UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika - raziskovalna smer

Blaž Zmazek

Zvezdno kromatično število grafov

Magistrsko delo

Ljubljana, 1996

Kazalo

Program magistrskega dela

Magistrsko delo naj obravnava zvezdno kromatično število grafov. Narejen naj bo karseda popoln pregled znanih rezultatov te pomembne novejše posplošitve klasičnega kromatičnega števila. V posebnem naj bo obravnavano zvezdno kromatično število ravninskih grafov in grafovskih produktov.

Sandi Klavžar

Povzetek

Zvezdno kromatično število $\chi^\star$ predstavlja najmanjše racionalno število k/d, za katero obstaja barvanje grafa s k barvami, ki se na sosednjih točkah razlikujejo vsaj za d. Za zvezdno kromatično število velja $\chi - 1 < \chi^\star \leq \chi$.

V uvodu zapišemo osnovne definicije in dokažemo osnovne lastnosti zvezdnega kromatičnega števila.

V drugem poglavju vpeljemo geometrijsko predstavitev zvezdnega kromatičnega in kromatičnega števila. S tem dobimo nekaj zadostnih pogojev za enakost $\chi^\star = \chi$. Osrednji izrek tega poglavja pove, da za izbrano zvezdno kromatično število obstaja poljubno velik graf s poljubno dolžino najkrajšega cikla in z izbranim zvezdnim kromatičnim številom.

V naslednjem poglavju si ogledamo primere družin ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom med 2 in 3. Izpeljemo konstrukcijo grafov s poljubnim zvezdnim kromatičnim številom med 2 in 3. Manj znani so ravninski grafi z zvezdnim kromatičnim številom enakim 3. Grafi, imenovani $(2n+1)$-kolesa, predstavljajo ravninske grafe, za katere velja enakost $\chi^\star = \chi = 4$, $(2n+1)$-kolesa z razpolovljenimi prečkami pa imajo zvezdno kromatično število enako 3. Na koncu tretjega poglavja pokažemo, da za nekatera racionalna števila r med 3 in 4 obstaja ravninski graf s $\chi^\star = r$.

V četrtem poglavju dokažemo, da lahko z odstranitvijo točke grafa zvezdno kromatično število grafa zmanjšamo za $2 - \varepsilon$ in da za poljubna $\varepsilon > 0$ in $k \geq 4$ obstaja k-kritičen 2 ali 3-povezan graf, za katerega velja neenakost $\chi^\star < k-1+\varepsilon$. Prav tako obstaja k-kritičen $(k-1)$-povezan graf s to lastnostjo. Podobna ocena velja tudi za k-kritične grafe z veliko dolžino najkrajšega cikla. Odprto pa ostaja vprašanje obstoja kritičnih grafov brez trikotnikov, za katere velja enakost $\chi^\star = \chi$.

V petem poglavju spoznamo deljeno kromatično število, χ_f, ki je nova posplošitev kromatičnega števila. Izpeljemo dve interpretaciji deljenega barvanja in dokažemo, da so lihi cikli $\chi^\star$-ekstremni grafi, tj. grafi, za katere velja $\chi^\star = \chi_f$.

V šestem poglavju pokažemo, da je deljeno kromatično število leksikografskega produkta grafov enako produktu deljenih kromatičnih števil grafov. Enakost $\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)\chi(H)$ pa velja natanko tedaj, ko je graf G $\chi^\star$-ekstremen. V razdelku 6.3 zapišemo do sedaj znane lastnosti $\chi^\star$ na drugih grafovskih produktih.

V sedmem poglavju si ogledamo posplošitev zvezdnega kromatičnega števila na utežne grafe in pokažemo nekatere lastnosti, ki veljajo na grafih brez uteži. V razdelku 7.3 zapišemo nekaj primerov zvezdno super popolnih grafov in nekatere lastnosti leksikografskega produkta utežnih grafov.

V zadnjem, osmem poglavju, omenimo še druge znane rezultate za zvezdno kromatično število.

Math. Subj. Class. (1991): 05C15.

Key words: chromatic number, circular coloring, critical graph, Farey sequence, fractional chromatic number, graph product, interval coloring, perfect graph, planar graph, star chromatic number, superperfect graph, vertex coloring, weighted graph.

Zahvala

Najprej bi se rad najlepše zahvalil mentorju dr. Sandiju Klavžarju, ki mi je pri nastajanju magistrskega dela najbolj pomagal. S svojim znanjem in natančnostjo me je vseskozi spodbujal k novim spoznanjem, s svojim strokovnim pregledom pa pripomogel k temu, da je magistrsko delo smiselno organizirano.

Rad bi se zahvalil tudi vsem sodelujočim na seminarju iz Teorije grafov pod vodstvom dr. Bojana Moharja, ki so mi ob predstavitvi dela pomagali s svojimi razmišljanji.

Naj se na koncu zahvalim še ženi Vesni, ki mi je med drugim pomagala pri jezikovnem pregledu, ter otrokoma Evi in Janu, ki sta mi pridno "pomagala" mečkati liste in pritiskati po tipkovnici računalnika.

Ljubljana, Maj 1996 Blaž Zmazek

Poglavje 1

Uvod

Pomembno poglavje teorije grafov predstavljajo barvanja grafov. Zaradi natančnejše klasifikacije grafov je bilo v zadnjih letih vpeljano že več posplošitev barvanja grafov. Mnogo posplošitev je dobljenih iz praktičnih primerov.

Zelo naravna posplošitev je tako imenovano popačeno barvanje. J. A. Andrews in M. S. Jacobson [1] sta definirala (m, k)-obarvljive grafe kot grafe, ki jih lahko obarvamo z m barvami tako, da je vsaka točka sosednja z največ k točkami, ki so obarvane z isto barvo kot izbrana točka. Najmanjšo vrednost m, za katero je graf G (m, k)-obarvljiv, sta imenovala **k-popačeno kromatično število**.

V mnogo praktičnih primerih je izbira barv na posameznih točkah omejena. Od tod izhaja **R-seznamsko barvanje**. To je barvanje grafa, pri katerem lahko barvo točke x izberemo iz seznama barv $R(x)$. Takšna seznamska barvanja so predstavili P. Erdös, A. Rubin in H. Taylor [10], podoben koncept za barvanje povezav pa B. Bollobás in A. J. Horris [4]. Graf G, ki je R-seznamsko obarvljiv za poljubne sezname barv R moči k, imenujemo **k-seznamsko izbirljiv** [10]. Za celi števili a in b, $a \geq 2b > 1$, je graf G **(a, b)-izbirljiv**, če za poljubno izbiro seznamov $R(x)$ moči a obstajajo podmnožice $C(x) \subset R(x)$ moči b, za katere je $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ brž, ko sta točki x in y povezani. Najmanjšo med vrednostmi $\frac{a}{b}$, za katere je graf G (a, b)-izbirljiv, imenujemo **izbirljivo število** in označimo $chr(G)$.

Omenili smo le dve od mnogo posplošitev barvanja grafov [28].

V magistrskem delu bomo obdelali vse do sedaj znane rezultate o zvezdnem kromatičnem številu, ki je ena najnovejših posplošitev barvanja grafov.

Pojem zvezdnega kromatičnega števila je leta 1988 vpeljal A. Vince [32]. V ta namen je definiral posplošena kromatična števila

$$\chi_k(G) = \frac{k}{\max_{c \in C_k} \min_{uv \in E(G)} |c(u) - c(v)|_k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

kjer je $|x|_k = \min\{|x|, k - |x|\}$ in C_k množica vseh k-barvanj grafa G. Pri izračunu $\chi_k(G)$

upoštevamo k-barvanje grafa G, kjer se barve na sosednjih točkah čimbolj razlikujejo. Zvezdno kromatično število

$$\chi^\star(G) = \inf_{k \geq 1} \chi_k(G)$$

torej predstavlja "najboljše možno" barvanje. Kot primer vzemimo n-cikel C_n. Čeprav je kromatično število lihih ciklov enako 3, jih le zaradi ene točke ne moremo obarvati z dvema barvama. Torej je $\chi(C_{2n+1})$ "skoraj" enak 2. Zvezdno kromatično število $\chi^\star(C_{2n+1}) = 2 + (1/n)$ nam da željeno približno vrednost.

J. A. Bondy in P. Hell [6] sta predstavila enostavnejši pristop k zvezdnemu kromatičnemu številu, ki vodi h kombinatoričnim izpeljavam osnovnih lastnosti zvezdnega kromatičnega števila. Dokazi na ta način postanejo krajši in enostavnejši, zato bomo za definicijo $\chi^\star$ uporabili ta pristop.

Spoznali bomo tudi krožno kromatično število in pokazali, da je le-to enako zvezdnemu kromatičnemu številu. S tem dobimo orodje, ki bo zelo uporabno v mnogih nadaljnjih izpeljavah.

Prvo poglavje je razdeljeno na dva razdelka. V razdelku 1.1 bomo zapisali osnovne definicije, ki jih potrebujemo v magistrskem delu hkrati z definicijo zvezdnega kromatičnega števila. V razdelku 1.2 bomo dokazali najosnovnejše lastnosti zvezdnega kromatičnega števila.

1.1 Osnovne definicije

V magistrskem delu se bomo ukvarjali le s končnimi, enostavnimi grafi. Če ne bo drugače rečeno, bodo obravnavani grafi tudi neusmerjeni.

Naj bo G poljuben graf. Z $V(G)$ označimo množico točk, z $E(G)$ pa množico povezav grafa G. Moč množice točk $|V(G)|$ bomo označevali z $|G|$.

Naj bo k naravno število. Preslikavo $c : V(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$, pri kateri za poljubno povezavo $uv \in E(G)$ velja $c(u) \neq c(v)$, imenujemo k-**barvanje** grafa G. Če obstaja k-barvanje grafa G, pravimo, da je graf k-**obarvljiv**. **Kromatično število**, $\chi(G)$, grafa G je najmanjše naravno število k, za katero je graf k-obarvljiv.

Za poljubno pozitivno realno število y definiramo na intervalu $[0, y)$ preslikavo $|x|_y = \min\{|x|, y - |x|\}$. Naj bosta k in d takšni naravni števili, da je $k \geq 2d$. Preslikavo $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, pri kateri za poljubno povezavo $uv \in E(G)$ velja $|c(u) - c(v)|_k \geq d$, imenujemo (k, d)-**barvanje** grafa G. Če obstaja (k, d)-barvanje grafa G, pravimo, da je graf (k, d)-**obarvljiv**. Kromatično število $\chi(G)$ je torej najmanjše število k, za katero obstaja $(k, 1)$-barvanje grafa G, ki je hkrati tudi običajno k-barvanje.

Zvezdno kromatično število grafa G, označimo ga s $\chi^\star(G)$, je definirano na naslednji način:

$\chi^\star(G) = \inf\{\frac{k}{d}$; G je (k,d)-obarvljiv$\}$.

Iz definicije lahko zlahka razberemo, da je zvezdno kromatično število podgrafa manjše ali enako zvezdnemu kromatičnemu številu grafa.

Graf G je k**-kritičen**, če je $\chi(G) = k$ in za vsako točko v grafa G velja $\chi(G - v) = k - 1$. Graf G je k**-kritičen po povezavah**, če je $\chi(G) = k$ in za vsako povezavo e grafa G velja $\chi(G - e) = k - 1$. Graf G je **zvezdno kritičen**, če je $\chi^\star(G - v) < \chi^\star(G)$ za poljubno točko $v \in V(G)$. Graf G je **zvezdno kritičen po povezavah**, če je $\chi^\star(G - e) < \chi^\star(G)$ za poljubno povezavo $e \in E(G)$. Graf je **zvezdno nasičen v povezavah**, če dodajanje nove povezave h grafu poveča zvezdno kromatično število.

Graf G je n**-povezan**, če moramo iz grafa G odstraniti najmanj n točk, da dobimo nepovezan graf ali samo točko. Graf G je **natanko** n**-povezan**, če je n-povezan in ni $(n+1)$-povezan. Graf G je n**-povezan po povezavah**, če moramo iz grafa G odstraniti najmanj n povezav, da dobimo nepovezan graf. Graf G je **natanko** n**-povezan po povezavah**, če je n-povezan po povezavah in ni $(n + 1)$-povezan po povezavah. Znani **Mengerjev izrek** pravi, da je *graf G n-povezan natanko tedaj, ko med poljubnima točkama obstaja vsaj n notranje disjunknih poti, ki povezujejo ti točki.*

Naj bo C krožnica v $\mathbb{R}^2$ dolžine 1 in r poljubno realno število večje ali enako 1. Označimo s $C^{(r)}$ množico vseh odprtih intervalov na C dolžine $\frac{1}{r}$. Preslikavo c iz $V(G)$ v $C^{(r)}$, za katero velja, da je $c(u) \cap c(v) = \emptyset$ brž, ko je $uv \in E(G)$, imenujemo r**-krožno barvanje** grafa G. Če takšno r-krožno barvanje obstaja, pravimo, da je G r**-krožno obarvljiv**. **Krožno kromatično število** grafa G je

$\chi^c(G) = \inf\{r; G$ je r-krožno obarvljiv$\}$.

Če v definiciji krožnega barvanja zamenjamo krožnico C z intervalom I dolžine 1, s tem definiramo intervalno barvanje in enako tudi pripadajoče intervalno kromatično število. Naj bo I interval na $\mathbb{R}$ dolžine 1 in r poljubno realno število večje ali enako 1. Označimo z $I^{(r)}$ množico vseh odprtih intervalov na I dolžine $\frac{1}{r}$. Preslikavo c iz $V(G)$ v $I^{(r)}$, za katero velja, da je $c(u) \cap c(v) = \emptyset$ brž, ko je $uv \in E(G)$, imenujemo r**-intervalno barvanje** grafa G. Če takšno r-intervalno barvanje obstaja, pravimo, da je G r**-intervalno obarvljiv**.
Intervalno kromatično število grafa G je

$\chi^I(G) = \inf\{r; G$ je r-intervalno obarvljiv$\}$.

Homomorfizem grafa G v graf H je preslikava $f : V(G) \to V(H)$, za katero velja, da je $f(u)f(v) \in E(H)$ brž, ko je $uv \in E(G)$. **Avtomomorfizem** grafa G v graf H

je bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, za katero velja, da je $f(u)f(v) \in E(H)$ natanko tedaj, ko je $uv \in E(G)$. Če obstaja homomorfizem iz grafa G v graf H pravimo, da je G **homomorfen** H in zapišemo $G \to H$. Če ne obstaja homomorfizem iz grafa G v graf H pravimo, da G ni homomorfen H in zapišemo $G \not\to H$. Graf H imenujemo **jedro**, če ne obstaja homomorfizem na noben njegov pravi podgraf. Primeri jeder so polni grafi K_n. Za poljubna grafa G in K z $v(G, K)$ označimo največje število točk podgrafa v G, iz katerega obstaja homomorfizem v graf K.

Vprašanje obstoja homomorfizma iz G v poln graf na n točkah K_n je ekvivalentno vprašanju, ali je graf G n-obarvljiv. Zato pravimo, da je graf G **H-obarvljiv**, če je G homomorfen H, homomorfizem iz G v H pa imenujemo **H-barvanje** grafa G.

Graf G je **točkovno tranzitiven**, če za poljubni točki $u, v \in G$ obstaja avtomorfizem ϕ grafa G, da je $\phi(u) = v$.

Graf G imenujemo **enolično k-obarvljiv** graf, če je G k-obarvljiv in vsako k-barvanje grafa G določa isto razbitje $V(G)$ na barvne razrede. Graf G je **enolično H-obarvljiv**, če obstaja surjektivni homomorfizem $c : G \to H$ in je vsak drug homomorfizem iz G v H kompozitum $\sigma \circ c$ homomorfizma c z avtomorfizmom σ grafa H.

Ko predstavimo racionalno število kot ulomek $\frac{k}{d}$, vedno predpostavimo, da sta k in d tuji števili. Za racionalno število $\frac{k}{d} \geq 2$ naj ima graf G_k^d množico točk

$$V(G_k^d) = \mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$$

in množico povezav

$$E(G_k^d) = \{ij; |i-j|_k \geq d\}.$$

Pri obravnavanju zvezdnega kromatičnega števila dobi graf G_k^d vlogo, kot jo ima polni graf pri obravnavanju kromatičnega števila.

Veliko posplošitev barvanj grafov je podanih s homomorfizmi grafov. Tako je (k, d)-barvanje grafa G homomorfizem grafa G v graf G_k^d, oziroma G_k^d-barvanje grafa G.

Klika je maksimalen poln podgraf v grafu. Velikost največje klike v grafu G označimo z $\omega(G)$. Očitno velja $\chi(G) \geq \omega(G)$. Točko v grafa G imenujemo **univerzalna točka**, če je v sosednja z vsako drugo točko grafa G. Množico imenujemo **neodvisna množica točk** grafa G, če nobeni točki te množice nista sosednji v G. Moč največje maksimalne neodvisne množice točk grafa označimo z $\alpha(G)$. Podmnožico povezav E grafa G imenujemo **neodvisna**, če poljubni povezavi iz E nimata skupnega krajišča.

Graf, ki ga dobimo tako, da ciklu C_{2n+1} dodamo točko v in jo povežemo z vsako točko cikla, imenujemo **$2n + 1$-kolo** in označimo z W_{2n+1}. Dodanim povezavam pravimo **prečke** kolesa. Z $\widetilde{W}_n$ označimo graf, ki ga dobimo iz n-kolesa tako, da na vsako prečko dodamo točko.

Naj bosta G in H poljubna grafa. Produkt $G * H$ grafov G in H v splošnem predstavlja graf na množici točk $V(G) \times V(H)$, medtem ko so povezave grafa $G * H$ definirane s funkcijo na povezavah faktorskih grafov G in H. Obstaja več takšnih produktov, a so le štirje najbolj pomembni: **direktni produkt** $G \times H$ (znan tudi kot tenzorski, kategorični, Kroneckerjev, kardinalni, šibki direktni produkt ali kar produkt), **kartezični produkt** $G \Box H$, **krepki produkt** $G \boxtimes H$ (znan tudi kot krepki direktni produkt) in **leksikografski produkt** $G[H]$.
Naj bosta $(a, x), (b, y) \in V(G) \times V(H)$. Potem je $(a, x)(b, y)$ povezava v

$E(G \times H)$ brž, ko je $ab \in E(G)$ in $xy \in E(H)$,

$E(G \Box H)$ brž, ko je ali $ab \in E(G)$ in $x = y$, ali $a = b$ in $xy \in E(H)$,

$E(G \boxtimes H)$ brž, ko je $(a, x)(b, y) \in (E(G \times H) \cup E(G \Box H))$,

$E(G[H])$ brž, ko je ali $ab \in E(G)$, ali $a = b$ in $xy \in E(H)$.

Očitno je $E(G \times H) \cup E(G \Box H) = E(G \boxtimes H) \subseteq E(G[H])$.

Za grafa G in H ter točko u grafa G definiramo graf $G(u, H)$ kot graf, ki ga dobimo iz G tako, da točko u nadomestimo z grafom H. Na mesto točke u postavimo graf H in vsako točko grafa H povežemo z vsemi sosedi točke u. Označimo z $G(S, H)$ graf, ki ga dobimo iz G tako, da vsako točko iz podmnožice točk $S \subseteq V(G)$ grafa G nadomestimo z grafom H, kot v primeru ene točke. Mimogrede tudi opazimo, da je $G(V(G), H) = G[H]$.

1.2 Osnovne lastnosti $\chi^\star$

V tem razdelku bomo pokazali, da je zvezdno kromatično število poljubnega grafa racionalno število, ki predstavlja okrajšani ulomek z imenovalcem manjšim ali enakim številu točk grafa. Izpeljali bomo oceno $\chi - 1 < \chi^\star \leq \chi$, s pomočjo katere lahko iz znanega zvezdnega kromatičnega števila grafa izračunamo njegovo kromatično število. Izračunali bomo tudi $\chi^\star$ polnih grafov in ciklov ter pokazali, da so karakteristični grafi G_k^d zvezdno kritični in zvezdno nasičeni v povezavah.

Trditev 1.1.[6] *Če na grafu G obstaja (k, d)-barvanje in je $\frac{k}{d} \leq \frac{k'}{d'}$, na G obstaja tudi (k', d')-barvanje.*

Dokaz. Naj bo $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k$ poljubno (k, d)-barvanje grafa G. Definirajmo barvanje $c' : V \to \mathbb{Z}_{k'}$ s predpisom

$$c'(v) = \lfloor \tfrac{d'}{d} c(v) \rfloor \quad \text{za vse} \quad v \in V.$$

Naj bo uv povezava v G in recimo, da velja $c(v) < c(u)$. Ker je c (k, d)-barvanje, velja

$$d \leq c(u) - c(v) \leq k - d.$$

Zato je

$$\begin{aligned} c'(v) + d' &= \lfloor \tfrac{d'}{d}(c(v) + d) \rfloor \le c'(u) \le \lfloor \tfrac{d'}{d}(c(v) + k - d) \rfloor \\ &\le \lfloor \tfrac{d'}{d}c(v) + \tfrac{kd'}{d} - d' \rfloor \le c'(v) + k' - d' \end{aligned}$$

in

$$d' \le c'(u) - c'(v) \le k' - d'.$$

Tako c' predstavlja (k', d')-barvanje grafa G. □

Posledica 1.2. *Če na grafu G obstaja (k, d)-barvanje, obstaja tudi (k', d')-barvanje, kjer je $\frac{k}{d} = \frac{k'}{d'}$ in je $D(k', d') = 1$.*

Izrek 1.3.[6] *Če na grafu G obstaja (k, d)-barvanje, $D(k, d) = 1$ in $k > |G|$, obstaja na G tudi (k', d')-barvanje, kjer je $k' < k$ in $\frac{k'}{d'} < \frac{k}{d}$.*

Dokaz. Ker je $k > |G|$, obstaja število i, ki ni barva nobene točke grafa G. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da je $i = d$. Če obstajajo točke grafa barve $2d$, jih prebarvamo z barvo $2d - 1$. Dobljeno barvanje je še vedno (k, d)-barvanje grafa G. Nadaljujemo s takšno zamenjavo barv vseh točk, ki so obarvane z barvami $3d, 4d, \ldots, \alpha d$, kjer je α najmanjše naravno število, za katero je $\alpha d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k)$. Da takšen α obstaja vemo po prepostavki, da je $D(k, d) = 1$. Tako dobimo (k, d)-barvanje grafa G, pri katerem nobena točka grafa G ni obarvana z barvami iz množice $S = \{d, 2d, 3d, \ldots, \alpha d\}$.

Definirajmo sedaj $k' = k - \alpha$. Ker barve iz množice S niso porabljene pri dobljenem (k, d)-barvanju, lahko preostale barve preimenujemo tako, da barvo x spremenimo v barvo $x - |\{y \in S; y < x\}|$, in s tem dobimo novo barvanje $c' : V \to \mathbb{Z}_{k'}$. Pokazati moramo le še, da je barvanje c' željenega tipa.

Definirajmo sedaj $\beta = \frac{\alpha d - 1}{k}$ in označimo z I_j podmnožico $\{j, j + 1, \ldots, j + d - 1\}$ v $\mathbb{Z}_k$ (ne v $\mathbb{Z}_{k'}$). Vsaka podmnožica $I_j, j \ne 1$, vsebuje natanko β elementov množice S, saj na vsakem od β obhodov množice $\mathbb{Z}_k$ določimo elemente množice S, ki so natanko za dolžino d narazen. Tako na vsakem obhodu določimo natanko en element množice S v vsako od podmnožic I_j. Ker pa je v množici S tudi element $\alpha d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k)$, vsebuje podmnožica I_1 natanko $\beta + 1$ elementov množice S.

Če je $uv \in E(G)$, je $|c(u) - c(v)|_k \ge d$ in zato $c(u) \notin I_{c(v)}$ in $c(v) \notin I_{c(u)}$. Naj bo $d' = d - \beta$. Potem za $c(u), c(v) \ne 1$ velja

$$|c'(u) - c'(v)|_{k'} \ge d - \beta.$$

Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da velja $c(u) < c(v)$. Če je $c(u) = 1$, velja $c(v) \ge d + 1$ in zato $c'(u) = 0$. Od tod sledita neenakosti

$$c'(v) \ge d + 1 - (\beta + 1),$$

$$|c'(v) - c'(u)|_{k'} \geq |d + 1 - (\beta + 1)|_{k'} = d - \beta.$$

Vidimo, da je c' (k', d')-barvanje grafa G. Ker velja

$$\frac{k'}{d'} = \frac{k - \alpha}{d - \beta} = \frac{k(k - \alpha)}{d(k - \alpha) + 1} < \frac{k}{d},$$

je c' željeno barvanje. $\square$

Posledica 1.4. *Za poljuben graf G je*

$$\chi^\star(G) = \min\{\tfrac{k}{d};\ G \textit{ je } (k, d)\textit{-obarvljiv}, k \leq n\}.$$

Dokaz. Če na G obstaja (k, d)-barvanje, lahko iz posledice 1.2 in izreka 1.3 sklepamo, da obstaja na G tudi (k', d')-barvanje, kjer je $k' \leq n$ in $\frac{k'}{d'} \leq \frac{k}{d}$. Tako je

$$\chi^\star(G) = \inf\{\tfrac{k}{d}; G \text{ je } (k, d)\text{-obarvljiv}, k \leq n\}.$$

Ker je množica $\{\frac{k}{d}; G \text{ je } (k, d)\text{-obarvljiv}, k \leq n\}$ končna, lahko infimum zamenjamo z minimumom. $\square$

Posledica 1.4 nam pove, da je $\chi^\star$ racionalno število. Trditev 1.1 pa nam zagotavlja, da za vsako racionalno število $r \geq \chi^\star$ in poljubni naravni števili k in d, za kateri velja $r = \frac{k}{d}$, obstaja (k, d)-barvanje grafa G. Tako na grafu G obstaja (k, d)-barvanje natanko tedaj, ko velja $\chi^\star(G) \leq \frac{k}{d}$.

Trditev 1.5.[6] *Za poljuben graf G velja*

$$\chi(G) - 1 < \chi^\star(G) \leq \chi(G).$$

Dokaz. Iz definicije sledi, da je $\chi^\star(G) \leq \chi(G)$. Velja tudi neenakost

$$\chi^\star(G) > \chi(G) - 1,$$

saj bi sicer po izreku 1.3 obstajalo (k, d)-barvanje grafa G, kjer je $\frac{k}{d} \leq \chi(G) - 1$. Po trditvi 1.1 bi obstajalo $(\chi(G) - 1, 1)$-barvanje, torej bi veljalo $\chi(G) \leq \chi(G) - 1$, protislovje. $\square$

Posledica 1.6. *Za poljuben graf G je*

$$\chi(G) = \lceil \chi^\star(G) \rceil.$$

V splošnem je zvezdno kromatično število težje izračunati kot običajno kromatično število. Če poznamo zvezdno kromatično število $\chi^\star(G)$ grafa G, poznamo tudi običajno kromatično število $\chi(G) = \lceil \chi^\star(G) \rceil$. Zvezdno kromatično število tako natančneje določa strukturo grafa kot običajno kromatično število.

Trditev 1.7.[32] *Naj bo G graf z vsaj eno povezavo. Potem je $\chi^\star(G) \geq 2$ in enakost velja natanko tedaj, ko je G dvodelen graf.*

Dokaz. Iz definicije (k,d)-barvanja sledi, da je $\chi^\star(G) \geq 2$.

Naj bo G dvodelen graf. Po trditvi 1.5 velja ocena

$$\chi^\star(G) \leq \chi(G) = 2,$$

zato je $\chi^\star(G) = 2$.

Obratno, če je $\chi^\star(G) = 2$, po trditvi 1.5 velja

$$2 = \chi^\star(G) > \chi(G) - 1.$$

Zato velja $\chi(G) < 3$, torej je $\chi(G) = 2$. To pomeni, da je G dvodelen graf. □

Lema 1.8. *Naj bosta G in K poljubna grafa in H točkovno tranzitiven graf. Če obstaja homomorfizem $f : G \to H$, velja*

$$\frac{v(G,K)}{|G|} \geq \frac{v(H,K)}{|H|}.$$

Dokaz. Naj bodo $H_1, H_2, \ldots, H_q$ največji podgrafi grafa H, iz katerih obstaja homomorfizem v graf K. Ker je H točkovno tranzitiven graf, je vsaka točka H v istem številu grafov H_i. Označimo to število s p. Zato je

$$q \cdot v(H,K) = p \cdot |H|.$$

Označimo z G_i podgraf grafa G, induciran z množico točk $f^{-1}(V(H_i))$. Potem vsaka točka grafa G pripada natanko p podgrafom G_i in iz vsakega G_i obstaja homomorfizem v graf K. Zato velja

$$q \cdot v(G,K) \geq p \cdot |G|$$

in tako

$$\frac{p}{q} = \frac{v(H,K)}{|H|} \leq \frac{v(G,K)}{|G|}.$$

□

Izrek 1.9.[6] *Za poljuben graf G_k^d velja*

$\chi^\star(G_k^d) = \frac{k}{d}$.

Dokaz. Ker za graf G_k^d obstaja (k,d)-barvanje, moramo le še pokazati, da ne obstaja homomorfizem $f : G_k^d \to G_{k'}^{d'}$, $\frac{k'}{d'} < \frac{k}{d}$. Označimo z $G = G_k^d$, $H = G_{k'}^{d'}$ in $K = K_1$. Ker je v poljubnem grafu G_x^y moč največje neodvisne množice enaka y in je vsak graf G_x^y točkovno tranzitiven, velja $v(G_x^y, K) = y$. Tako po lemi 1.8 velja

$$\frac{k}{d} = \frac{|G_k^d|}{v(G_k^d, K_1)} \leq \frac{|G_{k'}^{d'}|}{v(G_k^d, K_1)} = \frac{k'}{d'}.$$

□

Če obstaja homomorfizem $f : G \to H$, potem lahko vsako (k,d)-barvanje grafa H (ki je samo po sebi tudi homomorfizem H v G_k^d) komponiramo z f in dobimo (k,d)-barvanje grafa G. Če je torej G homomorfen H, velja

$$\chi^\star(G) \leq \chi^\star(H).$$

Če hkrati velja $G \to H$ in $H \to G$, dobimo enakost $\chi^\star(G) = \chi^\star(H)$.

Ko upoštevamo, da je $K_n = G_n^1$ in $C_{2n+1} = G_{2n+1}^n$, dobimo naslednji rezultat:

Posledica 1.10. *Za polne grafe K_n in lihe cikle C_{2n+1} velja*

(i) $\chi^\star(K_n) = n$,

(ii) $\chi^\star(C_{2n+1}) = 2 + \frac{1}{n}$.

Kljub navidezni podobnosti grafov K_n in G_k^d, so nekatere osnovne lastnosti grafov K_n bolj zapletene (npr. kritičnost) ali celo neresnične za grafe G_k^d (npr. kritičnost po povezavah).

Trditev 1.11.[34] *Poljuben graf G_k^d je zvezdno kritičen.*

Dokaz. Uporabimo idejo iz dokaza izreka 1.3. Ker je G_k^d točkovno tranzitiven graf, lahko privzamemo, da je d tista točka, ki jo želimo odstraniti iz grafa. Za dokaz, da ima G_k^d zvezdno kromatično število strogo manjše od $\frac{k}{d}$, je dovolj poiskati takšno (k',d')-barvanje grafa $G_k^d - d$, da bo veljalo $\frac{k'}{d'} < \frac{k}{d}$. Naj bo α najmanjše naravno število, za katero velja $\alpha d \equiv 1(\bmod k)$. Označimo s c preslikavo iz $V(G_k^d) \setminus \{d\}$ v $\mathbb{Z}_{k-\alpha}$, ki je definirajna z

$$c(i) = i - |\{0 < t \leq \alpha; td \leq i\}|,$$

kjer je množenje td množenje po modulu k in urejenost $\leq$ urejenost naravnih števil. Ker je konstrukcija barvanja c identična barvanju c' v dokazu izreka 1.3, je c tako $(k-\alpha, d - \frac{\alpha d - 1}{k})$-barvanje grafa $G_k^d - d$ in velja

$$\frac{k-\alpha}{d-\frac{\alpha d-1}{k}} = \frac{k(k-\alpha)}{d(k-\alpha)+1} < \frac{k}{d}.$$

□

Posledica 1.12. *Naj za graf G velja $\chi^\star(G) = \frac{k}{d}$ in naj $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k$ predstavlja (k,d)-barvanje grafa G. Potem je c surjektivna preslikava in velja $|V(G)| \geq k$.*

Dokaz. Vsako (k,d)-barvanje grafa G je homomorfizem G v graf G_k^d. Če c ni surjektivna preslikava, je c tudi homomorfizem G v $G_k^d - v$ za neko točko $v \in V(G_k^d)$. Zato velja

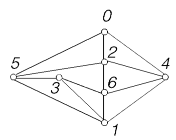
$$\chi^\star(G) \leq \chi^\star(G_k^d - v) < \tfrac{k}{d},$$

kar je v nasprotju s predpostavko, da je $\chi^\star(G) = \frac{k}{d}$. □

Posledica 1.12 je uporabna pri določanju zvezdnega kromatičnega števila majhnih grafov.

Če je $\chi^\star(G) = \frac{k}{d}$, po posledici 1.12 velja $k \leq |V(G)|$. Velja pa tudi, da pri poljubnem (k,d)-barvanje grafa G izkoristimo vseh k barv. Še več: če poznamo kromatično število grafa G, vemo, da je $\chi^\star(G)$ strogo več od $\chi(G)-1$. Pri majhnih grafih običajno ostane zelo malo racionalnih števil, primernih za $\chi^\star(G)$.

Ker so polni grafi K_n kritični po povezavah, bi morda pričakovali, da so tudi grafi G_k^d zvezdno kritični po povezavah. Vendar ni tako. Označimo s H graf, ki ga dobimo, če iz grafa G_7^2 odstranimo povezavo $(0,3)$. Graf H vidimo na sliki 1.1.



Slika 1.1: Graf H

Tu je $\chi(H) > 3$, torej $\chi^\star(H) > \chi(H) - 1 \geq 3$, saj graf H ni 3-obarvljiv (če točko 0 obarvamo z barvo a, moramo točki 2 in 5 obarvati z barvama b in c, točko 4 prav tako z barvo c, točko 6 z barvo a in točko 3 z barvo b, točke 1 pa ne moremo obarvati z nobeno od barv a, b ali c). Zato velja

$$3 < \chi^\star(H) \leq \chi^\star(G_7^2) = \tfrac{7}{2}.$$

Če je $\chi^\star(H) = \frac{p}{q}$, mora biti $q \geq 2$. Po posledici 1.12 velja $p \leq 7$, zato je lahko le $p = 7$ in $q = 2$, saj bi sicer veljalo $\frac{p}{q} \leq 3$. To pa ni mogoče. Torej velja $\chi^\star(H) = \frac{7}{2}$ in zato graf G_7^2 ni zvezdno kritičen po povezavah.

So pa grafi G_k^d zvezdno nasičeni v povezavah. S H označimo graf G_k^d, kateremu dodamo eno povezavo. Naj bo $\chi^\star(H) = \frac{k}{d}$. Če je $c : V(H) \to V(G_k^d)$ homomorfizem, je po posledici 1.12 preslikava c surjektivna, ker pa imata grafa H in G_k^d enako število točk, je c tudi bijektivna preslikava. To pa ni mogoče, ker ima graf H eno povezavo več kot graf G_k^d.

V primeru, ko je $\chi(G) = \omega(G)$, sta enaki tudi zvezdno in običajno kromatično število, kar nam pove naslednji izrek.

