimo lemo 19.2.

Dokaz. Vsaka točka ima največ tri sosede. To sledi iz dejstva, da ima trikotnik tri stranice in tako največ tri sosednje trikotnike. Denimo, da graf ni drevo. Potem vsebuje cikel, ki oklepa vsaj eno točko poligona in tako oklepa tudi zunanost poligona. To je v protislovju z definicijo poligona. \square



Slika 66: Šibki dual triangulacije poligona je drevo.

Lema 19.2 posreduje rešitev problema dveh ušes. Tri zaporedne točke v_1, v_2 in v_3 tvorijo uho poligona P pri točki v_2 , kadar cela daljica v_1v_3 leži v notranjosti P . Dve ušesi se ne prekrivata, kadar sta njuni notranjosti disjunktni. Naslednji izrek je dokazal Meisters [5].

Izrek 19.3 (Izrek o dveh ušesih). Vsak poligon na $n \geq 4$ točkah ima vsaj dve ušesi, ki se ne prekrivata.

Dokaz. Listi v šibkem dualu triangulacije poligona predstavljajo ušesa, ki se ne prekrivajo. Vsako drevo na vsaj dveh točkah ima vsaj dva lista. \square

Naslednja lastnost bo ključnega pomena pri dokazovanju Chvátalovega izreka o umetnostni galeriji [6].

Posledica 19.4. Vsaka triangulacija poligona je 3-obarvljiva.

Dokaz. Izrek dokažimo preko indukcije po številu trikotnikov. En trikotnik seveda lahko pobarvamo s tremi barvami. Za dokaz indukcijskega koraka bomo uporabili izrek 19.3. Odrežemo uho in preostanek pobarvamo s tremi

barvami po indukciji. Ko uho vrnemo, sta dve krajišči že pobarvani, zadnje krajišče pa pobarvamo s preostalo barvo. \square

Omenimo še, da triangulacije poligona ne moremo enolično določiti.

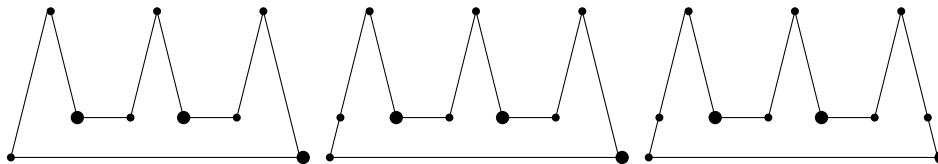
19.3 IZREK UMETNOSTNE GALERIJE

Izrek 19.5 (Chvátalov izrek umetnostne galerije). *Za pokritje poligona na n točkah je $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ včasih potrebno in vedno zadostno število stražarjev.*

Dokaz. Po izreku o triangulaciji poligona (izrek 19.1) poligon lahko trianguliramo z dodajanjem notranjih diagonal. Triangulacijo obarvajmo s tremi barvami. To lahko storimo po posledici 19.4. Sedaj opazimo, da je ena barva uporabljena na največ $\frac{1}{3}$ točk. Naj bo c_i število točk, ki so pobarvane z barvo i , $i = 1, 2, 3$. Brez škode za splošnost naj velja še $c_1 \leq c_2 \leq c_3$. Vseh točk je n in velja $c_1 + c_2 + c_3 = n$. Če bi bilo $c_1 > \frac{n}{3}$, bi bila vsota vseh treh števil večja od n . Zato je $c_1 \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, ker je $c_1 \in \mathbb{N}$.

Naj bo 1 najmanj uporabljena barva. Postavimo stražarje na vsako točko te barve. Točke pojubnega trikotnika so pobarvane s tremi različnimi barvami, zato vsak trikotnik vsebuje točko, pobarvano z barvo 1, torej stražarja. Zaradi triangulacije vsaka točka poligona P pripada vsaj enemu trikotniku. Ker so trikotniki konveksni, je vsaka točka pokrita s stražarjem. Tako stražarji pokrijejo celoten poligon in jih je največ $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Na sliki 67 si oglejmo primer poligona, ko potrebujemo natanko $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev. Prikazani so trije primeri za različne velikosti n : $n = 3k$, $n = 3k + 1$ in $n = 3k + 2$, kjer je $k = 3$. Stražarje postavimo v vrhove odebeljene točke. Za poljuben $k \in \mathbb{N}$ se konstrukcija posploši naravno.



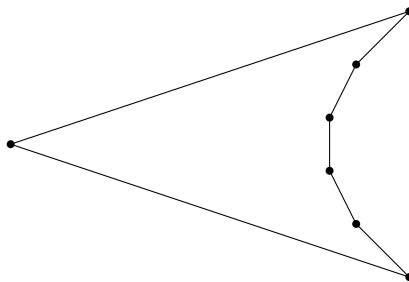
Slika 67: Primeri poligonov, kjer potrebujemo natanko $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev za $n = 9, 10, 11$.

