OSNOVNO O SEZNAMSKIH BARVANJIH

MARTIN JUVAN

Math. Subj. Class. (1991) 05C15

V članku so predstavljena seznamska barvanja grafov, posplošitev običajnih barvanj, pri kateri moramo vsak element grafa obarvati z barvo iz njegovega seznama dopustnih barv. Dokazani sta posplošitvi Brooksovega in Königovega izreka na seznamska barvanja, obravnavana pa so tudi seznamska barvanja ravninskih grafov.

INTRODUCTION TO LIST COLOURINGS

In the article list colourings of graphs are considered. List colourings form a natural generalization of ordinary colourings in which each element of a graph must be coloured by a colour from its own list of admissible colours. Generalizations of Brooks' and König's theorems to list colourings are proved. List colourings of planar graphs are also discussed.

1. Uvod

Barvanja grafov in sorodni problemi so ena od klasičnih tem teorije grafov. V prispevku bomo spoznali *seznamska barvanja*, posplošitev običajnih barvanj, ki je bila v zadnjih letih deležna precejšnje pozornosti. Seznamska barvanja so neodvisno v drugi polovici sedemdesetih let vpeljali Vizing [12] ter Erdős, Rubin in Taylor [4]. Zanimanje zanje se je povečalo v devetdesetih letih, ko je bilo razrešenih nekaj osnovnih vprašanj, povezanih z njimi [1,13,9,5]. Kljub temu pa pregledna knjiga [6] še vedno omenja precej nerešenih problemov, ki se navezujejo na seznamska barvanja.

2. Barvanja točk

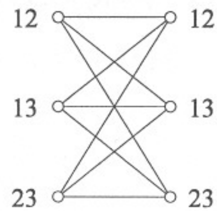
Vzemimo (enostaven) graf G. Z $V(G)$ bomo označili množico točk, z $E(G)$ pa množico povezav grafa G. Naj bo $L\colon V(G) \to P(\mathbb{N})$ preslikava, ki vsaki točki $v \in V(G)$ priredi množico naravnih števil $L(v)$. Preslikavi L pravimo *izbira barv* za točke grafa G, množica $L(v)$ pa je *seznam dopustnih barv* za točko v. Preslikava $\lambda\colon V(G) \to \mathbb{N}$ je *L-barvanje* (točk) grafa G, če izpolnjuje naslednji zahtevi:

(i) $\lambda(v) \in L(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$,

(ii) sosednje točke so obarvane z različnimi barvami, $u \sim v \Rightarrow \lambda(u) \neq \lambda(v)$.

Običajna barvanja dobimo, kadar je izbira barv L konstantna funkcija, torej če imajo vse točke enake sezname dopustnih barv. Graf G je (po točkah) seznamsko k-obarvljiv, če dopušča L-barvanje za vsako izbiro barv L, za katero za vsako točko $v \in V(G)$ velja $|L(v)| \geq k$. Najmanjše število k, za katero je graf G seznamsko k-obarvljiv, imenujemo *seznamsko kromatično število* grafa G in ga označimo s $\chi_\ell(G)$.

Naj $\deg_G(v)$ označuje stopnjo točke v v grafu G in $\Delta(G)$ maksimalno stopnjo točk v grafu G. Ker ima poljubna točka grafa G kvečjemu $\Delta(G)$ sosedov, je $\chi_\ell(G) \leq \Delta(G) + 1$. Neposredno iz definicij tudi sledi, da



Slika 1. Graf $K_{3,3}$ ni seznamsko 2-obarvljiv.

seznamsko kromatično število $\chi_\ell(G)$ ni manjše od običajnega kromatičnega števila $\chi(G)$. Lahko pa je strogo večje. Vzemimo polni dvodelni graf $K_{3,3}$ in njegovim točkam izberimo dopustne barve tako, kot to prikazuje slika 1. Ni se težko prepričati, da pri taki izbiri dopustnih barv grafa $K_{3,3}$ ni mogoče obarvati. Zato je $\chi_\ell(K_{3,3}) > 2 = \chi(K_{3,3})$. Konstrukcijo izbire barv s slike 1 lahko brez težav posplošimo.