Trditev 1.13.[6] *Naj bo G poljuben graf. Če je $\chi(G) = \omega(G)$, je $\chi^\star(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. Recimo, da je $\chi(G) = \omega(G)$. Potem po trditvi 1.5 velja

$$\chi(G) = \omega(G) \geq \chi^\star(G).$$

Ker je $K_{\omega(G)}$ podgraf grafa G, lahko zapišemo neenakost

$$\chi^\star(G) \geq \chi^\star(K_{\omega(G)})$$

in po posledici 1.10 še enakost

$$\chi^\star(K_{\omega(G)}) = \omega(G).$$

Ker je leva stran neenačbe enaka desni, preidejo vse neenakosti v enakosti. □

Opisali smo najosnovnejše lastnosti zvezdnega kromatičnega števila.

Nadaljevanje magistrskega dela je organizirano takole:

V drugem poglavju si bomo ogledali grafe z znanim zvezdnim kromatičnim številom. A. Vince [32] je prvi postavil vprašanje, kaj pogojuje enakost $\chi^\star(G) = \chi(G)$. V drugem poglavju bomo našli nekaj zadostnih pogojev, ki so jih izpeljali avtorji v [2, 31, 34, 35]. X. Zhu [34] je vpeljal geometrijsko interpretacijo kromatičnega in zvezdnega kromatičnega števila. S krožnim in intervalnim barvanjem točk grafa dobimo potreben in zadosten pogoj za veljavnost enakosti $\chi^\star(G) = \chi(G)$, vendar ne tudi karakterizacije grafov s to lastnostjo. S pomočjo tega pristopa k zvezdnemu kromatičnemu in kromatičnemu številu dokažemo, da enakost velja za

- grafe z univerzalno točko,
- grafe z nepovezanim komplementom in za
- enolično obarvljive grafe.

H. L. Abbott in B. Zhou sta v [2] prišla do zanimivega vprašanja: Ali za poljuben $k \geq 3$ obstaja k-kromatičen graf brez trikotnikov z zvezdnim kromatičnim številom enakim k? Problem je bil hitro rešen, saj sta E. Steffen in X. Zhu [31] dokazala, da za poljubni celi števili $k \geq 2$ in $g \geq 3$ obstaja k-kromatičen graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj g in zvezdnim kromatičnim številom k. X. Zhu [35] je nato posplošil rezultat, ko je dokazal, da za vsak k obstaja k-kritičen graf s poljubno dolžino najkrajšega cikla in poljubnim zvezdnim kromatičnim številom.

Ko je A. Vince [32] opazoval lastnosti zvezdnega kromatičnega števila na ravninskih grafih, sta se mu zastavili še dve vprašanji:

- Za katere ravninske grafe, razen za lihe cikle, velja $2 < \chi^\star < 3$?
- Za katero družino ravninskih grafov je $3 < \chi^\star < 4$? Ali ta lastnost velja za vse 4-kromatične grafe, kritične po povezavah?

V tretjem poglavju bomo predstavili nekaj družin ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom med 2 in 3. Pokazali bomo, da imajo liha kolesa, W_{2n+1}, zvezdno kromatično število enako 4. Grafi $\widetilde{W}_{2n+1}$, ki jih dobimo iz lihih koles W_{2n+1} tako, da razpolovimo njihove prečke, pa imajo zvezdno kromatično število enako 3. Če bi vsi ravninski grafi brez trikotnikov in z zvezdnim kromatičnim številom enakim 3 vsebovali kakšen graf $\widetilde{W}_{2n+1}$ in vsi ravninski grafi z zvezdnim kromatičnim številom enakim 4 kakšno liho kolo W_{2n+1}, bi bil problem odločitve, ali za graf z znanim kromatičnim številom velja enakost $\chi^\star(G) = \chi(G)$, rešljiv v polinomskem času [31]. Na koncu tretjega poglavja bomo pokazali, da za nekatera racionalna števila r med 3 in 4 obstaja ravninski graf s $\chi^\star = r$ in si ogledali še družino ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom med 3 in 4.

V četrtem poglavju dokažemo, da lahko z odstranitvijo točke grafa zvezdno kromatično število grafa zmanjšamo za $2 - \varepsilon$, z odstranitvijo povezave grafa pa za največ 1. X. Zhu [37] je postavil domnevi, da poljuben graf vsebuje največ eno točko u, da velja $\chi^\star(G-u) < \chi^\star(G) - 1$, in vsaj eno točko v, da velja $\chi^\star(G-v) \geq \chi^\star(G) - 1$. V razdelku 4.1 si bomo ogledali Hajósovo in Dirac-Hajósovo konstrukcijo ter njune lastnosti. H. L. Abbott in B. Zhou [2] sta s pomočjo teh konstrukcij dokazala obstoj grafov z zvezdnim kromatičnim številom poljubno blizu spodnji meji $\chi - 1$ in z lastnostmi, ki jih ti konstrukciji ohranjata. Tako med drugimi obstaja poljubno velik 4-kritičen 3-povezan ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom poljubno blizu 3. Ker Hajósovi konstrukciji ohranjata le 2 in 3-povezanost, sta E. Steffen in X. Zhu v [31] pokazala, da enako velja tudi za močno povezane kritične grafe in za grafe z veliko dolžino najkrajšega cikla.

V petem poglavju bomo spoznali deljeno kromatično število, ki je nova posplošitev kromatičnega števila. Definirali bomo tudi merljivo in izbirljivo kromatično število ter dokazali, da so vsa tri kromatična števila ekvivalentna. Tako dobimo različne interpretacije deljenega barvanja. S pomočjo ocene deljenega kromatičnega števila nato še pokažemo, da so lihi cikli $\chi^\star$-ekstremni grafi, to so grafi za katere velja $\chi^\star(G) = \chi_f(G)$.

V šestem poglavju bomo predstavili ocene za zvezdno kromatično število na grafovskih produktih. Za zvezdno kromatično število leksikografskega produkta grafov poznamo lepo zgornjo mejo $\chi^\star(G[H]) \leq \chi^\star(G)\chi(H)$.

Torej je morda smiselno pričakovati, da zvezdno kromatično število leksikografskega produkta grafov G in H ni odvisno od zvezdnega kromatičnega števila grafa H. To potrjuje rezultat iz [34]: za n-kromatične grafe H velja enakost $\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G[K_n])$.

S pomočjo tega rezultata pokažemo, da za lihe cikle C_{2n+1} velja enakost:

$$\chi^\star(C_{2n+1}[H]) = \chi^\star(C_{2n+1})\chi(H) = 2\chi(H) + \frac{\chi(H)}{n}.$$

V razdelku 6.2 najprej dokažemo, da je deljeno kromatično število leksikografskega produkta grafov enako produktu deljenih kromatičnih števil grafov. Od tod dobimo potreben in zadosten pogoj za veljavnost enakosti $\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)\chi(H)$. Ugotovimo, da enakost velja natanko tedaj, ko je graf G $\chi^\star$-ekstremen. V razdelku 6.3 zapišemo oceno za zvezdno kromatično število direktnega produkta grafov in dokažemo, da je zvezdno kromatično število kartezičnega produkta grafov enako največjemu izmed zvezdnih kromatičnih števil obeh grafov. Ocena zvezdnega kromatičnega števila krepkega produkta grafov pa je enaka oceni za leksikografski produkt.

V sedmem poglavju posplošimo vsa omenjena barvanja grafov na utežne grafe. Dokažemo, da je tudi posplošitev zvezdnega kromatičnega števila na grafe z racionalnimi utežmi racionalno število. V razdelku 7.3 pokažemo, da je deljeno kromatično število leksikografskega produkta utežnih grafov enako produktu deljenih kromatičnih števil faktorskih utežnih grafov. Definiramo popolne in zvezdno popolne ter super popolne in zvezdno super popolne grafe. Pokažemo, da so lihi cikli zvezdno super popolni grafi in da je leksikografski produkt zvezdno super popolnega in super popolnega grafa prav tako zvezdno super popoln graf. S tem dobimo orodje, s katerim lahko konstruiramo nove zvezdno super popolne grafe.

V zadnjem poglavju omenimo še nekaj znanih rezultatov za zvezdno kromatično število. Definiramo tudi zvezdni kromatični indeks in zanj podamo nekaj ocen.

Poglavje 2

Grafi z znanim zvezdnim kromatičnim številom

To poglavje je razdeljeno na dva razdelka. V prvem bomo predstavili nekaj zadostnih pogojev za veljavnost enakosti $\chi^\star(G) = \chi(G)$. Pokazali bomo, da enakost velja za grafe z univerzalno točko, z nepovezanim komplementom in za enolično obarvljive grafe.

V drugem razdelku pa bomo pokazali, da za poljubno racionalno število $k/d \geq 2$ in poljubno celo število g obstaja graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj g in zvezdnim kromatičnim številom enakim k/d.

2.1 Kdaj je $\chi^\star(G) = \chi(G)$?

X. Zhu se je v [34] prvič lotil vprašanja, kaj pogojuje enakost $\chi^\star(G) = \chi(G)$ in v ta namen pokazal, da je zvezdno kromatično število enako krožnemu kromatičnemu številu, kromatično število pa intervalnemu kromatičnemu številu.

Izrek 2.1.[34] *Za poljuben graf G velja $\chi^\star(G) = \chi^c(G)$.*

Dokaz. Recimo, da $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k$ predstavlja (k,d)-barvanje grafa G. Položimo k točk $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ enakomerno na krožnico C dolžine 1. Za vsako točko $x \in V(G)$ označimo s $c'(x)$ interval na C dolžine $\frac{d}{k}$, usredinjen v točki $p_{c(x)}$. Če je $uv \in E(G)$, velja $|c(u) - c(v)|_k \geq d$. Zato sta tudi točki $p_{c(u)}$ in $p_{c(v)}$ na C narazen vsaj za $\frac{d}{k}$ in je $c'(u) \cap c'(v) = \emptyset$. Torej c' predstavlja $\frac{k}{d}$-krožno barvanje G, zato velja $\chi^c(G) \leq \chi^\star(G)$.

Za dokaz neenakosti $\chi^c(G) \geq \chi^\star(G)$ najprej pokažimo naslednjo implikacijo: Če je G r-krožno obarvljiv graf, $r = \frac{k}{d}$ racionalno število, potem obstaja (k,d)-barvanje grafa G. Označimo s $c : V(G) \to C^{(r)}$ r-krožno barvanje grafa G. Izberimo poljubno točko na C in jo označimo z 0. Točko x na C imenujemo racionalna točka, če je razdalja po krožnici od 0 do x v smeri urinega kazalca racionalno število. Najprej opazimo, da lahko predpostavimo, da je vsak interval $c(x)$ usredinjen v racionalni točki. Če $c(x)$ ni usredinjen v racionalni točki, ga namreč lahko premaknemo v interval, usredinjen v racionalni točki, ne da bi pri tem ustvarili novo presečišče med intervali. Če nobeno od krajišč intervala $c(x)$ ni krajišče kakšnega drugega intervala, prestavimo središče intervala v racionalno točko, ki leži med najbližjim središčem kakega intervala in središčem intervala $c(x)$ (saj med dvema realnima številoma vedno obstaja racionalno število). Če je vsaj eno od krajišč intervala $c(x)$ krajišče drugega intervala, prestavimo kar unijo intervalov, ki imajo skupna krajišča. Ker so razdalje med središči intervalov te unije racionalne, so po premiku središča intervala $c(x)$ v racionalno točko tudi vsa ostala središča intervalov unije racionalne točke.

Naj bo $r(x)$ razdalja med 0 in središčem $c(x)$, ki je po predpostavki racionalno število. Bodi še $p = mk$ skupni imenovalec števila $\frac{1}{k}$ in vseh racionalnih števil $r(x); x \in V(G)$. Potem preslikava $c' : V(G) \to \mathbb{Z}_p$, definirana s $c'(x) = p \cdot r(x)$, predstavlja (p, md)-barvanje grafa G, saj lahko napravimo naslednji sklep:

$$uv \in E(G) \Rightarrow |r(u) - r(v)|_1 \geq \frac{1}{r} = \frac{d}{k} \Rightarrow$$

$$|c'(u) - c'(v)|_p \geq p \cdot \frac{d}{k} = mk\frac{d}{k} = md.$$

Torej lahko po posledici 1.2 iz barvanja c' izpeljemo (k, d)-barvanje grafa G in zato velja $\chi^\star(G) \leq \frac{k}{d}$.

Privzemimo, da je $\chi^c(G) = r$ in $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ takšno zaporedje racionalnih števil, da velja $r_i \geq r$ za vsak i in $\lim_{i\to\infty} r_i = r$. Graf G je očitno r_i-krožno obarvljiv, saj pri r-krožnem barvanju grafa G vsak interval $c(x)$ le skrčimo v interval dolžine $\frac{1}{r_i}$ ter tako dobimo željeno barvanje. Zato velja $r_i \geq \chi^\star(G)$, kar pomeni, da je $r \geq \chi^\star(G)$. S tem je izrek dokazan. □

Izrek 2.2.[34] *Za poljuben graf G velja $\chi(G) = \chi^I(G)$.*

Dokaz. Če je $\chi^I(G) = r$, je graf G r-intervalno obarvljiv, torej obstaja preslikava $c : V(G) \to I^{(r)}$, za katero pri predpostavki $uv \in E(G)$ velja $c(u) \cap c(v) = \emptyset$. Tako lahko graf G obarvamo z $\lfloor r \rfloor$ barvami, saj lahko na I postavimo največ toliko neodvisnih intervalov. To pomeni, da velja $\chi(G) \leq r$.

Po drugi strani je preslikava $c : V(G) \to I^{(r)}$, definirana s predpisom

$$c(u) = \left(\frac{b(u) - 1}{\chi(G)}, \frac{b(u)}{\chi(G)}\right),$$

kjer $b : V(G) \to \mathbb{Z}_{\chi(G)}$ predstavlja $\chi(G)$-barvanje grafa G, tudi $\chi(G)$-intervalno barvanje grafa G. Tako velja tudi $\chi(G) \geq r$. □

Tak pristop k zvezdnemu in običajnemu kromatičnemu številu nam da jasnejšo sliko o povezavi teh dveh števil.

Iz zgornjih izrekov sledi, da enakost $\chi^\star(G) = \chi(G)$ velja natanko tedaj, ko za poljubno realno število r, za katero je graf G r-krožno obarvljiv, obstaja r-krožno barvanje c s takšno točko $x \in C$, ki ni pokrita z nobenim intervalom $c(x)$, $x \in G$. Z obstojem take točke namreč r-krožno barvanje definira r-intervalno barvanje in obratno. Krožnico C "prerežemo" v tej točki, dobimo interval I, krajišči intervala pa "zlepimo" v točko x in dobimo željeno krožnico C.

Uporabimo sedaj ta opis pri zapisu zadostnega pogoja za enakost $\chi^\star(G) = \chi(G)$.

Trditev 2.3.[34] *Če ima graf G univerzalno točko, je $\chi^\star(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. S c označimo r-krožno barvanje grafa G za realno število r. Če je v univerzalna točka grafa G, je interval $c(v)$ disjunkten z vsakim intervalom $c(u)$ za vse $u \in V(G)$. Krajišči intervala $c(v)$ nista pokriti z nobenim intervalom $c(u)$, zato je po gornjem premisleku $\chi^\star(G) = \chi(G)$. □

V dokazu trditve 2.3 opazimo, da lahko pogoj izreka nekoliko ublažimo. Zadošča, da je točka v sosednja z vsako točko grafa G, razen z eno. Pravzaprav celo več:

Posledica 2.4. *Naj za graf G velja $\chi(G) = k$ in naj ima G točko, katere sosednje točke inducirajo podgraf s kromatičnim številom enakim $k-1$. Potem je $\chi^\star(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. Naj bo H graf, induciran s točko v in množico njenih sosedov, ki inducirajo podgraf s kromatičnim številom $k-1$. Ker ima graf H univerzalno točko v, zanj velja $\chi(H) = \chi^\star(H)$ in lahko zapišemo naslednje neenakosti:

$$k = \chi(H) = \chi^\star(H) \leq \chi^\star(G) \leq \chi(G) = k.$$

Zato velja $\chi^\star(G) = \chi(G)$. □

Trditev 1.13 je tako poseben primer posledice 2.4, ko je $\chi(G) = \omega(G) = k$. Prav tako iz posledice 2.4 dobimo zvezdno kromatično število dvodelnih grafov $\chi^\star(G) = \chi(G) = 2$. Trditev 2.3 bomo kasneje uporabili pri iskanju odgovorov na ostala Vince-ova vprašanja.

Leta 1994 sta E. Steffen in X. Zhu v [31] podala še šibkejši zadostni pogoj od že omenjenih:

Izrek 2.5.[31] *Naj bo G k-kromatičen graf. Če v $V(G)$ obstaja takšna netrivialna podmnožica A, da za vsako k-barvanje grafa G in za poljuben barvni razred S tega barvanja velja $S \subset A$ ali $S \cap A = \emptyset$, potem je $\chi^\star(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. V dokazu bomo znova uporabili definicijo krožnega barvanja. Privzemimo, da trditev ne velja. Naj bo G k-kromatičen graf z $\chi^\star(G) = r < k$. Nadalje naj bo A podmnožica $V(G)$, ki zadošča pogojem izreka. Protislovje bomo izpeljali s konstrukcijo k-barvanja grafa G, ki ima takšen barvni razred S, da je $S \cap A \neq \emptyset$ in $S \cap (V(G) \setminus A) \neq \emptyset$.

Naj bo $c : V(G) \to C^{(r)}$ r-kromatično barvanje grafa G. Oglejmo si odprti množici $\bigcup_{x \in A} c(x)$ in $\bigcup_{y \in V(G) \setminus A} c(y)$ v C.

Če sta množici disjunktni, ne moreta pokrivati C in zato obstaja točka $q_0 \in C$, za katero velja $q_0 \notin c(x)$ za vsak $x \in V(G)$. Na C izberimo nadaljnih $k-1$ točk $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ tako, da je medsebojna razdalja med q_i in q_{i-1} v smeri urinega kazalca enaka $\frac{1}{r}$. Ker je $r < k$, je razdalja med q_0 in q_{k-1} v smeri urinega kazalca manj kot $\frac{1}{r}$. Sedaj definirajmo $(k-1)$-barvanje b grafa G tako: $b(x) = i$ natanko tedaj, ko je $q_i \in c(x)$ ali je $c(x)$ odprt interval na C med točkama q_{i-1} in q_i za $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Najprej pokažimo, da je vsaka točka x grafa G obarvana. Točke $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ razdelijo krožnico C na k intervalov. Vsi intervali $(q_0, q_1), (q_1, q_2), \ldots, (q_{k-2}, q_{k-1})$ so natanko dolžine $\frac{1}{r}$, interval (q_{k-1}, q_0) pa je dolžine strogo manj kot $\frac{1}{r}$. Ker je $c(x)$ odprt interval dolžine $\frac{1}{r}$, ki ne vsebuje točke q_0, je $q_i \in c(x)$ eden od odprtih intervalov $(q_0, q_1), (q_1, q_2), \ldots, (q_{k-2}, q_{k-1})$. Torej je točka x obarvana. Če je $b(x) = b(y) = i$, je $(q_i - \varepsilon, q_i) \in c(x)$ in $(q_i - \varepsilon, q_i) \in c(y)$ za dovolj majhen $\varepsilon > 0$. Zato je $c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$ in po definiciji barvanja c točki x in y nista sosednji. Tako smo dokazali, da je b $(k-1)$-barvanje grafa G, kar je v nasprotju s predpostavko $\chi(G) = k$.

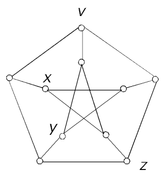
Množici $(\bigcup_{x \in A} c(x))$ in $(\bigcup_{y \in V(G) \setminus A} c(y))$ sta disjunktni. Zato obstaja točka q_0 na C, ki je iz množice $c(x) \cap c(y)$ za točki $x \in A$ in $y \in V(G) \setminus A$. Izberimo sedaj nadaljnih $k-1$ točk $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ na C tako, da je medsebojna razdalja točk q_i in q_{i-1} v smeri urinega kazalca enaka $\frac{1}{r}$. Nato definirajmo k-barvanje b grafa G tako: $b(x) = i$ natanko tedaj, ko je $q_i \in c(x)$ ali pa je $c(x)$ odprt interval na C med q_{i-1} in q_i za $i = 1, 2, \ldots, k-2$; $b(x) = k-1$ natanko tedaj, ko je $q_{k-1} \in c(x)$ in $q_0 \notin c(x)$ ali pa je $c(x)$ odprt interval med q_{k-2} in q_{k-1}; in $b(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $q_0 \in c(x)$. Zaradi istega razloga kot prej, je vsaka točka grafa G obarvana in iz $b(x) = b(y) = i$ sledi $c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$. Po definiciji barvanja c točki x in y nista sosednji. Tako je b k-barvanje grafa, za katero barvni razred $b^{-1}(0)$ vsebuje točko $x \in A$ in točko $y \in V(G) \setminus A$. To pa je protislovje s predpostavko, zato je s tem izrek dokazan. □

Recimo, da je G k-kromatičen graf. Če G vsebuje k-kromatičen podgraf H, za katerega je $\chi^\star(H) = \chi(H) = k$, potem velja

$$k = \chi(G) \geq \chi^\star(G) \geq \chi^\star(H) = k.$$

Tako je $\chi^\star(G) = \chi(G) = k$. Torej izrek 2.5 velja za k-kromatične grafe, ki vsebujejo k-kromatičen podgraf, ki zadošča danim pogojem. Kakorkoli, tudi ta posplošitev ne da potrebnega pogoja za enakost $\chi^\star = \chi$. Protiprimer je kar Petersenov graf P (slika 2.1).

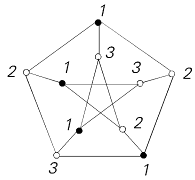
Lema 2.6. *Naj bo P Petersenov graf. V množici $V(P)$ ne obstaja takšna netrivialna podmnožica A, da za vsako 3-barvanje grafa G in za poljuben barvni razred S tega barvanja velja $S \subset A$ ali $S \cap A = \emptyset$.*



Slika 2.1: Petersenov graf

Dokaz. Če za poljuben par nepovezanih točk grafa P obstaja 3-barvanje grafa, ki točki obarva z isto barvo, sta poljubni nepovezani točki v istem barvnem razredu kakega 3-barvanja P. Zato je $A = \emptyset$ ali $A = V(P)$, saj je komplement grafa P povezan graf.

Ker je P točkovno tranzitiven graf, je dovolj pokazati, da za izbrano točko v in za poljubno točko u, ki ni sosednja v, obstaja 3-barvanje grafa P, ki točki u in v obarva z isto barvo.

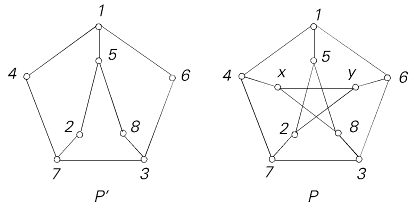


Slika 2.2: 3-barvanje Petersenovega grafa

Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da leži točka v na zunanjem ciklu grafa P (slika 2.1) in da poljubno 3-barvanje grafa P obarva točko v z barvo 1. Točka v ni sosednja s šestimi točkami, ker pa je P simetričen graf, je dovolj pokazati trditev za točke x, y in z na sliki 2.1. Na sliki 2.2 vidimo primer 3-barvanja grafa P, ki hkrati obarva z barvo 1 točke x, y, z in v, kar dokazuje trditev. □

Torej graf P ne zadošča pogoju izreka 2.5. Pokažimo, da je $\chi^\star(P) = \chi(P) = 3$. Lahko je preveriti, da je Petersenov graf 3-kromatičen. Ker je $G_5^2 = C_5$ njegov podgraf, velja $\chi^\star(P) \geq \frac{5}{2}$. Prav tako je C_6 podgraf Petersenovega grafa, zato P ni homomorfen C_5, torej velja

$$\frac{5}{2} < \chi^\star(P) \leq 3.$$



Slika 2.3: $(8,3)$-barvanje grafa P' in Petersenovega grafa

Zaradi posledice 1.12 lahko $\chi^\star(P)$ zavzame le še vrednosti $\frac{8}{3}$ ali 3.

Naj bo P' podgraf Petersenovega grafa na 8 točkah (slika 2.3). Graf P' je podgraf grafa G_8^3, zato je $(8,3)$-obarvljiv (slika 2.3). Vidimo tudi, da je pri izbrani začetni točki in smeri barvanja, $(8,3)$-barvanje grafa P' enolično določeno. Če sedaj uporabimo to $(8,3)$-barvanje na Petersenovem grafu (slika 2.3), vidimo, da barv x in y ne moremo določiti. Torej Petersenov graf ni $(8,3)$-obarvljiv, zato je

$$\chi^\star(P) = 3 = \chi(P).$$

Naslednji rezultat, ki sta ga najprej dokazala H. L. Abbott in B. Zhou v [2], dobimo iz izreka 2.5 po enostavnem premisleku.

Posledica 2.7. *Če je komplement grafa G nepovezan, je $\chi^\star(G) = \chi(G)$.*

Dokaz. Ker je komplement grafa G nepovezan, obstajata takšna grafa X in Y, da dobimo G iz disjunktne unije grafov X in Y tako, da povežemo vsako točko grafa X z vsako točko grafa Y. Očitno za vsako barvanje grafa G noben barvni razred ne more vsebovati točk iz $V(X)$ in $V(Y)$ hkrati. Zato množici $V(X)$ in $V(Y)$ zadoščata pogojem izreka 2.5. □

Posledica 2.8. *Če k-kromatičen graf G vsebuje enolično k-obarvljiv podgraf, je $\chi^\star(G) = \chi(G) = k$.*

Dokaz. Če je $H \subseteq G$ enolično k-obarvljiv podgraf grafa G, že vsak barvni razred k-barvanja grafa H zadošča pogojem izreka 2.5. Ker velja

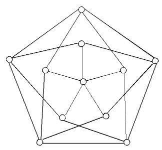
$$k = \chi(H) = \chi^\star(H) \leq \chi^\star(G) \leq \chi(G) = k,$$

je $\chi^\star(G) = \chi(G) = k$. □

S posledico 2.7 ne moremo določiti družine grafov brez trikotnikov, za katere je $\chi^\star(G) = \chi(G) \geq 3$. Zato se pojavi naslednje vprašanje ([2]):

> Ali za poljuben $k \geq 3$ obstaja k-kromatičen graf G brez trikotnikov, za katerega velja $\chi^\star(G) = \chi(G)$?

Odgovor na to vprašanje je za $k = 3$ in $k = 4$ našel že A. Vince [32]. Petersenov graf (slika 2.1) je primer za $k = 3$, torej 3-kromatičen graf brez trikotnikov, medtem ko je Grötzsch-ev graf (slika 2.4) najmanjši 4-kromatičen graf brez trikotnikov, za katerega velja $\chi(G) = \chi^\star(G) = 4$ [7].



Slika 2.4: Grötzsch-ev graf

Splošen odgovor na to vprašanje bomo podali v naslednjem podpoglavju, kjer bomo problem še razširili.

2.2 Poljubno veliki grafi s podanim $\chi^\star(G)$

Kot pri vsaki lastnosti grafov nas tudi pri zvezdnem kromatičnem številu zanima, ali za vsako racionalno število $r \geq 2$ obstaja kakšen graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim r.

Izrek 2.9.[31] *Za poljubni celi števili $k \geq 2$ in $g \geq 3$ obstaja (enolično) k-obarvljiv graf G z dolžino najkrajšega cikla vsaj g in zvezdnim kromatičnim številom k.*

Dokaz. B. Bollobás in N. Sauer sta v [5] pokazala, da za poljubni celi števili $k \geq 2$ in $g \geq 3$ obstaja enolično k-obarvljiv graf G z dolžino najkrajšega cikla vsaj g. Iz posledice 2.8 sledi $\chi^\star(G) = \chi(G) = k$. □

Še istega leta je X. Zhu v [35] posplošil rezultat B. Bollobása in N. Sauerja iz [5]. Dokaz tega rezultata temelji na ideji dokaza iz [5].

Izrek 2.10.[35] *Naj bo H jedro. Potem za poljubno naravno število g obstaja graf G z dolžino najkrajšega cikla vsaj g, ki je enolično H-obarvljiv.*

Dokaz izreka je kombinatorične narave, zato najprej dokažimo naslednjo lemo:

Lema 2.11. *Če je $0 \leq x < b$ in $b + x < a$, velja*

$$\binom{a-x}{b-x}\binom{a}{b}^{-1} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^x, \tag{1}$$

$$\binom{a-x}{b}\binom{a}{b}^{-1} \leq \left(\frac{a-b}{a}\right)^x < e^{-bx/a}. \tag{2}$$

Za poljubna a in b, $0 < b < a$ velja:

$$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b. \tag{3}$$

Dokaz (1). S pomočjo osnovne definicije binomskega simbola lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}\binom{a-x}{b-x}\binom{a}{b}^{-1} &= \frac{(a-x)!}{(b-x)!(a-b)!}\cdot\frac{(a-b)!b!}{a!} = \frac{(a-x)!}{(b-x)!}\cdot\frac{b!}{a!}\\ &= \frac{(b-x)+1}{(a-x)+1}\cdot\frac{(b-x)+2}{(a-x)+2}\cdots\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Oglejmo si kvocient

$$\frac{b-(x-k)}{a-(x-k)},$$

kjer je $k \leq x$. Ker je $b \leq a$, velja $ab - a(x-k) \leq ab - b(x-k)$. Od tod lahko zapišemo $a(b-(x-k)) \leq b(a-(x-k))$ in ocenimo željeni kvocient:

$$\frac{b-(x-k)}{a-(x-k)} \leq \frac{b}{a}.$$

Ker ocena velja za poljuben $k \leq x$, jo uporabimo pri dokazu formule (1):

$$\binom{a-x}{b-x}\binom{a}{b}^{-1} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{x}.$$

Dokaz (2). Ponovno uporabimo definicijo binomskega simbola:

$$\binom{a-x}{b}\binom{a}{b}^{-1} = \frac{(a-x)!}{b!(a-b-x)!}\cdot\frac{b!(a-b)!}{a!} = \frac{(a-x)!}{(a-b-x)!}\cdot\frac{(a-b)!}{a!}$$

in podobno kot v primeru (1) napravimo sklep izrazu

$$\left(\frac{a-b}{a}\right)^{x} = \left(1-\frac{b}{a}\right)^{x} = \left(\left(1-\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{bx}{a}} \leq e^{-\frac{bx}{a}}.$$

Dokaz (3). Pri dokazu te neenakosti uporabimo Stirlingov obrazec:

$$b! \doteq \left(\frac{b}{e}\right)^{b}\sqrt{2\pi b}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\cdots\right) \geq \left(\frac{b}{e}\right)^{b}.$$

Ker je $((a-b)+1)((a-b)+2)\cdots a \leq a^b$, lahko zapišemo oceno:

$$\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!} \leq \frac{a^b}{(\frac{b}{e})^b} = \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}.$$

S tem je neenakost (3) dokazana. □

Dokaz izreka 2.10. Naj bo H graf z množico točk $\{1,2,\ldots,k\}$ in $|E(H)| = q$. Z $V_1, V_2, \ldots, V_k$ označimo k disjunktnih n-množic (množic z n točkami). Naj bo F graf z množico točk $V(F) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ in $xy \in E(F)$ natanko tedaj, ko je $x \in V_i, y \in V_j$ in $ij \in E(H)$. Graf F ima tako qn^2 povezav. Naj bo $\mathcal{G}$ množica vseh podgrafov G grafa F z $m = \lfloor qn^{1+\varepsilon} \rfloor$ povezavami, kjer je $0 < \varepsilon < 1/4g$. Tako je $|\mathcal{G}| = \binom{qn^2}{m}$.

V nadaljevanju predpostavimo, da je n poljubno velik. Množico $\mathcal{G}$ si predstavljajmo kot verjetnostni prostor, kjer ima vsak element verjetnost enako $1/|\mathcal{G}|$.

Izračunajmo sedaj pričakovano število ciklov C_l dolžine l v poljubnem grafu $G \in \mathcal{G}$. Cikel C_l z množico točk $V(C_l) \subset V$ lahko izberemo na $\binom{kn}{l}\frac{l!}{2l}$ načinov, medtem ko je lahko cikel C_l vsebovan v 0 ali $\binom{qn^2-l}{m-l}$ grafov iz $\mathcal{G}$. Ker je število vseh grafov $G \in \mathcal{G}$ enako $\binom{qn^2}{m}$, je pričakovano število ciklov v poljubnem grafu $G \in \mathcal{G}$ enako

$$N_l = \binom{kn}{l}\frac{l!}{2l}\binom{qn^2-l}{m-l}\binom{qn^2}{m}^{-1}.$$

Zaradi leme 2.11 (1) velja

$$N_l < \tfrac{(kn)^l}{2l} m^l (qn^2)^{-l} < (kn)^l n^{-l(1-\varepsilon)} = k^l n^{l\varepsilon}.$$

Ocenimo sedaj vsoto $\sum\limits_{l=3}^{g-1} N_l$:

$$\begin{aligned}\sum_{l=3}^{g-1} N_l &< \sum_{l=1}^{g-1} k^l n^{l\varepsilon} = \frac{(kn^\varepsilon)^g - 1}{kn^\varepsilon - 1} < \frac{k^g}{kn^\varepsilon - 1} n^{g\varepsilon} < \frac{k^g}{k(n^\varepsilon - 1)} n^{g\varepsilon} \\ &< \frac{k^g}{(n^{\varepsilon/2}-1)(n^{\varepsilon/2}+1)} n^{g\varepsilon} < \frac{k^g}{n^{\varepsilon/2}-1} n^{-\frac{\varepsilon}{2}} n^{g\varepsilon}.\end{aligned}$$

Če je n dovolj velik, je $k^g/(n^{\varepsilon/2}-1) < 1$ in zato

$$\sum_{l=3}^{g-1} N_l < n^{-\varepsilon/2} n^{g\varepsilon}.$$

Ker je verjetnost, da je v grafu G več kot $n^{g\varepsilon}$ ciklov dolžine manj kot g, manjša od $n^{-\varepsilon/2}$, je verjetnost nasprotnega dogodka vsaj $(1 - n^{-\varepsilon/2})$. Od tod sledi, da je $|\mathcal{G}_1| \geq (1 - n^{-\varepsilon/2})|\mathcal{G}|$, če je $\mathcal{G}_1$ množica grafov $G \in \mathcal{G}$ z največ $n^{g\varepsilon}$ ciklov, dolžine manj kot g. Če vsakemu takemu grafu odstranimo $n^{g\varepsilon}$ povezav, dobimo graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj g.

V dokazu tega izreka bomo obravnavali grafe G, v katerih lahko odstranimo množico E_0 z $n^{g\varepsilon}$ neodvisnimi povezavami, da dobimo graf z dolžino najkrajšega cikla vsaj g.