\square

19.4 KONVEKSNO DELJENJE

Opazimo, da za konveksni poligon na n točkah zadostuje že 1 stražar in ne $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Zato je smiselno vpeljati spremenljivko, ki bi bolje opisala obliko poligona. Naj bo *konkavna točka* tista točka iz ∂P , ki ima med povezavama do sosednjih točk kot v notranjosti poligona večji od 180° . V tem razdelku si bomo ogledali, koliko stražarjev potrebujemo za pokritje poligona z r konkavnimi točkami.

Najprej opazimo, da velja $r \leq n - 3$. Ekstremni primer si lahko ogledamo na sliki 68.



Slika 68: Poligon na n točkah ima lahko največ $n - 3$ konkavne točke.

Lema 19.6 (Chazelle). [1] Vsak poligon z r konkavnimi točkami lahko razdelimo na največ $r + 1$ konveksnih delov.

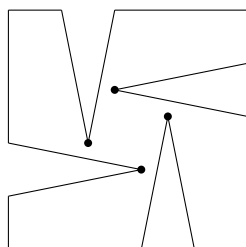
Dokaz. Dokažimo z indukcijo. Lema velja za $r = 0$, saj imamo v tem primeru le en konveksni del.

Prespostavimo, da lema velja za poligone z manj kot r konkavnimi točkami. Izberemo si konkavno točko in iz nje narišemo simetralo kota do prvega stika z robom poligona. Simetrala razdeli poligon na dva poligona, enega z r_1 in drugega z r_2 konkavnimi točkami. Ker je simetrala uničila vsaj eno konkavno točko (lahko se zgodi, da uniči dve, če zadane ob drugo konkavno točko na robu poligona), velja $r_1 + r_2 \leq r - 1$. Po indukcijski predpostavki za oba manjša poligona sledi, da ima začetni poligon največ $r_1 + 1 + r_2 + 1 \leq r + 1$ konveksnih delov. \square

Izrek 19.7. [O'Rourke] [6] Za pokritje poligona z $r \geq 1$ konkavnimi točkami je r vedno zadostno in včasih potrebno število stražarjev.

Dokaz. Za dokaz zadostnosti uporabimo lemo 19.6. Vsak konveksni del vsebuje vsaj eno konkavno točko na svojem robu. Stražarje namestimo na konkavne točke in tako pokrijejo vsak konveksni del.

Da je r včasih potrebno število stražarjev, si oglejmo na sliki 69. \square



Slika 69: Primer poligona, kjer potrebujemo natanko 4 stražarje.

19.5 ORTOGONALNI POLIGONI

Ogledali si bomo, koliko stražarjev potrebujemo v primeru, ko je umetnostna galerija predstavljena z *ortogonalnim poligonom*. To je poligon, v katerem je vsak notranji kot med poljubnima dvema sosednjima povezavama enak $\frac{\pi}{2}$ ali $\frac{3\pi}{2}$.

Število stražarjev bomo določili s številom konkavnih točk poligona P . Da to res lahko storimo, dokazuje naslednja lema [6].

Lema 19.8. *Za ortogonalni poligon na n točkah in z r konkavnimi točkami velja $n = 2r + 4$.*

Dokaz. Naj bo c število točk, pri katerih je notranji kot enak $\frac{\pi}{2}$. Očitno velja $c + r = n$. Ker je vsota notranjih kotov n -kotnika (poligona na n točkah) enaka $(n - 2)\pi$ in je kot pri konkavni točkah enak $\frac{3\pi}{2}$, velja

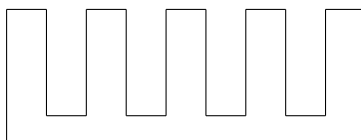
$$(n - 2)\pi = c \frac{\pi}{2} + r \frac{3\pi}{2}.$$

V enačbo vstavimo $c = n - r$ in dobimo $n = 2r + 4$. □

Oglejmo si glavni izrek tega razdelka, ki je predstavljen v [6].

Izrek 19.9. *Za pokritje notranjosti ortogonalnega poligona z r konkavnimi točkami je $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ potrebno in zadostno število stražarjev.*

Dokaz. Po lemi 19.8 velja $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$, zato dokažimo, da je $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ potrebno in zadostno število stražarjev. Da je to res potreben pogoj, si oglejmo na sliki 70.



Slika 70: Vsak rogelj potrebuje vsaj enega stražarja.

Dokaz zadostnosti si bomo natančneje ogledali v naslednjih dveh podrazdelkih. □

Naj bo *prerez* ortogonalnega poligona P podaljšek ene od dveh povezav, ki imata krajišče v konkavni točki, in gre skozi notranjost poligona, dokler se prvič ne dotakne ∂P . Opazimo, da prerez zmanjša število konkavnih točk, saj konkavna točka ni več konkavna na nobeni strani prereza. Hkrati prerez tudi ne ustvari nove konkavne točke. Indukcijski korak prereže poligon na dva dela, na vsakem od njiju pa velja indukcijska predpostavka. Če bo vsaj en del vseboval liho število konkavnih točk, bo sledila enačba izreka. Težji del je dokazati, da tak *lihi prerez* res obstaja.