Trditev 1. *Naj bo k naravno število in $n = \binom{2k-1}{k}$. Potem je*

$$\chi_\ell(K_{n,n}) > k\,.$$

Dokaz. Pokazati moramo, da obstaja taka izbira barv L za točke grafa $K_{n,n}$, za katero je $|L(v)| \geq k$ za vsako točko $v \in V(K_{n,n})$, hkrati pa graf $K_{n,n}$ ni L-obarvljiv. Naj bo $V(K_{n,n}) = V_1 \cup V_2$ dvodelno razbitje grafa $K_{n,n}$, $\mathcal{L}$ pa družina vseh podmnožic moči k množice $\{1, \ldots, 2k-1\}$. Za izbiro barv L izberimo poljubno preslikavo $L\colon V(K_{n,n}) \to \mathcal{L}$, za katero sta zožitvi $L|_{V_1}$ in $L|_{V_2}$ bijekciji. Ker je $|\mathcal{L}| = n$, to seveda lahko storimo.

Recimo, da obstaja L-barvanje λ grafa G. Označimo z $\Lambda = \{\lambda(v) \mid v \in V_1\}$ množico barv, ki jih λ uporabi na V_1. Trdimo, da je $|\Lambda| \geq k$. Če bi namreč veljalo $|\Lambda| < k$, potem bi obstajala množica $A_1 \in \mathcal{L}$, ki bi bila disjunktna z Λ. Toda tedaj točka $u_1 \in V_1$, za katero je $L(u_1) = A_1$, ni pravilno obarvana. Torej je $|\Lambda| \geq k$. Zato obstaja množica $A_2 \in \mathcal{L}$, za katero velja $A_2 \subseteq \Lambda$. Naj bo $u_2 \in V_2$ točka, za katero je $L(u_2) = A_2$. Torej $\lambda(u_2) \in \Lambda$. Ker pa je vsaka točka iz V_1 sosednja z vsako točko iz V_2, je to v nasprotju z zahtevo (ii) v definiciji L-barvanja. Barvanje λ torej ne obstaja. ■

Trditev 1 tudi dokazuje, da sta lahko razlika in kvocient med seznamskim in običajnim kromatičnim številom poljubno velika.

Preden nadaljujemo, se spomnimo, da povezavi $e, f \in E(G)$ ležita v istem *bloku* grafa G natanko tedaj, ko v grafu G obstaja cikel, ki vsebuje obe povezavi e in f. Točke, ki pripadajo več blokom grafa, imenujemo *prerezne točke*. Če je graf G povezan, potem je dvodelni graf, ki ima za točke prerezne točke in bloke grafa G, pri čemer je prerezna točka v sosednja z blokom B natanko tedaj, ko $v \in V(B)$, drevo. Blokom, ki ustrezajo listom tega drevesa, pravimo *končni bloki*. Graf je 2-*povezan*, če ima vsaj 3 točke in je sestavljen iz enega samega bloka.

Eden osnovnih izrekov o barvanju točk grafa je Brooksov izrek [3]. Ta pravi, da je mogoče skoraj vse grafe po točkah obarvati že z $\Delta(G)$ barvami.

Izrek 2 (Brooks). *Naj bo G povezan graf, ki ni izomorfen niti polnemu grafu niti ciklu lihe dolžine. Potem je*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) .$$

Dokaza izreka ne bomo navedli, radovedni bralec ga lahko prebere na primer v [10, str. 307–308]. Pokazali pa bomo, kako iz Brooksovega izreka sledi njegova posplošitev na seznamska barvanja. Pri tem bomo potrebovali naslednjo pomožno trditev:

Lema 3. *Naj bo G povezan graf z n točkami in L taka izbira barv za G, da velja $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$.*

(i) *Če obstaja točka $u \in V(G)$, za katero je $|L(u)| > \deg_G(u)$, potem je graf G L-obarvljiv.*