Ocenimo sedaj še število grafov $G \in \mathcal{G}$, ki vsebujejo cikla dolžine manj kot g in imata skupno točko. Fiksirajmo števili $l_1, l_2 < g$. Graf X imenujemo (l_1, l_2)-**dvojno krožen**, če vsebuje cikel C_{l_1} dolžine l_1 in pot dolžine l_2 (t.j. z l_2 povezavami), ki povezuje dve, ne nujno različni točki cikla C_{l_1}. Takšen cikel C_{l_1} skupaj s potjo dolžine l_2 imenujemo (l_1, l_2)-**dvojni cikel**. Torej ima (l_1, l_2)-dvojni cikel natanko $l_1 + l_2$ povezav in $l_1 + l_2 - 1$ točk. (l_1, l_2)-dvojni cikel X z množico točk $V(X) \subset V$ lahko izberemo na manj kot $l_1(kn)^{l_1}(kn)^{l_2-1}$ načinov, medtem ko je lahko X vsebovan v 0 ali $\binom{qn^2-l_1-l_2}{m-l_1-l_2}$ grafov iz $\mathcal{G}$. Ker je število vseh grafov $G \in \mathcal{G}$ enako $\binom{qn^2}{m}$, lahko za pričakovano število (l_1, l_2)-dvojnih ciklov $N(l_1, l_2)$ v poljubnem grafu $G \in \mathcal{G}$ zapišemo neenakost

$$N(l_1, l_2) \le l_1 (kn)^{l_1} (kn)^{l_2 - 1} \binom{qn^2 - l_1 - l_2}{m - l_1 - l_2} \binom{qn^2}{m}^{-1}.$$

Če znova uporabimo lemo 2.11 (1), dobimo

$$N(l_1, l_2) < l_1 k^{l_1 + l_2} n^{\varepsilon(l_1 + l_2)} n^{-1}.$$

V oceni vsote $\sum N_l$ smo izračunali

$$\sum_{l_2=1}^{g-1} k^{l_2} n^{\varepsilon l_2} < n^{-\varepsilon/2} n^{g\varepsilon},$$

zato velja

$$\sum_{3 \le l_1 < g, 1 \le l_2 < g} N(l_1, l_2) < n^{-\varepsilon/2} n^{g\varepsilon} n^{-1} \sum_{l_1=3}^{g-1} l_1 k^{l_1} n^{\varepsilon l_1} < \frac{g}{n^\varepsilon} n^{2g\varepsilon} n^{-1}.$$

Ker je $2g\varepsilon < 1/2$, lahko za dovolj velik n pričakovano število (l_1, l_2)-dvojnih ciklov v grafu $G \in \mathcal{G}$ navzgor ocenimo:

$$\sum_{3 \le l_1 < g, 1 \le l_2 < g} N(l_1, l_2) < n^{-1/2}.$$

Od tod vidimo, da največ $n^{-1/2}|\mathcal{G}|$ grafov v $\mathcal{G}$ vsebuje (l_1, l_2)-dvojni cikel za $l_1, l_2 < g$. Graf, ki vsebuje dva cikla dolžine manj kot g, ki imata vsaj eno skupno točko, očitno vsebuje tudi (l_1, l_2)-dvojni cikel za $l_1, l_2 < g$. Označimo z $\mathcal{G}_3$ množico grafov iz $\mathcal{G}_1$, ki ne vsebujejo dveh ciklov dolžin manj od g s skupno točko. Potem velja

$$|\mathcal{G}_3| > (1 - n^{-\varepsilon/2} - n^{-1/2})|\mathcal{G}| > (1 - n^{-\varepsilon/3})|\mathcal{G}|.$$

Sedaj bomo pokazali, da ima večina grafov $G \in \mathcal{G}$ lastnost, da je $G \setminus E_0$ enolično H-obarvljiv za poljubno množico E_0 z največ $n^{g\varepsilon}$ neodvisnimi povezavami.

Recimo, da je $G \in \mathcal{G}$ in obstaja množica E_0 z največ $n^{g\varepsilon}$ povezavami, za katero $G \setminus E_0$ ni enolično H-obarvljiv. Naj bo $h : G \setminus E_0 \to H$ homomorfizem, ki ni kompozitum $\sigma \circ c$ homomorfizma $c : G \setminus E_0 \to H$, ki preslika V_i v i, z avtomorfizmom σ grafa H.

Definirajmo preslikavo $\phi : V(H) \to V(H)$ tako, da je $\phi(i) = j$, kjer je j izbran med števili, za katera velja neenakost

$$|V_i \cap h^{-1}(j)| \ge \frac{n}{2k}.$$

V nadaljevanju obravnavamo dva primera:

Primer 1. Preslikava ϕ ni avtomorfizem.

Ker je H jedro, vemo, da je vsak homomorfizem grafa H tudi avtomorfizem. Tako ϕ ne more biti homomorfizem. Zato obstaja povezava $ij \in E(H)$, za katero $(\phi(i), \phi(j))$ ni povezava v H. Naj bo $A = V_i \cap h^{-1}(\phi(i))$, $B = V_j \cap h^{-1}(\phi(j))$ in $a = |A|$, $b = |B|$. Zaradi definicije ϕ velja $a, b \geq \frac{n}{2k}$. Z W_i označimo podmnožico A moči $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ in z W_j podmnožico B iste moči.

Ker je h homomorfizem grafa $G \setminus E_0$ na H (torej množici $h^{-1}(\phi(i))$ in $h^{-1}(\phi(j))$ nista povezani), je v G med W_i in W_j največ $|E_0| \leq n^{g\varepsilon}$ povezav. Za poljubno naravno število $s \leq n^{g\varepsilon}$ označimo z $M(s)$ pričakovano število parov $W_i \subset V_i$, $W_j \subset V_j$ v grafu $G \in \mathcal{G}$, da je $ij \in E(H)$ in $|W_i| = |W_j| = \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$, ter obstaja natanko s povezav, ki povezujejo W_i in W_j. Tako je

$$M(s) = q\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor}^2 \binom{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{s} \binom{qn^2 - \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{m-s} \binom{qn^2}{m}^{-1}.$$

Ker je n poljubno velik, velja neenakost

$$\binom{qn^2 - \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{m-s} \leq \binom{qn^2 - \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{m}.$$

Ko uporabimo še neenakost (2) iz leme 2.11, dobimo oceno

$$M(s) < q\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor}^2 \binom{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{s} e^{-m\frac{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{qn^2}}.$$

Ker za dovolj velik n velja

$$m\frac{\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor^2}{qn^2} > \frac{n^{1+\varepsilon}}{8k^2} > n^{1+\varepsilon/2},$$

lahko z neenačbo (3) iz leme 2.11 ocenimo

$$M(s) < q(2ek)^{\frac{n}{k}} \left(\frac{n}{k}\right)^{2s} e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{4k^2}} < n^{2s} e^{-\frac{1}{4k^2}n^{1+\varepsilon}}.$$

Od tod za dovolj velik n velja

$$\begin{aligned} \sum_{s<n^{g\varepsilon}} M(s) &< n^{g\varepsilon} n^{2n^{g\varepsilon}} e^{-n^{1+\varepsilon/2}} < n^{3n^{g\varepsilon}} e^{-n^{1+\varepsilon/2}} \\ &< e^{(-n^{1+\varepsilon/2} + 3n^{g\varepsilon}\log n)} < e^{-n}. \end{aligned}$$

Torej za največ $e^{-n}|\mathcal{G}|$ grafov $G \in \mathcal{G}$ obstaja takšen par podmnožic množice točk grafa G. Grafi, za katere takšen par množic ne obstaja, ne morejo biti H-obarvljivi.

Naj bo $\mathcal{G}_2$ množica grafov $G \in \mathcal{G}$, za katere $G \setminus E_0$ ni H-obarvljiv za poljubno množico E_0 z največ $n^{g\varepsilon}$ povezavami. Potem velja

$$|\mathcal{G}_2| \geq (1 - e^{-n})|\mathcal{G}|.$$

Torej lahko zapišemo sklep:

Vsaj $(1-e^{-n})|\mathcal{G}|$ *grafov* $G \in \mathcal{G}$ *ima lastnost, da za poljubno množico* E_0 *z največ* $n^{g\varepsilon}$ *povezavami graf* $G \setminus E_0$ *ne more biti* H*-obarvan tako, da preslikava* ϕ *ni avtomorfizem.*

Primer 2. Preslikava ϕ je avtomorfizem.

Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da je ϕ identična preslikava. To pomeni, da lahko privzamemo tudi veljavnost neenakosti $|V_i \cap h^{-1}(i)| \geq \frac{n}{2k}$. Nadalje lahko predpostavimo, da je $|V_i \cap h^{-1}(j)| < \frac{n}{2k}$ za vsak $j \neq i$, kajti sicer bi obstajala takšna i in j, da $j \neq \phi(i) = i$ in $|V_i \cap h^{-1}(j)| \geq \frac{n}{2k}$. Takrat bi lahko definirali preslikavo ϕ', ki se z ϕ ujema na vsaki točki, razen na $\phi'(i) = j$. Potem ϕ' ni avtomorfizem H in če ϕ nadomestimo s ϕ', dobimo ravno primer 1.

Po naši predpostavki h ni kompozitum barvanja c z avtomorfizmom H. Torej $\phi \circ c \neq h$.

Označimo z I množico

$$I = \{i; |V_i \setminus h^{-1}(i)| \leq 2|h^{-1}(i) \setminus V_i|\}.$$

Izberimo točko $i_0 \in I$ tako, da je

$$r = |h^{-1}(i_0) \setminus V_{i_0}| = \max\{|h^{-1}(i) \setminus V_i|; i \in I\}.$$

Naj bo $t = |h^{-1}(i_0) \cap V_{i_0}|$.

Če bi bil $r = 0$, bi za poljuben $i \in I$ veljalo $V_i = h^{-1}(i)$. Ker pa je

$$\bigcup_{j \notin I} h^{-1}(j) \setminus V_j = \bigcup_{j \notin I} V_j \setminus h^{-1}(j) < 2 \bigcup_{j \notin I} h^{-1}(j) \setminus V_j,$$

bi bile vse točke $V(H)$ v množici I, kar bi pomenilo, da je $h = \phi \circ c (= c)$. Zato je $r \neq 0$. Ker je $i_0 \in I$, velja

$$|V_{i_0} \setminus h^{-1}(i_0)| \leq 2r.$$

Torej je $t \geq n - 2r$ in $r \geq \frac{1}{2}(n-t)$.

Ker je

$$h^{-1}(i_0) \setminus V_{i_0} = \bigcup_{j \neq i_0} h^{-1}(i_0) \cap V_j,$$

obstaja taka točka $j_0 \neq i_0$ iz H, da velja

$$|h^{-1}(i_0) \cap V_{j_0}| \geq \frac{1}{(k-1)} r \geq \frac{1}{2(k-1)}(n-t).$$

Sedaj ločimo dva podprimera:

Primer 2(a). Točki i_0 in j_0 sta sosednji v H.

Iz definicij za i_0 in j_0 vidimo, da obstajata množici $A \subset V_{i_0}, B \subset V_{j_0}, |A| = t = n - r', |B| = b = \frac{1}{2(k-1)}r'$ in $A \cup B \subset h^{-1}(i_0)$ $(r' = 2r)$.

Sedaj uporabimo dejstvo, da je h homomorfizem grafa $G \setminus E_0$ na H. Med A in B obstaja največ s neodvisnih povezav iz G, kjer je $s = \min\{n^{g\varepsilon}, b\}$. Vsaka točka iz B je namreč krajišče največ ene povezave iz E_0, ker je E_0 množica neodvisnih povezav.

Pokazali bomo, da zelo malo grafov iz $\mathcal{G}$ vsebuje podgrafe, inducirane z $A \cup B$. Naj bo $b < \frac{n}{2k}, s < \min\{b, n^{g\varepsilon}\}$. Z $L(b,s)$ označimo pričakovano število takšnih parov $W_i \subset V_i, W_j \subset V_j$, da je $ij \in E(H), |W_i| = n - 2(k-1)b = n - 2(k-1)|W_j|$ in je število povezav med W_i in W_j natanko s. Tedaj velja

$$L(b,s) < 2q\binom{n}{n-2(k-1)b}\binom{n}{b}\binom{(n-2(k-1)b)b}{s}\binom{qn^2 - b(n-2(k-1)b)}{m-s}\binom{qn^2}{m}^{-1}.$$

Ker je $b < \frac{n}{2k}$ in zaradi leme 2.11 (2), lahko zapišemo neenakost

$$\binom{qn^2 - b(n-2(k-1)b)}{m-s}\binom{qn^2}{m}^{-1} < \binom{qn^2 - bn/k}{m}\binom{qn^2}{m}^{-1} < e^{-\frac{bn^\varepsilon}{2k}}.$$

Pri zadnji neenakosti smo upoštevali, da je n poljubno velik. Sedaj upoštevamo lastnost binomskega simbola

$$\binom{n}{n-x} = \binom{n}{x}$$

in za oceno uporabimo še lemo 2.11 (3). Zapišemo

$$\begin{aligned} L(b,s) &< 2qn^{(2k-1)b}n^b(bn)^s e^{-\frac{bn^\varepsilon}{2k}} \\ &< (bn)^s \exp\left(-\frac{bn^\varepsilon}{2k} + 2kb\log n\right) < n^{2s}e^{-\frac{bn^\varepsilon}{3k}}. \end{aligned}$$

Naj $L(b)$ označuje vsoto vseh $L(b,s)$, za katere je $s \leq \min\{b, n^{g\varepsilon}\}$. Če je $b < n^{g\varepsilon}$, je $s \leq b$ in zato

$$L(b) < bn^{2b}e^{-\frac{bn^2}{3k}} < n^{3b}e^{-\frac{bn^2}{3k}} < \exp\left(-\frac{bn^\varepsilon}{3k} + 3b\log n\right) < e^{-\frac{bn^\varepsilon}{4k}} < e^{-n^{\varepsilon/2}}.$$

Če pa je $b \geq n^{g\varepsilon}$, je $s \leq n^{g\varepsilon}$ in zato

$$\begin{aligned} L(b) &< n^{g\varepsilon} n^{2n^{g\varepsilon}} e^{-\frac{bn^{\varepsilon}}{3k}} < n^{3n^{g\varepsilon}} e^{-\frac{bn^{\varepsilon}}{3k}} \\ &< \exp\left(-\frac{n^{(g+1)\varepsilon}}{3k} + 3n^{g\varepsilon}\log n\right) < e^{-\frac{n^{(g+1)\varepsilon}}{4k}} < e^{-n^{g\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Torej velja

$$\sum_{1 \le b \le \frac{n}{2k}} L(b) < \frac{n}{2k} e^{-n^{\varepsilon/2}} < e^{-n^{\varepsilon/3}}.$$

Primer 2(b). Točki i_0 in j_0 nista sosednji v H.

Ker je H jedro, v H obstaja točka v, ki je sosednja j_0 in ni sosednja i_0. Sicer bi bila vsaka točka, ki je sosednja j_0, sosednja tudi i_0 in bi bila preslikava, ki j_0 preslika v i_0, vse ostale točke pa preslika vase, homomorfizem.

Trdimo, da je

$$|V_v \setminus h^{-1}(v)| \le 2kr.$$

Če je $v \in I$, zaradi izbire i_0 velja

$$r \ge |h^{-1}(v) \setminus V_v| \ge \tfrac{1}{2}|V_v \setminus h^{-1}(v)|.$$

Torej je trditev resnična za $v \in I$.

Privzemimo sedaj, da $v \notin I$, to pomeni, da velja

$$|V_v \setminus h^{-1}(v)| > 2|h^{-1}(v) \setminus V_v|.$$

Ker so v $V_i \setminus h^{-1}(i)$ točke iz $h^{-1}(j) \setminus V_j$ za $j \ne i$, je

$$\bigcup_{i=1}^{k} V_i \setminus h^{-1}(i) = \bigcup_{i=1}^{k} h^{-1}(i) \setminus V_i.$$

Ker sta to uniji disjunktnih množic, velja

$$\sum_{i=1}^{k} |V_i \setminus h^{-1}(i)| = \sum_{i=1}^{k} |h^{-1}(i) \setminus V_i|.$$

Od tod je

$$\begin{aligned} kr &\ge \sum_{i \in I} |h^{-1}(i) \setminus V_i| = \sum_{i=1}^{k} |V_i \setminus h^{-1}(i)| - \sum_{i \notin I} |h^{-1}(i) \setminus V_i| \\ &\ge |V_v \setminus h^{-1}(v)| - |h^{-1}(v) \setminus V_v| \ge \frac{1}{2}|V_v \setminus h^{-1}(v)|. \end{aligned}$$

Pri zadnjih dveh neenakostih smo uporabili dejstvo, da za $i \notin I$ velja

$$|V_i \setminus h^{-1}(i)| > 2|h^{-1}(i) \setminus V_i|$$

in predpostavko, da $v \notin I$. Zaradi izbire r je tako $|V_v \setminus h^{-1}(v)| \leq 2kr$. Tako je trditev dokazana tudi za $v \notin I$.

Trditev nam zagotavlja obstoj množic $A \subset V_v$, $B \subset V_{j_0}$, kjer je $vj_0 \in E(H)$ in $|A| = n - kr'$, $|B| = b = \frac{1}{2(k-1)}r'$, ter $A \subset h^{-1}(v)$, $B \subset h^{-1}(i_0)$ $(r' = 2r)$. Ker je h homomorfizem $G \setminus E_0$ na H in $(i_0, v) \notin E(H)$, obstaja največ $\min\{n^{g\varepsilon}, b\}$ neodvisnih povezav med A in B. Sedaj moramo le še oceniti pričakovano število parov $W_i \subset V_i$, $W_j \subset V_j$, da je $ij \in E(H)$, $|W_i| = n - 2k(k-1)b = n - 2k(k-1)|W_j|$, med katerima obstaja največ $\min\{n^{g\varepsilon}, b\}$ povezav. Če to primerjamo s primerom $2(a)$, vidimo, da je spremenjena le konstanta $2(k-1)$ v $2k(k-1)$. Tako z identičnim izračunom pokažemo, da je pričakovano število grafov $G \in \mathcal{G}$, v katerih obstajata podmnožici W_i in W_j z omenjeno lastnostjo, navzgor omejeno. Izračunamo

$$L < e^{-n^{\varepsilon/3}}.$$

Naj bo $\mathcal{G}_4$ družina grafov $G \in \mathcal{G}$ z lastnostjo, da je $G \setminus E_0$ enolično H-obarvljiv za poljubno množico E_0 z največ $n^{g\varepsilon}$ neodvisnimi povezavami. Če združimo primera 1 in 2, dobimo oceno

$$|\mathcal{G}_4| \geq \left(1 - e^{-n^{\varepsilon/4}}\right)|\mathcal{G}|.$$

Naj bo $\mathcal{G}_5 = \mathcal{G}_4 \cap \mathcal{G}_3$. Potem velja

$$|\mathcal{G}_5| \geq (1 - e^{-n^{\varepsilon/4}} - n^{-\varepsilon/3})|\mathcal{G}|,$$

zato podmnožica $\mathcal{G}_5$ ni prazna.

Naj bo $G \in \mathcal{G}_5$. Ker je $G \in \mathcal{G}_3$, lahko odstranimo množico $\lfloor n^{g\varepsilon} \rfloor$ neodvisnih povezav iz grafa G, da ima dobljen graf G^* dolžino najkrajšega cikla vsaj g. Ker je $G \in \mathcal{G}_4$, je graf G^* enolično H-obarvljiv. Ker ima graf G^* dolžino najkrajšega cikla vsaj g, je izrek 2.10 dokazan. $\square$

Že v uvodu smo omenili, da je za poljubni tuji celi števili k in d, $k \geq 2d$, graf G (k, d)-obarvljiv natanko tedaj, ko je tudi G_k^d-obarvljiv. Ker nobeni točki grafa G_k^d nimata istih sosednjih točk, ne obstaja homomorfizem grafa G_k^d na kakšen njegov podgraf. Zato je graf G_k^d jedro. Zaradi izreka 2.10 velja, da za poljubno celo število g obstaja graf G z dolžino najkrajšega cikla vsaj g, ki je enolično G_k^d-obarvljiv. Sedaj bomo pokazali, da od tod sledi, da ima graf G zvezdno kromatično število enako k/d.

Izrek 2.12.[35] *Če je graf G enolično G_k^d-obarvljiv, je $\chi^\star(G) = k/d$.*

Dokaz. Recimo, da je G enolično G_k^d-obarvljiv graf. Potem po definiciji velja $\chi^\star(G) \leq k/d$ in obstaja surjektivni homomorfizem c grafa G na G_k^d. Naj bo $\chi^\star(G) = k'/d' < k/d$ in c' (k', d')-barvanje grafa G. Zaradi posledice 1.12, barvanje c' uporablja vseh k' barv. Sedaj definirajmo nov homomorfizem c_1^* grafa G na G_k^d takole:

$$c_1^*(x) = \lfloor c'(x)d/d' \rfloor.$$

Pokažimo, da je c_1^* res homomorfizem G na G_k^d. Naj bo $xy \in E(G)$ povezava v G. Potem velja

$$d' \leq |c'(x) - c'(y)| \leq k' - d'$$

in zato

$$d \leq |c'(x)d/d' - c'(y)d/d'| \leq k'd/d' - d < k - d.$$

Za poljubni naravni števili a in b ter za $\varepsilon > 0, \delta < 1$, za katera velja $d \leq |a+\varepsilon-(b+\delta)| < k - d$, je $d - 1 < |a - b| < k - d$. Ker so števila d, $a - b$ in $k - d$ naravna, veljata neenakosti $d \leq |a - b| \leq k - d$. Torej velja

$$d \leq |\lfloor c'(x)d/d' \rfloor - \lfloor c'(y)d/d' \rfloor| \leq k - d.$$

Zato je c_1^* res homomorfizem G na G_k^d.

Če c_1^* ne bi bil surjektivni homomorfizem, ne bi mogel biti kompozitum barvanja c z avtomorfizmom grafa G_k^d. To pa bi bilo v nasprotju z našo predpostavko, da je G enolično G_k^d-obarvljiv. Torej lahko predpostavimo, da je c_1^* surjektivni homomorfizem. Ker iz $c'(x) = c'(y)$ sledi $c_1^*(x) = c_1^*(y)$ in sta c' in c_1^* surjektivni preslikavi, je $k' \geq k$. Če upoštevamo še, da je $k'/d' < k/d$, velja $d' > d$.

Ker barvanje c' uporablja vseh k' barv, obstajata točki x in y, ki sta obarvani z barvama 0 in 1. Ker je $d/d' < 1$, sta obe točki z barvanjem c_1^* obarvani z barvo 0. Končno definiramo še homomorfizem c_2^* grafa G na G_k^d s predpisom

$$c_2^*(x) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{(c'(x)-1)d}{d'} + 1 \right\rfloor & ; \dfrac{(c'(x)-1)d}{d'} + 1 \leq k - 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Pokažimo, da je c_2^* res homomorfizem G na G_k^d. Vzemimo poljubno povezavo $xy \in E(G)$. Tedaj velja

$$d' \leq |c'(x) - c'(y)| \leq k' - d'.$$

V primeru, ko sta $c'(x), c'(y) \leq ((k-1)d' - 1)/d) + 1$, neenačbo pomnožimo z d/d' in dobimo

$$d \leq \left| \left(\frac{(c'(x)-1)d}{d'} + 1 \right) - \left(\frac{(c'(y)-1)d}{d'} + 1 \right) \right| \leq d\frac{k'}{d'} - d < k - d.$$

Od tod vidimo, da velja ocena $d \leq |c_2^*(x) - c_2^*(y)| \leq k - d$.

Če je $c'(x) \leq ((k-1)d' - 1)/d) + 1 < c'(y)$, lahko zapišemo naslednje ocene:

$$\begin{aligned} d &< d - \frac{d}{d'} + 1 = \frac{(d'-1)d}{d'} + 1 \leq |c_2^*(x) - 0| \\ &\leq \frac{(k'-d'-1)d}{d'} + 1 < k - d - \frac{d}{d'} + 1 < k - d + 1. \end{aligned}$$

Ker je $|c_2^*(x) - 0|$ celo število, tudi v tem primeru velja

$$d < |c_2^*(x) - 0| \leq k - d.$$

Ker je

$$\frac{(k-1)d'-1}{d} + 1 > k' - \frac{d'+1}{d} + 1 > k' - d',$$

$c'(x)$ in $c'(y)$ ne moreta biti hkrati večji od $((k-1)d'-1)/d) + 1$.

Torej je c_2^* homomorfizem G na G_k^d. Hkrati c_2^* ni kompozitum homomorfizma c_1^* z avtomorfizmom grafa G_k^d, saj pri predpostavki $c_1^*(x) = c_1^*(y) = 0$ velja $c_2^*(x) = 0$ in $c_2^*(y) = 1$. To pa je v nasprotju s predpostavko našega izreka, da je G enolično G_k^d-obarvljiv. □

Posledica 2.13. *Za poljubno racionalno število $k/d \geq 2$ in poljubno celo število g, obstaja graf G z dolžino najkrajšega cikla vsaj g in zvezdnim kromatičnim številom $\chi^\star(G) = k/d$.*

Poglavje 3

Ravninski grafi

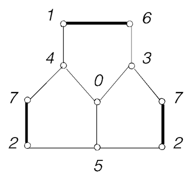
To poglavje je razdeljeno na tri razdelke. V prvem so opisani primeri ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom med 2 in 3 ter ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom 3.

V drugem razdelku bomo s pomočjo konstrukcije videli, da za poljubno racionalno število r med 2 in 3 obstaja ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim r.

V tretjem razdelku bomo predstavili primere ravninskih grafov z zvezdnim kromatičnim številom med 3 in 4. Ker za ravninske grafe z zvezdnim kromatičnim številom med 3 in 4 še ni znan podoben rezultat kot za ravninske grafe z zvezdnim kromatičnim številom med 2 in 3, bomo trditev pokazali le za nekatera racionalna števila med 3 in 4.

3.1 Nekaj primerov grafov s $\chi^\star$ med 2 in 3

Kot odgovor na vprašanje, ali še za kakšne ravninske grafe G, razen za lihe cikle, velja $2 < \chi^\star(G) < 3$, je X. Zhu v [34] podal primer neskončne družine takšnih grafov.



Slika 3.1: Graf G in njegovo $(8,3)$-barvanje

Naj bo G graf iz slike 3.1. Ker je $C_5 \subset G$ in $G \not\to C_5$, velja $\chi^\star(G) > \frac{5}{2}$. Ker obstaja $(8,3)$-barvanje grafa G, je $\chi^\star(G) = 8/3$. Graf G ni lih cikel in tudi ni homomorfen lihemu ciklu. Če na odebeljene povezave grafa G dodamo sodo točk, dobimo graf, ki je še vedno ravninski in je homomorfen grafu G. Zato za takšen graf velja $2 < \chi^\star \leq \frac{8}{3}$. Prav tako takšen graf ni ne lih cikel in ne homomorfen lihemu ciklu.

Trditev 3.1. *Za vse 3-kromatične grafe G brez trikotnikov, v katerih obstaja takšna točka v, da je graf $G - v$ dvodelen, velja $\chi^\star(G) \leq 5/2$.*

Dokaz. Naj bosta V_1 in V_2 barvna razreda 2-barvanja grafa $G - v$. Definirajmo 5-barvanje c grafa G tako:

$$c(x) = \begin{cases} 0; & x = v, \\ 1; & x \in V_1, \quad xv \notin E(G), \\ 2; & x \in V_1, \quad xv \in E(G), \\ 3; & x \in V_2, \quad xv \in E(G), \\ 4; & x \in V_2, \quad xv \notin E(G). \end{cases}$$

Barva vsake točke, sosednje točki v, je oddaljena od 0 za 2. Točke iz istega barvnega razreda niso povezane, torej moramo preveriti le še povezave med barvnima razredoma. Barvi točk iz različnih barvnih razredov sta lahko za manj kot 2 narazen le v primeru, ko sta obe točki povezani s točko v. V tem primeru ti točki nista povezani, saj graf G ne vsebuje trikotnikov. Zato res velja $\chi^\star(G) \leq 5/2$. □

Iz primerov vidimo, da je mnogo ravninskih grafov s kromatičnim številom strogo večjim od 2 in strogo manjšim od 3. To pa ne moremo trditi za grafe brez trikotnikov in z zvezdnim kromatičnim številom natanko 3. Očitno za vsak 3-kromatičen graf, ki vsebuje trikotnik, velja, da je $\chi^\star(G) = 3$.

Iz trditve 2.3 lahko izračunamo zvezdno kromatično število $(2n+1)$-kolesa. Točka v je univerzalna točka tega grafa, zato je $\chi^\star(W_{2n+1}) = \chi(W_{2n+1}) = 4$.

G. Ghao [12] je pokazal, da ima graf $\widetilde{W}_{2n+1}$, ki je dobljen iz 5-kolesa tako, da na vsako od petih prečk dodamo točko, zvezdno kromatično število enako 3. Z naslednjim izrekom bomo pokazali, da to velja za vsako $(2n+1)$-kolo. To je tudi prva netrivialna družina ravninskih grafov brez trikotnikov, z zvezdnim kromatičnim številom enakim 3.

Trditev 3.2.[31] *Za vse $n \geq 2$ velja $\chi^\star(\widetilde{W}_{2n+1}) = 3$.*

Dokaz. V dokazu znova uporabimo izrek 2.1. Naj bo $V = \{v, c_0, c_1, \ldots, c_{2n}\}$ množica točk $(2n+1)$-kolesa W_{2n+1}, kjer je točka v povezana z vsemi točkami c_i. Množica $\{c_0, c_1, \ldots, c_{2n}\}$ v $\widetilde{W}_{2n+1}$ inducira cikel s povezavami $c_i c_{i+1}$. Graf $\widetilde{W}_{2n+1}$ je dobljen iz grafa W_{2n+1} tako, da razpolovimo vsako povezavo vc_i v dve povezavi. Za $i = 0, 1, \ldots, 2n$ naj bodo u_i točke, ki razpolavljajo povezave vc_i. Ker lahko C_{2n+1} obarvamo s tremi barvami, točko v pa z eno izmed teh treh barv, lahko tudi točko u_i obarvamo z eno izmed teh treh barv, saj je le-ta povezana le s točkama v in c_i. Torej je $\chi(\widetilde{W}_{2n+1}) = 3$. Zato velja tudi $\chi^\star(\widetilde{W}_{2n+1}) \leq 3$.

Privzemimo, da je $\chi^\star(\widetilde{W}_{2n+1}) = r < 3$. Naj bo $c : V(\widetilde{W}_{2n+1}) \to C^{(r)}$ r-krožno barvanje grafa $\widetilde{W}_{2n+1}$. Ker je točka v povezana z vsemi u_i, je vsak interval $c(u_i)$ disjunkten z intervalom $c(v)$. Ker je $r < 3$ in je za $i = 0, 1, \ldots, 2n$ tudi $c(c_i)$ disjunkten s $c(u_i)$, velja $c(v) \cap c(c_i) \neq \emptyset$. Za noben indeks $i \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ ne more biti $c(v) = c(c_i)$, saj bi presek $c(c_i) \cap c(c_{i+1})$ ne bil prazna množica, a sta točki c_i in c_{i+1} povezani. Zaradi tega vsak interval $c(c_i)$ vsebuje eno krajišče intervala $c(v)$. Naj bosta p in q krajišči intervala $c(v)$. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da interval $c(c_0)$ vsebuje točko p. Ker sta intervala $c(c_0)$ in $c(c_1)$ disjunktna, mora $c(c_1)$ vsebovati krajišče q. Iz istega razloga intervali $c(c_2), c(c_3), \ldots, c(c_{2n})$ izmenično vsebujejo točki p in q. Torej je $p \in c(c_{2n})$ in s tem $c(c_{2n}) \cap c(c_0) \neq \emptyset$, kar je v nasprotju s predpostavko, da je c r-krožno barvanje grafa $\widetilde{W}_{2n+1}$. □

Tukaj se avtorjema v [31] postavljata dve vprašanji:

- Ali vsak ravninski graf G brez trikotnikov in z zvezdnim kromatičnim številom enakim 3 vsebuje kakšen graf $\widetilde{W}_{2n+1}$?
- Ali vsak ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim 4 vsebuje kakšno liho kolo W_{2n+1}?

Če sta odgovora na dani vprašanji pozitivna, lahko v polinomskem času za poljuben ravninski graf z znanim kromatičnim številom preverimo, ali velja $\chi^\star(G) = \chi(G)$ ali ne.

3.2 Konstrukcija grafov s poljubnim $\chi^\star$ med 2 in 3

D. E Moser [27] si je pri izpeljavi konstrukcije ravninskih grafov s poljubnim zvezdnim kromatičnim številom pomagal s Farey-evimi zaporedji.

3.2.1 Farey-evo zaporedje

Naj bo $\frac{k}{d}$ okrajšan ulomek med 2 in 3. Konstruirajmo zaporedje ulomkov, prirejeno $\frac{k}{d}$, na naslednji način. Naj bo $\tilde{k}_0 = k$ in $\tilde{d}_0 = d$. Ker sta k in d tuji števili, obstajata $\tilde{k}_1$, $0 < \tilde{k}_1 < \tilde{k}_0$ in $\tilde{d}_1$, $0 < \tilde{d}_1 < \tilde{d}_0$, ki sta rešitev diofantske enačbe $\tilde{k}_0\tilde{d}_1 - \tilde{d}_0\tilde{k}_1 = 1$. Tudi $\tilde{k}_1$ in $\tilde{d}_1$ sta tuji števili in zanju velja $\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{d}_1} < \frac{\tilde{k}_0}{\tilde{d}_0}$.

Za števili $\tilde{k}'$ in $\tilde{d}'$, za kateri velja $\frac{\tilde{k}_1}{\tilde{d}_1} < \frac{\tilde{k}'}{\tilde{d}'} < \frac{\tilde{k}_0}{\tilde{d}_0}$, lahko zapišemo

$$\frac{1}{\tilde{k}_0\tilde{k}_1} = \left(\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{k}_1} - \frac{\tilde{d}'}{\tilde{k}'}\right) + \left(\frac{\tilde{d}'}{\tilde{k}'} - \frac{\tilde{d}_0}{\tilde{k}_0}\right) \geq \frac{1}{\tilde{k}_1\tilde{k}'} + \frac{1}{\tilde{k}_0\tilde{k}'} = \frac{\tilde{k}_0 + \tilde{k}_1}{\tilde{k}'\tilde{k}_0\tilde{k}_1}.$$

Od tod vidimo, da je števec $\tilde{k}'$ večji od $\tilde{k}_0$. Torej je $\tilde{k}_1$ največje število, za katero velja $\tilde{k}_0\tilde{d}_1 - \tilde{d}_0\tilde{k}_1 = 1$. Z nadaljevanjem tega postopka dobimo zaporedje ulomkov

$$\frac{k}{d} = \frac{\tilde{k}_0}{\tilde{d}_0} > \frac{\tilde{k}_1}{\tilde{d}_1} > \cdots > \frac{\tilde{k}_{n-1}}{\tilde{d}_{n-1}} > \frac{\tilde{k}_n}{\tilde{d}_n} = \frac{2}{1},$$

ki ima za $0 \leq i \leq n-1$ naslednje lastnosti:

1. $\dfrac{\tilde{k}_{i+1}}{\tilde{d}_{i+1}}$ je največje racionalno število, manjše od $\dfrac{\tilde{k}_i}{\tilde{d}_i}$, kjer sta $\tilde{k}_{i+1}$ in $\tilde{d}_{i+1}$ tuji števili in je $\tilde{k}_{i+1} \leq \tilde{k}_i$,
2. $\tilde{k}_{i+1}\tilde{d}_i + 1 = \tilde{k}_i\tilde{d}_{i+1}$.

Naj bo sedaj $\dfrac{k_i}{d_i} = \dfrac{\tilde{k}_{n-i}}{\tilde{d}_{n-i}}$. S tem dobimo naslednje zaporedje ulomkov:

$$\frac{2}{1} = \frac{k_0}{d_0} < \frac{k_1}{d_1} < \frac{k_2}{d_2} < \cdots < \frac{k_n}{d_n} = \frac{k}{d}. \tag{1}$$

Zaporedje (1) imenujemo **Farey-evo zaporedje**, prirejeno ulomku $\frac{k}{d}$.

Iz lastnosti zaporedja vidimo, da veljata enačbi $k_{i-1}d_i + 1 = k_i d_{i-1}$ in $k_{i-1}d_{i-2} - 1 = k_{i-2}d_{i-1}$. Če enačbi seštejemo, dobimo

$$d_i + d_{i-2} = \frac{d_{i-1}(k_i + k_{i-2})}{k_{i-1}}.$$

Ker sta k_{i-1} in d_{i-1} tuji si števili, vidimo, da je vsota $d_i + d_{i-2}$ deljiva z d_{i-1}.