19.5.1 Dokaz zadostnosti

Izrek očitno velja za $r \leq 1$. V tem primeru zadostuje en stražar. Privzemimo sedaj, da velja $r \geq 2$ in da izrek drži za vse $r' < r$. Oglejmo si dva primera.

V prvem primeru obstajata dve konkavni točki, ki ležita na isti navpični ali vodoravni črti. Pre režimo poligon po tej črti in naj L in R predstavljata število konkavnih točk na vsaki strani. Velja $r = L + R + 2$. Po indukcijski predpostavki velja

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{L + R + 2}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R}{2} \right\rfloor + 2.$$

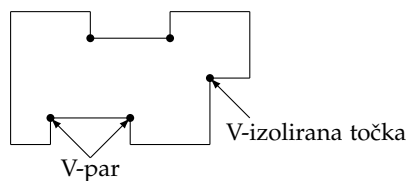
V drugem primeru nobeni dve konkavni točki ne ležita na isti navpični ali vodoravni črti. V nadaljevanju bomo pokazali, da v tem primeru obstaja lihi prerez. Izberimo tak prerez, kjer L in R predstavljata število konkavnih točk na posamezni strani. Privzemimo še, da je R liho število. S tem prerezom uničimo le eno konkavno točko, zato velja $r = L + R + 1$. Enačbo izreka lahko sedaj zapišemo

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{L + R + 1}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R - 1}{2} \right\rfloor + 2.$$

19.5.2 Obstoj lihega prereza

Najprej si oglejmo nekaj opazk. Kadar ležita dve konkavni točki na isti navpični ali vodoravni črti, lihi prerez ne obstaja. Vendar ta problem ni kritičen, ker ga lahko obravnavamo posebej v prvem primeru. Zato bomo v tem razdelku predpostavili, da so vse konkavne točke v takem položaju, da noben prerez ne uniči dveh. Druga opazka je, da je obstoj lihega prereza trivialen, kadar je r sodo število. Zaradi enakosti $r = L + R + 1$ mora biti eno od števil L in R sodo, drugo pa liho. Kadar je r liho število, sta bodisi obe števili lihi bodisi obe sodi. Pokazali bomo, da lahko vedno poiščemo tak prerez, da bosta L in R sodi števili. Opazimo še, da vodoravni lihi prerez ne obstaja nujno. Slika 71 predstavlja primer z $r = 5$.

Navpični prerez bomo poimenovali N -prerez, vodoravnega pa V -prerez.



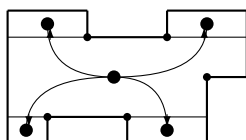
Slika 71: Lihi V-prerez ne obstaja nujno.

Za V -prereze bomo predstavili posebno delitev poligona. Konkavno točko bomo imenovali V -izolirana, kadar je preko vodoravne povezave povezana s točko, ki ni konkavna. V nasprotnem primeru bomo obe točki skupaj imenovali V -par (slika 71). Sedaj razdelimo poligon z V -prezezi iz vseh konkavnih

točk, ki pripadajo kakšnemu V-paru. S tem izmed konkavnih točk ne uničimo le V-izoliranih točk. Dokazali bomo, da bodisi obstaja V-lihi prerez bodisi obstaja natanko ena V-izolirana točka. Pri tem si bomo pomagali z usmerjenim grafom povezanosti posameznih delov poligona, ki ga bomo poimenovali *V-graf*.

Vsak del particije poligona ustreza eni točki V-grafa, povezava iz A v B pa obstaja natanko tedaj, kadar sta A in B sosednja dela, ločena z V-prerezom, in V-par, ki pripada V-prerezu, leži na robu dela A . Primer je prikazan na sliki 72.

Podobno definiramo *N-izolirane* točke ter *N-par* in *N-graf*, ki pripadajo navpičnim N-prerezom.



Slika 72: Primer V-grafa.

Lema 19.10. *V-graf ima lahko največ štiri različne vrste točk:*

Ime	Stopnja	Vhodna stopnja	Izhodna stopnja
list	1	1	0
veja	3	1	2
izvir	2 ali 4	0	2 ali 4
ponor	2	2	0

Dokaz. Privzeli smo, da en prerez ne more povezati dveh konkavnih točk. Zato ima vsak del največ dva V-para in zato največ štiri V-prereze na robu. Zato je stopnja točke največ 4. Iz definicije povezave V-grafa sledi, da točka ne more imeti le ene izhodne povezave. Zato mora biti točka stopnje 1 list. Točka stopnje 2 ima lahko dve izhodni (izvir) ali dve vhodni povezavi (ponor). Točka stopnje 3 je veja, saj ena izhodna povezava ni mogoča. Točka stopnje 4 ima dva V-para na robu, zato so vse štiri povezave izhodne. \square

Lema 19.11. *Če V-graf poligona vsebuje ponor, potem dopušča lihi V-prerez.*

Dokaz. Naj bo S del, ki predstavlja ponorno točko v V-grafu, in naj bosta C^+ in C^- zgornji in spodnji V-prerez dela S . Predpostavimo še, da S vsebuje k V-izoliranih točk, vseh konkavnih točk nad V-prerezom C^+ pa naj bo u . Pri tem ne upoštevamo konkavne točke, ki tvori V-prerez C^+ .