(ii) *Če je graf G sestavljen iz enega samega bloka in če obstajata točki $u', u'' \in V(G)$, za kateri velja $L(u') \neq L(u'')$, potem je graf G L-obarvljiv.*

Dokaz. (i) Ker je graf G povezan, obstaja taka razvrstitev $v_1, \ldots, v_n$ točk grafa G, da je $v_n = u$ in ima vsaka točka v_i $(1 \leq i < n)$ vsaj enega soseda med točkami $v_{i+1}, \ldots, v_n$. Točke obarvamo po vrsti, kot to določa izbrana razvrstitev. Ker ima vsaka od točk $v_1, \ldots, v_{n-1}$ v koraku, ko je na vrsti za barvanje, vsaj še enega neobarvanega soseda, na razpolago pa imamo vsaj toliko barv, kot je sosedov, z njimi nimamo težav. Obarvamo pa lahko tudi zadnjo točko v_n, saj imamo za njeno barvanje po predpostavki na voljo več barv, kot ima točka sosedov, torej je na koncu prosta vsaj še ena barva.

(ii) Tudi dokaz te točke sloni na podobni ideji kot dokaz prejšnje. Predpostavimo lahko, da sta točki u' in u'' sosednji in da velja $L(u') \backslash L(u'') \neq \neq \emptyset$. Ker je graf G po predpostavki sestavljen iz enega samega bloka, je tudi graf $G - u'$ povezan. Torej obstaja taka razvrstitev $v_1, \ldots, v_n$ točk grafa G, da je $v_1 = u'$, $v_n = u''$ in ima vsaka točka v_i $(1 \leq i < n)$ vsaj enega soseda med točkami $v_{i+1}, \ldots, v_n$. Tudi tokrat točke obarvamo po vrsti, kot to določa izbrana razvrstitev. Najprej obarvamo točko v_1 z barvo iz $L(u') \backslash L(u'')$, nato pa barvanje razširimo na točke $v_2, \ldots, v_{n-1}$. Nazadnje obarvamo še točko v_n. To lahko storimo, čeprav ima točka v_n obarvane že vse sosede, saj je točka v_1, ki je sosednja s točko v_n, obarvana z barvo, ki ne pripada $L(v_n)$, in tako ne zmanjša množice dopustnih barv za v_n. ∎

S pomočjo leme 3 ni težko pokazati posplošitve Brooksovega izreka na seznamska barvanja.

Izrek 4. *Naj bo G povezan graf, ki ni izomorfen niti polnemu grafu niti ciklu lihe dolžine. Potem je*

$$\chi_\ell(G) \leq \Delta(G)\,.$$

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po številu blokov grafa G. Naj bo L izbira barv za graf G, za katero velja $|L(v)| \geq \Delta(G)$ za vsako točko $v \in V(G)$. Če ima graf G le en blok, potem trditev izreka sledi iz Brooksovega izreka, kadar je izbira barv L konstantna funkcija, oziroma iz leme 3(ii), če obstajata točki z različnima seznamoma dopustnih barv. Če pa ima graf G več blokov, naj bo G_1 eden od končnih blokov, G_2 unija preostalih blokov grafa G, $u \in V(G_1) \cap V(G_2)$ pa prerezna točka, v kateri se stikata G_1 in G_2. Po indukcijski predpostavki obstaja L-barvanje λ_2 grafa G_2. Naj bo L_1 izbira barv za G_1, ki se na $V(G_1)\backslash\{u\}$ ujema z L, dopustne barve za u pa so tiste barve iz $L(u)$, ki jih λ_2 ne uporabi na sosedih točke u v grafu G_2, $L_1(u) = L(u)\backslash\{\lambda_2(v) \mid v \in V(G_2), u \sim v\}$. Trdimo, da obstaja tudi L_1-barvanje λ_1 grafa G_1. Če je $|L_1(u)| > \deg_{G_1}(u)$, to sledi iz leme 3(i). Sicer pa je $|L_1(u)| = \deg_{G_1}(u) < \Delta(G)$ in $|L_1(v)| \geq \Delta(G)$ za vse druge točke $v \in V(G_1)$, torej lahko uporabimo lemo 3(ii). Združitev barvanj λ_1 in λ_2, pri čemer za točko u uporabimo barvo $\lambda_1(u)$, nam potem da iskano L-barvanje celotnega grafa G. ■