Sedaj definiramo **alfa**-zaporedje ulomka $\frac{k}{d}$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \tag{2}$$

ki ga dobimo iz Farey-evega zaporedja (1) na naslednji način:

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{d_i + d_{i-2}}{d_{i-1}} & ; 2 \leq i \leq n, \\ 1 & ; i = 1. \end{cases}$$

Ker je $0 < d_{i-2} < d_{i-1} < d_i$, velja

$$\frac{d_i + d_{i-2}}{d_{i-1}} > 1 + \frac{d_{i-2}}{d_{i-1}} > 1.$$

Ker je α_i celo število, večje od 1, velja $\alpha_i \geq 2$. Iz naslednje leme vidimo, kako se zaporedje (1) izraža z zaporedjem (2).

Lema 3.3. *Na bo za $r \geq 1$ in $s \leq n$*

$$\Delta_{r,s} = \begin{cases} \det \begin{bmatrix} \alpha_r & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{r+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{r+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{s-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_s \end{bmatrix} & ; r \leq s, \\ 1 & ; r = s+1, \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Potem za $1 \leq j \leq n$ velja

(i) $k_j = 2\Delta_{1,j} + \Delta_{2,j}$ *in*
(ii) $d_j = \Delta_{1,j}$.

Dokaz. Lemo bomo dokazali z matematično indukcijo. Vidimo, da je $d_1 = \alpha_1 = \Delta_{1,1}$ in $k_1 = 2\alpha_1 + 1 = 2\Delta_{1,j} + 1$. Privzemimo sedaj, da (i) in (ii) velja za $1 \leq i \leq m$, kjer je $m < n$. Z razvojem determinante pridemo do rekurzivne enačbe:

$$\Delta_{1,m+1} = \alpha_{m+1}\Delta_{1,m} - \Delta_{1,m-1} = \alpha_{m+1}d_m - d_{m-1} = d_{m+1}.$$

Prav tako velja

$$\begin{aligned} 2\Delta_{1,m+1} + \Delta_{2,m+1} &= 2(\alpha_{m+1}\Delta_{1,m} - \Delta_{1,m-1}) + (\alpha_{m+1}\Delta_{2,m} - \Delta_{2,m-1}) \\ &= \alpha_{m+1}(2\Delta_{1,m} + \Delta_{2,m}) + (2\Delta_{1,m-1} + \Delta_{2,m-1}) \\ &= \alpha_{m+1}k_m - k_{m-1}. \end{aligned}$$

Če upoštevamo definiciji alfa in Farey-evega zaporedja, dobimo željeni rezultat:

$$2\Delta_{1,m+1} + \Delta_{2,m+1} = \frac{k_m d_{m+1} + d_{m-1}k_m - k_{m-1}d_m}{d_m} = \frac{k_m d_{m+1} + 1}{d_m} = k_{n+1}.$$

□

3.2.2 Konstrukcija

Naj bo $\frac{k}{d}$ okrajšan ulomek med 2 in 3 ter

$$\frac{2d_1+1}{d_1} = \frac{k_1}{d_1} < \frac{k_2}{d_2} < \cdots < \frac{k_n}{d_n} = \frac{k}{d} \tag{3}$$

in

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \tag{4}$$

zaporedji, prirejeni ulomku $\frac{k}{d}$, kot smo ju opisali v prejšnjem razdelku. Na osnovi zaporedja (4) sedaj konstruirajmo tri zaporedja grafov F_i, H_i in G_i. Videli bomo, da je G_n ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim $\frac{k}{d}$. Opazili bomo celo, da imajo grafi G_i zvezdno kromatično število enako $\frac{k_i}{d_i}$.

Konstrukcija. Željeno zaporedje grafov H_i in F_i konstruiramo rekurzivno:

- Naj bo H_1 pot z $2\alpha_1$ točkami. Krajišči poti označimo z x_1 in w_1. Začetni graf F_1 naj bo izolirana točka, ki jo označimo z u_1 in v_1 hkrati, graf F_2 pa naj bo pot z $2\alpha_1 - 2$ točkami, katere krajišči označimo z u_2 in v_2.

- Privzemimo, da je $m \leq n$ in da so za $1 \leq i \leq m-1$ grafi H_i in F_i že konstruirani.

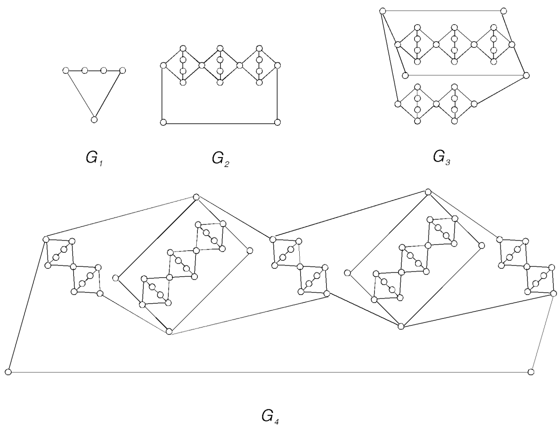
  Graf F_m konstruiramo na naslednji način: Vzemimo $\alpha_{m-1} - 1$ kopij grafa F_{m-2}. Označeni točki j-te kopije grafa F_{m-2} označimo z u^j_{m-2} in v^j_{m-2}. Nato vzemimo $\alpha_{m-1} - 2$ kopij grafa H_{m-2} in označeni točki v j-ti kopiji prav tako označimo z w^j_{m-2} in x^j_{m-2}. Graf F_m konstruiramo iz zgornjih kopij grafov F_{m-2} in H_{m-2} tako, da povežemo točko w^j_{m-2} s točkama u^j_{m-2} in u^{j+1}_{m-2} in točko x^j_{m-2} s točkama v^j_{m-2} in v^{j+1}_{m-2}. Točko u^1_{m-2} označimo z u_m in točko $v^{(\alpha_{m-1})-1}_{m-2}$ z v_m.

  Na podoben način konstruiramo še graf H_m: Vzemimo α_m kopij grafa F_{m-1} in označeni točki v j-ti kopiji označimo z u^j_{m-1} in v^j_{m-1}. Vzemimo še $\alpha_m - 1$ kopij grafa H_{m-1} in označeni točki v j-ti kopiji označimo z w^j_{m-1} in x^j_{m-1}. Graf H_m konstruiramo iz zgornjih kopij grafov F_{m-1} in H_{m-1} tako, da povežemo točko w^j_{m-1} s točkama u^j_{m-1} in u^{j+1}_{m-1} in točko x^j_{m-1} s točkama v^j_{m-1} in v^{j+1}_{m-1}. Točko u^1_{m-1} označimo z x_m in točko $v^{\alpha_m}_{m-1}$ z w_m.

  Na koncu za $1 \leq i \leq n$ konstruiramo graf G_i iz grafov F_i in H_i tako, da povežemo točki w_i in u_i ter točki x_i in v_i.

Prikazali bomo konstrukcijo za $\frac{k}{d} = \frac{75}{29}$. Z reševanjem dobljenih diofantskih enačb dobimo Farey-evo zaporedje, prirejeno željenemu ulomku:

$$\frac{2}{1} < \frac{5}{2} < \frac{18}{7} < \frac{31}{12} < \frac{76}{29}.$$



Slika 3.2: Primer konstrukcije

Od tod izračunamo prirejeno alfa zaporedje: 2, 4, 2, 3. Zaporedje grafov G_i, dobljenih z opisano konstrukcijo, vidimo na sliki 3.2.

Ravninskost grafa G_n dokažemo z induktivnim sklepom. Iz konstrukcije grafov F_i in H_i vidimo, da so označene točke vedno na zunanjih licih grafov F_i in H_i. Zato z dodajanjem povezav med označenimi točkami ohranimo ravninskost. Torej je tudi graf G_n ravninski.

Trditev 3.4.[27] *Graf G_n je ravninski.*

V nadaljevanju bomo pokazali, da je zvezdno kromatično število grafov G_n enako k_n/d_n. V ta namen pokažimo naslednja pomožna rezultata:

Lema 3.5. *Za poljubno celo število j, $1 \le j \le n$, velja*

$$(d_j - 1)k_n + d_n \le (k_j - 1)d_n \le k_n d_j - d_n.$$

Dokaz. Naj bo $R_k = k_k - 2d_k$ in naj bo $\langle k, j\rangle = k_k d_j - k_j d_k$. Tedaj je dovolj pokazati, da za poljuben j, $1 \leq j \leq n$, velja $0 \leq \langle n, j\rangle \leq R_n$.

Z indukcijo najprej pokažimo, da velja

$$R_n > R_{n-1} > \cdots > R_1 > 0. \tag{5}$$

Ker je $1 = k_1 d_0 - k_0 d_1 = k_1 - 2d_1 = R_1$, velja $R_2 = k_2 - 2d_2 = (1 + k_1 d_2)/d_1 - 2d_2 = (1 + (R_1 + 2d_1)d_2)/d_1 - 2d_2 = (1 + d_2)d_1 = \alpha_2 \geq 2$. Zato je $R_2 > R_1$.

Privzemimo, da za $2 \leq k \leq m < n$ velja $R_k > R_{k-1}$. Ker velja $k_m = R_m + 2d_m$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
R_{m+1} &= k_{m+1} - 2d_{m+1} = \frac{1 + k_m d_{m+1}}{d_m} - 2d_{m+1} \\
&= \frac{1 + (R_m + 2d_m)d_{m+1}}{d_m} - 2d_{m+1} \\
&= \frac{1 + R_m d_{m+1}}{d_m} = \alpha_{m+1} R_m + \frac{1 - R_m d_{m-1}}{d_m} \\
&= \alpha_{m+1} R_m + \frac{1 - k_m d_{m-1}}{d_m} + 2\frac{d_m d_{m-1}}{d_m} = \alpha_{m+1} R_m - k_{m-1} + 2d_{m-1} \\
&= \alpha_{m+1} R_m - R_{m-1} \geq 2R_m - R_{m-1} > R_m.
\end{aligned}$$

Ponovno z indukcijo pokažimo, da veljajo neenakosti

$$R_n - \langle n, j\rangle \geq R_{n-1} - \langle n-1, j\rangle \geq \cdots \geq R_j - \langle j, j\rangle \geq 0. \tag{6}$$

Ker je $\langle j, j\rangle = 0$ in zaradi (5), velja $R_j - \langle j, j\rangle \geq 0$. Iz konstrukcije Farey-evega zaporedja vidimo, da velja $\langle j+1, j\rangle = \langle j, j-1\rangle = \cdots = \langle 2, 1\rangle = 1$. Od tod dobimo, da velja $R_{j+1} - \langle j+1, j\rangle \geq R_j - \langle j, j\rangle$.

Privzemimo, da za $j < k \leq m < n$ velja $R_k - \langle k, j\rangle \geq R_{k-1} - \langle k-1, j\rangle$. Ker je $\alpha_{m+1} = (k_{m-1} + k_{m+1})/k_m = (d_{m-1} + d_{m+1})/d_m$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
R_{m+1} - \langle m+1, j\rangle &= \alpha_{m+1} R_m - R_{m-1} - (\alpha_{m+1} k_m - k_{m-1})d_j + k_j(\alpha_{m+1} d_m - d_{m-1}) \\
&= \alpha_{m+1}(R_m - k_m d_j + k_j d_m) - (R_{m-1} - k_{m-1} d_j + k_j d_{m-1}) \\
&= \alpha_{m+1}(R_m - \langle m, j\rangle) - (R_{m-1} - \langle m-1, j\rangle) \\
&\geq 2(R_m - \langle m, j\rangle) - (R_{m-1} - \langle m-1, j\rangle) \geq (R_m - \langle m, j\rangle).
\end{aligned}$$

Tedaj velja (6) in za poljuben j, $1 \leq j \leq n$, tudi $\langle n, j\rangle \leq R_n$.

Ker za $1 \leq j \leq n$ velja

$$\frac{k_n}{d_n} - \frac{k_j}{d_j} \geq 0,$$

je tudi $\langle n, j\rangle \geq 0$. □

Trditev 3.6.[27] *Za* i*,* $1 \leq i \leq n$*, velja* $|G_i| = k_i$*.*

Dokaz. Z indukcijo hkrati dokažimo naslednji trditvi:

(i) Za i, $2 \leq i \leq n$, velja $|G_i| = (\alpha_i - 1)|G_{i-1}| + |F_i| + |F_{i-1}|$.

(ii) Za i, $1 \leq i \leq n$, velja $|G_i| = k_i$.

Preverimo najprej trditvi za $i \leq 2$:

$$|G_1| = 2\alpha_1 + 1 = 2d_1 + 1 = k_1,$$

$$|G_2| = \alpha_2|F_1| + (\alpha_2 - 1)|H_1| + |F_2| = (\alpha_2 - 1)|G_1| + |F_1| + |F_2|.$$

Od tod sledi

$$|G_2| = (\alpha_2 - 1)k_1 + 1 + 2\alpha_2 - 2 = \alpha_2 k_1 - 2 = \frac{2 + k_2}{k_1}k_1 - 2 = k_2.$$

Naj bo $3 \leq m \leq n$ in privzemimo, da za i, $1 \leq i \leq m - 1$, trditvi (i) in (ii) veljata. Potem lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
|G_m| &= |H_m| + |F_m| = \alpha_m|F_{m-1}| + (\alpha_m - 1)|H_{m-1}| + |F_m| \\
&= (\alpha_m - 1)(|H_{m-1}| + |F_{m-1}|) + |F_{m-1}| + |F_m| \\
&= (\alpha_m - 1)|G_{m-1}| + |F_{m-1}| + |F_m|,
\end{aligned}$$

torej (i) velja. Sedaj lahko izračunamo tudi

$$\begin{aligned}
|G_m| &= (\alpha_m - 1)|G_{m-1}| + |F_{m-1}| + |F_m| \\
&= (\alpha_m - 1)|G_{m-1}| + |F_{m-1}| + (\alpha_{m-1} - 2)|G_{m-2}| + |F_{m-2}| \\
&= (\alpha_m - 1)|G_{m-1}| - |G_{m-2}| + ((\alpha_{m-1} - 1)|G_{m-2}| + |F_{m-1}| + |F_{m-2}|) \\
&= \alpha_m|G_{m-1}| - |G_{m-2}| \\
&= \alpha_m k_{m-1} - k_{m-2} \\
&= \frac{k_{m-2} + k_m}{k_{m-1}}k_{m-1} - k_{m-2} \\
&= k_m.
\end{aligned}$$

Tako velja tudi (ii). □

Za dokaz enakosti

$$\chi^\star(G_n) = \frac{k_n}{d_n}$$

zadostuje pokazati, da je graf G_n (k_n, d_n)-obarvljiv in ni (k_{n-1}, d_{n-1})-obarvljiv, saj je ulomek k_{n-1}/d_{n-1} največji izmed ulomkov, manjših od k_n/d_n in s števcem, manjšim od $k_n = |G_n|$.

Trditev 3.7.[27] *Graf G_n je (k_n, d_n)-obarvljiv.*

Dokaz. Zaradi enostavnosti zapisov označimo $K = k_n$ in $D = d_n$. Z indukcijo pokažimo, da za $1 \le i \le n$ veljata trditvi:

(i) Na grafu H_i obstaja takšno (K, D)-barvanje c, da velja

$$c(w_i) = (|H_i| - 1)D + c(x_i).$$

(ii) Na grafu F_i obstaja takšno (K, D)-barvanje c, da velja

$$c(v_i) = (|F_i| - 1)D + c(u_i).$$

Oglejmo si najprej trditvi za primer, ko je $i = 1$. Graf H_1 je pot na $2d_1$ točkah, kjer je $d_1 \ge 2$. Torej je $(2d_1 - 1)D \ge 3D$, zato takšno barvanje gotovo obstaja. Graf F_1 pa je le točka, zato velja $c(v_1) = c(u_1)$ in trditev (ii) velja.

Naj bo $2 \le m \le n$ in privzemimo, da trditvi (i) in (ii) veljata za i, $1 \le i \le m-1$. Torej obstajajo takšna (K, D)-barvanja vseh kopij grafa F_{m-1} in grafa H_{m-1}, potrebnih pri konstrukciji grafa H_m, da velja

$$c(u^j_{m-1}) = k_{m-1}(j-1)D,$$

$$c(v^j_{m-1}) = ((j-1)k_{m-1} + |F_{m-1}| - 1)D,$$

$$c(x^j_{m-1}) = ((j-1)k_{m-1} + |F_{m-1}|)D \text{ in}$$

$$c(w^j_{m-1}) = ((j-1)k_{m-1} + |F_{m-1}| + |H_{m-1}| - 1)D.$$

Potem velja

$$\begin{aligned} c(w_m) - c(x_m) &= c(v^{\alpha_m}_{m-1}) - c(u^1_{m-1}) \\ &= ((\alpha_m - 1)k_{m-1} + |F_{m-1}| - 1)D = (|H_m| - 1)D \end{aligned}$$

in ker je $k_{m-1} = |F_{m-1}| + |H_{m-1}|$, velja tudi

$$|c(u^{j+1}_{m-1}) - c(w^j_{m-1})|_K = |c(x^j_{m-1}) - c(v^j_{m-1})|_K = D.$$

Prav tako je

$$c(w_{m-1}^j) - c(u_{m-1}^j) = c(v_{m-1}^{j+1}) - c(x_{m-1}^j) = (k_{m-1} - 1)D.$$

Iz leme 3.5 sledi

$$(d_{m-1} - 1)K + D \leq (k_{m-1} - 1)D \leq d_{m-1}K - D.$$

Od tod lahko zapišemo oceno

$$|c(w_{m-1}^j) - c(u_{m-1}^j)|_K = |c(v_{m-1}^{j+1}) - c(x_{m-1}^j)|_K \geq D.$$

Iz opisanih ocen lahko sklepamo, da preslikava c predstavlja (K, D)-barvanje grafa H_m, zato velja trditev (i).

Ker je konstrukcija grafov F_i enaka konstrukciji grafov H_i, na enak način dokažemo trditev (ii).

S pomočjo trditev (i) in (ii) lahko konstruiramo (K, D)-barvanje c grafa H_n, za katero velja $c(x_n) = 0$ in $c(w_n) = (|H_n| - 1)D$, in (K, D)-barvanje c grafa F_n, za katero velja $c(u_n) = |H_n|D$ in $c(v_n) = (|H_n| + |F_n| - 1)D$. Ker je $|c(u_n) - c(w_n)|_K = D$ in $|c(v_n) - c(x_n)|_K = |KD - D|_K = D$, preslikava c predstavlja tudi (K, D)-barvanje grafa G_n. □

Trditev 3.8.[27] *Graf G_n ni (k_{n-1}, d_{n-1})-obarvljiv.*

Dokaz. Zaradi enostavnejšega zapisa naj bo $K = k_{n-1}$ in $D = d_{n-1}$. Trditev bomo pokazali s pomočjo strogih ocen vrednosti $|c(x_i) - c(w_i)|_K$ in $|c(u_i) - c(v_i)|_K$, kjer je c poljubno (K, D)-barvanje grafov G_i ali F_i. Najprej zapišimo nekaj definicij.

Za $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n, \ldots)$ naj bo

$$F(\vec{\beta}) = \begin{cases} \det \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} & ; n \geq 3, \\ \beta_1 & ; n = 2. \end{cases}$$

Za j, $1 \leq j \leq n-1$, definirajmo

$$U_j = \begin{cases} F(\overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{j-1}, 1, 0, 0, \ldots) & ; j = 2i+1, \\ F(1, \overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{j-2}, 1, 1, 0, 0, \ldots) & ; j = 2i \end{cases}$$

in

$$L_j = \begin{cases} F(\overbrace{2,2,\ldots,2}^{j-1},1,1,0,0,\ldots) & ;j=2i+1,\\ F(1,\overbrace{2,2,\ldots,2}^{j-2},1,0,0,\ldots) & ;j=2i. \end{cases}$$

Z indukcijo pokažimo, da za poljuben i, $1 \le i \le n-1$, veljajo naslednje trditve:

(i) Za (K,D)-barvanje grafa G_i velja

$$L_i \le |c(x_i) - c(w_i)|_K.$$

(ii) Za (K,D)-barvanje grafa G_i velja

$$|c(x_i) - c(w_i)|_K \le U_i.$$

(iii) Če je i lih, za (K,D)-barvanje grafa F_i velja

$$|c(u_i) - c(v_i)|_K \le U_i - (K-2D).$$

(iv) Če je i sod, za (K,D)-barvanje grafa F_i velja

$$|c(u_i) - c(v_i)|_K \ge L_i + K - 2D.$$

Dokažimo najprej, da veljajo trditve za $i=1$.

Na poti $P_{2\alpha_1}$ se lahko barvi točk na razdalji 2 razlikujeta za največ $K-2D$, zato lahko na (α_2-1) takih korakih dosežemo, da se barvi točk na razdalji $2\alpha_2-2$ razlikujeta za največ $(\alpha_2-1)(K-2D)$. Ker sta točki x_1 in w_1 na poti $P_{2\alpha_1}$ na razdalji $(2\alpha_1-1)$, je lahko razdalja med njunima barvama najmanj $D-(\alpha_1-1)(K-2D) = L_1$, zato velja (i).

Ker imata točki x_1 in w_1 v G_1 skupnega soseda u_1, se lahko barvi teh točk razlikujeta za največ $K-2D = U_1$, zato velja (ii).

Ker je $U_1 - (K-2D) = 0$ in je graf F_1 točka, je trditev (iii) za $i=1$ očitna.

Zadnja trditev velja, ker je pogoj na prazno izpolnjen.

Naj bo $2 \le m \le n$ in naj za i, $1 \le i \le m-1$, trditve (i)-(iv) veljajo.

* Oglejmo si poljubno (K,D)-barvanje grafa G_m, če je m liho število. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da velja $c(x_m) = c(u^1_{m-1}) = 0$, $c(u^2_{m-1}) \in [0, K-2D]$ (točki x_m in u^2_{m-1} imata skupnega soseda w^1_{m-1}) in

$$c(w^1_{m-1}) \in [c(u^2_{m-1}) + D, K-D].$$

Zaradi (iv) velja

$$c(v^1_{m-1}) \in [L_{m-1} + K - 2D, 2D - L_{m-1}]$$

in

$$c(v_{m-1}^2) \in [c(u_{m-1}^2) + L_{m-1} + K - 2D, c(u_{m-1}^2) + 2D - L_{m-1}].$$

Ker je točka x_{m-1}^1 povezana s točkama v_{m-1}^1 in v_{m-1}^2, je

$$c(x_{m-1}^1) \in [c(u_{m-1}^2) + L_{m-1} - D, D - L_{m-1}].$$

Iz zapisanih ocen sledi

$$|c(w_{m-1}^1) - c(x_{m-1}^1)|_K \geq c(u_{m-1}^2) + L_{m-1}.$$

Ko upoštevamo (ii), dobimo oceno

$$c(u_{m-1}^2) \leq U_{m-1} - L_{m-1}.$$

Če s to oceno nadaljujemo po vseh komponentah grafa G_m, dobimo

$$|c(u_{m-1}^{\alpha_m})|_K \leq (\alpha_m - 1)(U_{m-1} - L_{m-1}).$$

Iz (iv) nato sledi

$$\begin{aligned} |c(x_m) - c(w_m)|_K &= |c(v_{m-1}^{\alpha_m})|_K \\ &\geq |c(u_{m-1}^{\alpha_m}) - c(v_{m-1}^{\alpha_m})|_K - |c(u_{m-1}^{\alpha_m})|_K \\ &\geq L_{m-1} + K - 2D - (\alpha_m - 1)(U_{m-1} - L_{m-1}). \end{aligned}$$

Z razvojem determinant dobimo naslednje enakosti:

$$U_{m-1} = L_{m-1} + \Delta_{m+1,n-1},$$

$$\Delta_{m,n-1} = \alpha_m \Delta_{m+1,n-1} - \Delta_{m+2,n-1}$$

in

$$\begin{aligned} L_m &= \Delta_{2,n-1} + L_{m-1} - \Delta_{m,n-1} + \Delta_{m+1,n-1} - \Delta_{m+2,n-1} \\ &= K - 2D + L_{m-1} - (\alpha_m - 1)\Delta_{m+1,n-1} \\ &= K - 2D + L_{m-1} - (\alpha_m - 1)(U_{m-1} - L_{m-1}). \end{aligned}$$

Zato velja

$$|c(x_m) - c(w_m)|_K \geq L_m. \tag{7}$$

* Sedaj si oglejmo (K, D)-barvanje grafa G_m, če je m sodo število. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da velja $c(x_m) = c(u_{m-1}^1) = 0$, $c(u_{m-1}^2) \in [0, N - 2D]$ (točki x_m in u_{m-1}^2 imata skupnega soseda w_{m-1}^1) in

$$c(w^1_{m-1}) \in [c(u^2_{m-1}) + D, K - D].$$

Zaradi (iii) velja

$$c(v^1_{m-1}) \in [-(U_{m-1} - K + 2D), U_{m-1} - K + 2D] \text{ in}$$

$$c(v^2_{m-1}) \in [c(u^2_{m-1}) - (U_{m-1} - K + 2D), c(u^2_{m-1}) + (U_{m-1} - K + 2D)].$$

Ker je točka x^1_{m-1} povezana s točkama v^1_{m-1} in v^2_{m-1}, je

$$c(x^1_{m-1}) \in [c(u^2_{m-1}) - U_{m-1} + K - D, U_{m-1} + D].$$

Iz zapisanih ocen sledi

$$|c(w^1_{m-1}) - c(x^1_{m-1})|_K \le U_{m-1} - c(u^2_{m-1}).$$

Zaradi (i) velja $c(u^2_{m-1}) \le U_{m-1} - L_{m-1}$. Če s to oceno nadaljujemo po vseh komponentah grafa G_m, dobimo

$$|c(u^{\alpha_m}_{m-1})|_K \le (\alpha_m - 1)(U_{m-1} - L_{m-1}).$$

Iz (iii) nato sledi

$$\begin{aligned} |c(x_m) - c(w_m)|_K &= |c(v^{\alpha_m}_{m-1})|_K \\ &\le |c(u^{\alpha_m}_{m-1})|_K + |c(u^{\alpha_m}_{m-1}) - c(v^{\alpha_m}_{m-1})|_K \\ &\le (\alpha_m - 1)(U_{m-1} - L_{m-1}) + U_{m-1} - K + 2D = U_m, \quad (8) \end{aligned}$$

kjer zadnjo enakost dobimo na enak način kot pri (7).

* Oglejmo si še (K, D)-barvanje grafa F_m, če je m sodo število. V primeru $m = 2$ zaradi istega razloga kot v dokazu (i) $(i = 1)$ velja

$$|c(u_2) - c(v_2)|_K \ge D - (\alpha_1 - 2)(K - 2D) = L_2 + K - 2D, \qquad (9)$$

saj je $L_2 = D - (\alpha_1 - 1)(K - 2D)$.

Če je $m \ge 4$, vidimo po podobnem premisleku kot pri dokazu za (7), da velja

$$\begin{aligned} |c(u_m) - c(v_m)|_K &\ge L_{m-2} + K - 2D - (\alpha_{m-1} - 2)(U_{m-2} - L_{m-2}) \quad (10) \\ &= L_m + K - 2D. \quad (11) \end{aligned}$$

* Sedaj si oglejmo (K, D)-barvanje grafa F_m, če je m liho število. Na enak način, kot smo pokazali (8), pokažimo tudi veljavnost neenakosti

$$\begin{aligned} |c(u_m) - v(v_m)|_K &\le (\alpha_{m-1} - 2)(U_{m-2} - L_{m-2}) + U_{m-2} - K + 2D \quad (12) \\ &= U_m - K + 2D. \quad (13) \end{aligned}$$

* Ponovno si oglejmo (K, D)-barvanje grafa G_m, kjer je m sodo število. Kot zgoraj, lahko privzamemo, da je $c(x_m) = 0$, $c(v_m) \in [D, K - D]$ in

$$c(u_m) \in [c(w_m) + D, c(w_m) + K - D].$$

Tedaj velja

$$|c(v_m) - c(u_m)|_K \leq c(w_m) + K - 2D.$$

Iz (9) in (10) dobimo oceno $c(w_m) \geq L_m$ in od tod, kot v primerih (7) in (8), tudi

$$|c(x_m) - c(w_m)|_K \geq L_m.$$

* Na koncu si oglejmo še (K, D)-barvanje grafa G_m, kjer je m liho število. Kot v vseh primerih lahko privzamemo, da velja $c(x_m) = 0$ in $c(v_m) \in [D, K - D]$. Iz (12) vidimo, da je $c(u_m) \in [K - D - U_m, U_m + D]$, zato velja $c(w_m) \in [K - U_m, U_m + K]$. Tako velja $|c(x_m) - c(w_m)|_K \leq U_m$.

S tem so trditve (i), (ii), (ii) in (iv) dokazane.

Naj bo n liho število in privzemimo, da na G_n obstaja (K, D)-barvanje. Ponovno lahko privzamemo, da velja $c(x_n) = 0$ in $c(v_n) \in [D, K - D]$. Iz izpeljave (7) in (12) sledi

$$c(w_n) \in [L_{n-1} + K - 2D - (\alpha_1 - 1)(U_{n-1} - L_{n-1}), 2D - L_{n-1} + (\alpha_n - 1)(U_{n-1} - L_{n-1})]$$

in

$$c(u_n) \in [K - D - U_{n-2} - (\alpha_{n-1} - 2)(U_{n-2} - L_{n-2}), (\alpha_{n-1} - 2)(U_{n-2} - L_{n-2}) + U_{n-2} + D].$$

Zato velja

$$\begin{aligned} |c(w_n) - c(u_n)|_K &\leq (\alpha_{n-1} - 2)(U_{n-2} - L_{n-2}) + U_{n-2} - L_{n-1} + \\ & 3D - K + (\alpha_n - 1)(U_{n-1} - L_{n-1}) \\ &= D - 1, \end{aligned}$$

kjer zadnjo enakost dobimo z razvojem vseh determinant po prvi vrstici. To je protislovje, zato graf G_n ni (K, D)-obarvljiv.

Privzemimo, da je n sodo število in je graf G_n (K, D)-obarvljiv. Ponovno lahko predpostavimo, da velja $c(x_n) = 0$ in $c(v_n) \in [D, K - D]$. Iz izpeljave neenakosti (8) sledi

$c(w_n) \in [K-2D-(\alpha_n-1)(U_{n-1}-L_{n-1})-U_{n-1}, (\alpha_n-1)(U_{n-1}-L_{n-1})+U_{n-1}-K+2D]$.

Tako je

$c(u_n) \in [K - D - (\alpha_n - 1)(U_{n-1} - L_{n-1}) - U_{n-1}, (\alpha_n - 1)(U_{n-1} - L_{n-1}) + U_{n-1} + D]$,

zato velja

$$|c(u_n) - c(v_n)|_K \leq U_{n-1} + (\alpha_n - 1)(U_{n-1} - L_{n-1}) = U_{n-1}.$$

Kot v (9) in (10) pa lahko pokažemo, da velja

$$\begin{aligned} |c(u_n) - c(v_n)|_K &\geq L_{n-2} + K - 2D - (\alpha_{n-1} - 2)(U_{n-2} - L_{n-2}) \\ &= U_{n-1} + 1, \end{aligned}$$

kjer zadnjo enakost dobimo z razvojem vseh determinant po prvi vrstici. To je protislovje, zato graf G_n ni (K, D)-obarvljiv. □

S tem smo dobili konstruktiven dokaz naslednjega izreka:

Izrek 3.9.[27] *Za poljubno racionalno število r med 2 in 3 obstaja ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim r.*

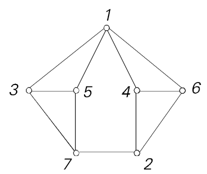
3.3 Grafi s $\chi^\star$ med 3 in 4

O obstoju ravninskih grafov s poljubnim zvezdnim kromatičnim številom med 3 in 4 vemo zelo malo. Najprej si bomo ogledali primer družine ravninskih grafov s $3 < \chi^\star < 4$, nato bomo pokazali, da za racionalno število oblike $r = 3 + 1/d$ obstaja ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim r, kar je pomembnejši rezultat tega razdelka. Na koncu bomo podali primer ravninskega grafa G s $\chi^\star(G) = \frac{15}{4}$.

Definirajmo družino ravninskih grafov na naslednji način:
Naj bosta W_{2k+1} in W_{2l+1} lihi kolesi in ab, cd povezavi koles W_{2k+1} in W_{2l+1}, ki nista prečki. Definirajmo graf $G_{k,l}$ kot disjunktno unijo koles W_{2k+1} in W_{2l+1}, v kateri identificiramo točki a in c, odstranimo povezavi ab in cd ter dodamo povezavo bd. To je Hajósova vsota koles W_{2k+1} in W_{2l+1}, ki jo bomo podrobneje predstavili v četrtem poglavju.

Trditev 3.10. $3 < \chi^\star(G_{k,l}) \leq 7/2 < 4$.

Dokaz. Na sliki 3.3 vidimo $(7,2)$-barvanje grafa $G_{1,1}$, torej je $\chi^\star(G_{1,1}) \leq 7/2$. Ker



Slika 3.3: $(7,2)$-barvanje grafa $G_{1,1}$

je za poljubna k in l graf $G_{k,l}$ homomorfen grafu $G_{1,1}$, velja tudi $\chi^\star(G_{k,l}) \leq 7/2$. V četrtem poglavju bomo videli, da je Hajósova vsota dveh 4-kromatičnih grafov prav tako 4-kromatičen graf. Ker je poljubno kolo 4-kromatičen graf, je tudi $G_{k,l}$ 4-kromatičen graf, to pa pomeni, da je $\chi^\star(G_{k,l}) > 3$. □

V razdelku 3.2 smo dokazali, da za poljubno racionalno število r med 2 in 3 obstaja ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom enakim r. Naravno je pričakovati podoben rezultat tudi za racionalno število med 3 in 4. Naslednja trditev nam da le delno rešitev tega problema, zato ta problem v celoti ostaja nerešen.

Trditev 3.11.[27] *Za poljubno celo število $d \geq 2$ obstaja ravninski graf G, za katerega velja:*

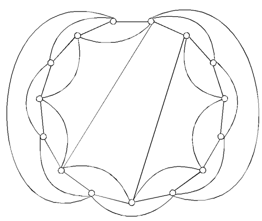
$$\chi^\star(G) = \frac{3d+1}{d}.$$

Dokaz. Naj bo $k = 3d + 1$ in G graf, dobljen iz k-cikla $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v_0$, v katerem za vsak $i = 0, 1, \ldots, k - 2$ povežemo točki v_i in v_{i+2}. Če je d lih, dodamo še povezavo $v_1 v_{k-1}$. Dobljen graf G je očitno ravninski, saj lahko povezave izmenično vlagamo v ravnino v notranjost in zunanjost cikla.

Definirajmo preslikavo $c(v_i) = id(\text{mod } k)$. Ker je vsaka točka v_i povezana le s točkami v_j, kjer je $j = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2(\text{mod } k)$, se $c(i)$ razlikuje od $c(j)$ za več kot d. Torej c predstavlja (k, d)-barvanje grafa G.

Ker je $\frac{k}{d} = 3 + \frac{1}{d}$, je med vsemi ulomki manjšimi od $\frac{k}{d}$ in s števcem ne večjim od k, največji $\frac{3}{1}$. Graf G ni 3-obarvljiv, saj bi si barve zaradi trikotnikov morale slediti zaporedoma, kar pa je nemogoče, ker ima graf G $3d + 1$ točk. Od tod sledi, da je $\chi^{\star}(G) = \frac{k}{d}$. □

D. E. Moser [27] je na podoben način konstruiral še grafe z zvezdnimi kromatičnimi števili enakimi $\frac{11}{3}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{23}{7}$, $\frac{27}{8}$ in $\frac{33}{10}$. Primer grafa z zvezdnim kromatičnim številom enakim $\frac{15}{4}$ vidimo na sliki 3.4.