Če je u liho število, je C^+ lihi V-prerez. Če pa je u sodo število, je lihi prerez podan z najvišje ležečo V-izolirano točko v S (če je $k > 0$), oziroma je lihi prerez kar C^- (če je $k = 0$). \square

Če poligon torej ne dopušča lihega V-prereza, nima nobenega ponora. Sledi, da ima tak graf le en izvir, saj sta dva izvira povezana le prek ponora. Tako je graf drevo z izvirov v korenu, povezave pa so usmerjene proti listom.

Lema 19.12. Če poligon ne dopušča lihega V -razcepa, potem ima natanko eno V -izolirano točko, ki se nahaja v edinem izviro.

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da morajo biti vsi listi in veje brez V -izoliranih točk. Dokaz poteka preko indukcije po številu povezav do najbližjega lista. To razdaljo poimenujmo *mejna razdalja*.

Oglejmo si indukcijsko predpostavko. Predpostavimo, da list L vsebuje $k > 0$ V -izoliranih točk. Naj bo C V -prerez, ki pripada edini vhodni povezavi. Če je k liho število, je tudi V -prerez lih. V nasprotnem primeru lih V -prerez poraja V -izolirana točka, ki leži v L in je najbližje C .

Sedaj predpostavimo, da so vsi listi in veje z mejno razdaljo $d' < d$ brez V -izoliranih točk. Oglejmo si vejno točko B na razdalji d . Naj bo C V -prerez, ki pripada edini vhodni povezavi, in naj bo $k > 0$ število V -izoliranih točk v B . Če je k liho število, je C lihi prerez, saj po indukcijski predpostavki noben potomec B nima V -izoliranih točk. Če je k sodo število, lih V -prerez poraja V -izolirana točka v B , ki leži najbližje prerezu C .

Pokažimo še, da ima edini izvir S natanko eno V -izolirano točko. Naj S vsebuje k V -izoliranih točk in naj bo k sodo število, C pa naj bo prerez, ki pripada eni od izhodnih povezav dela S . Potem je C lihi prerez, ker uniči eno konkavno točko V -para in so sicer vse ostale konkavne točke štete v sodem številu k (V -izolirane točke) ali pa so v V -paru. Če pa je $k > 1$ liho število, druga C -ju najbližja konkavna točka tvori lihi prerez. Zato mora biti v S natanko ena V -izolirana točka. \square

Trditve lem 19.10-19.12 držijo tako za V -prereze kot za N -prereze. Če torej poligon ne dopušča niti V -prereza niti N -prereza, potem mora imeti eno V -izolirano točko v in N -izolirano točko n , ki obe ležita v izviro V -grafa oziroma N -grafa. Z naslednjo lemo pokažemo, da teh pogojev ne moremo doseči.

Lema 19.13. Poligon z $r \geq 3$ konkavnimi točkami ne more imeti natanko ene V -izolirane točke v delu, ki pripada izviro V -grafa. Ravno tako ne more imeti natanko ene N -izolirane točke v izviro N -grafa.

Dokaz. Naj bo v V -izolirana točka, n pa N -izolirana točka. Vse ostale konkavne točke (zaradi $r \geq 3$ obstaja vsaj ena) pripadajo tako V -paru kot N -paru, saj bi bile sicer izolirane. Sledi, da so vse povezane in tvorijo verigo konkavnih točk. Veriga se ne more skleniti, ne da bi se pri tem naredila luknja, mi pa obravnavamo le poligone brez lukenj. Poligon je torej spirala, katere končni točki sta v in n . Vendar je točka v v listu V -grafa, točka n pa v listu N -grafa, kar je v nasprotju s trditvijo, da ležita v izviroh V -grafa in N -grafa. \square

Z naslednjo lemo predstavimo obstoj lihega prereza.

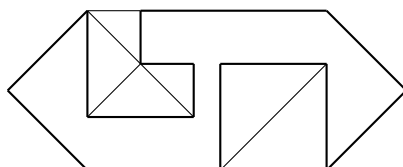
Lema 19.14. Ortogonalni poligon z lihimi številom konkavnih točk $r \geq 3$, kjer nobeni dve izmed njih ne ležita na isti vodoravni ali navpični črti, dopušča lihi prerez.

19.6 PROBLEM TRDNJAVE

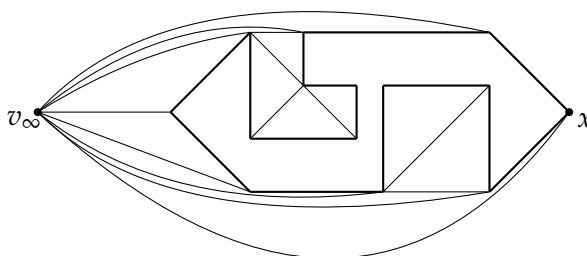
Problem trdnjave je soroden problemu umetnostne galerije. Zanimalo nas bo, koliko stražarjev potrebujemo, da pokrijemo celotno zunanost poligona P na n točkah. Dokaz najdemo v [6].