Slika 3.4: Ravninski graf s $\chi^{\star} = \frac{15}{4}$

Poglavje 4

Kritični grafi

Za poljuben graf G in poljubno točko v velja $\chi(G - v) \geq \chi(G) - 1$. Za zvezdno kromatično število lahko pokažemo podoben rezultat:

Trditev 4.1.[34] *Za poljuben graf G in poljubno točko v tega grafa velja*

$$\chi^\star(G - v) > \chi^\star(G) - 2.$$

Ta ocena je najboljša v smislu, da za poljuben $\delta > 0$ in poljubno naravno število n obstaja graf H in točka v, da je $\chi^\star(H) \geq n$ in

$$\chi^\star(H - v) \leq \chi^\star(H) - 2 + \delta.$$

Dokaz. Zaradi veljavnosti neenakosti $\chi(G) \geq \chi^\star(G) > \chi(G) - 1$ lahko zapišemo

$$\chi^\star(G - v) > \chi(G - v) - 1 \geq \chi(G) - 2 \geq \chi^\star(G) - 2.$$

Za dokaz drugega dela izreka naj bo k takšno naravno število, da je $1/k \leq \delta$, in naj bo H graf, ki ga dobimo iz grafa G^k_{nk+1}, če mu dodamo univerzalno točko v. Po izreku 2.3 je $\chi^\star(H) = \chi(H) = n + 2$, vendar je

$$\chi^\star(H - v) = \chi^\star(G^k_{nk+1}) = n + 1/k.$$

Torej velja $\chi^\star(H - v) \leq \chi^\star(H) - 2 + \delta$. □

Ugotovili smo, da lahko z odstranitvijo točke grafa zmanjšamo zvezdno kromatično število za skoraj 2. Podoben rezultat dokažemo tudi za odstranitev poljubne povezave:

Trditev 4.2.[37] *Za poljubno povezavo $e = xy$ grafa G velja*

$$\chi^\star(G - e) \geq \chi^\star(G) - 1.$$

Dokaz. Naj c predstavlja (k,d)-barvanje grafa $G-e$. Brez izgube na splošnosti lahko predpostavimo, da je $c(x)=0$. Prav tako lahko privzamemo, da velja $|c(y)-c(x)|_k < d$, saj je sicer c tudi (k,d)-barvanje grafa G. Brez izgube na splošnosti se lahko tudi odločimo, da $c(y)$ leži "levo" od $c(x)=0$, torej $k-d<c(y)\leq k$. Sedaj definirajmo preslikavo $c' : V(G) \to \mathbb{Z}_{k+d}$ na naslednji način:

$$c'(v) = \begin{cases} c(v)+d & ; v \neq y, \\ 0 & ; v = y. \end{cases}$$

Očitno c' predstavlja $(k+d,d)$-barvanje grafa G. Torej za vsako (k,d)-barvanje grafa $G-e$ obstaja $(k+d,d)$-barvanje grafa G, zato velja $\chi^\star(G) \leq \chi^\star(G-e)+1$. □

Na osnovi teh ugotovitev je X. Zhu [37] podal naslednji domnevi:

Domneva 4.1. Poljuben graf G vsebuje največ eno točko u, za katero velja

$$\chi^\star(G-u) < \chi^\star(G) - 1.$$

Domneva 4.2. Poljuben graf G vsebuje najmanj eno točko u, za katero velja

$$\chi^\star(G-u) \geq \chi^\star(G) - 1.$$

Pri odstranjevanju točke danega grafa se skriva še en zanimiv problem: Katerim grafom se z odstranitvijo poljubne točke zmanjša zvezdno kromatično število za natanko 1? X. Zhou [37] je pokazal naslednjo trditev:

Trditev 4.3.[37] *Naj za graf G in vsako točko $u \in V(G)$ velja $\chi^\star(G-u) = \chi^\star(G)-1$. Naj bo H poljuben n-kritičen graf. Če ima graf G univerzalno točko x, za graf $G(x,H)$ prav tako velja $\chi^\star(G(x,H)-y) = \chi^\star(G(x,H))-1$, kjer je y poljubna točka grafa $G(x,H)$.*

Dokaz. V šestem poglavju bomo pokazali izrek 6.2, ki pravi, da za poljubno točko u grafa G velja $\chi^\star(G(u,H)) = \chi^\star(G(u,K_{\chi(H)}))$. Če je $\chi(H)=n$, tako tudi za univerzalno točko x grafa G velja

$$\chi^\star(G(x,H)) = \chi^\star(G(x,K_n)).$$

Ker je tudi vsaka točka grafa K_n v grafu $G(x,K_n)$ univerzalna, velja

$$\chi^\star(G(x,K_n)) = \chi(G(x,K_n)) = \chi(G)+n-1.$$

Vzemimo sedaj poljubno točko y grafa $G(x,H)$.

Če y ni točka grafa H, je graf brez te točke $(G-y)(x,H)$. Ker je x univerzalna točka grafa G, je zvezdno kromatično število grafa $(G-y)(x,H)$ enako

$$\chi^\star((G-y)(x,H)) = \chi(G-y)+n-1 = \chi(G)+n-2.$$

Če je y točka grafa H, velja $\chi(H-y) = \chi(H) - 1$, saj je H n-kritičen graf. Tedaj je

$$\chi^\star(G(x,H) - y) = \chi^\star(G(x, H-y)) = \chi^\star(G(x, K_{n-1})) = \chi(G) + n - 2.$$

Torej z odstranitvijo poljubne točke grafa $G(x,H)$ res zmanjšamo zvezdno kromatično število grafa za natanko 1. □

S pomočjo zgornjega izreka vidimo, da ima vsak graf G dobljen iz polnega grafa z zamenjavo njegovih točk z n-kritičnimi grafi lastnost, da za vsako točko $v \in V(G)$ velja $\chi^\star(G-v) = \chi^\star(G) - 1$.

Popolnoma stabilna množica je takšna neprazna podmnožica S množice $V(G)$, da je poljubna točka $v \in V(G) \setminus S$ povezana z vsako ali pa z nobeno točko množice S.

Na osnovi nekaj primerov grafov z lastnostjo, da je $\chi^\star(G-v) = \chi^\star(G)-1$ za poljubno točko, je X. Zhu v [34] postavil naslednje vprašanje:

Ali ima graf G netrivialno popolnoma stabilno množico S (to pomeni, da velja $2 \leq |S| < |V(G)|$), če je $|V(G)| > 2$ in $\chi^\star(G-v) = \chi^\star(G) - 1$ za poljubno točko v grafa G?

V primeru grafov, ki jih dobimo s pomočjo trditve 4.3, je množica $V(G-x)$ popolnoma stabilna.

Vsak graf, ki je k-kritičen po povezavah, je očitno tudi k-kritičen. Ker bomo obravnavali le grafe, ki so kritični po povezavah, bomo v nadaljevanju zaradi lažjega zapisa grafe, ki so **k-kritični po povezavah**, imenovali **k-kritični**.

Preostali del poglavja je razdeljen na štiri razdelke.

V razdelku 4.1 si bomo ogledali dve pomembni konstrukciji.

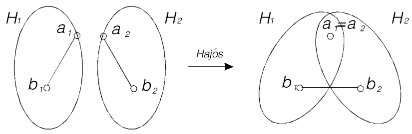
V razdelku 4.2 bomo s pomočjo teh konstrukcij dokazali obstoj grafov z zvezdnim kromatičnim številom, poljubno blizu spodnji meji $\chi - 1$ in z lastnostmi, ki jih ti konstrukciji ohranjata. Tako med drugimi obstaja poljubno velik 4-kritičen 3-povezan ravninski graf z zvezdnim kromatičnim številom, poljubno blizu 3.

V tretjem in četrtem razdelku bomo videli, da enako velja tudi za močno povezane kritične grafe in za grafe z veliko dolžino najkrajšega cikla.

4.1 Hajósovi konstrukciji

Hajósova konstrukcija. Naj bosta H_1 in H_2 poljubna grafa, a_1b_1 povezava v H_1 in a_2b_2 povezava v H_2. Graf $H = H_1(a_1,b_1) \circ H_2(a_2,b_2)$ dobimo iz grafov H_1 in H_2 tako, da identificiramo točki a_1 in a_2, odstranimo povezavi a_1b_1 in a_2b_2, ter dodamo povezavo b_1b_2. Grafični prikaz konstrukcije vidimo na sliki 4.1.

Če sta grafa H_1 in H_2 k-kritična, obstajata le takšni $(k-1)$-barvanji $c_1$in c_2 grafov $H_1 - a_1b_1$ in $H_2 - a_2b_2$, ki se ujemata na točkah a_1 in a_2, za kateri velja $c_1(b_1) = c_1(a_1) = c_2(a_2) = c_2(b_2)$. Ker v konstrukcij dodamo le povezavo b_1b_2, je graf H prav tako k-obarvljiv. Če iz grafa H odstranimo poljubno povezavo $e \neq b_1b_2$, obstajata $(k-1)$-barvanji c'_1 in c'_2 grafov, ki se na točkah a_1 in a_2 ujemata, na točkah b_1 in b_2 pa ne in zato skupaj predstavljata $(k-1)$-barvanje grafa H. V primeru, ko je $e = b_1b_2$, pa že barvanji c_1 in c_2 predstavljata $(k-1)$-barvanje grafa H. Tako vidimo, da je graf H prav tako k-kritičen.



Slika 4.1: Hajósova konstrukcija

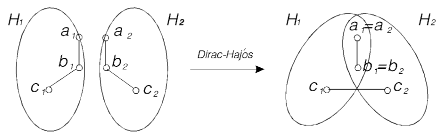
Graf, ki ga dobimo s Hajósovo konstrukcijo, je natanko 2-povezan, če sta grafa H_1 in H_2 2-povezana. Ker v vsakem od grafov $H_1 - a_1$ in $H_2 - a_2$ obstajata disjunktni poti od poljubne točke do točke $a_1 = a_2$ in do povezave b_1b_2 (saj sta grafa H_1 in H_2 2-povezana), obstajata natanko dve disjunktni poti med točkama iz $H_1 - a_1$ in $H_2 - a_2$. Med poljubnima točkama iz istega grafa $H_i, i = 1, 2$, prav tako obstajata vsaj dve disjunktni poti, saj sta grafa H_1 in H_2 2-povezana. V primeru, ko gre ena pot preko povezave a_ib_i in je v grafu H ni, pa preko drugega grafa poteka vsaj ena disjunktna pot čez točko a_i in nazaj po povezavi $b_jb_i, j \neq i$.

Prav tako Hajósova konstrukcija ohranja ravninskost, ker lahko vsak ravninski graf vložimo v ravnino tako, da leži poljubno izbrana povezava tega grafa na zunanjem licu grafa.

Dirac-Hajósova konstrukcija. Naj bosta H_1 in H_2 poljubna grafa, a_1b_1 in b_1c_1 povezavi iz H_1, ter a_2b_2 in b_2c_2 povezavi iz H_2. Graf $H = H_1(a_1, b_1, c_1) \circ H_2(a_2, b_2, c_2)$ dobimo iz grafov H_1 in H_2 tako, da identificiramo točko a_1 z a_2 ter točko b_1 z b_2, odstranimo povezavi b_1c_1 in b_2c_2, ter dodamo povezavo c_1c_2.

Kot pri Hajósovi konstrukciji velja, da je graf H k-kritičen, če sta grafa H_1 in H_2 k-kritična. Grafični prikaz konstrukcije vidimo na sliki 4.2.

Iz istega razloga kot pri Hajósovi konstrukciji za 2-povezanost velja, da Dirac-Hajósova konstrukcija ohranja 3-povezanost, v splošnem pa ne ohranja ravninskosti.



Slika 4.2: Dirac-Hajósova konstrukcija

4.2 2-povezani in 3-povezani grafi

Oglejmo si najprej oceno za zvezdno kromatično število k-kritičnih, natanko 2-povezanih grafov.

Trditev 4.4.[2] *Naj bo G k-kritičen, natanko 2-povezan graf. Potem velja*

$$\chi^{\star}(G) \leq k - 1/2.$$

Dokaz. Označimo z u in v tisti točki grafa G, za kateri je graf $G \backslash \{u, v\}$ nepovezan. Naj bo $V(G) \setminus \{u, v\} = V_1 \cup V_2$, kjer sta V_1 in V_2 disjunktni množici točk, med katerima ni nobene povezave. Ker je G k-kritičen graf, sta grafa G_1 in G_2, inducirana z množicama točk $V_1 \cup \{u, v\}$ in $V_2 \cup \{u, v\}$, $(k-1)$-obarvljiva. Prav tako velja, da morata biti točki u in v v enem grafu obarvani z isto barvo, v drugem grafu pa z različnima barvama, kajti sicer bi bil graf G $(k-1)$-obarvljiv. Torej točki u in v nista povezani. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ barvni razredi grafa G_1 ter $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ barvni razredi grafa G_2. Brez izgube na splošnosti lahko predpostavimo, da je $u, v \in A_1$ in $u \in B_1, v \in B_{k-1}$.

Definirajmo $(2k-1)$-barvanje c grafa G tako:

$$c(x) = \begin{cases} 1; & x = u, \\ 0; & x = v, \\ 2i - 1; & x \in A_i \setminus \{u, v\}, \\ 2i; & x \in B_i \setminus \{u, v\}. \end{cases}$$

Množici točk $A_i \setminus \{u, v\}$ in $B_i \setminus \{u, v\}$ sta nepovezani, zato so barve krajišč povezav med danima množicama vsaj za 2 narazen. Ker sta $u, v \in A_1$, za poljuben y, za katerega je $c(y) = 1$ ($y \in A_1$ ali $y = u$), para točk uy, vy nista povezavi v G. Ker je $v \in B_1$, za poljuben y, za katerega je $c(y) = 2$ ($y \in B_1$), točki v in y nista povezani. Ker je $v \in B_{k-1}$, za poljuben y, za katerega je $c(y) = 2(k-1)$ ($y \in B_{k-1}$), tudi točki v in y nista povezani. Torej se barvi poljubnih dveh povezanih točk razlikujeta vsaj za 2. Tako velja

$$\chi^\star(G) \le \frac{2k-1}{2} \le k - 1/2.$$

□

Sedaj lahko s pomočjo Hajósove konstrukcije dobimo poljubno velik, 4-kritičen, natanko 2-povezan ravninski graf, ki po trditvi 4.4 zadošča pogoju $2 < \chi^\star(G) \le 7/2$.

Zaradi trditve 4.4 se nam zastavi mnogo nadaljnjih vprašanj glede zvezdnega kromatičnega števila grafov:

- Ali za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja poljubno velik, 4-kritičen ravninski graf G, za katerega je $\chi^\star(G) < 3 + \varepsilon$?
- Ali za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak $k \ge 4$ obstaja poljubno velik, k-kritičen graf G, za katerega je $\chi^\star(G) < k - 1 + \varepsilon$?
- Kakšna sta odgovora na zastavljeni vprašanji ob predpostavki, da mora biti graf G 3-povezan?

Do konca razdelka se bomo posvetili zastavljenim vprašanjem.

Izrek 4.5.[2] *Označimo s P lastnost grafov, ki jo ohranja Hajósova konstrukcija. Naj bo $k \ge 4$ in privzemimo, da obstaja k-kritičen graf z lastnostjo P. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja poljubno velik, k-kritičen graf G z lastnostjo P, za katerega je $\chi^\star(G) < k-1+\varepsilon$.*

Dokaza tega izreka ne bomo izpeljali, ker temelji na ideji dokaza izreka 4.8 in je v podrobnostih enostavnejši.

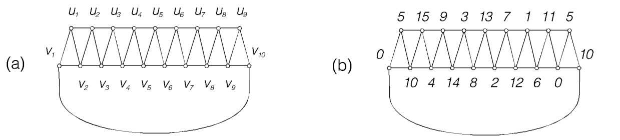
Hajósova konstrukcija ne ohranja 3-povezanosti, zato z izrekom 4.5 ne moremo odgovoriti na tretje postavljeno vprašanje.

Izrek 4.6.[2] *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja poljubno velik, 4-kritičen, 3-povezan ravninski graf G, za katerega je $\chi^\star(G) < 3 + \varepsilon$.*

Dokaz. Naj bo d liho naravno število, ki zadošča neenakosti $1/d < \varepsilon$. Naj bo še $m = 3d+1$ in $s = (d+1)/2$. Z G_d označimo graf z množico točk $\{v_1, v_2, \ldots, v_{3s+1}, u_1, u_2, \ldots, u_{3s}\}$ in s povezavami $v_iv_{i+1}; 1 \le i \le 3s$, $u_iu_{i+1}; 1 \le i \le 3s-1$, $v_iu_i; 1 \le i \le 3s$, $u_iv_{i+1}; 1 \le i \le 3s$ in v_1v_{3s+1}. Graf G_5 vidimo na sliki 4.3(a).

Definirajmo sedaj m-barvanje c grafa G_d tako:

$$\begin{aligned}
c(v_{3j+1}) &= 3d - 2j + 1; & j &= 0, 1, \ldots, s,\\
c(v_{3j+2}) &= 2d - 2j; & j &= 0, 1, \ldots, s-1,\\
c(v_{3j}) &= d - 2j + 1; & j &= 1, 2, \ldots, s,\\
c(u_{3j+1}) &= d - 2j; & j &= 0, 1, \ldots, s-1,\\
c(u_{3j+2}) &= 3d - 2j; & j &= 0, 1, \ldots, s-1,\\
c(u_{3j}) &= 2d - 2j + 1; & j &= 1, 2, \ldots, s.
\end{aligned}$$



Slika 4.3: 16-barvanje grafa G_5

Na sliki 4.3(b) lahko vidimo 16-barvanje grafa G_5.

Graf G_d je 4-kritičen. Pri barvanju s tremi barvami je zaporedje barv na točkah natanko določeno in sta točki v_1 in v_{3s+1} obarvani z isto barvo, torej lahko graf obarvamo s štirimi barvami. Če pa odstranimo eno povezavo grafa, lahko barvo točk na krajiščih povezave določimo tako, da točki v_1 in v_{3s+1} nista obarvani z isto barvo.

Graf G_d je tudi 3-povezan. Če odstranimo poljubno točko grafa G_d, vse točke grafa še vedno ležijo na ciklu, torej je dobljen graf 2-povezan.

Iz konstrukcije vidimo, da je graf G_d ravninski.
Naj bo $t(x, y) = |c(x) - c(y)|$. Potem je

$$\begin{aligned}
t(v_{3j}, v_{3j+1}) &= 2d, \\
t(v_{3j+1}, v_{3j+2}) &= d + 1, \\
t(v_{3j+2}, v_{3j+3}) &= d + 1, \\
t(v_1, v_{3s+1}) &= 2s = d + 1, \\
t(u_{3j}, u_{3j+1}) &= d + 1, \\
t(u_{3j+1}, u_{3j+2}) &= 2d, \\
t(u_{3j+2}, u_{3j+3}) &= d + 1, \\
t(u_{3j}, v_{3j}) &= d, \\
t(u_{3j+1}, v_{3j+1}) &= 2d + 1, \\
t(u_{3j+2}, v_{3j+2}) &= d, \\
t(u_{3j}, v_{3j+1}) &= d, \\
t(u_{3j+1}, v_{3j+2}) &= d, \\
t(u_{3j+2}, v_{3j+3}) &= 2d + 1.
\end{aligned}$$

Tako je najmanjša razdalja med barvami sosednjih točk v barvanju c enaka d. Od tod sledi:

$$\chi^\star(G_d) \leq \frac{3d+1}{d} < 3 + \varepsilon.$$

□

Vidimo torej, da obstaja poljubno velik, 4-kritičen, 3-povezan graf z željeno lastnostjo. Lotimo se sedaj bolj splošnega odgovora. V ta namen pokažimo najprej naslednjo lemo:

Lema 4.7. *Naj bo G k-kritičen graf, $k \geq 4$. Za vsako povezavo uv grafa G obstaja takšno k-barvanje G z barvami $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, da velja:*

(i) Točka u je obarvana z barvo 0, točka v pa je edina točka obarvana z barvo 1.
(ii) Obstaja $k-2$ sosednjih točk u $(a_2, a_3, \ldots, a_{k-1})$ in $k-2$ sosednjih točk v $(b_2, b_3, \ldots, b_{k-1})$, da sta poljubni točki a_i in b_i obarvani z barvo i.
(iii) Obstajajo takšne sosednje točke $w_0, w_3, w_4, \ldots, w_{k-1}$ točke b_2, da je vsaka točka w_i obarvana z barvo i.

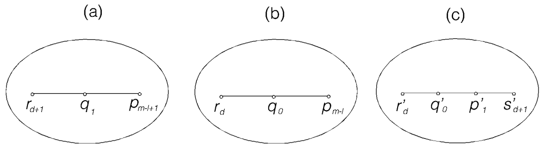
Dokaz. Odstranimo povezavo uv. Ker je graf G k-kritičen (po povezavah), obstaja $(k-1)$-barvanje grafa $G - uv$ z barvami $0, 2, 3, \ldots, k-1$, kjer sta točki u in v obarvani z barvo 0. Če bi v tem barvanju obstajala barva $i \neq 0$, s katero ni obarvana nobena sosednja točka točke u, bi lahko u obarvali z barvo i. Tako bi dobili $(k-1)$-barvanje grafa G, kar je v nasprotju s predpostavko. Isti argument lahko uporabimo tudi na točki v.

Obarvajmo sedaj točko v z barvo 1. Tako dobimo k-barvanje, ki zadošča pogojema (i) in (ii). Privzemimo, da ni mogoče zadostiti točki (iii). Potem za vsako sosednjo točko x točke v, ki je obarvana z barvo 2, obstaja barva j med preostalimi barvami $0, 3, 4, \ldots, k-1$, s katero ni obarvana nobena sosednja točka točke x. Zato lahko točko x obarvamo z barvo j in točko v z barvo 2. S tem ponovno dobimo $(k-1)$-barvanje grafa G, kar je v nasprotju s predpostavko. Torej točka (iii) drži. □

Izrek 4.8.[2] *Označimo s P lastnost grafov, ki jo ohranja Dirac-Hajósova konstrukcija. Naj bo $k \geq 4$ in privzemimo, da obstaja k-kritičen graf z lastnostjo P. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja poljubno velik, k-kritičen graf G z lastnostjo P, za katerega je $\chi^\star(G) < k - 1 + \varepsilon$.*

Dokaz. Naj bo G k-kritičen graf z lastnostjo P. Nadalje naj bo $d \geq 3$ naravno število, ki zadošča neenačbi $1/d < \varepsilon$ in naj bo še $m = (k-1)d + 1$. Obravnavali bomo m-barvanje grafa G in drugih grafov. Glede na takšna barvanja bomo imenovali povezave uv, za katere je $|c(u) - c(v)|_m \geq d$, **dobre**, ostale pa **slabe**.

Recimo, da lahko za naravno število $l < d$ najdemo k-kritičen graf G_l z lastnostjo P in z m-barvanjem c, za katerega so vse povezave dobre, razen ene povezave pq, kjer je $c(p) = m - l + 1$ in $c(q) = 1$. Privzemimo še, da obstaja povezava qr z lastnostjo $c(r) = d + 1$. Od tukaj bomo zaradi lažje pisave označevali barvo poljubne točke z indeksom. Graf G_l lahko vidimo na sliki 4.4(a). Označimo z $\hat{G}_l$ m-obarvan graf, ki ga dobimo iz grafa G_l s premikom barv za 1 s funkcijo $x \mapsto x - 1 \pmod{m}$. Tudi graf $\hat{G}_l$ lahko vidimo na sliki 4.4(b).



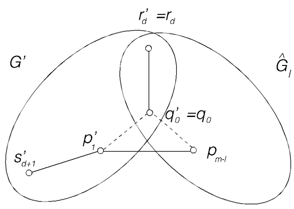
Slika 4.4: (a) Graf G_l, (b) graf $\hat{G}_l$ in (c) graf G'

Za trenutek še privzemimo, da lahko sestavimo k-kritičen graf G' z lastnostjo P in m-barvanjem c', kjer so vse povezave dobre, razen ene slabe povezave $p'q'$ z razdaljo 1. Brez izgube na splošnosti lahko zapišemo $c'(p') = 1$ in $c'(q') = 0$. Nadalje predpostavimo, da obstajata povezavi $q'r'$ in $p's'$, kjer je $c'(r') = d$ in $c'(s') = d + 1$. Graf G' lahko vidimo na sliki 4.4(c).

Sedaj uporabimo Dirac-Hajósovo konstrukcijo, da dobimo graf

$$G_{l+1} = G'(r'_d, q'_0, p'_1) \circ \hat{G}_l(r_d, q_0, p_{m-1}).$$

Dobljen graf G_{l+1} si lahko ogledamo na sliki 4.5.



Slika 4.5: Graf G_{l+1}

Vidimo, da se m-barvanji grafov G' in $\hat{G}_l$ ujemata na parih točk, ki jih konstrukcija identificira in različno obarva krajišči nove povezave $p'_1 p_{m-l}$. Tako smo dobili m-barvanje grafa G_{l+1}. Vse povezave, razen morda ene $p'_1 p_{m-l}$, so v tem barvanju dobre.

Če je $l+1<d$, obstaja ena slaba povezava $p_1'p_{m-l}$, ki določa razdaljo $l+1$. Graf G_{l+1} ima vse lastnosti grafa G_l, ki so potrebne za nadaljevanje postopka. Točke s_{d+1}', p_1' in p_{m-l} igrajo vlogo točk r_{d+1}, q_1 in p_{m-l+1} grafa G_l.

Če je $l+1=d$, so vse povezave grafa G_{l+1} dobre, zato velja

$$\chi^\star(G_{d-1}) \leq \tfrac{m}{d} = \tfrac{(k-1)d+1}{d} < k-1+\varepsilon.$$

Torej ima graf G_{d-1} željeno lastnost.

Pokažimo še, kako konstruiramo grafa G' in G_2. Naj bo u_0v_1 povezava v G. Po lemi 4.6 obstaja takšno k-barvanje grafa G z barvami $0,1,d+1,2d+1,\ldots,(k-2)d+1$, da velja:

(i) Točka u_0 je obarvana z barvo 0 in v_1 je edina točka obarvana z barvo 1.
(ii) Za poljuben $\lambda=1,2,\ldots,k-2$ obstaja sosednja točka $a_{\lambda d+1}$ točke u_0 in sosednja točka $b_{\lambda d+1}$ točke v_1, kjer indeks $\lambda d+1$ pomeni, da je točka obarvana z barvo $\lambda d+1$.
(iii) Točka b_{d+1} ima za sosede točke $w_0, w_{2d+1}, w_{3d+1}, \ldots, w_{(k-2)d+1}$, obarvane z barvo svojega indeksa.

To k-barvanje predstavlja m-barvanje, kjer so vse povezave dobre, razen u_0v_1, ki določa razdaljo 1. To je res, saj je v_1 edina točka z barvo 1, barve ostalih točk pa se razlikujejo vsaj za d.

Označimo z $G^{(1)}$ in $G^{(2)}$ kopiji tako m-obarvanega grafa G. Elemente obeh grafov označimo še z ustreznim indeksom zgoraj. Nato definirajmo graf H s pomočjo Dirac-Hajósove konstrukcije kot

$$H = G^{(1)}(a_{d+1}^{(1)}, u_0^{(1)}, v_1^{(1)}) \circ G^{(2)}(a_{d+1}^{(2)}, u_0^{(2)}, a_{2d+1}^{(2)}).$$

Iz obeh barvanj $G^{(1)}$ in $G^{(2)}$ dobimo naravno m-barvanje grafa H. Zaradi tega so vse povezave, razen ene, dobre. Slaba povezava je povezava $u_0^{(1)}v_1^{(2)}$, ki določa razdaljo 1. Pri Dirac-Hajósovi konstrukciji identificiramo točki $u_0^{(1)}$ in $u_0^{(2)}$, zato lahko slabo povezavo označimo tudi z $u_0^{(2)}v_1^{(2)}$.

Naj bo $G^{(3)}$ m-obarvan graf, dobljen iz grafa G po opisanem postopku: Barvi 0 in $d+1$ zamenjamo, barvo 1 nadomestimo z barvo d, ostale barve pa pustimo nespremenjene. Elemente grafa $G^{(3)}$ ponovno označimo z indeksom (3) zgoraj. Tako točko b_{d+1} grafa G označimo z $b_0^{(3)}$. Torej je $v_d^{(3)}$ edina točka, obarvana z barvo d, edina slaba povezava grafa $G^{(3)}$ pa je povezava $u_{d+1}^{(3)}v_d^{(3)}$.

Dalje, naj bo $G^{(4)}$ m-obarvan graf, dobljen iz G tako, da točke prebarvamo s predpisom $x \mapsto x-1 \pmod{m}$. Pri tem ohranimo razdalje med povezavami, slaba povezava grafa $G^{(4)}$ pa postane $u^{(4)}_{m-1}v^{(4)}_0$.

Uporabimo Dirac-Hajósovo konstrukcijo na $G^{(3)}$ in $G^{(4)}$, da dobimo graf

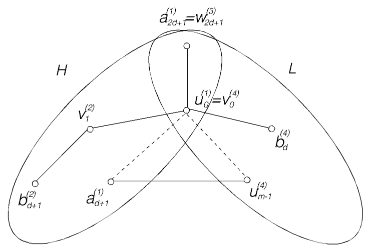
$$L = G^{(3)}(b^{(3)}_0, v^{(3)}_d, u^{(3)}_{d+1}) \circ G^{(4)}(v^{(4)}_0, b^{(4)}_d, w^{(4)}_{m-1}).$$

Graf L od grafov $G^{(3)}$ in $G^{(4)}$ podeduje m-barvanje, kjer je le ena povezava slaba. To je povezava $v^{(4)}_0 u^{(4)}_{m-1}$, ki določa razdaljo 1.

Sedaj uporabimo še Dirac-Hajósovo konstrukcijo na grafih H in L:

$$G' = H(a^{(1)}_{2d+1}, u^{(1)}_0, a^{(1)}_{d+1}) \circ L(w^{(3)}_{2d+1}, v^{(4)}_0, u^{(4)}_{m-1}).$$

Graf G' si lahko ogledamo na sliki 4.6.



Slika 4.6: Graf G'

Iz konstrukcije vidimo, da je edina slaba povezava grafa G' povezava $v^{(2)}_1 u^{(1)}_0$, ki določa razdaljo 1. Pot $b^{(2)}_{d+1}v^{(2)}_1 u^{(1)}_0 b^{(4)}_d$ ima lastnosti poti $s'_{d+1}p'_1q'_0r'_d$ iz grafa G', ki smo ga potrebovali za konstrukcijo grafa G_{l+1}.

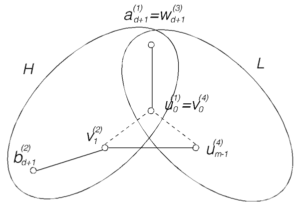
Sedaj uporabimo Dirac-Hajósovo konstrukcijo na grafih H in L še drugače:

$$G_2 = H(a^{(1)}_{d+1}, u^{(1)}_0, v^{(2)}_1) \circ L(w^{(3)}_{d+1}, v^{(4)}_0, u^{(4)}_{m-1}).$$

Graf G_2 vidimo na sliki 4.7.

Edina slaba povezava grafa G_2 je povezava $v^{(2)}_1 u^{(4)}_{m-1}$, ki določa razdaljo 2. Pot $b^{(2)}_{d+1}v^{(2)}_1 u^{(4)}_{m-1}$ ima lastnosti poti $r_{d+1}q_1p_{m-1}$ grafa G_2, ki je potreben za začetek indukcijskega postopka.

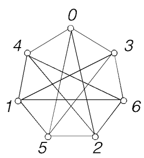
Ker je d poljubno velik, lahko dobimo poljubno velik graf G_{d-1} z lastnostjo P grafa G. $\square$



Slika 4.7: Graf G_2

Iz izreka 4.6 neposredno sledi, da za $k \geq 4$ in poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja poljubno velik, k-kritičen, 3-povezan graf G, za katerega je $\chi^\star(G) < k - 1 + \varepsilon$.

Tu pa se postavi vprašanje obstoja poljubno velikih grafov večje povezanosti. Ali lahko najdemo poljubno velik, 4-kritičen, 4-povezan graf G, za katerega je $\chi^\star(G) < 3 + \varepsilon$? Ali sploh obstaja poljubno velik, 4-kritičen, 4-povezan graf, za katerega je $\chi^\star(G) < 4$? Na sliki 4.8 vidimo 4-kritičen, 4-povezan graf G s 7-barvanjem z najmanjšo



Slika 4.8: $(7, 2)$-barvanje grafa G

razdaljo 2, torej velja $\chi^\star(G) \leq 7/2$. Kako sedaj sestaviti večje grafe iz manjših? Odgovor na ta vprašanja bomo predstavili v naslednjem razdelku.

4.3 Močno povezani kritični grafi

Kot smo že omenili, bomo v tem razdelku odgovorili na zastavljeno vprašanje obstoja močno povezanih, $(m+1)$-kritičnih grafov z zvezdnim kromatičnim številom $\chi^\star(G)$, ki je poljubno blizu $\chi(G)-1=m$.

Izrek 4.9.[31] *Za poljubni celi števili $m \geq 4$ in $k \geq 2$ obstaja m-povezan, $(m+1)$-kritičen graf H_m^k, za katerega velja*

$$m < \chi^\star(H_m^k) \leq m + \tfrac{1}{k}.$$

Dokaz. Za dani števili $m \geq 4$ in $k \geq 2$ konstruiramo graf H_m^k tako:
Množica točk V grafa H_m^k naj bo množica $\mathbb{Z}_{mk+1}$.
Naj bo

$$V^* = \{nk; n = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$V_1 = \{0, 1, \ldots, k-1\} \text{ in}$$

$$V_n = \{(n-1)k+1, (n-1)k+2, \ldots, nk-2, nk-1\} \text{ za } n = 2, \ldots m.$$

Vidimo, da množice $V^*, V_1, V_2, \ldots, V_m$ tvorijo razbitje množice točk V grafa G. Velja $|V^*| = m$, $|V_1| = k$ in $|V_n| = k-1$ za $n = 2, \ldots, m$.

Z E označimo množico povezav grafa H_m^k. Par točk ij je povezava v H_m^k natanko tedaj, ko velja

(i) $|i-j|_{mk+1} = k$ ali
(ii) $i \in V^*$ in $|i-j|_{mk+1} > k$.

Zato je preslikava $\gamma(i) = i$ res $(mk+1, k)$-barvanje grafa H_m^k. Torej velja

$$\chi^\star(H_m^k) \leq m + \tfrac{1}{k}.$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da je graf H_m^k tudi $(m+1)$-kritičen in m-povezan.

Najprej pokažimo, da H_m^k ni m-obarvljiv. Privzemimo nasprotno, da obstaja m-barvanje Δ grafa H_m^k. Ker podmnožica $V^* = \{nk; n = 1, 2, \ldots, m\}$ v V inducira poln graf reda m, lahko privzamemo, da je $\Delta(nk) = n$ za $n = 1, 2, \ldots, m$. Ker je točka $k-1$ sosednja vsem točkam nk za $n = 2, 3, \ldots, m$, jo moramo obarvati z barvo 1. Nadalje moramo točko $2k-1$ obarvati z barvo 2, saj je sosednja točkam $k-1$ in nk za $n = 3, 4, \ldots, m$. V zaporedju točk $(k-1, 2k-1, \ldots,\ mk-1,\ k-2,\ 2k-2, \ldots,$ $mk-2, \ldots, 2, k+2, \ldots, (m-1)k+2, 1)$ je barva vsake točke določena z barvami predhodnjih točk in seveda z barvami točk nk za $n = 1, 2, \ldots, m$. Vendar v tem zaporedju na koncu ne ostane prosta nobena barva, s katero bi lahko obarvali točko 1. Zato graf

H_m^k ni m-obarvljiv.

Sedaj pokažimo, da je graf $H_m^k - e$ m-obarvljiv za poljubno povezavo $e \in E(H_m^k)$. V nadaljevanju bomo velikokrat uporabili dejstvo, da je poljubno zaporedje točk $(i, i+1, i+2, \ldots, i+(k-1))$ (kjer prištevamo po modulu $mk+1$) neodvisna množica v H_m^k.

Naj bo $e = ij$ povezava v H_m^k.

Najprej si oglejmo primer, ko vsaj eno od obeh krajišč povezave e, recimo i, ni element množice V^*. Potem je stopnja točke i v grafu $H_m^k - e$ enaka $m-1$, saj je točka i v grafu H_m^k stopnje m (točka i je povezana s točkami $i-k, i+k$ ter z večkratniki števila k, razen dveh, ki sta najbližji i). Tako množica $V - i$ razpade na m neodvisnih podmnožic k zaporednih točk. Graf $H_m^k - i$ je torej m-obarvljiv. Ker pa je točka i v $H_m^k - e$ stopnje $m-1$, lahko to m-barvanje grafa $H_m^k - i$ razširimo na m-barvanje grafa $H_m^k - e$.

Privzemimo sedaj, da sta točki i in j iz množice V^*. Če je $i = nk$ in $j = (n+1)k$, označimo z W množico $\{nk, nk+1, \ldots, (n+1)k\}$. Množico $V \setminus W$ nato razbijemo na $m-1$ podmnožic k zaporednih elementov. Ker je tudi množica W v grafu G neodvisna, tako dobimo m-barvanje grafa $H_m^k - e$.

Predpostavimo sedaj, da je $i = n_1 k$, $j = n_2 k$ in $n_1 \leq n_2 - 2$. Ker je $m \geq 4$, obstaja takšen n', da velja $n_1 + 1 \leq n' \leq n_2$ in je množica $V_{n'} \cup V_1$ neodvisna v grafu H_m^k. Množico $V \setminus (V_{n'} \cup V_1 \cup \{n_1 k, n_2 k\})$ lahko na naraven način razbijemo na $m-2$ neodvisnih podmnožic k zaporednih elementov. Zato lahko teh $m-2$ delov obarvamo z $m-2$ barvami, nato pa elemente množice $V_1 \cup V_{n'}$ obarvamo z eno barvo in točki $n_1 k, n_2 k$ z drugo barvo. Tako je graf $H_m^k - e$ m-obarvljiv.

Preostane nam le še pokazati, da je graf H_m^k m-povezan. Zaradi Mengerjevega izreka moramo pokazati, da med poljubnima točkama i in j grafa H_m^k obstaja vsaj m notranje disjunknih poti.

Poljubni točki i in j $(i < j)$ grafa H_m^k imata ali $m-4$ ali $m-3$ ali pa $m-2$ skupnih sosedov v množici V^*.

- Naj imata i in j natanko $m-4$ skupnih sosedov v V^*. Tako skupne sosednje točke tvorijo $m-4$ disjunknih poti, ki povezujejo točki i in j. Točke iz $V^* \cup \{0, k-1\}$ imajo natanko $m-1$ sosedov v V^*, zato morata točki i in j ležati v množici $V \setminus (V^* \cup \{0, k-1\})$. Torej velja tudi $|i-j|_{mk+1} \geq 2k$. Naj bodo $i_1 k, i_2 k$ ter $j_1 k, j_2 k$ točke iz V^*, ki niso sosednje i oziroma j, kot so označene. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo $i_1 k < i < i_2 k$ ter $j_1 k < j < j_2 k$, zato je $i - k < i_1 k < i < i_2 k < i + k$.

  - Če je $j = i + 2k$, so

$$P_1 = i(i+k)j, \qquad P_2 = i(i-k)(i_2 k)j,$$
$$P_3 = i(j_2 k)(i_1 k)j \text{ in} \qquad P_4 = i(j_1 k)(j+k)j$$

štiri dodatne poti med i in j.

– V nasprotnem primeru pa so dodatne poti

$$P_1 = i(i+k)(i_1k)j), \qquad P_2 = i(i-k)(i_2k)j,$$
$$P_3 = j(j+k)(j_1k)i) \text{ ter} \qquad P_4 = j(j-k)(j_2k)i.$$

- Če imata i in j natanko $m-3$ skupnih sosedov v V^*, mora veljati ena od možnosti:

  (i) $i \in V \setminus (V^* \cup \{0, k-1\})$, $j \in V^*$ in $|i-j|_{mk+1} > k$,

  (ii) $i, j \in V \setminus V^*, i \in \{0, k-1\}$ in $|i-j|_{mk+1} \geq 2k - i$,

  (iii) $i, j \in V \setminus V^*$ in $|j - i_2k|_{mk+1} < k$.

  – V primeru (i) sta točki i in j povezani, zato so

  $$P_1 = ij, \qquad P_2 = i(i+k)(i_1k)j \text{ in}$$
  $$P_3 = i(i-k)(i_2k)j$$

  dodatne tri poti k $m-3$ potem preko sosednjih točk.

  – V drugem primeru lahko brez izgube na splošnosti privzamemo, da je $i = 0$. Če je $j = (m-2)k+1$, k potem preko sosednjih točk dodamo še

  $$P_1 = 0((m-1)k+1)j, \qquad P_2 = 0((m-1)k)((m-3)k+1)j \text{ in}$$
  $$P_3 = 0((m-2)k)(mk)j.$$

  V vseh drugih primerih so

  $$P_1 = 0(j_1k)(j+k)j, \qquad P_2 = 0(j_2k)(j-k)j \text{ in}$$
  $$P_3 = 0((m-1)k+1)((m-2)k+1)(mk)j$$

  dodatne poti.

  – V tretjem primeru velja $i_2 = j_1$.
  Če je $j = i+k$, sta točki i in j povezani, zato so

  $$P_1 = ij, \qquad P_2 = i(j_2k)(i_1k)j \text{ in}$$
  $$P_3 = i(i-k)(i_2k)(j+k)j$$

  dodatne disjunktne poti.
  Če j ni enak $i+k$, k $m-3$ potem preko sosednjih točk dodamo poti

  $$P_1 = i(i-k)(i_2k)(j+k)j, \qquad P_2 = i(i+k)(i_1k)j \text{ in}$$
  $$P_3 = i(j_2k)(j-k)j.$$

- Če imata točki natanko $m-2$ skupnih sosedov v V^*, je $i = 0$ in $j = k-1$ ali pa ležita točki i in j v množici V^*.

  – V prvem primeru sta

$P_1 = 0((m-1)k+1)((m-2)k)(mk)(k-1)$ in
$P_2 = 0k(3k-1)(2k-1)(k-1)$

manjkajoči poti.

– Če sta točki i in j iz množice V^*, sta povezani in imata vsaj enega skupnega soseda v množici $V \setminus V^*$. Tako dobimo dve dodatni disjunktni poti med točkama i in j.

S tem je dokaz končan. □

Za konec še povejmo, da izrek velja tudi za $m = 2, 3$. Za $m = 2$ so željeni kritični grafi lihi cikli. V primeru $m = 3$, $k \geq 3$, pa je željeni graf $H_k^3 - e^*$, kjer je $e^* = (k, 3k)$.

4.4 Kritični grafi z veliko dolžino najkrajšega cikla

V tem razdelku bomo pokazali, da imajo kritični grafi z veliko dolžino najkrajšega cikla zvezdno kromatično število $\chi^\star(G)$ blizu $\chi(G) - 1$. Velja celo naslednji, močnejši rezultat:

Izrek 4.10.[31] *Naj bosta $m \geq 2$ in $t \geq 1$ celi števili. Če ima graf G takšno točko x, da je graf $G - x$ m-obarvljiv in ima vsak cikel, ki vsebuje x, dolžino vsaj $m(t-1)+2$, potem velja*

$$\chi^\star(G) \leq m + \tfrac{1}{t}.$$

Dokaz. Naj bo c' m-barvanje grafa $G - x$. Željeno $(tm+1, t)$-barvanje c grafa G definirajmo na naslednji način:

Označimo z V_i barvne razrede $c'^{-1}(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ danega m-barvanja c'. V $(tm+1, t)$-barvanju c grafa G bomo z barvami $0, 1, \ldots, t$ obarvali točke iz $V_1 \cup \{x\}$ in z barvami $it+1, it+2, \ldots, (i+1)t$ točke V_{i+1} za $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Z W_i označimo množico točk, ki se pri barvanju c obarvajo z barvo i, torej $W_i = c^{-1}(i)$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, tm$. Množice W_i konstruiramo induktivno v zaporedju

$$W_t, W_{2t}, \ldots, W_{mt},\ W_{t-1}, W_{2t-1}, \ldots,\ W_{mt-1}, \ldots, W_1, W_{t+1}, \ldots, W_{(m-1)t+1}, W_0$$

tako, da velja implikacija

$$i = (j-1)t + q,\ 1 \leq q \leq t \Rightarrow W_i \subset V_j.$$

Torej najprej določimo množico $W_t = V_1 \cap N(x)$. Tu $N(x)$ določa množico vseh točk, sosednjih točki x. Nadaljujemo z indukcijsko predpostavko, da je množica W_i $(i \neq 0)$ že določena. Sedaj bomo opisali postopek, kako določimo naslednjo množico

$W_{i+t \pmod{tm+1}}$.

Recimo, da je $i = (j-1)t + q$ in $1 \leq q \leq t$. Potem po definiciji velja $W_i \subset V_j$. Na tem mestu ločimo dva primera:

- Če je $j < m$, je naslednja množica, ki jo moramo določiti, množica W_{jt+q}. Iz zaporedja, po katerem določamo množice W_k, vemo, da so množice W_{jt+q+1}, $W_{jt+q+2}, \ldots, W_{(j+1)t}$ že določene.
  Če je $q = 1$, smo definirali že vse množice W_{jt+k}, $2 \leq k \leq t$, zato naj bodo v množici W_{jt+1} preostali elementi množice V_{j+1}:

  $$W_{jt+1} = V_{j+1} \setminus (W_{jt+q+1} \cup W_{jt+q+2} \cup \cdots \cup W_{(j+1)t}).$$

  Če je $g > 1$, pa damo v naslednjo množico vse sosede množice W_i, ki ležijo v množici V_{j+1} in še niso v nobeni množici W_k:

  $$W_{jt+q} = N(W_i) \cap (V_{j+1} \setminus (W_{jt+q+1} \cup W_{jt+q+2} \cup \cdots \cup W_{(j+1)t})).$$

  Z $N(W_i)$ označimo množico tistih točk grafa G, ki so sosednje vsaj z eno točko iz množice W_i.

- Če je $j = m$, nadaljujemo s konstrukcijo množice W_{q-1}. Vidimo, da so množice $W_q, W_{q+1}, \ldots, W_t$ že določene.
  Če je $q = 1$, nam preostane določiti še zadnjo množico W_0. Kot v prejšnjem primeru naj bodo v množici W_0 preostali elementi množice V_1, vključno s točko x:

  $$W_0 = \{x\} \cup (V_1 \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_t)).$$

  Če pa je $q > 1$, je definicija množice W_{q-1} enaka definiciji množice W_{jt+q}:

  $$W_{q-1} = N(W_i) \cap (V_1 \setminus (W_q \cup W_{q+1} \cup \cdots \cup W_t)).$$

V vsaki množici W_{jt+q} so nekatere točke iz V_{j+1}, ki niso v že določenih množicah W_{jt+q+1}, $W_{jt+q+2}, \ldots, W_{(j+1)t}$. V množici W_0 so vse preostale točke iz V_1 in točka x, zato tvorijo množice $W_0, W_1, \ldots, W_t$ razbitje množice $V_1 \cup \{x\}$. Za vsak $i = 1, 2, \ldots, m-1$ pa zaradi istega razloga množice $W_{it+1}, W_{it+2}, \ldots, W_{(i+1)t}$ tvorijo razbitje množice V_{i+1}. Naj za poljubno točko v iz množice W_i velja $c(v) = i$. Potem c predstavlja preslikavo iz $V(G)$ v $\mathbb{Z}_{tm+1}$.

Pokažimo, da c predstavlja $(tm+1, t)$-barvanje grafa G, torej, da za poljubno povezavo ab v G velja $t \leq |c(a) - c(b)| \leq t(m-1) + 1$.

V nasprotnem primeru bi obstajala takšna povezava $ab \in E(G)$, za katero bi veljalo ali $|c(a) - c(b)| < t$ ali $|c(a) - c(b)| > t(m-1) + 1$. Privzemimo, da je $c(a) > c(b)$.

- Najprej si oglejmo primer, ko je $c(a) - c(b) < t$. Ker je $c(x) = 0$ in za poljuben $y \in N(x) \cap V_1$ velja $c(y) = t$, povezava ab ne more biti oblike yx, kjer je $y \in V_1$. Zato morata biti točki a in b v različnih množicah: $b \in V_i$ in $a \in V_{i+1}$, $i \leq m-1$.

  Iz konstrukcije vemo, da je $V_{i+1} = W_{it+1} \cup W_{it+2} \cup \cdots \cup W_{(i+1)t}$. Ker je točka a iz množice V_{i+1}, velja

  $$it + 1 \leq c(a) \leq (i+1)t.$$

  Od tod sledi, da je $c(b) = (i-1)t + q$ za $q \geq 2$. Ker je $b \in W_{(i-1)t+q}$, po definiciji množice $W_{it+q} = N(W_{(i-1)t+q}) \cap (V_{i+1} - (W_{it+q+1} \cup W_{it+q+2} \cup \cdots W_{(i+1)t}))$ velja

  $$N(b) \cap V_{i+1} \subset W_{it+q} \cup W_{it+q+1} \cup \cdots W_{(i+1)t}.$$

  Tako lahko zapišemo neenakost

  $$it + q \leq c(a) \leq (i+1)t,$$

  ki pa je v nasprotju s predpostavko $c(a) - c(b) < t$.

- Če je $c(a) - c(b) > t(m-1) + 1$, mora ležati točka a v množici V_m, točka b pa v množici $V_1 \cup \{x\}$. Še več, točka a ne leži v množici $W_{(m-1)t+1}$. Ker smo množice W_k konstruirali po poti grafa $G - x$, za poljubno točko $u \in V_m \setminus W_{(m-1)t+1}$ obstaja točka $u' \in V_1 \cap N(x)$ in pot od u do u' v $G - x$ dolžine največ $(t-1)m$ (to pomeni s $(t-1)m$ točkami). Tako b ni točka x, saj bi sicer v grafu G dobili cikel dolžine največ $(t-1)m + 1$, ki vsebuje x, kar je v nasprotju s predpostavko izreka. Če je $a \in W_{(m-1)t+q}$ za $2 \leq q \leq t$, točka b leži v množici $W_{q-1} \cup W_q \cup \cdots \cup W_t$, kar vidimo iz konstrukcije množice $W_{(m-1)t+q}$. Torej velja neenakost

  $$c(a) - c(b) \leq t(m-1) + 1,$$

  ki je v nasprotju s predpostavko.

$\square$

Posledica 4.11. *Naj bosta $m \geq 2$ in $t \geq 1$ celi števili. Potem za vse $(m+1)$-kritične grafe G, z dolžino najkrajšega cikla vsaj $m(t-1) + 2$, velja*

$$\chi^\star(G) \leq m + \tfrac{1}{t}.$$

Poudarimo naj, da je mnogo kritičnih grafov, za katere sta zvezdno in običajno kromatično število enaki. Recimo, da je graf G_1 m_1-kritičen in graf G_2 m_2-kritičen. Graf $G_1 + G_2$ je graf, dobljen iz disjunktne unije grafov G_1 in G_2 tako, da vsako točko iz

G_1 povežemo z vsemi točkami iz G_2. Že od prej vemo, da je graf $G_1 + G_2$ $(m_1 + m_2)$-kritičen. Prav tako je $\chi^\star(G_1 + G_2) = \chi(G_1 + G_2) = m_1 + m_2$, saj je komplement grafa $G_1 + G_2$ nepovezan graf. Od tod sledi, da je pogoj dolžine najkrajšega cikla v posledici 4.11 potreben. Po drugi strani nam samo pogoj dolžine najkrajšega cikla ne da grafov G z zvezdnim kromatičnim številom blizu $\chi(G) - 1$, kar je razvidno iz posledice 2.8. Torej je tudi pogoj kritičnosti grafa v posledici 4.11 potreben.

Do sedaj znani kritični grafi G, za katere velja $\chi(G) = \chi^\star(G)$, vsebujejo trikotnike. Ker še nihče ni našel k-kritičnih grafov brez trikotnikov z zvezdnim kromatičnim številom enakim k, je postavljena naslednja domneva [31]:

Domneva 4.3. Če je G kritičen graf brez trikotnikov, velja $\chi^\star(G) < \chi(G)$.

Poglavje 5

Deljeno kromatično število

V tem poglavju bomo spoznali deljeno kromatično število in dve interpretaciji deljenega barvanja. Definirali bomo $\chi^\star$-ekstremne grafe in pokazali, da so takšni tudi lihi cikli.

5.1 Definicije

V tem razdelku bomo definirali deljeno, merljivo in izbirljivo kromatično število ter $\chi^\star$-ekstremne grafe.

Preslikavo c iz družine $\mathcal{S}$ neodvisnih množic točk grafa G v interval $[0,1]$ imenujemo **deljeno barvanje**, če za vsako točko x grafa G velja

$$\sum_{S \in \mathcal{S},\ x \in S} c(S) = 1.$$

Vrednost deljenega barvanja c je enaka $\sum_{S \in \mathcal{S}} c(S)$. **Deljeno kromatično število,** $\chi_f(G)$, grafa G je infimum vrednosti vseh deljenih barvanj grafa G.

V definiciji deljenega kromatičnega števila lahko namesto pogoja $\sum_{S \in \mathcal{S},\ x \in S} c(S) = 1$ uporabljamo nekoliko šibkejši pogoj $\sum_{S \in \mathcal{S},\ x \in S} c(S) \geq 1$, saj je $\chi_f(G)$ najmanjša med vrednostmi deljenih barvanj.

Naj bo m število maksimalnih neodvisnih množic v grafu G in A $n \times m$ matrika, v kateri je $a_{ij} = 1$, če točka i leži v j-ti neodvisni množici, in $a_{ij} = 0$ sicer. Tedaj je $\chi_f(G)$ rešitev naslednjega problema linearnega programiranja:

$$\chi_f(G) = \inf_{x \in \mathbb{R}^m, x \geq 0} 1_m^T x \text{ in } Ax \geq 1_n.$$

Ker je matrika A celoštevilska, je infimum dosežen in je rešitev tega problema racionalno število. Od tod vidimo, da je deljeno kromatično število, podobno kot zvezdno kromatično število, racionalno.

Rešitev dualnega problema zgoraj opisanega problema linearnega programiranja,

$$\omega_f(G) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0} 1_n^T x \text{ in } xA^T \leq 1_m,$$

je **deljena velikost največje klike** grafa G.

Če v definiciji deljenega kromatičnega števila preslikava c namesto v interval $[0,1]$ slika v množico $\{0,1\}$, postane c običajno barvanje grafa G. Rešitev pripadajočega celoštevilskega problema linearnega programiranja je kromatično število grafa G, rešitev dualnega problema pa v prvem poglavju omenjena velikost največje klike, $\omega(G)$, grafa G.

Graf G imenujemo **$\chi^\star$-ekstremen**, če zanj velja enakost

$$\chi^\star(G) = \chi_f(G).$$

Dodajmo sedaj še definicijo merljivega in izbirljivega kromatičnega števila.

Naj bo I interval na $\mathbb{R}$ dolžine 1 in r poljubno realno število, večje ali enako 1. Označimo z $I_m^{(r)}$ množico vseh merljivih podmnožic I z mero $1/r$. Preslikavo $c : V(G) \to I_m^{(r)}$, za katero za vse povezave $xy \in E(G)$ velja $c(x) \cap c(y) = \emptyset$, imenujemo **r-merljivo barvanje** grafa G. Če takšno r-merljivo barvanje grafa obstaja, pravimo, da je graf G **r-merljivo obarvljiv**. **Merljivo kromatično število** grafa G je definirano [37] kot

$$\chi^m(G) = \inf\{r; G \text{ je } r\text{-merljivo obarvljiv}\}.$$

Naj bosta a in b, $a \geq 2b > 1$, poljubni celi števili. Graf G je **$(a:b)$-izbirljiv**, če obstaja preslikava c, ki jo imenujemo **$(a:b)$-izbira**, ki vsaki točki v grafa G priredi podmnožico $c(v)$ množice $\mathbb{Z}_a$ moči b, tako da je $c(u) \cap c(v) = \emptyset$ brž, ko je $uv \in E(G)$. **Izbirljivo kromatično število** grafa G je definirano [3] kot

$$\chi_r(G) = \inf\{\tfrac{a}{b}; G \text{ je } (a:b)\text{-izbirljiv}\}.$$

Ta definicija je očitno ekvivalentna definiciji, ki jo je podal D. C. Fisher [11]: **m-barvanje** grafa G priredi vsaki točki m različnih barv tako, da poljubni sosednji točki nimata skupnih barv. Najmanjše število barv v m-barvanju imenujemo **m-kromatično število**, $\chi_m(G)$, grafa G. Očitno velja $\chi_{k+l}(G) \leq \chi_k(G) + \chi_l(G)$, zato $\lim_{k\to\infty} \frac{\chi_k(G)}{k}$ obstaja in je enaka infimumu. Torej

$$\chi_r(G) = \lim_{k\to\infty} \frac{\chi_k(G)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\chi(G \boxtimes K_k)}{k}.$$

5.2 Interpretacije deljenega kromatičnega števila

V tem razdelku bomo pokazali, da so deljeno, merljivo in izbirljivo kromatično število enaka. S tem dobimo orodje za lažji izračun deljenega kromatičnega števila. Izpeljali bomo tudi oceno za deljeno kromatično število poljubnega grafa, s pomočjo katere bomo pokazali, da sta zvezdno in deljeno kromatično število lihih ciklov enaki, kar pomeni, da so lihi cikli $\chi^\star$-ekstremni grafi.

Izrek 5.1.[37] *Naj bo $r \geq 1$ realno število. Graf G je r-merljivo obarvljiv natanko tedaj, ko je G r-deljeno obarvljiv.*

Dokaz. Naj c predstavlja r-merljivo barvanje grafa G. Sestavili bomo deljeno barvanje grafa G z vrednostjo največ r. Naj bo $S \in \mathcal{S}$ poljubna neodvisna množica. Zapišimo množici $X_S = \{q \in I; q \in \bigcap_{x \in S} c(x)\}$ in $Y_S = \{q \in I; q \in \bigcup_{x \notin S} c(x)\}$. Trdimo, da je preslikava $c' : \mathcal{S} \to [0,1]$, definirana s predpisom $c'(S) = r \cdot m(X_S \setminus Y_S)$, željeno barvanje, kjer je $m(X)$ mera množice X.

Ker je $m(X_S) \leq 1/r$, za poljubno množico $S \in \mathcal{S}$ velja $0 \leq c'(S) \leq 1$. Pokažimo, da za poljubno točko x grafa G velja

$$\sum_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} c'(S) \geq 1.$$

Naj bo x poljubna točka grafa G. Ker je $m(c(x)) = 1/r$ in velja

$$\sum_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} c'(S) \geq r \cdot m\Big(\bigcup_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} (X_S \setminus Y_S)\Big),$$

je dovolj pokazati

$$c(x) \subset \bigcup_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} (X_S \setminus Y_S).$$

Naj bo q poljubna točka iz množice $c(x)$ in $S = \{y \in V(G); q \in c(y)\}$. Točke grafa G, ki se s preslikavo c preslikajo v tiste množice intervala I, ki vsebujejo točko q, so nepovezane. Tako je množica S neodvisna množica točk grafa G. Ker je q tudi v množici $c(x)$, je x element množice S. Iz definicije množice S neposredno sledi, da je q tudi element množice $X_S \setminus Y_S$. Točka q je bila poljubna točka množice $c(x)$, zato je $c(x)$ res podmnožica množice $\bigcup_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} (X_S \setminus Y_S)$. Tako res velja neenakost

$$\sum_{\substack{x \in S,\\ S \in \mathcal{S}}} c'(S) \geq 1.$$

Preostane le še pokazati, da velja

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} c'(S) \leq r.$$

V množici $X_S \setminus Y_S$ so točke intervala I, v katere se preslikajo samo točke množice S. Zato so množice $X_S \setminus Y_S$ disjunktne, torej vsaka točka q intervala I leži v največ eni od teh množic. Velja

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} c'(S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} r \cdot m(X_S \setminus Y_S) = r \cdot m(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} (X_S \setminus Y_S)) \leq r \cdot m(I) = r.$$

Tako smo konstruirali deljeno barvanje c' z vrednostjo, največ r.

Privzemimo sedaj, da c' predstavlja deljeno barvanje grafa G z vrednostjo r. Konstruirali bomo r-merljivo barvanje c grafa G.

Poljubni neodvisni množici $S \in \mathcal{S}$ grafa G priredimo odprt interval $\delta(S)$ dolžine $\frac{1}{r}c'(S)$, tako da za različni neodvisni množici S in S' velja $\delta(S) \cap \delta(S') = \emptyset$. Takšna prireditev obstaja, ker je $\sum_{S \in \mathcal{S}} c'(S) = r$.

Za poljubno točko grafa G naj bo $c(x) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}, x \in S} \delta(S)$. Ker krajišči poljubne povezave xy grafa G nista skupaj v nobeni neodvisni množici, sta tudi množici $c(x)$ in $c(y)$ disjunktni. Mera poljubne množice $c(x)$ je enaka

$$m(\bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S}, \\ x \in S}} \delta(S)) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}, \\ x \in S}} m(\delta(S)) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}, \\ x \in S}} \frac{c'(S)}{r} = \frac{1}{r} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}, \\ x \in S}} c'(S) = \frac{1}{r}.$$

Tako c res predstavlja r-merljivo barvanje grafa G. □

Posledica 5.2. *Za poljuben graf G velja $\chi_f(G) = \chi^m(G)$.*

Iz posledice 5.2 vidimo, da je merljivo kromatično število geometrijska interpretacija deljenega kromatičnega števila.

N. Alon, Z. Tuza in M. Voigt [3] so pokazali, da je na poljubnem grafu tudi izbirljivo število enako deljenemu:

$$chr(G) = \chi_f(G).$$

Torej je tudi izbirljivo število interpretacija deljenega kromatičnega števila. S pomočjo ideje dokaza izreka 5.1 lahko pokažemo, da je tudi izbirljivo kromatično število enako deljenemu:

$$\chi_r(G) = \chi_f(G).$$

Ker je vsako r-krožno barvanje grafa G tudi r-merljivo barvanje, za poljuben graf G velja

$$\chi_f(G) \leq \chi^\star(G) \leq \chi(G).$$

Prav tako velja, da obstajajo grafi G, za katere je $\chi_f(G) = \chi^\star(G) = \chi(G)$, in grafi, za katere velja $\chi_f(G) < \chi^\star(G) < \chi(G)$ [13].

S pomočjo izbirljivega kromatičnega števila dokažemo naslednjo oceno za deljeno kromatično število, ki očitno velja tudi za zvezdno kromatično število:

Trditev 5.3. *Za poljuben graf G velja*

$$\chi^\star(G) \geq \chi_f(G) \geq \frac{|G|}{\alpha(G)}.$$

Dokaz. [24] Oglejmo si poljubno $(a:b)$-izbiro c grafa G. Naj bo $n = |G|$ in A $a \times n$ matrika z elementi $a_{ij} = 1$, če je $i \in c(j)$, in $a_{ij} = 0$ sicer. V vsakem stolpcu matrike A je natanko a enic, zato je v celi matriki natanko bn enic. Vsaka barva je lahko v največ $\alpha(G)$ podmnožic $c(v)$, zato je v vsaki vrstici matrike A največ $\alpha(G)$ enic. Ker ima matrika A a vrstic, je v njej največ $a\alpha(G)$ enic. Od tod dobimo oceno:

$$\frac{a}{b} \geq \frac{n}{\alpha(G)}.$$

Ker ta ocena velja za poljubno $(a:b)$-izbiro grafa G, velja ocena tudi za deljeno kromatično število. □

Od tod lahko izračunamo deljeno kromatično število lihih ciklov:

Posledica 5.4. *Lihi cikli C_{2n+1} so $\chi^\star$-ekstremni grafi, torej velja $\chi_f(C_{2n+1}) = 2 + \frac{1}{n}$.*

Dokaz. Ker je $\alpha(C_{2n+1}) = n$, velja

$$2 + \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n} \leq \chi_f(C_{2n+1}) \leq \chi^\star(C_{2n+1}).$$

Posledica 1.10(ii) zaključi dokaz. □

Poglavje 6

Zvezdno kromatično število produktov grafov

V tem poglavju bomo obravnavali zvezdno kromatično število leksikografskega, direktnega, kartezičnega in krepkega produkta grafov.

V prvem razdelku bomo izpeljali ocene za zvezdno kromatično število leksikografskega produkta poljubnih grafov. Pokazali bomo tudi, da je zvezdno kromatično število leksikografskega produkta $G[H]$ odvisno od zvezdnega kromatičnega števila grafa G in od kromatičnega števila H. Znano je tudi zvezdno kromatično število leksikografskega produkta lihih ciklov s poljubnim grafom.

V drugem razdelku bomo pokazali, da je deljeno kromatično število leksikografskega produkta grafov enako produktu deljenih kromatičnih števil grafov. Od tod dobimo potreben in zadosten pogoj za veljavnost enakosti $\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)\chi(H)$.

V tretjem razdelku si bomo ogledali lastnosti zvezdnega kromatičnega števila še na ostalih grafovskih produktih.

6.1 Leksikografski produkt

Najprej si bomo ogledali razmerje med $\chi^\star(G[H])$ in vrednostima $\chi^\star(G)$ ter $\chi(H)$.

Trditev 6.1.[34] *Za poljubna grafa G in H velja*

$$\chi^\star(G[H]) \leq \chi^\star(G)\chi(H).$$

Dokaz. Naj bo $\chi(H) = n$ in $\chi^\star(G) = k/d$. Preslikava $\phi : V(H) \mapsto \{0, 1, \ldots, n-1\}$ naj predstavlja n-barvanje grafa H, preslikava $\psi : V(H) \mapsto \mathbb{Z}_k$ pa (k, d)-barvanje grafa G. Definirajmo preslikavo $f : V(G[H]) \mapsto \mathbb{Z}_{kn}$ na naslednji način:

$$f(g, h) = \psi(g) + \phi(h)k.$$

Očitno velja $0 \leq f(g,h) < kn$. Naj bo $(g,h)(g',h')$ poljubna povezava grafa $G[H]$.

Če je $gg' \in E(G)$, je $|\psi(g) - \psi(g')|_k \geq d$ in zato velja

$$|\psi(g) - \psi(g') + tk|_{kn} \geq d$$

za poljuben $t \in \mathbb{Z}_n$. Ker sta $\phi(h), \phi(h') \in \mathbb{Z}_n$, velja tudi

$$|f(g,h) - f(g',h')|_{kn} \geq d.$$

Če pa je $g = g'$ in hh' povezava grafa H, lahko zapišemo neenakosti:

$$|f(g,h) - f(g,h')|_{kn} = |\phi(h) - \phi(h')|_{kn} k \geq k > d.$$

Od tod sledi, da je f (kn,d)-barvanje grafa $G[H]$ in lahko zapišemo

$$\chi^\star(G[H]) \leq \tfrac{kn}{d} = \chi^\star(G)\chi(H).$$

□

Iz trditve 6.1 lahko domnevamo, da je morda za graf G z vsaj eno povezavo zvezdno kromatično število grafa $G[H]$ odvisno le od grafa G in od kromatičnega števila grafa H.

Spomnimo se, da je $G(u,H)$ graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da točko $u \in V(G)$ nadomestimo z grafom H in vsako točko grafa H povežemo z vsemi sosedi točke u.

Izrek 6.2.[34] *Naj bosta G in H poljubna grafa in naj točka $u \in V(G)$ ne bo izolirana. Če je $\chi(H) = n$, potem velja enakost*

$$\chi^\star(G(u,H)) = \chi^\star(G(u,K_n)).$$

Dokaz. Ker je barvanje grafa H homomorfizem iz H v K_n, obstaja tudi homomorfizem iz $G(u,H)$ v $G(u,K_n)$. Zato velja

$$\chi^\star(G(u,H)) \leq \chi^\star(G(u,K_n)).$$

Naj bo $\chi^\star(G(u,H)) = k/d$ in $c : V(G(u,H)) \to \mathbb{Z}_k$ pripadajoče (k,d)-barvanje grafa $G(u,H)$. Pokazali bomo, da je graf $G(u,K_n)$ prav tako (k,d)-obarvljiv.

Naj bo $V(K_n) = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Za dokaz, da je graf $G(u,K_n)$ (k,d)-obarvljiv, moramo le še poiskati takšno preslikavo $c' : V(K_n) \to c(V(H))$, da za poljubni različni točki k_i in k_j grafa K_n velja $|c'(k_i) - c'(k_j)|_k \geq d$. S predpisom $c'(v) = c(v)$ za vse $v \notin V(K_n)$ lahko to preslikavo razširimo do (k,d)-barvanja grafa $G(u,K_n)$.

Naj bo $u' \in V(G)$ takšna točka , da je $uu' \in E(G)$. Potem je točka u' v grafu $G(u,H)$ sosednja z vsako točko grafa H. Brez izgube na splošnosti lahko predpostavimo, da je $c(u') = 0$. Sedaj rekurzivno konstruiramo preslikavo c' na grafu K_n. Naj bo $c'(k_1) = \min\{c(v); v \in V(H)\}$. Ko poznamo $c'(k_i)$, lahko definiramo

$$c'(k_{i+1}) = \min\{c(v); v \in V(H) \text{ in } c(v) \geq c'(k_i) + d\}.$$

Pokažimo, da za poljuben $i \leq n-1$ nobena od množic

$$S = \{v \in V(H); c(v) \geq c'(k_i) + d\}$$

ni prazna. Privzemimo, da je $S = \emptyset$ že za nek $i \leq n-1$. Naj bo $b : V(H) \to \{1, 2, \ldots, i\}$ preslikava, za katero je $b(v) = j$ natanko tedaj, ko velja $c'(k_j) \leq c(v) < c'(k_j) + d$. Če je $vv' \in E(H)$, je $|c(v) - c(v')|_k \geq d$, torej barvi $c(v)$ in $c(v')$ ne moreta ležati v istem intervalu $[c'(k_j), c'(k_j)+d)$. Zato je $b(v) \neq b(v')$, kar pomeni, da je b i-barvanje grafa H. To pa je v nasprotju s predpostavko $\chi(H) = n$. Torej je c' dobro definirana preslikava.