Izrek 19.15. *Za pokritje zunanosti poligona P na n točkah potrebujemo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ stražarjev. Hkrati je to tudi zadostno število.*

Dokaz. Najprej triangulirajmo zunanost poligona P , ki leži znotraj konveksne ogrinjače poligona. Poimenujmo ta graf na n točkah z G'' (slika 73) in mu dodajmo točko v_∞ , ki naj leži zunaj konveksne ogrinjače. Povežimo jo z vsemi točkami na ogrinjači. Ta graf na $n + 1$ točkah poimenujmo z G' (slika 74). Sedaj si na ogrinjači izberemo točko x in jo razcepimo na točki x' in x'' . Pri tem ne spreminjamo povezav, graf pa ostane ravninski. Dodamo še eno povezavo iz točke v_∞ , da je le ta povezana z obema točkama x' in x'' . Graf z $n + 2$ točkama poimenujemo G (slika 75).



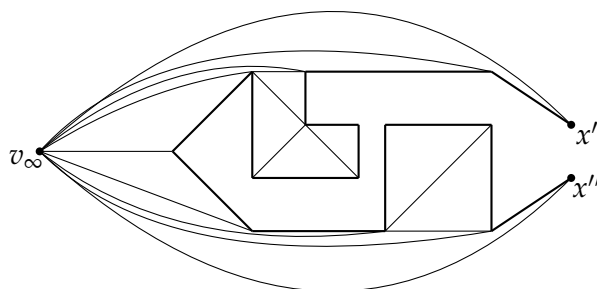
Slika 73: Graf G'' - poligon P in triangulacija njegove zunanosti, ki leži znotraj konveksne ogrinjače.



Slika 74: Graf G' - grafu G'' dodamo točko v_∞ ter povezave do vseh točk, ki ležijo na konveksni ogrinjači.

Trdimo, da je graf G triangulacija poligona. To dokažemo z "odprtjem" konveksne ogrinjače med točkama x' in x'' ter z odmikom točke v_∞ dovolj daleč stran, da postanejo vse povezave ravne. Ker je graf G triangulacija, je po posledici 19.4 3-obarvljiv. Naj bodo 1, 2 in 3 barve, s katerimi pobarvamo graf G , ter c_i število točk, ki so pobarvane z barvo i , $i = 1, 2, 3$. Pri tem naj velja še $c_1 \leq c_2 \leq c_3$. Barva 1 se pri barvanju grafa G pojavi na največ $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ točkah.

Če točka v_∞ ni pobarvana z barvo 1, postavimo stražarje na vse točke, ki so obarvane z barvo 1. S tem pokrijemo zunanost originalnega poligona P z $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ stražarji.



Slika 75: Graf G - razcepimo točko $x \in V(G')$ v točki x' in x'' ter graf "odpremo".

V nasprotnem primeru, ko je točka v_∞ pobarvana z barvo 1, nanjo ne moremo postaviti stražarja, saj ta točka ni del originalnega poligona P . Stražarje lahko postavimo na točke, ki so pobarvane z drugo najmanj pogosto uporabljeno barvo 2. Vemo, da velja $c_1 + c_2 + c_3 = n + 2$. Ker je $c_1 \geq 1$, velja $c_2 + c_3 \leq n + 1$. Od tod sledi $c_2 \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

V obeh primerih je pokrit vsak trikotnik, ki ima točko v_∞ v enem od oglišč. S tem je pokrita tudi vsa zunanost poligona P zunaj konveksne ogrinjače. Zunanost poligona P znotraj konveksne ogrinjače je pokrita zaradi 3-obarvljivosti triangulacije. \square

LITERATURA

- [1] B. Chazelle, *Computational geometry and convexity*, Ph.D. thesis, Yale Univ. (1980).
- [2] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combin. Theory Ser. B **18** (1975), 39–41.
- [3] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combin. Theory Ser. B **24** (1978), 374.
- [4] J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman, *Traditional galleries require fewer watchmen*, SIAM J. Alg. Disc. Meth **4** (1983), 194–206.
- [5] G. H. Meisters, *Polygons have ears*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 648–651.
- [6] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, Oxford University Press, Oxford (1987).

Anja Fettich

Dobro znani Erdős-ev izrek pravi, da za vsako celo število k obstaja graf G , za katerega je $g(G) > k$ in $\chi(G) > k$. Če povemo to z besedami: obstajajo grafi, ki imajo poljubno veliko ožino in poljubno veliko kromatično število. Kako bi dokazali ta izrek? Standardni pristop bi bil konstruirati graf s tema dvema lastnostima, in sicer z indukcijo po k . Erdős pa je ubral drugačen pristop. Za vsak n je definiriral verjetnostni prostor na množicah grafov z n vozlišči in pokazal, da je za nekatere skrbno izbrane verjetnostne mere verjetnost, da graf z n vozlišči ima obe zgoraj naštetih lastnosti, pozitivna za vse dovolj velike n . Temu pristopu danes pravimo *verjetnostna metoda* in le-ta je postala vsestranska tehnika dokazovanja v teoriji grafov in v ostalih vejah diskretne matematike.