Ker je $c(u') = 0$ (zato $c'(k_1) \geq d$) in je u' sosednja z vsako točko grafa H (zato $c'(k_n) \leq k - d$), velja

$$k - |c'(k_1) - c'(k_n)|_k \geq d.$$

Od tod velja $|c'(k_1) - c'(k_n)|_k \geq d$, torej je graf $G(u, K_n)$ (k, d)-obarvljiv. □

Posledica 6.3. *Če graf G vsebuje vsaj eno povezavo in je $\chi(H) = n$, potem velja enakost:*

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G[K_n]).$$

Dokaz. Če v grafu G vsako točko nadomestimo z grafom H, dobimo graf $G[H]$, zato je

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G(V(G), H)) = \chi^\star(G(V(G), K_n)) = G[K_n].$$

□

Trditev 6.4.[26] *Za poljuben graf H velja*

$$\chi^\star(C_{2k+1}[H]) = 2\chi(H) + \frac{\chi(H)}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $\chi(H) = n$. Po lemi 5.1 velja

$$\chi^\star(C_{2k+1}[H]) \leq (2 + \frac{1}{k})n = 2n + \frac{n}{k}.$$

Pokazati moramo le še neenakost v obratni smeri. Posledica 6.3 pravi, da lahko v neenakosti graf H zamenjamo s polnim grafom K_n. Torej moramo pokazati naslednjo neenakost:

$$\chi^\star(C_{2k+1}[K_n]) \geq 2n + \frac{n}{k}.$$

Naj bo $\chi^\star(C_{2k+1}[K_n]) = \frac{p}{d}$ ter $f : V(C_{2k+1}[K_n]) \to \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ pripadajoče (p,d)-barvanje. Definirajmo množice $A_i = f^{-1}(i)$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_p$. Z B_i označimo unijo množic $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i+d-1}$, kjer indekse seštevamo po modulu p. Ker se barve sosednjih točk v grafu $C_{2k+1}[K_n]$ razlikujejo vsaj za d, so množice B_i neodvisne. Ker je moč največje neodvisne množice grafa C_{2k+1} enaka k in so v grafu $C_{2k+1}[K_n]$ polni grafi K_n na mestu točk cikla C_{2k+1}, ima tudi v $C_{2k+1}[K_n]$ največja neodvisna množica moč, enako k. Od tod sledi, da je $|B_i| \leq k$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_p$. Torej velja

$$\sum_{i=0}^{p-1} |B_i| \leq pk \qquad \text{in}$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} |B_i| = d|V(C_{2k+1}[K_n])| = d(2k+1)n,$$

saj vsaka točka grafa nastopa natanko v d množicah B_i. Torej je

$$\frac{p}{d} \geq 2n + \frac{n}{k},$$

kar dokazuje željeno neenakost. □

Za $k = 2$ je trditev 6.4. dokazal X. Zhu [34].

Oglejmo si sedaj primer grafov, za katere je $\chi^\star(G[H])$ strogo manj od $\chi^\star(G)\chi(H)$. Naj bo G graf G^k_{nk+1}z dodano univerzalno točko. Vemo, da je

$$\chi^\star(G) = \chi(G) = n + 2,$$

saj velja

$$\chi(G^k_{nk+1}) = \lceil \frac{nk+1}{k} \rceil = n + 1.$$

Torej je $\chi^\star(G)\chi(K_k) = (n+2)k$. Po drugi strani pa veljajo tudi neenakosti

$$\begin{aligned} \chi^\star(G[K_k]) &\leq \chi(G[K_k]) \leq \chi(G^k_{nk+1}[K_k]) + k \\ &= \lceil \chi^\star(G^k_{nk+1}[K_k]) \rceil + k \leq \lceil \chi^\star(G^k_{nk+1})k \rceil + k = (n+1)k + 1. \end{aligned}$$

Zato je $\chi^\star(G)\chi(K_k) - \chi^\star(G[K_k]) \geq k - 1$.

Sedaj, ko poznamo zgorno mejo $\chi^\star(G[H])$ in vemo, da je le-ta na lihih ciklih dosežena, na grafu G pa ne, nas zanima še spodnja meja za poljubne grafe.

Izrek 6.5.[24] *Če ima graf G vsaj eno povezavo, velja*

$$\chi^\star(G[H]) \geq \chi^\star(G) + 2\chi(H) - 3 \geq \chi^\star(G) + 2\omega(H) - 3.$$

Posredno lahko izrek dokažemo takole: Naj bo $\chi(H) = n$. Po posledici 6.3 in rezultatu iz [25] velja

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G[K_n]) > \chi(G[H]) - 1 \geq \chi(G) + 2n - 3 > \chi^\star(G) + 2n - 3.$$

Z modifikacijo dokaza iz [25] pa lahko naredimo tudi direkten dokaz:
Dokaz. Naj bo $\chi(H) = n$. V primeru, ko je $n = 1$, je $\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)$, saj lahko vse točke grafa H obarvamo z isto barvo.

Naj bo sedaj $n \geq 2$. Po posledici 6.3 lahko privzamemo, da je $H = K_n$. Naj bo $\chi^\star(G[H]) = \frac{k}{d}$. Ker ima graf G vsaj eno povezavo, je $\frac{k}{d} \geq 2n$, saj je K_{2n} podgraf grafa $G[K_n]$. Naj bo $f : V(G[K_n]) \to \mathbb{Z}_k$ (k,d)-barvanje grafa $G[K_n]$ in $V(K_n)$ množica $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Za poljuben $u \in V(G)$ definirajmo

$$m_u = \min\{f(u,v_1), f(u,v_2), \ldots, f(u,v_n)\}$$

in preslikavo

$$g(u) = \begin{cases} m_u & ; m_u \leq k - 2nd + d, \\ k - 2nd + 2d & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Trdimo, da g predstavlja $(k - 2nd + 3d, d)$-barvanje grafa G.

Recimo, da obstaja povezava uv v grafu G, za katero velja

$$|g(u) - g(v)|_{k-2nd+3d} < d.$$

Po definiciji (k,d)-barvanja f se to ne more zgoditi v primeru, ko velja $g(u) \leq k-2nd+d$ ali $g(v) \leq k-2nd+d$. Privzemimo, da je $g(u) = g(v) = k-2nd+2d$. Ker je $uv \in E(G)$, točke $\{u,v\} \times V(K_n)$ v grafu $G[K_n]$ inducirajo poln podgraf K_{2n}. Zato mora biti teh $2n$ točk obarvanih z $2n$ različnimi barvami, ki se med seboj razlikujejo vsaj za d. Ker je $m_u \geq k - 2nd + d + 1$ in $m_v \geq k - 2nd + d + 1$, morajo biti te barve iz množice $\{k - 2nd + d + 1, k - 2nd + d + 2, \ldots, k - 1\}$, ki pa vsebuje le $2nd - d - 1$ elementov. To pa je v nasprotju s predpostavko, zato je trditev dokazana.

Ker je graf G $(k - 2nd + 3d, d)$-obarvljiv, velja

$$\begin{aligned} \chi^\star(G) &\leq \frac{k - 2nd + 3d}{d} = \frac{k}{d} - 2n + 3 \\ &= \chi^\star(G[K_n]) - 2n + 3 = \chi^\star(G[H]) - 2\chi(H) + 3. \end{aligned}$$

□

6.2 $\chi^\star$-ekstremni grafi in leksikografski produkt

Kot bomo videli kasneje, se izkaže, da imajo grafi, za katere sta števili $\chi^\star(G)$ in $\chi_f(G)$ enaki (torej za $\chi^\star$-ekstremne grafe G), nekaj lepih lastnosti. Pokazali bomo namreč, da v tem primeru pri poljubnem grafu H velja

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)\chi(H).$$

Oglejmo si najprej, kako se obnaša deljeno kromatično število na leksikografskem produktu.

Izrek 6.6.[13] *Za poljubna grafa G in H velja*

$$\chi_f(G[H]) = \chi_f(G)\chi_f(H).$$

Dokaz. Privzemimo, da je $\chi_f(G) = r$ in $\chi_f(H) = s$. Naj bo c deljeno barvanje grafa G z vrednostjo r in c' deljeno barvanje grafa H z vrednostjo s. Definirajmo prireditev množice neodvisnih podmnožic točk grafa $G[H]$ v interval $[0, 1]$ na naslednji način:
Za neodvisno množico S grafa $G[H]$, ki je oblike

$$S = \{(g, h);\ g \in X,\ h \in Y \text{ in } X, Y \text{ neodvisni množici grafov } G \text{ in } H\},$$

naj bo $c''(S) = c(X) \cdot c'(Y)$.
Za vse ostale neodvisne množice S grafa $G[H]$ naj velja $c''(S) = 0$.
Za poljubno točko $(x, y) \in G[H]$ je vsota

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{S\in\mathcal{S};\\(x,y)\in S}} c''(S) &= \sum_{\substack{X\in\mathcal{X}\wedge Y\in\mathcal{Y};\\x\in X,y\in Y}} c(X)\cdot c'(Y)\\ &= \sum_{\substack{X\in\mathcal{X};\\x\in X}} c(X)\cdot \sum_{\substack{Y\in\mathcal{Y};\\y\in Y}} c'(Y) = 1\cdot 1 = 1,\end{aligned}$$

kjer sta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ množici neodvisnih množic točk grafov G in H. Od tod sledi veljavnost neenakosti

$$\chi_f(G[H]) \leq \chi_f(G)\chi_f(H).$$

Sedaj bomo pokazali, da je vrednost deljenega barvanja c'' grafa $G[H]$ vsaj rs. Naj bo g poljubna točka grafa G in S neodvisna množica grafa $G[H]$. Množica $S_g = \{h \in H; (g, h) \in S\}$ je neodvisna množica grafa H. Za poljubno neodvisno množico X grafa H naj velja

$$c'(X) = \sum_{S_g = X} c''(S).$$

Za poljubno točko $h \in H$ velja

$$\sum_{h\in X} c'(X) = \sum_{(g,h)\in S} c''(S) \geq 1.$$

Torej je c' deljeno barvanje grafa H in mora biti zato vrednost barvanja c', ki je enaka $\sum_{h\in H;\ (g,h)\in S} c''(S)$, vsaj $\chi_f(H) = s$.

Množica $G(S) = \{g \in G; \exists h \in H : (g,h) \in S\}$ je projekcija neodvisne množice S grafa $G[H]$ na graf G. Očitno je $G(H)$ neodvisna množica grafa G, saj točki (g,h) in (g',h') v grafu $G[H]$ nista povezani, če nista povezani točki g in g' v grafu G. Za poljubno neodvisno množico Y grafa G naj velja

$$c(Y) = \frac{1}{s} \sum_{G(S)=Y} c''(S).$$

Že od prej vemo, da za poljuben $g \in G$ velja

$$\sum_{g\in Y} c(Y) = \sum_{h\in H;\ (g,h)\in S} c''(S) \cdot \frac{1}{s} \geq 1.$$

Zato je c deljeno barvanje grafa G. Torej je vrednost barvanja c, ki je enaka produktu $\frac{1}{s}$ z vrednostjo barvanja c'', vsaj $\chi_f(G) = r$. Zato je vrednost barvanja c'' večja ali enaka rs. □

Posledica 6.7. *Če je G $\chi^\star$-ekstremen graf in graf H n-kromatičen, potem je*

$$\chi^\star(G[H]) = n\chi^\star(G).$$

Dokaz. Po posledici 6.3 in trditvi 6.1 za poljuben graf G in poljuben n-kromatičen graf H velja

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G[K_n]) \leq n\chi^\star(G).$$

Uporabimo izrek 6.6 in zapišimo enakosti $\chi_f(G[K_n]) = \chi_f(G)\chi_f(K_n) = n\chi_f(G)$. Ker velja tudi $\chi_f(G[K_n]) \leq \chi^\star(G[K_n])$, je

$$n\chi_f(G) \leq \chi^\star(G[H]) \leq n\chi^\star(G).$$

Ker je graf G $\chi^\star$-ekstremen ($\chi^\star(G) = \chi_f(G)$), je desna stran neenačbe enaka levi, torej velja enakost. □

Ker je $\chi(G[H]) = \lceil \chi^\star(G[H]) \rceil$, je z znanim zvezdnim kromatičnim številom leksikografskega produkta grafov znano tudi njegovo kromatično število.

Posledica 6.8. *Če je G $\chi^\star$-ekstremen graf in graf H n-kromatičen, potem velja*

$$\chi(G[H]) = \lceil n\chi^\star(G) \rceil .$$

Trditev 6.4, katere direkten dokaz je izpeljan v prejšnjem podpoglavju, dobimo tudi kot posledico posledice 6.7.

Posledica 6.9. *Če je graf H n-kromatičen, velja*

$$\chi(C_{2k+1}[H]) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Dokaz. Po posledici 5.4 je

$$\chi^\star(C_{2k+1}) = \chi_f(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k},$$

zato po posledici 6.7 velja

$$\chi(C_{2k+1}[H]) = 2n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

□

Znano je [30], da za poljuben graf G obstaja takšno celo število n, da je $\chi(G[K_n]) = n\chi_f(G)$. Če graf G ni $\chi^\star$-ekstremen, lahko zapišemo neenakosti

$$\chi^\star(G[K_n]) \leq \chi(G[K_n]) = n\chi_f(G) < n\chi^\star(G).$$

Če združimo to ugotovitev s posledico 5.8, dobimo naslednji pomemben rezultat:

Posledica 6.10. *Graf G je $\chi^\star$-ekstremen natanko tedaj, ko za poljuben graf H velja enakost*

$$\chi^\star(G[H]) = \chi^\star(G)\chi(H).$$

6.3 O drugih produktih

Če je $c : V(G) \to \mathbb{Z}_k$ (k,d)-barvanje grafa G, je preslikava $c' : V(G \times H) \to \mathbb{Z}_k$, definirana s predpisom $c''(g,h) = c(g)$, očitno tudi (k,d)-barvanje grafa $G \times H$. Zato velja

$$\chi^\star(G \times H) \leq \min\{\chi^\star(G), \chi^\star(H)\}.$$

Ta neenakost je resnična tudi za običajno kromatično število:

$$\chi(G \times H) \leq \min\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

Že dolgo je odprto vprašanje, ali morda velja enakost. Hedetniemijeva domneva [22] iz leta 1966 pravi, da enakost velja za poljubna grafa G in H. Ekvivalentno, domneva pravi, da za vsak n velja

$$\chi(G) > n \wedge \chi(H) > n \Rightarrow \chi(G \times H) > n.$$

Domneva je trivialna za $n = 1$ in preprosta za $n = 2$. M. El-Zaharjev in N. Sauerjev dokaz domneve za $n = 3$ [9] je predstavljal pomemben preboj v reševanju te domneve. Hedetniemijevo domnevo lahko posplošimo tudi na zvezdno kromatično število:

Domneva 6.1.[34] Naj bo r poljubno racionalno število. Če je $\chi^\star(G) > r$ in $\chi^\star(H) > r$, velja $\chi^\star(G \times H) > r$.

Da je domneva smiselna, potrjuje naslednja trditev:

Trditev 6.11.[34] *Naj bo k naravno število, večje ali enako 1, $\chi^\star(G) > 2 + (1/k)$ in $\chi^\star(H) > 2 + (1/k)$. Potem velja $\chi^\star(G \times H) > 2 + (1/k)$.*

Dokaz. Ker je $\chi^\star(C_{2k+1}) = 2 + (1/k)$, vemo, da je $\chi^\star(G) > 2 + (1/k)$ natanko tedaj, ko ne obstaja homomorfizem iz G v C_{2k+1}. V [19] je dokazano, da graf $G \times H$ ni homomorfen C_{2k+1}, če nobeden od grafov G in H ni homomorfen grafu C_{2k+1}. S tem je trditev dokazana. □

V primeru kartezičnega produkta je povezava med $\chi^\star(G \Box H)$ in $\chi^\star(G)$ ter $\chi^\star(H)$ zelo enostavna in je enaka kot za kromatično število, ki jo je že leta 1957 dokazal Sabidussi [29]:

Trditev 6.12.[34] $\chi^\star(G \Box H) = \max\{\chi^\star(G), \chi^\star(H)\}$.

Dokaz. Za poljubno (k,d)-barvanje f grafa G in poljubno (k,d)-barvanje g grafa H je preslikava $b : V(G \Box H) \to \mathbb{Z}_k$, definirana s predpisom $b(x,y) = f(x) + g(y) (\mathrm{mod}\ k)$, prav tako (k,d)-barvanje grafa $G \Box H$. Po drugi strani pa graf $G \Box H$ vsebuje grafa G in H kot prava podgrafa in zato velja $\chi^\star(G \Box H) \geq \max\{\chi^\star(G), \chi^\star(H)\}$. □

Odkrili smo, kako na preprost način konstruirati nove grafe z zvezdnim kromatičnim številom, enakim običajnemu kromatičnemu številu. Če je $\chi^\star(G) = \chi(G) \geq \chi(H)$, potem velja $\chi^\star(G \Box H) = \chi(G \Box H) = \chi(G)$.

Ker je $G \boxtimes H \subseteq G[H]$, za poljubna grafa G in H velja

$$\chi^\star(G \boxtimes H) \leq \chi^\star(G[H]) \leq \min\{\chi^\star(G)\chi(H), \chi(G)\chi^\star(H)\}.$$

Torej tudi za krepki produkt velja ocena

$$\chi^\star(C_{2k+1} \boxtimes H) \leq (2 + \frac{1}{k})\chi(H).$$

Poglavje 7

Utežni grafi

To poglavje je razdeljeno na tri razdelke. V prvem bomo podali definicije barvanj utežnih grafov, zvezdno popolnih in zvezdno super popolnih grafov.

V drugem razdelku bomo dokazali, da je posplošitev zvezdnega kromatičnega števila na grafe z racionalnimi utežmi prav tako racionalno število.

V razdelku 7.3 bomo pokazali, da so lihi cikli zvezdno super popolni grafi. Videli bomo, da je tudi deljeno kromatično število leksikografskega produkta utežnih grafov enako produktu deljenih kromatičnih števil grafov. Od tod dokažemo, da je leksikografski produkt zvezdno super popolnega grafa s super popolnim grafom tudi zvezdno super popoln graf.

7.1 Definicije

Naj bo G poljuben graf in $w : V(G) \to [0, \infty)$ utežna funkcija. Z (G, w) označimo graf G z utežjo w. Skupno težo množice $X \subseteq V(G)$, tj. vsoto vrednosti utežne funkcije na vseh točkah množice X, bomo označevali z $w(X)$, skupno težo grafa pa z $w(V(G))$. Utežno funkcijo $w : V(G) \to \{0, 1\}$ imenujemo $0-1$ utežna funkcija.

Krožno kromatično število grafa na naraven način posplošimo na krožno kromatično število utežnega grafa takole: Naj bo C krožnica dolžine r v $\mathbb{R}^2$. Preslikavo c iz $V(G)$ v odprte intervale krožnice C, pri kateri ima vsak interval $c(x)$, $x \in V(G)$, dolžino $w(x)$ in za poljubo povezavo $xy \in E(G)$ velja $c(x) \cap c(y) = \emptyset$, imenujemo **$r$-krožno barvanje** utežnega grafa (G, w). **Krožno kromatično število**, $\chi^c(G, w)$, utežnega grafa (G, w) je enako

$$\chi^c(G, w) = \inf\{r; (G, w) \text{ je } r\text{-krožno obarvljiv}\}.$$

Krožno barvanje in krožno kromatično število lahko uporabljamo pri modeliranju sistema za uravnavanje prometa v križiščih. Vsaka točka grafa predstavlja določen prometni tok. Točki grafa sta povezani, če sta pripadajoča prometna tokova nezdružljiva. Vrednost utežne funkcije v dani točki je lahko sorazmerna s količino prometa v pripadajočem prometnem toku. Sistem za uravnavanje prometa vsakemu prometnemu toku priredi časovni interval, v katerem gori zelena luč. Takšen vzorec prižiganja zelene in rdeče luči na semaforju se periodično ponavlja. V modelu krožnica C predstavlja celotno periodo, interval na krožnici C pa časovni interval, v katerem za pripadajoči prometni tok gori zelena luč. Ker sta sosednjima točkama prirejena disjunkna loka, nezdružljiva prometna tokova hkrati ne bosta imela odprte poti (zelene luči). Naravno je pričakovati, da želimo minimizirati dolžino periode, kar je enako dolžini cikla C, in pri tem za vsako točko x upoštevati predpisano najmanjšo ločno dolžino $w(x)$.

V primeru, ko je utežna funkcija grafa konstanta 1, je $\chi^c(G, w) = \chi^c(G)$, kjer je χ^c krožno kromatično število grafa, definirano v 1. poglavju. Po izreku 2.1 je $\chi^\star(G) = \chi^c(G, 1)$, torej je $\chi^c(G, w)$ posplošitev zvezdnega kromatičnega števila $\chi^\star(G)$ na utežne grafe.

Podobno kot v 2. poglavju lahko definiramo tudi intervalno barvanje utežnih grafov. Razlika v definiciji je le v tem, da točkam grafa prirejamo odprte podintervale intervala I dolžine r. Takšno preslikavo c iz množice točk grafa G v odprte podintervale intervala I, da je za vsako točko x dolžina podintervala $c(x)$ enaka $w(x)$ in se sosednji točki preslikata v disjunktna intervala, imenujemo r-**intervalno barvanje** utežnega grafa (G, w). **Intervalno kromatično število**, $\chi(G, w)$, utežnega grafa (G, w) je najmanjše število r, za katero obstaja r-intervalno barvanje grafa (G, w). Po izreku 2.2 je v primeru, ko je utežna funkcija w konstantno enaka 1, intervalno kromatično število enako običajnemu kromatičnemu številu: $\chi(G, 1) = \chi^I(G) = \chi(G)$. Tako je intervalno kromatično število posplošitev običajnega kromatičnega števila na utežne grafe.

Deljeno kromatično število utežnih grafov (G, w) dobimo z rešitvijo problema linearnega programiranja. **Deljeno barvanje** utežnega grafa (G, w) je takšna prireditev c nenegativnih uteži neodvisnim množicam X grafa G, da za poljubno točko $x \in V(G)$ velja $\sum_{x \in X} c(X) \geq w(x)$. **Deljeno kromatično število**, $\chi_f(G, w)$, utežnega grafa (G, w) je najmanjša skupna teža (to je vsota uteži vseh neodvisnih množic) deljenega barvanja grafa (G, w).

Alternativno definicijo deljenega kromatičnega števila utežnega grafa (G, w) dobimo s preprostim popravkom definicije intervalnega kromatičnega števila utežnega grafa (G, w). Naj bo r-**merljivo barvanje** utežnega grafa (G, w) takšna preslikava c iz $V(G)$ v merljive podmnožice I, da ima množica $c(x)$ mero $w(x)$ in se sosednji točki preslikata v disjunktni podmnožici I. Množica I predstavlja interval dolžine r. Deljeno kromatično število utežnega grafa (G, w) je potem najmanjše število r, za katero obstaja r-merljivo barvanje utežnega grafa (G, w). Ekvivalentnost definicij smo za primer grafov brez uteži pokazali z izrekom 5.1, ki ga lahko posplošimo na utežne grafe.

V razdelku 7.2 si bomo ogledali osnovne lastnosti krožnega kromatičnega števila utežnih grafov. Dokazali bomo, da je $\chi^c(G,w)$ vedno dosežen, zato lahko infimum v definiciji zamenjamo z minimumom. Pokazali bomo tudi, da je v primeru, ko so vse uteži racionalne, tudi krožno kromatično število racionalno. Tako dobimo posplošitve rezultatov zvezdnega kromatičnega števila.

Kot v primeru zvezdnega kromatičnega števila si bomo ogledali, v kakšnem razmerju je krožno kromatično število z intervalnim in deljenim kromatičnim številom utežnih grafov.

Dualni problem linearnega programiranja, opisanega zgoraj, definira **deljeno težo klike**, $\omega_f(G,w)$, utežnega grafa (G,w). **Teža klike**, $\omega(G,w)$, je definirana kot največja teža klike grafa G.

Za opisane parametre utežnega grafa (G,w) veljajo naslednje neenakosti

$$\omega(G,w) \leq \omega_f(G,w) = \chi_f(G,w) \leq \chi^c(G,w) \leq \chi(G,w),$$

kjer druga enakost sledi iz dualnosti problemov linearnega programiranja.

Od tod izhajajo zanimiva vprašanja, za katere grafe posamezne neenakosti preidejo v enakosti. Grafe, za katere je $\chi(G,w) = \omega(G,w)$ za vse $0-1$ utežne funkcije, imenujemo **popolni grafi** in grafe, za katere je $\chi(G,w) = \omega(G,w)$ za poljubno utežno funkcijo, imenujemo **super popolni grafi**.

Kdaj druge neenakosti preidejo v enakosti? Ali so te neenakosti soodvisne? Očitno enakost $\chi(G,w) = \omega(G,w)$ implicira, da vse neenakosti preidejo v enakosti. Ob tej veljajo tudi nekatere druge implikacije. Ker je $\chi(G) = \lceil \chi^\star(G) \rceil$, za vse $0-1$ utežne funkcije w velja $\chi^c(G,w) = \omega(G,w)$ natanko tedaj, ko je $\chi(G,w) = \omega(G,w)$. Prav tako je postavljena domneva [8], da za poljubno utežno funkcijo w velja $\chi^c(G,w) = \chi(G,w)$ natanko tedaj, ko za poljubno utežno funkcijo w velja $\chi(G,w) = \omega(G,w)$.

Omejili se bomo na neenakosti, v katerih nastopa $\chi^c(G,w)$. Graf G imenujemo **zvezdno popoln**, če za vse $0-1$ utežne funkcije w velja $\chi^c(G,w) = \omega_f(G,w)$, in **zvezdno super popoln**, če enakost $\chi^c(G,w) = \omega_f(G,w)$ velja za poljubno utežno funkcijo w. Iz definicije sledi, da so vsi zvezdno super popolni grafi tudi zvezdno popolni. Obratno ne velja. V [8] je podan primer popolnega in zvezdno popolnega grafa, ki pa ni ne super popoln ne zvezdno super popoln.

Prav tako velja, da je vsak popoln graf tudi zvezdno popoln in vsak super popoln graf tudi zvezdno super popoln. Tudi v teh primerih ne velja ekvivalenca med trditvami [8]. Najpomembnejši rezultati tega poglavja, ki jih bomo spoznali v razdelku 7.3, nam bodo dali primere zvezdno super popolnih grafov, ki niso popolni. Videli bomo, da so vsi cikli in komplementi lihih ciklov zvezdno super popolni. Očitno so torej lihi cikli zvezdno super popolni grafi, ki niso popolni, torej tudi ne super popolni. Prav tako opazimo, da so vsi zvezdno popolni grafi tudi $\chi^\star$-ekstremni.

V razdelku 7.3 bomo izpeljali oceno za krožno kromatično število leksikografskega produkta grafov, kar nam bo omogočilo konstrukcijo novih zvezdno super popolnih grafov iz lihih ciklov.

7.2 Osnovne lastnosti χ^c

Krožno kromatično število $\chi^c(G,w)$ utežnih grafov je definirano kot infimum števil r, za katere obstaja r-krožno barvanje grafa (G,w). Pokažimo najprej, da je infimum dosežen.

Izrek 7.1.[8] *Naj bo (G,w) utežni graf na množici točk $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Če je $\chi^c(G,w)=r$, obstaja r-krožno barvanje grafa (G,w).*

Dokaz. Naj bo $\chi^c(G,w)=r$. Iz definicije $\chi^c(G,w)$ sledi, da obstaja padajoče zaporedje $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti r, ko gre j proti ∞, in za vsak j obstaja r_j-krožno barvanje c_j grafa (G,w). Vsak c_j predstavlja takšno preslikavo iz $V(G)$ v odprte intervale krožnice C_j obsega r_j, pri kateri ima vsak interval $c_j(x)$, $x\in V(G)$, dolžino natanko $w(x)$ in za poljubo povezavo $xy\in E(G)$ velja $c_j(x)\cap c_j(y)=\emptyset$.

Definirajmo preslikavo c'_j iz $V(G)$ v C s preprosto skrčitvijo krožnice C_j v krožnico C dolžine 1. Za preslikavo c'_j velja, da ima poljuben interval $c'_j(x)$, $x\in V(G)$, na krožnici C dolžino natanko $w(x)/r_j$ in za poljubno povezavo $xy\in E(G)$ velja $c'_j(x)\cap c'_j(y)=\emptyset$. Oglejmo si zaporedje $(c'_j(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ intervalov na krožnici C. Ker je C kompaktna množica, obstaja konvergentno podzaporedje $(c'_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ zaporedja $(c'_j(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ in limitni interval $c'(x_1)$ z dolžino $\lim_{j\to\infty} w(x_1)/r_{1j} = w(x_1)/r$. V primeru, ko je limitni interval zaprt ali polodprt, le odstranimo robne točke, da dobimo odprt interval. Sedaj si oglejmo zaporedje $(c'_{1j}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$. Ponovno lahko izberemo konvergentno podzaporedje $(c'_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ zaporedja $(c'_{1j}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$ z limitnim (odprtim) intervalom $c'(x_2)$ dolžine $w(x_2)/r$. Na enak način definiramo še $c'(x_3),c'(x_4),\cdots,c'(x_n)$. Za preslikavo c' torej velja $c'(x)=w(x)/r$, $x\in V(G)$. Ker je $(c'_{i+k,j})_{j\in\mathbb{N}}$ podzaporedje zaporedja $(c_i,j')_{j\in\mathbb{N}}$ in je $c'_{i+k,j}(x_i)\cap c'_{i+k,j}(x_{i+k})=\emptyset$, tudi za $x_ix_{i+k}\in E(G)$ velja $c'(x_i)\cap c'(x_{i+k})=\emptyset$. Če sedaj raztegnemo krožnico C v krožnico obsega r, dobimo željeno r-krožno barvanje grafa (G,w). $\square$

Na tem mestu lahko pokažemo, da je v primeru racionalnih uteži tudi krožno kromatično število racionalno.

Izrek 7.2.[8] *Naj bo (G,w) utežni graf na množici točk $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Če so vrednosti $w(x_i)$ racionalne, je tudi $\chi^c(G,w)$ racionalno število. Še več, če imajo $w(x_i)=a_i/b$ skupni imenovalec b za neki $a\le\sum_{i=1}^n a_i$, velja $\chi^c(G,w)=a/b'$.*

Dokaz. Naj bodo vrednosti utežne funkcije $w(x_i)=a_i/b$ racionalna števila s skupnim imenovalcem b in naj bo $\chi^c(G,w)=r$. Privzemimo še, da c predstavlja r-krožno barvanje grafa (G,w). Preslikava c tako vsako točko x grafa G preslika v interval $c(x)$ na krožnici C dolžine r. Za vsak tak interval označimo njegovo levo in desno krajišče v smislu smeri urinega kazalca.

Pomožna trditev: Obstaja zaporedje različnih intervalov $c(x_{\alpha_1})$, $c(x_{\alpha_2})$, ... ,$c(x_{\alpha_k})$, v katerem je desno krajišče $c(x_{\alpha_i})$ enako levemu krajišču intervala $c(x_{\alpha_{i+1}})$ in desno krajišče $c(x_{\alpha_k})$ enako levemu krajišču intervala $c(x_{\alpha_1})$.

Dokaz pomožne trditve. Naj bo D usmerjen graf na točkah $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Množica povezav grafa D vsebuje povezavo od x_i do x_j natanko tedaj, ko je levo krajišče intervala $c(x_i)$ enako desnemu krajišču intervala $c(x_j)$.

Če pomožna trditev ne bi bila resnična, graf D ne bi vseboval nobenega usmerjenega cikla. Definirajmo nivo $l(x)$ točke x kot dolžino najdaljše usmerjene poti, ki se konča v točki x, kjer je dolžina poti število točk na njej. Razdalja $d(p,p')$ med poljubnima točkama p in p' na krožnici C je dolžina krajšega loka, ki povezuje točki p in p'. Naj bo $\delta = \min\{d(p,p'); p, p'$ različni krajišči intervalov $c(x_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$. Sedaj za poljubno točko x premaknimo interval $c(x)$ v nasprotni smeri urinega kazalca za dolžino $\delta/2^{l(x)}$, tako da dobimo novo preslikavo c' iz $V(G)$ v množico intervalov krožnice C.

Sedaj bomo pokazali, da tudi c' predstavlja r-krožno barvanje grafa (G, w). Ker smo intervale $c(x)$ le premaknili, ostane dolžina intervala $c'(x)$ enaka $w(x)$. Naj bo $x_i x_j$ povezava grafa G, torej sta intervala $c(x_i)$ in $c(x_j)$ disjunktna. Če intervala $c(x_i)$ in $c(x_j)$ nimata skupnega krajišča, sta zaradi izbire δ tudi intervala $c'(x_i)$ in $c'(x_j)$ disjunktna. Če pa imata intervala $c(x_i)$ in $c(x_j)$ skupno krajišče (intervala sta odprta, zato sta še vedno disjunktna), je ali desno krajišče $c(x_i)$ enako levemu krajišcu $c(x_j)$ ali desno krajišče $c(x_j)$ enako levemu krajišcu $c(x_i)$. Brez izgube na splošnosti lahko privzamemo, da je desno krajišče $c(x_i)$ enako levemu krajišcu $c(x_j)$. Če potujemo po ciklu C v smeri urinega kazalca, je interval $c(x_i)$ pred intervalom $c(x_j)$, zato velja $l(x_i) < l(x_j)$. Iz definicije c' sledi, da interval $c(x_i)$ premaknemo dlje v nasprotni smeri urinega kazalca kot interval $c(x_j)$, zato sta intervala $c'(x_i)$ in $c'(x_j)$ še vedno disjunktna. Torej tudi c' predstavlja r-krožno barvanje grafa (G, w).

Velja celo več: desno krajišče $c'(x_i)$ ni več enako levemu krajišču intervala $c'(x_j)$, torej desno krajišče $c'(x)$ ni enako levemu krajišču nobenega intervala $c'(y)$. Naj bo $\delta' = \min\{d(p,p'); p, p'$ krajišči intervalov $c'(x_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$ in naj bo A poljuben odprt interval na C dolžine δ', ki ne vsebuje nobenega krajišča intervalov $c'(x_1), c'(x_2), \ldots c'(x_n)$. Interval A izrežemo iz krožnice C in zlepimo dobljeni krajišči. Tako dobimo novo krožnico obsega $r - \delta'$. Vsakemu intervalu $c'(x)$, ki vsebuje interval A, premaknemo desno krajišče v smeri urinega kazalca za dolžino δ' in levo krajišče pustimo nespremenjeno. Ker desno krajišče intervala $c'(x)$ ni levo krajišče nobenega drugega intervala $c'(y)$ in ker je δ' minimum razdalj med krajišči intervalov $c'(x_1), c'(x_2), \ldots c'(x_n)$, vidimo, da s tem postopkom ne dobimo novih presečišč med intervali $c'(x_i)$. Tako smo konstruirali $(r - \delta')$-krožno barvanje grafa (G, w), kar je v nasprotju s predpostavko, da je $\chi^c(G, w) = r$. S tem je pomožna trditev dokazana. $\square$

Naj bo $c(x_{\alpha_1})$, $c(x_{\alpha_2})$, ... ,$c(x_{\alpha_k})$ zaporedje različnih intervalov, v katerem je desno krajišče $c(x_{\alpha_i})$ enako levemu krajišču intervala $c(x_{\alpha_{i+1}})$ in desno krajišče $c(x_{\alpha_k})$ enako levemu krajišču intervala $c(x_{\alpha_1})$. Tedaj unija teh intervalov obkroži cikel C natanko s-krat, $s \in \mathbb{N}$. Skupna dolžina intervalov je torej enaka

$$sr = \sum_{i=1}^{k} w(x_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{\alpha_i}}{b}.$$

Od tod dobimo željeni rezultat:

$$r = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{\alpha_i}}{bs} = \frac{a}{b'},$$

kjer je $a \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$. □

Ker je zvezdno kromatično število enako krožnemu kromatičnemu številu $\chi^c(G, w)$, ko je za vsako točko x $w(x) = 1$, iz izreka 7.2 ponovno razberemo, da je zvezdno kromatično število vedno racionalno število.

Trditev 7.3.[8] *Naj bo (G, w) utežni graf na množici točk $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ki so označene tako, da velja $w(x_1) \geq w(x_2) \geq \cdots \geq w(x_n)$. Če je $\chi^c(G, w) = r$, velja ocena $\chi(G, w) < r + w(x_k)$, kjer k zadošča neenakosti $\sum_{i=1}^{k-1} w(x_i) < r$.*

Dokaz. Naj c predstavlja r-krožno barvanje grafa (G, w). Ker je $\sum_{i=1}^{k-1} w(x_i) < r$, obstaja točka p na ciklu C, ki ni vsebovana v nobenem intervalu $c(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. V točki p prerežemo krožnico in dobimo interval I dolžine r. Intervale $c(x)$, ki vsebujejo točko p, s tem razbijemo na dva dela. Z s označimo največjo dolžino vseh takih delov. Iz izbire točke p vidimo, da velja $s < w(x_k)$. Interval I na enem koncu podaljšamo za dolžino s. Tako lahko prestavimo vse dele razbitih intervalov iz drugega konca intervala I na dodani del. S tem smo dobili $(r + s)$-intervalno barvanje grafa (G, w). Torej je

$$\chi(G, w) < r + s < r + w(x_k).$$

□

7.3 Zvezdno super popolni grafi in leksikografski produkt

Spomnimo se, da je graf G zvezdno popoln, če je $\chi^c(G,w) = \omega_f(G,w)$ za poljubno $0-1$ utežno funkcijo, in da je G zvezdno super popoln, če je $\chi^c(G,w) = \omega_f(G,w)$ za poljubno utežno funkcijo w. Podobno definiramo tudi popolne in super popolne grafe, le da namesto χ^c in ω_f uporabimo χ in ω.

V razdelku 7.1 smo zapisali, da so vsi zvezdno super popolni grafi tudi zvezdno popolni, vsi popolni grafi tudi zvezdno popolni in vsi super popolni grafi tudi zvezdno super popolni. Dvodelni grafi so super popolni ($2 \leq \chi_f(G) \leq \chi^\star(G) \leq \chi(G) = 2$) [8], torej tudi zvezdno super popolni.

V tem razdelku bomo videli, da so vsi cikli in komplementi lihih ciklov zvezdno super popolni grafi. Nato bomo pokazali, da je leksikografski produkt zvezdno super popolnega grafa s super popolnim grafom tudi zvezdno super popoln graf. S tem dobimo orodje za konstrukcijo večjih zvezdno super popolnih grafov.

Izrek 7.4.[8] *Vsi cikli so zvezdno super popolni grafi.*

Dokaz. Ker so vsi dvodelni grafi zvezdno super popolni, nam preostane pokazati izrek za lihe cikle. Naj bo C_{2k+1} lih cikel s točkami $\{0,1,\ldots,2k\}$ in povezavami $i(i+1)$; $i = 0,1,\ldots 2k-1$ in $(2k)0$. Naj bo $w : \{0,1,\ldots,2k\} \to [0,\infty)$ poljubna utežna funkcija in

$$\omega = \omega(C_{2k+1},w) = \max\{w(i) + w(i+1); i = 0,1,\ldots,2k\},$$

kjer je $w(2k+1) = w(0)$. Definirajmo še

$$\tau = \tau(C_{2k+1},w) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{2k} w(i)$$

in $r = \max\{\omega,\tau\}$. Očitno je $\omega_f(G,w) \geq \omega$. Ker je v vsaki neodvisni množici C_{2k+1} največ k točk, je tudi $\omega_f(G,w) \geq \tau$ in zato $\omega_f(G,w) \geq r$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je graf (C_{2k+1},w) r-krožno obarvljiv. Od tod sledi $\omega_f(C_{2k+1},w) = \chi^c(C_{2k+1},w) = r$, kar pomeni, da je C_{2k+1} zvezdno super popoln graf.

Oglejmo si najprej primer, ko je $\tau \geq \omega$. Naj bo C cikel dolžine $r = \tau = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{2k} w(i)$. Na tem mestu definiramo r-krožno barvanje c grafa C_{2k+1} na naslednji način: Naj bo $c(0)$ interval na C dolžine $w(0)$. Privzemimo, da smo $c(i)$ že definirali. Naj bo $c(i+1)$ interval dolžine $w(i+1)$, čigar levo krajišče je enako desnemu krajišču intervala $c(i)$.

Ker je $\sum_{i=0}^{2k} w(i) = kt$, unija intervalov $c(i)$ obkroži krožnico C natanko k-krat. Tedaj je levo krajišče intervala $c(2k)$ enako desnemu krajišču intervala $c(0)$. Oglejmo si poljubno povezavo $i(i+1)$ grafa C_{2k+1} (če je $i = 2k$, je $i + 1 = 0$). Iz konstrukcije preslikave c vidimo, da je levo krajišče intervala $c(i)$ enako desnemu krajišču intervala $c(i + 1)$. Če upoštevamo, da velja $w(i) + w(i + 1) \leq r$ (iz definicije τ), sta intervala $c(i)$ in $c(i + 1)$ disjunktna. Torej je c r-krožno barvanje grafa (C_{2k+1}, w), zato trditev v tem primeru velja.

Privzemimo sedaj, da je $\tau < \omega$. Naj bo $a = kr - \sum_{i=0}^{2k} w(i) = k(\omega - \tau) > 0$ in $b = \sum_{i=0}^{2k}(\omega - (w(i)+w(i+1)))$. Tedaj je $b = (2k+1)\tau - 2\sum_{i=0}^{2k} w(i) = \omega + 2a > 2a$. Potem obstaja $2k+1$ realnih števil $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2k}$, za katere velja $0 \leq \delta_i \leq \omega - (w(i)+w(i+1))$ in $\sum_{i=0}^{2k} \delta_i = a$, saj je vsota zgornjih mej vsaj dvakrat večja od a. Naj bo C cikel obsega $r = \omega$ in definirajmo preslikavo c iz množice točk grafa C_{2k+1} v intervale krožnice C na naslednji način: Naj bo $c(0)$ poljuben interval na krožnici C dolžine $w(0)$. Privzemimo, da smo $c(i)$ že definirali. Naj bo $c(i + 1)$ interval na C dolžine $w(i + 1)$, čigar desno krajišče je od levega krajišča intervala $c(i)$ oddaljeno za δ_i.

Ker je $\delta_i + w(i) + w(i+1) \leq \omega = r$, sta za poljuben $i = 1, 2, \ldots, 2k-1$ intervala $c(i)$ in $c(i + 1)$ disjunktna. Ker je $\sum_{i=0}^{2k}(w(i) + \delta_i) = kr$, unija intervalov $c(i)$ in presledkov med njimi dolžine δ_i obkroži krožnico C natanko k-krat, zato se leva stran intervala $c(0)$ in desna stran intervala $c(2k)$ ne prekrivata. Ker je tudi $\delta_{2k} + w(0) + w(2k) \leq r$, sta intervala $c(0)$ in $c(2k)$ disjunktna. Tedaj je preslikava c r-krožno barvanje grafa (C_{2k+1}, w). $\square$

W. Deuber in X. Zhu [8] sta pokazala, da je tudi komplement poljubnega lihega cikla zvezdno super popoln.

Sedaj, ko poznamo nekaj družin zvezdno super popolnih grafov, bomo pokazali, da lahko s pomočjo leksikografskega produkta konstruiramo še več takšnih družin grafov.

Leksikografski produkt, $(G[G'], ww')$**, utežnih grafov** (G, w) in (G', w') je leksikografski produkt grafov G in G' z utežjo ww', ki poljubni točki $(x, y) \in V(G[G'])$ priredi utež $w(x)w'(y)$. Zanima nas, kako je krožno kromatično število grafa $(G[G'], ww')$ odvisno od krožnih kromatičnih števil grafov (G, w) in (G', w').

Trditev 7.5.[8] *Naj bo (G, w) utežni graf, kjer točke z neničelno utežjo inducirajo graf brez izoliranih točk. Za poljuben graf (G', w') velja*

$$\chi_f(G, w)\chi(G', w') \leq \chi^c(G[G'], ww') \leq \chi^c(G, w)\chi(G', w').$$

Dokaz. Najprej pokažimo prvo neenakost $\chi_f(G, w)\chi(G', w') \leq \chi^c(G[G'], ww')$. Naj bo $\chi^c(G[G'], ww') = r$ in b r-krožno barvanje grafa $(G[G'], ww')$. Preslikava b vsaki točki grafa $G[G']$ priredi interval na krožnici C dolžine r. Za vsako točko p krožnice C označimo z S_p množico točk $x \in V(G)$, za katere je $p \in b(x, y)$ za neko točko $y \in V(G')$. Iz definicije leksikografskega produkta in r-krožnega barvanja sledi, da je S_p neodvisna množica grafa G. Interval A na krožnici C imenujemo **elementarni interval**, če je A maksimalni interval, pri katerem za poljubni točki $p, p' \in A$ velja $S_p = S_{p'}$. Če je A

elementarni interval in $p \in A$, označimo $S_A = S_p$ za točko $p \in A$. Različni elementarni intervali so disjunktni, vendar lahko za različna elementarna intervala A in B velja $S_A = S_B$. Naj bo c preslikava iz množice neodvisnih množic točk grafa G v poltrak $[0, \infty)$, definirana s predpisom $c(S) = \sum_{S_A = S} l(A)$, kjer je $l(A)$ dolžina intervala A. Naj bo $c(S) = 0$ v primeru, ko za vse elementarne intervale A velja $S \neq S_A$.

Sedaj bomo pokazali, da za poljubno točko $x \in V(G)$ velja $\sum_{x \in S} c(S) \geq w(x)\chi(G', w')$. Privzamemo lahko, da je $w(x) > 0$, saj je v nasprotnem primeru ocena očitna. Iz definicije sledi

$$\sum_{x \in S} c(S) = \sum_{x \in S} \sum_{S_A = S} l(A) = \sum_{x \in S_A} l(A).$$

Označimo z I_x unijo vseh intervalov $b(x, y)$ $(y \in V(G'))$. Ker je vsaka točka krožnice C, ki je v I_x, vsebovana vsaj v enem intervalu $b(x, y)$ in obratno, je $I_x = \bigcup_{x \in S_A} A$. Ker so različni elementarni intervali disjunktni, velja

$$\sum_{x \in S_A} l(A) = l(I_x).$$

Ker obstaja točka z neničelno utežjo, ki je sosednja točki x, I_x ne pokriva cele krožnice C. Zato lahko gledamo na I_x kot na interval. I_x je lahko tudi disjunktna unija intervalov, vendar nas v nadaljevanju to ne bo motilo in lahko te intervale zlepimo.

Preslikava b preslika vsako točko $y \in V(G')$ v podinterval $b(x, y)$ intervala I_x dolžine $w(x)w'(y)$. Torej je skupna dolžina intervala I_x vsaj $w(x)\chi(G', w')$. Tako velja

$$\sum_{x \in S} c(S) \geq w(x)\chi(G', w').$$

Iz definicije r-deljenega barvanja utežnega grafa sledi

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) \geq \chi_f(G, w)\chi(G', w').$$

Unija vseh elementarnih intervalov je enaka ciklu C dolžine r. Ker je $\sum c(S) = r$, velja ocena

$$r \geq \chi_f(G, w)\chi(G', w').$$

Dokažimo sedaj še drugo neenakost $\chi^c(G[G'], ww') \leq \chi^c(G, w)\chi(G', w')$. Naj bo $\chi^c(G, w) = r$ in naj bo b r-krožno barvanje grafa (G, w), to je preslikava, ki vsaki točki x grafa G priredi interval na krožnici C z dolžino $w(x)$. Raztegnimo sedaj krožnico C v krožnico C' obsega $r \cdot \chi(G', w')$. S tem raztegnemo tudi poljuben interval $b(x)$ v interval $b'(x)$ na krožnici C' dolžine $w(x)\chi(G', w')$. Nato definiramo preslikavo b_x, ki vsaki točki y grafa G' priredi podinterval intervala $b'(x)$ tako, da ima interval $b_x(y)$ dolžino $w(x)w'(y)$ in so podintervali sosednjih točk disjunktni. Takšna preslikava obstaja zaradi definicije intervalnega kromatičnega števila. Preslikava b^* sedaj vsako točko (x, y) grafa $G[G']$ preslika v interval $b_x(y)$ krožnice C'. Tako b^* predstavlja $\chi^c(G, w)\chi(G', w')$-barvanje grafa $(G[G'], ww')$, zato je $\chi^c(G[G'], ww') \leq \chi^c(G, w)\chi(G', w')$. □

Od tod sledi naslednja posledica.

Posledica 7.6. *Če je $\chi_f(G, w) = \chi^c(G, w)$ in podgraf, induciran s točkami z neničelnimi utežmi, ne vsebuje izoliranih točk, za poljuben utežni graf (G', w') velja*

$$\chi^c(G[G'], ww') = \chi^c(G, w)\chi(G', w').$$

Prepričajmo se, da je pogoj, da graf, induciran s točkami z neničelnimi utežmi, ne vsebuje izoliranih točk, potreben. Vzemimo primer, da graf G vsebuje eno točko x. Vidimo, da je $\chi^c(G[G'], ww') = \chi^c(G, w)\chi(G', w') = w(x)\chi(G', w')$. V primeru večjih grafov, kjer obstajajo izolirane točke podgrafa, induciranega s točkami z neničelnimi utežmi, dobimo v produktu $(G[G'], ww')$ komponente, ki pripadajo tem izoliranim točkam. Naj bo $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ množica izoliranih točk v grafu, induciranem s točkami z neničelnimi utežmi grafa (G, w), in naj velja $w(x_1) \geq w(x_i)$ za vse $i = 1, 2, \ldots, k$. Naj bo $G'' = G - X$. Komponente, ki pripadajo izoliranim točkam, imajo krožno kromatično število enako $w(x_1)\chi^c(G', w')$, zato iz trditve sledi veljavnost enakosti

$$\chi^c(G[G'], ww') = \max\{\chi^c(G'', w)\chi(G', w'), w(x_1)\chi^c(G', w')\}.$$

Ker se definiciji deljenega barvanja na grafih brez uteži in na utežnih grafih razlikujeta le v pogoju $\sum_{x \in X} c(X) \geq 1($ ali $\geq w(x))$, je dokaz izreka 6.6 enak dokazu naslednje leme:

Lema 7.7. *Za poljubna utežna grafa (G, w) in (G', w') velja*

$$\chi_f(G[G'], ww') = \chi_f(G, w)\chi_f(G', w').$$

Sedaj lahko pokažemo izrek, ki nam da konstrukcijo novih zvezdno super popolnih grafov.

Izrek 7.8.[8] *Če je G zvezdno super popoln graf in G' super popoln graf, je leksikografski produkt $G[G']$ zvezdno super popoln graf.*

Dokaz. Naj bo G zvezdno super popoln graf in G' super popoln graf. Tedaj je $\chi^c(G, w) = \chi_f(G, w)$ za poljubno utežno funkcijo w. Iz posledice 7.6 sledi enakost

$$\chi^c(G[G'], ww') = \chi^c(G, w)\chi(G', w')$$

in iz leme 7.7 enakost

$$\chi_f(G[G'], ww') = \chi_f(G, w)\chi_f(G', w').$$

Ker je deljeno kromatično število utežnih grafov enako deljeni teži klike, velja

$$\omega_f(G[G'], ww') = \omega_f(G, w)\omega_f(G', w').$$

Graf G je zvezdno super popoln, graf G' pa super popoln, zato je $\chi^c(G, w) = \omega_f(G, w)$ in $\chi(G', w') = \omega_f(G', w') = \omega(G', w')$. Če sedaj združimo dobljene enakosti, vidimo, da je za poljubni utežni funkciji w in w'

$$\chi^c(G[G'], ww') = \chi_f(G[G'], ww').$$

Tedaj je graf $G[G']$ zvezdno super popoln. □

Zaključimo to poglavje z odprtimi vprašanji [8]:

- Ali je $\chi^c(G, w) = \chi(G, w)$ za poljubno utežno funkcijo natanko tedaj, ko je graf G super popoln?
- Ali je $\chi^c(G, w) = \chi(G, w)$ za $0-1$ utežno funkcijo natanko tedaj, ko je graf G popoln?
- Ali so grafi G_k^d zvezdno super popolni?

Poglavje 8

Zaključek

V tem, zadnjem poglavju, bomo predstavili ostale rezultate, ki so jih izpeljali avtorji in obravnavajo zvezdno kromatično število, dodali pa bomo tudi nekaj prvih ugotovitev o zvezdnem kromatičnem indeksu.

V [14] je definirana **polinomska Turing prevedljivost** (ali le **Turing prevedljivost**) problema Π na problem Π' kot algoritem A, ki reši problem Π z uporabo hipotetičnega podprograma S za rešitev problema Π', in je v primeru, če je S polinomski algoritem za problem Π', algoritem A polinomski za problem Π. **NP-ekvivalenten problem** je problem, ki je Turing prevedljiv na NP-poln problem in na katerega je Turing prevedljiv vsaj en NP-poln problem. NP-ekvivalenten problem ima polinomsko rešitev natanko tedaj, ko je $P = NP$. Naj bo STARCOLOR problem odločitve na grafu G, ali velja $\chi^\star(G) < \chi(G)$. D. R. Guichard [15] je pokazal, da je STARCOLOR NP-ekvivalenten problem.

Za poljubno (k, d)-barvanje c grafa G definirajmo usmerjen graf $H_k^d(c)$ kot graf na množici točk grafa G, kjer je povezava (u, v) usmerjena od u do v, če velja $c(v) = c(u) + d (\mathrm{mod}\ k)$. Poljubno (k, d)-barvanje grafa G imenujemo **aciklično barvanje**, če je graf H_k^d acikličen (brez ciklov). D. R. Guichard [15] je dokazal, da velja $\chi^\star(G) < k$ natanko tedaj, ko ima graf G kakšno aciklično $(k, 1)$-barvanje. S tem dobimo še en potreben in zadosten pogoj za veljavnost enakosti $\chi^\star(G) = \chi(G)$.

Zvezdno kromatično število pa nastopa tudi v oceni skrajnega neodvisnostnega razmerja grafa. X. Zhu in S. Fraser [36] sta definirala **neodvisnostno razmerje,** $i(G)$, grafa G kot razmerje $i(G) = \frac{\alpha(G)}{|G|}$. **Skrajno neodvisnostno razmerje**, $I(G)$, definiramo kot limito $I(G) = \lim_{k\to\infty} i(G^k)$ [23]([36]), kjer je G^k kartezični produkt k kopij grafa G. P. Hell, X. Yu in H. Zhou [23]([36]) so pokazali, da je zaporedje $(i(G^k))_{k\in\mathbb{N}}$ nenaraščajoče in da velja ocena

$$i(G^k) \geq \frac{1}{\chi(G^k)} = \frac{1}{\chi(G)}.$$

Zato limita obstaja in velja

$$i(G) \geq I(G) \geq \frac{1}{\chi(G)}.$$

Znana je tudi boljša zgornja ocena za $I(G)$ [18]([36]):

$$\frac{1}{\chi_f(G)} \geq I(G) \geq \frac{1}{\chi(G)}.$$

Tedaj se je postavilo vprašanje, ali obstaja boljša ocena za $I(G)$ in ali lahko $I(G)$ zavzame tudi kakšno vrednost znotraj intervala $[\frac{1}{\chi(G)}, \frac{1}{\chi_f(G)}]$. Na drugo vprašanje sta X. Zhu in S. Frazer [36] odgovorila s primerom grafa $G = C_5[P]$, kjer je P Petersenov graf. Za graf G velja

$$\frac{1}{\chi_f(G)} > I(G) > \frac{1}{\chi(G)}.$$

Pomembnejši rezultat [36] pa je ocena

$$I(G) \geq \frac{1}{\chi^\star(G)}.$$

S tem rezultatom dobimo nov grafovski parameter $\frac{1}{I(G)}$, ki leži med deljenim in zvezdnim kromatičnim številom:

$$\chi_f(G) \leq \frac{1}{I(G)} \leq \chi^\star(G) \leq \chi(G).$$

Zaporedje kromatičnih razlik grafa G, $cds(G)$, je definirano kot

$$cds(G) = (\alpha_1(G), \alpha_2(G) - \alpha_1(G), \ldots, \alpha_t(G) - \alpha_{t-1}(G), \ldots, \alpha_{\chi(G)} - \alpha_{\chi(G)-1}),$$

kjer z $\alpha_t(G)$ označimo največje število točk t-obarvljivega, induciranega podgrafa grafa G. **Normalizirano zaporedje kromatičnih razlik** grafa G, $ncds(G)$, je definirano kot $ncds(G) = cds(G)/|G|$. **Skrajno normalizirano zaporedje kromatičnih razlik** grafa G, $NCDS(G)$, je enako limiti $ncds(G^k)$, ko gre k proti neskončnosti:

$$NCDS(G) = \lim_{k\to\infty} ncds(G^k).$$

Zaporedje $(x_k)_{k=1}^n$ **dominira** zaporedje $(y_k)_{k=1}^n$ in zapišemo $(x_k) \succeq (y_k)$, če veljata naslednja pogoja:

1. $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k$ in

2. $\sum_{k=1}^{p} x_k \geq \sum_{k=1}^{p}$ za $p = 1, 2, \ldots, n-1$.

H. Zhou [33] je pokazal, da za poljuben graf G velja

$$NCDS(G) \succeq \left(\frac{1}{\chi^\star}, \frac{1}{\chi^\star}, \ldots, \frac{1}{\chi^\star}, 1 - \frac{\chi - 1}{\chi^\star}\right),$$

kjer je $\chi = \chi(G)$ in $\chi^\star = \chi^\star(G)$.

X. Zhu [38] je s sodelavci izpeljal tudi nekaj ocen zvezdnega kromatičnega števila grafov Mycielskega. Za poljuben graf G z množico točk $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ naj bo $\mu(G)$ **graf Mycielskega**, definiran na naslednji način: Vsaki točki x_i grafa G priredimo točko x_i', ki jo povežemo z vsemi sosedi točke x_i. Na koncu grafu dodamo še točko u in jo povežemo z vsemi prirejenimi točkami x_i'. Naj bo $\mu^k(G) = \mu(\mu^{k-1}(G))$. Dokazane so naslednje ocene:

$$\chi^\star(\mu^k(G)) \leq \chi(\mu^k(G)) - \tfrac{1}{2}, \text{ če je } \chi(G) = k+1,$$

$$\chi^\star(\mu^i(G)) = \chi(G), \text{ če je } i = 1, 2 \text{ in } \chi(G) \geq 2 + i,$$

$$\chi^\star(\mu^2(G)) = \chi(G) - \tfrac{1}{2}, \text{ če je } \chi^\star(G) \leq \chi(G) - \tfrac{1}{2}.$$

Naj bo d poljubno naravno število. **Dvojno** (n, d)**-označevanje** grafa G je preslikava, ki vsaki točki G priredi podmnožico množice $\mathbb{Z}_n$ moči 2 tako, da se poljubni števili na sosednjih točkah grafa razlikujeta vsaj za d po modulu n. **Vrednost dvojnega** d**-označevanja** grafa G, $r^\star(G, d)$, je najmanjše število n, za katero obstaja dvojo (n, d)-označevanje grafa G. Karakteristični graf $G^\star(n, d)$ je graf z množico točk $\binom{\mathbb{Z}_n}{2}$ (vse podmnožice množice $\mathbb{Z}_n$ moči 2), kjer sta točki $\{u_1, u_2\}$ in $\{v_1, v_2\}$ povezani, če za poljubna i in j velja $|u_i - v_j|_n \geq d$.

Pri izpeljavi ocen kromatičnega števila karakterističnih grafov dvojnega (n, d)-označevanja, sta D. R. Guichard in J. W. Krussel [16] uporabila osnovne lastnosti zvezdnega kromatičnega števila ter karakterističnih grafov G_k^d. Pokazala sta naslednji izrek:

Naj bo G k-kromatičen graf. Potem je

$$\begin{array}{ll} r^\star(G, d) = 2 & ; k = 1, \\ r^\star(G, d) = 2d + 2 & ; k = 2, \\ r^\star(G, d) \in [3d + 4, 4d + 4] & ; k = 4, \\ r^\star(G, d) \in [(k-1)d + 3, kd + k] & ; k \neq 1, 2, 4. \end{array}$$

Pokazala sta tudi, da v primeru, ko je $n > 2d + 2$ in $n \neq d(\text{mod } d + 1)$, velja $r^\star(G_n^{d+1}, d) = n$.

Omenimo še definicijo zvezdnega kromatičnega števila na hipergrafih, ki sta jo vpeljala L. Haddad in H. Zhou [17]. **Hipergraf** H je graf z množico točk $\{h_1, \ldots, h_n\}$ in množico hiperpovezav oblike $h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_t}$. Hipergraf, v katerem vsaka hiperpovezava vsebuje natanko h točk, imenujemo **h-enotni hipergraf**.

Naj bo $h \geq 2$, $k \geq 2d$, $h, k, d \in \mathbb{Z}^+$ in H h-enotni hipergraf. Preslikavo $c : V(H) \to \mathbb{Z}_k$ imenujemo **krepko** (k, d)**-barvanje** H, če za poljubni točki u in v grafa H velja $|c(u) - c(v)|_k \geq d$ brž, ko par $\{u, v\}$ nastopa v kakšni hiperpovezavi grafa H. Preslikavo c imenujemo **šibko** (k, d)**-barvanje** H, če točke na nobeni hiperpovezavi niso obarvane z isto barvo in če za poljuben par $\{u, v\} \subseteq V(H)$, ki nastopa v kakšni hiperpovezavi grafa H velja $c(v) \neq c(u) \Rightarrow |c(v) - c(u)|_k \geq d$. Krepko (šibko) $(k, 1)$-barvanje H imenujemo kar krepko (šibko) k-barvanje. Tako je **krepko kromatično število**, $\chi_k(H)$, hipergrafa H (oz. **šibko kromatično število**, $\chi(H)$) najmanjše število k, za katero obstaja krepko (šibko) k-barvanje H. Za $k \geq hd$ definirajmo **h-hiperkrožni graf**, $H_h(k, d)$, kot h-enotni hipergraf z množico točk $\mathbb{Z}_k$ in množico povezav

$$E(H_h(k, d)) = \{i_1 \cdots i_h; i_j \in \mathbb{Z}_k, |i_r - i_s|_k \geq d, \text{ za } \forall r \text{ in } s = 1, 2, \ldots, h\}.$$

Vidimo, da je krepko (k, d)-barvanje h-enotnega hipergrafa H preprosto homomorfizem $c : H \to H_h(k, d)$, ki vsako hiperpovezavo grafa H preslika v hiperpovezavo grafa $H_h(k, d)$. L. Haddad in H. Zhou [17] sta za krepko (k, d)-barvanje h-enotnega hipergrafa pokazala podobne lastnosti, kot veljajo za (k, d)-barvanje običajnih grafov in vpeljala definicijo **krepkega zvezdnega kromatičnega števila**, $\chi_k^\star(H)$, h-enotnega hipergrafa H. Dokazala sta, da je $\chi_k^\star(H) = \min\{k/d; H \text{ je krepko } (k, d)\text{-obarvljiv }\}$ in da velja tudi ocena $\chi_k(H) - 1 < \chi_k^\star(H) \leq \chi_k(H)$. Na enak način, kot za grafe G_k^d, sta pokazala, da je

$$\chi_k^\star(H_h(k, d)) = \frac{k}{d}.$$

Zvezdno kromatično število, $\chi^\star(H)$, h-enotnega hipergrafa H sta avtorja v [17] definirala kot

$$\chi^\star(H) = \min\{k/d; H \text{ je šibko } (k, d)\text{-obarvljiv }\}.$$

Za $\chi^\star(H)$ prav tako velja ocena $\chi(H) - 1 < \chi^\star(H) \leq \chi(H)$.

Steinerjev trojni sistem STS je 3-enotni hipergraf S, kjer je poljuben par točk grafa natanko v eni hiperpovezavi S. **Delni Steinerjev trojni sistem DSTS** je 3-enotni hipergraf S, kjer je poljuben par točk grafa v največ eni hiperpovezavi S. V [17] je pokazano, da sta problema odločitve, ali za dani h-enotni hipergraf obstaja krepko (k, d)-barvanje in ali za dani DSTS obstaja šibko (k, d)-barvanje, NP-polna problema. Za poljuben STS graf S velja

$$\chi^\star(S) = \chi(S).$$

Za konec definirajmo zvezdni kromatični indeks in izpeljimo nekaj ocen zvezdnega kromatičnega indeksa.

Graf G je **k-obarvljiv po povezavah**, če lahko obarvamo povezave grafa G s k barvami tako, da se barvi sosednjih povezav razlikujeta. Če je graf G k-obarvljiv po povezavah in ni $(k-1)$-obarvljiv po povezavah, pravimo, da je **kromatični indeks** grafa G enak k in zapišemo $\chi'(G) = k$.

Slavni **Vizingov izrek** pravi, da za vsak graf velja

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

kjer je $\Delta(G)$ največja stopnja točk grafa G.

Za dvodelne grafe je χ' vedno na spodnji meji, za polne grafe K_n pa je χ' na spodnji meji, če je n sod in na zgornji, če je n lih.

Povezavni graf, $L(G)$, grafa G, je graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da zamenjamo vlogi točk in povezav. Tako povezave grafa G postanejo točke grafa $L(G)$, ki so povezane, če jih dobimo iz sosednjih povezav. Definirajmo **zvezdni kromatični indeks**, $\chi'^{\star}(G)$, grafa G kot:

$$\chi'^{\star}(G) = \chi^{\star}(L(G)).$$

Trditev 8.1. *Za poljuben graf G velja*

$$\Delta(G) \leq \chi'^{\star}(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dokaz. Drugo neenakost dobimo z uporabo Vizingovega izreka:

$$\chi'^{\star}(G) = \chi^{\star}(G) \leq \chi(L(G)) = \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dokažimo še neenakost $\Delta(G) \leq \chi'^{\star}(G)$. Ker v G obstaja točka, v kateri se dotika $\Delta(G)$ povezav grafa G, te povezave tvorijo poln podgraf $K_{\Delta(G)}$ v povezavnem grafu $L(G)$. Zato je $\Delta(G) = \omega(L(G)) \leq \chi(K_{\Delta(G)}) = \chi^{\star}(K_{\Delta(G)}) \leq \chi^{\star}(L(G)) = \chi'^{\star}(G)$. □

Posledica 8.2. *Če je $\chi'(G) = \Delta(G)$, je tudi $\chi'^{\star}(G) = \chi'(G)$.*

V posebnem torej velja $\chi'^{\star}(K_{2n}) = 2n - 1$ in $\chi'^{\star}(G) = \Delta(G)$ za dvodelni graf G.

Trditev 8.3. *Naj bo G graf, za katerega je $\Delta(G) \geq |E(G)|/d$. Tedaj velja*

$$\chi'^{\star}(G) \in \{\Delta(G) + k/i; i = 1, 2, \ldots, d-1, k = 0, 1, \ldots, |E(G)| - i\Delta(G)\}.$$

Dokaz. Dokaz trditve sledi iz izreka 8.1 in posledice 1.12. □

Posledica 8.4. *Če je $\Delta(G) \geq |E(G)|/2$, je $\chi'^{\star}(G) = \chi'(G)$.*

Dokaz. Če je $\Delta(G) > |E(G)|/2$, je $i = 1$, zato $\chi'^{\star}(G) = \Delta(G)$ ali $\chi'^{\star}(G) = \Delta(G) + 1$. Če pa je $\Delta(G) = 2|E(G)|$, lahko v primeru, ko je $i = 2$, k zavzame le vrednost 0, torej $\chi'^{\star}(G) = \Delta(G)$. Ker ne more hkrati veljati $\chi'^{\star}(G) = \Delta(G)$ in $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ in ker je $\chi'^{\star}(G) \leq \chi'(G)$, velja $\chi'^{\star}(G) = \chi'(G)$. □

Iz posledice 8.4 sledi $\chi'^{\star}(K_5) = \chi'(K_5) = 6$.

S to vpeljavo zvezdnega kromatičnega indeksa smo zaključili pregled znanih rezultatov zvezdnega kromatičnega števila.

Literatura

[1] J. A. Andrews in M. S. Jacobson, On a generalization of chromatic number, *Congressus Numerantium* 47 (1985) 33-48.

[2] H. L. Abbott in B. Zhou, The star chromatic number of a graph, *J. Graph Theory* 17 (1993) 349-360.

[3] N. Alon, Z. Tuza in M. Voigt, Choosability and fractional chromatic numbers, rokopis, 1995.

[4] B. Bollobás in A. J. Harris, List-colorings of graphs, *Graphs and Combinatorics* 1 (1985) 115-127.

[5] B. Bollobás in N. Sauer, Uniquely colorable graphs with large girth, *Can. J. Math.* 28 (1976) 1340-1344.

[6] J. A. Bondy in P. Hell, A note on the star chromatic number, *J. Graph Theory* 14 (1990) 479-482.

[7] V. Chvatal, The minimality of the Mycielski graph, *Lecture Notes in Math* 406 (1973) 243-246.

[8] W. Deuber in X. Zhu, Circular coloring of weighted graphs, poslano v J. Graph Theory.

[9] M. El-Zahar in N. Sauer, The chromatic number of the product of two 4-chromatic graphs is 4, *Combinatorica* 5 (1985) 121-126.

[10] P. Erdös, A. Rubin in H. Taylor, Choosability in graphs, *Congressus Numerantium* 26 (1979) 125-157.

[11] D. C. Fisher, Fractional colorings with large denominators, *J. Graph Theory* 20 4 (1995) 403-409.

[12] G. Gao, E. Mendelsohn in H. Zhou, Computing star chromatic number related graph invariants, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 16 (1994) 87-95.

[13] G. Gao in X. Zhu, Star-extremal graphs and the lexicographic product, *Discrete Mathematics* 152 (1996) 147-156.

[14] M. R. Garey in D. R. Johnson, *Computer and Intractability*, W. H. Freeman, San Francisco, 1979.

[15] D. R. Guichard, Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number, *J. Graph Theory* 17 (1993) 129-134.

[16] D. R. Guichard in J. W. Krussel, Pair labelings of graphs, *SIAM J. Discrete Math.*5 1 (1992) 144-149.

[17] L. Haddad in H. Zhou, Star chromatic numbers of hypergraphs and partial triple systems, *Discrete Mathematics* 146 (1995) 45-58.

[18] G. Hahn, P. Hell in S. Poljak, On the ultimate independence ratio of a graph, *European J. Combinatorics* 16 (1995) 253-262.

[19] R. Häggkvist, P. Hell, D. J. Miller, in V. Neumann Lara, On multiplicative graphs and the product conjecture, *Combinatorica* 8 (1988) 63-74.

[20] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[21] F. Harary, S. T. Hedetniemi in R. W. Robinson, Uniquely colorable graphs, *J. Combinatorial Theory* 6 (1969) 264-270.

[22] S. Hedetniemi, Homomorphisms and graph automata, University of Michigan Technical Report 03105-44-T (1966).

[23] P. Hell, X. Yu in H. Zhou, Independence ratios of graph powers, rokopis, 1994.

[24] S. Klavžar, rokopis, 1993.

[25] S. Klavžar, U. Milutinović, Strong products of Kneser graphs, *Discrete Mathematics* 133 (1994) 297-300.

[26] S. Klavžar in X. Zhu, osebna korespondenca, 1993.

[27] D. E. Moser, The star chromatic number of planar graphs, rokopis, 1995.

[28] F. S. Roberts, New directions in graph theory, *Annals of Discrete Mathematics* 55 (1993) 13-44.

[29] G. Sabidussi, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Can. J. Math.* 9 (1957) 515-525.

[30] S. Stahl, n-tuple colorings and associated graphs, *J. Combinatorial Theory* B 20 (1976) 185-203.

[31] E. Steffen in X. Zhu, Star chromatic numbers of graphs, *Sonderforschungsbereich 343, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Universität Bielefeld*, 1994, izide v Combinatorica.

[32] A. Vince, Star chromatic number, *J. Graph Theory* 12 (1988) 551-559.

[33] H. Zhou, On the ultimate normalized chromatic difference sequence of a graph, *Discrete Mathematics* 148 (1996) 287-297.

[34] X. Zhu, Star chromatic numbers and products of graphs, *J. Graph Theory* 16 (1992) 557-569.

[35] X. Zhu, Uniquely H-colorable graphs with large girth, *Sonderforschungsbereich 343, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Universität Bielefeld*, 1994, izide v J. Graph Theory.

[36] X. Zhu in S. Fraser, On the bound for the ultimate independence ratio of a graph, poslano v Discrete Mathematics.

[37] X. Zhu, Star chromatic number and fractional chromatic number of a graph, rokopis.

[38] X. Zhu, osebna korespondenca, 1996.

Stvarno kazalo