20.1 UVOD V RAMSEYEVO TEORIJU

V tem poglavju se bomo ukvarjali z vprašanjem, katere podstrukture so nujno prisotne v vsakem dovolj velikem grafu. Možen odgovor na to vprašanje je lema o regularnosti, ki pravi, da vsak dovolj velik graf G vsebuje velike naključne dvodelne podgrafe, mi pa iščemo bolj natančno definirane podstrukture (npr. če so podstrukture izomorfne kakšnim danim grafom).

Na primer:

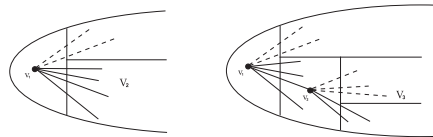
- če imamo celo število r , ali vsak dovolj velik graf vsebuje K_r ali inducirano \overline{K}_r ;
- ali vsak dovolj velik povezan graf vsebuje K_r ali veliko inducirano pot ali zvezdo $K_{1,n}$.

Čeprav se mogoče zdijo ti problemi podobni ekstremalnim problemom, v bistvu iščemo lokalne posledice globalnih predpostavk. Izreki in dokazi v tem poglavju imajo več skupnega s podobnimi rezultati v algebri in geometriji kot pa z ostalimi področji iz teorije grafov. Osredotočili se bomo na rezultate, ki so navadno izraženi v terminologiji grafov.

Izrek 20.1 (Ramsey 1930). *Za vsak $r \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da vsak graf reda najmanj n vsebuje K_r ali \overline{K}_r kot inducirani podgraf.*

Ideja dokaza. Ta izrek se na prvi pogled zdi presenetljiv, saj rabimo približno $\frac{r-2}{r-1}$ vseh možnih povezav, da vrinemo K_r kot podgraf v G , toda za G in \overline{G} se ne more pričakovati, da bi imela več kot polovico vseh povezav. \square

Poizkusili bomo konstruirati K_r ali \overline{K}_r v G induktivno. Začeli bomo s poljubnim vozliščem $v_1 \in V_1 := V(G)$. Če je $|V(G)|$ velika, potem obstaja velika množica $V_2 \subseteq V_1 \setminus \{v_1\}$, $V_2 = \{ \text{vozlišča, ki so vsa sosednja z } v_1 \text{ ali nobeno ni sosednje z } v_1 \}$. Torej v_1 bo prvo vozlišče K_r ali \overline{K}_r , ostala pa bodo ležala v V_2 . Potem izberemo drugo vozlišče $v_2 \in V_2$. Ker je V_2 velika, bo imela podmnožico V_3 še vedno dovolj veliko. $V_3 = \{ \text{vozlišča, ki so vsa sosednja z } v_2 \text{ ali nobeno ni sosednje z } v_2 \}$. Nadaljujemo z iskanjem vozlišč znotraj V_3 in tako naprej.



Slika 76: Izbira vozlišč v_1, v_2, \dots

Kdaj se konstrukcija konča? To je odvisno od velikosti prvotne množice V_1 . Velja $|V_i| \geq \frac{|V_{i-1}|}{2}$. Torej lahko naredimo s korakov konstrukcije, če je $|G| \geq 2^s$. V samem dokazu bomo videli, da je ustrezna izbira za $s = 2r - 3$.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po r . Za $r = 1$ je očitno, da izrek velja, saj imamo samo eno točko, zato privzemimo, da je $r \geq 2$. Naj bo $n := 2^{2r-3}$ in G graf moči vsaj n . Definirajmo zaporedje množic V_1, \dots, V_{2r-2} in izberimo vozlišča $v_i \in V_i$, ki zadoščajo naslednjim lastnostim:

- (i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ ($i = 1, \dots, 2r - 2$);
- (ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}$ ($i = 2, \dots, 2r - 2$);
- (iii) v_{i-1} je sosednje z vsemi vozlišči v V_i ali z nobenim vozliščem v V_i ($i = 2, \dots, 2r - 2$).

Naj bo $V_1 \subseteq V(G)$ poljubna množica 2^{2r-3} vozlišč. Izberimo poljubno vozlišče $v_1 \in V_1$. Potem velja (i) za $i = 1$, (ii) in (iii) pa sta očitni. Privzemimo sedaj, da smo izbrali V_{i-1} in $v_{i-1} \in V_{i-1}$ takšna, da zanju veljajo točke (i) – (iii) za $i - 1$, kjer je $1 < i \leq 2r - 2$. Ker je $|V_{i-1} \setminus \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$ liha, ima V_{i-1} podmnožico V_i , ki zadošča točkam (i) – (iii); $v_i \in V_i$ izberemo poljubno. Med $2r - 3$ vozlišči v_1, \dots, v_{2r-3} je $r - 1$ vozlišč, ki so vsa sosednja vozliščem v V_i ali niso sosednja z nobenim vozliščem iz V_i . Torej teh $r - 1$ vozlišč in v_{2r-2} inducirajo K_r ali \overline{K}_r v G , ker $v_i, \dots, v_{2r-2} \in V_i$ za vse i . \square

Najmanjši n iz Ramseyevega izreka, ki je odvisen od r , se imenuje *Ramseyevo število* $R(r)$ za r . V dokazu smo videli, da je $R(r)$ navzgor omejeno z 2^{2r-3} , navzdol pa z $2^{\frac{r}{2}}$. Ramseyev izrek lahko prepisemo tudi drugače: Obstaja najmanjše število $R(p, q)$, tako da vsak graf z $R(p, q)$ vozlišči vsebuje ali kliko velikosti p ali neodvisno množico velikosti q . V spodnji tabeli so napisane nekatere vrednosti $R(p, q)$, kjer oznaka $x|y$ predstavlja znano spodnjo mejo x in zgornjo mejo y .

\backslash p	3	4	5	6	7	8	9	
q	3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35 41	49 61	55 84	63 115	
5			43 49	58 87	80 143	95 216	121 316	
6				102 165	109 298	122 495	153 780	

Slika 77: Vrednosti $R(p, q)$.

20.2 POMEMBNI IZREKI IN DEFINICIJE

Izrek 20.2 (Graham-Rothschild-Spencer 1980,1990). *Za celi števili p in q velja:*

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

Če sta oba sumanda soda, potem velja stroga neenakost.

Dokaz. Vzemimo poljuben graf z $R(p, q)$ vozlišči. Izberimo poljubno vozlišče v . Če ima $R(p-1, q)$ sosedov ali $R(p, q-1)$ nesosedov, potem ima graf p -kliko ali neodvisno množico velikost q . Recimo, da velja: $R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$. Potem sledi: število sosedov $\geq R(p-1, q)$ ali št. nesosedov $\geq R(p, q-1)$. Pa recimo, da to ne velja. Torej je število sosedov $\leq R(p-1, q) - 1$ in število nesosedov $\leq R(p, q-1) - 1$. Iz tega sledi, da je število sosedov + število nesosedov $\leq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 2$ in dobimo, da je $n \leq n - 1$, kar je protislovje. Poglejmo sedaj še primer, kadar sta oba sumanda soda. Naj bo $n = R(p, q) - 1$. Za n obstaja graf G na n točkah brez K_p in \overline{K}_q . Ker sta $R(p-1, q)$ in $R(p, q-1)$ soda sledi, da je n liho število. Graf $G - v$ ima $n - 1$ točk in $n - 1$ je sodo število. Število $n - 1 = R(p-1, q) - 1 + R(p, q-1) - 1$. Ker pa je G regularen, imajo vsa vozlišča liho stopnjo $R(p-1, q) - 1$. Pridemo do protislovja, saj za vsak k -regularen graf G velja $k|V(G)| = 2|E(G)|$, kar v našem primeru pomeni $(R(p-1, q) - 1)n$, ki je produkt dveh lihkih števil, je enak $2|E(G)|$, kar je sodo število. □

Izrek 20.3 (Erdős 1947). *Za vse p velja:*

$$R(p, p) > (e\sqrt{2})^{-1} p 2^{\frac{p}{2}} (1 + \mathcal{O}(1)).$$

Izrek 20.4 (Erdős 1947). Za vsak $p \geq 3$

$$R(p, p) = R(p) > 2^{\frac{p}{2}}.$$

Dokaz. Za $p = 3$ izrek velja. Poglejmo sedaj za vsak $n \geq 2^{\frac{p}{2}}$. Če je G graf na n vozliščih je verjetnost, da imamo ali nimamo povezave enaka $\frac{1}{2}$. Označimo s $P[\alpha(G) \geq p]$ verjetnost, da G vsebuje množico p neodvisnih vozlišč, s $P[\omega(G) \geq p]$ pa verjetnost, da G vsebuje kliko velikosti p . Radi bi dokazali: $P[\alpha(G) \geq p], P[\omega(G) \geq p] < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} P[\alpha(G) \geq p], P[\omega(G) \geq p] &\leq \binom{n}{p} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{p}{2}} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \\ &< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^n}{2^{n-1}2^p} \\ &< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^p}{2^n} \\ &< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^p}{2^p} \\ &< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} 2^{-p} \left(2^{\frac{p}{2}}\right)^p \\ &< 2^{-\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - p + \frac{1}{2}p^2} \\ &= 2^{-\frac{1}{2}p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

V Ramseyevi teoriji gledamo na particije kot na barvanje.

Definicija 20.5. k -barvanje množice X je razdelitev množice X na k razredov induciranih z barvami.

Definicija 20.6. $[X]^k = \{\text{vse } k\text{-podmnožice v } X\}$.

Definicija 20.7. c -barvanje za $[X]^k$ množice $Y \subseteq X$ imenujemo *monokromatična množica*, če imajo vsi elementi množice $[Y]^k$ isto barvo, to je, pripadajo isti c -particiji razredov $[X]^k$. Če je $G = (V, E)$ graf in imajo vse povezave $H \subseteq G$ enako barvo pri nekem barvanju E , rečemo H *monokromatični podgraf* G .

S to terminologijo lahko povemo Ramseyev izrek še drugače: za vsak r obstaja n , tako da nam za poljubno množico X , $|X| = n$, da vsako 2-barvanje $[X]^2$ monokromatično množico $Y \subseteq X$, $|Y| = r$.

Izrek 20.8. Naj bosta k, c pozitivni celi števili in X neskončna množica. Če je $[X]^k$ pobarvana s c barvami, potem ima X neskončno monokromatično podmnožico.

Dokaz. Naredimo indukcijo po k , c fiksiramo. Za $k = 1$ izrek drži. Naj bo sedaj $k > 1$ in privzemimo, da izrek velja za manjše vrednosti k . Naj bo $[X]^k$ pobarvana s c barvami. Konstruirali bomo neskončno zaporedje X_0, X_1, \dots neskončnih podmnožic množice X in izbrali elemente $x_i \in X_i$, za katere veljata naslednji lastnosti (za vsak i):

$$(i) \quad X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\};$$

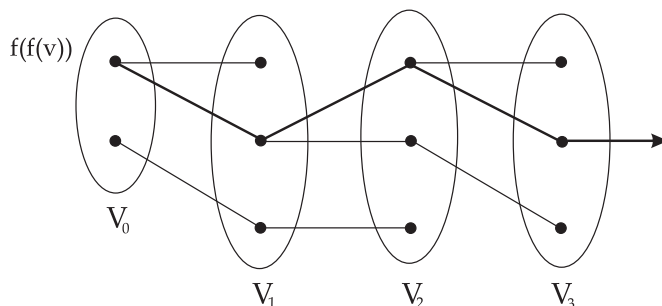
(ii) vse k -množice $\{x_i\} \cup Z$, $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ imajo isto barvo x_i .

Začnemo z $X_0 := X$ in izberemo poljuben $x_0 \in X_0$. Po predpostavki je X_0 neskončen. Izberemo neskončno množico X_i in $x_i \in X_i$. Za nek i, c k -pobarvamo $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ tako, da pobarvamo vsako množico Z z barvo $\{x_i\} \cup Z$ iz c -barvanja $[X]^k$. Po indukcijski predpostavki ima $X_i \setminus \{x_i\}$ neskončno monokromatično podmnožico, ki jo izberemo za X_{i+1} . Očitno tako izbrana množica zadošča lastnostima (i) in (ii). Izberemo poljuben $x_{i+1} \in X_{i+1}$. Ker je c končen, je ena izmed c barv predpisana neskončno mnogo x_i . Ti x_i tvorijo neskončno monokromatično podmnožico množice X .

□

Da bi lažje razumeli končno verzijo zgornjega izreka, si pomagamo s standardnim orodjem v kombinatoriki:

Lema 20.9 (König's infinity lema). *Naj bo V_0, V_1, \dots neskončno zaporedje disjunktnih nepraznih končnih množic, G je graf njihove unije. Privzemimo, da ima vsako vozlišče $v \in V_n$, $n \geq 1$, soseda $f(v) \in V_{n-1}$. Potem G vsebuje neskončno pot $v_0 v_1 \dots$, kjer $v_n \in V_n$ za vsak n .*



Slika 78: König's infinity lema

Dokaz. Naj bo \mathcal{P} množica vseh poti oblike $vf(v)f(f(v))\dots$, ki se končajo v V_0 . V_0 je končna, \mathcal{P} je neskončna, zato se neskončno poti iz \mathcal{P} konča v istem vozlišču $v_0 \in V_0$. Med temi potmi jih gre neskončno skozi vozlišče $v_1 \in V_1$, ker je tudi V_1 končna. Med temi potmi jih gre neskončno skozi $v_2 \in V_2$, ker je V_2 končna, itd. Čeprav se število poti na vsakem koraku zmanjša, imamo po končno korakov še vedno neskončno poti, tako da so v_n definirani za vsak

n . Po definiciji je vsako vozlišče v_n sosednje v_{n-1} na eni izmed teh poti, torej je $v_0v_1 \cdots$ neskončna pot. □

Izrek 20.10. Za vse $k, c, r \geq 1$ obstaja $n \geq k$ tako, da ima vsaka n -množica X monokromatično r -podmnožico za vnaprej dano c -barvanje za $[X]^k$.

Definicija 20.11. Celó število n , povezano s k, c in r v zgornjem izreku imenujemo *Ramseyevo število* za $k, c, r : R(k, c, r)$.

Torej lahko zapišemo Ramseyev izrek še drugače: Če je $H = K_r$ in G graf z zadosti veliko vozlišči, potem G ali \bar{G} vsebuje kopijo H kot podgraf.

LITERATURA

- [1] R. Diestel, *Graph Theory, Electronic Edition*, Springer-Verlag, Heidelberg (2000) 189–193.
- [2] D. B. West, *Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. (2001) 383–386.