3. Ravninski grafi

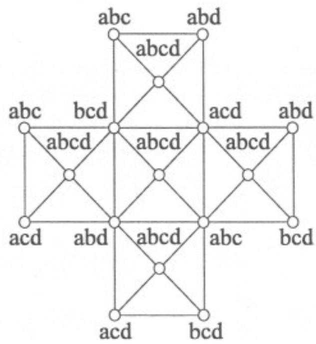
Eden najbolj znanih izrekov v teoriji grafov je gotovo izrek štirih barv. Ta pravi, da za vsak ravninski graf G velja $\chi(G) \leq 4$. Kljub mnogim poskusom še vedno ni znan noben dokaz tega izreka, ki ne bi vsaj delno slonel na uporabi računalnikov.

Kot bomo videli v nadaljevanju, izreka štirih barv ni moč posplošiti na seznamska barvanja. Obstajajo namreč ravninski grafi s seznamskim kromatičnim številom enakim 5. Prvi tak graf je konstruirala Voigtova [13] in ima 238 točk. V prispevku bomo predstavili konstrukcijo iz [8], ki porodi graf na 63 točkah. Pri tem se bomo bistveno naslonili na naslednjo pomožno trditev.

Lema 5. *Naj bosta graf H in izbira barv L za graf H določena s sliko 2. Potem graf H ni L-obarvljiv.*

Dokaz. Domenimo se za poimenovanje delov grafa H. Graf H je sestavljen iz petih kvadratov: srednjega, levega, desnega, zgornjega in spodnjega, vsak od njih pa ima še notranjo točko, ki je sosednja z vsemi njegovimi oglišči.

Uporabili bomo dokaz s protislovjem. Predpostavimo, da obstaja L-barvanje λ grafa H. Ker imajo vse notranje točke sezname dopustnih barv enake $\{a, b, c, d\}$, seznami dopustnih barv oglišč pa so podmnožice



Slika 2. Graf H z izbiro barv L.

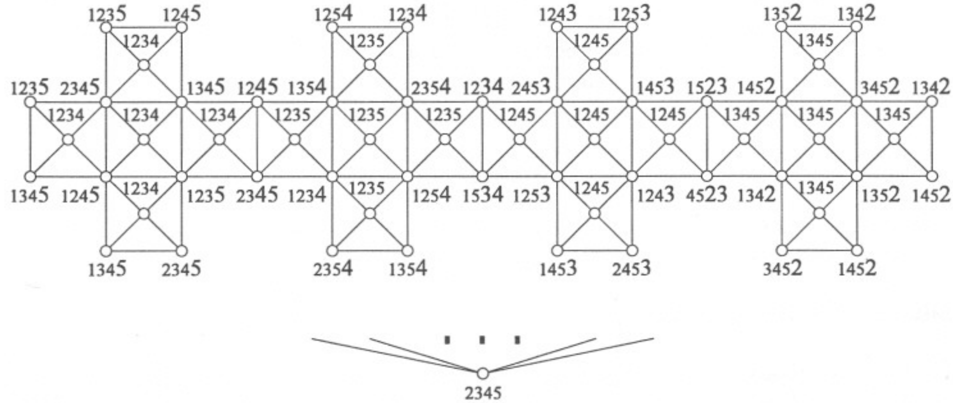
$\{a, b, c, d\}$, ima vsak kvadrat vsaj en par nasprotnih oglišč, ki ga barvanje λ obarva z isto barvo. Označimo z u levo zgornje in z v desno zgornje oglišče srednjega kvadrata. Pokazali bomo, da je $\lambda(u) = b$ ali $\lambda(v) = a$. Recimo, da je $\lambda(u) \neq b$ in $\lambda(v) \neq a$. Ločimo dve možnosti. Če je $\lambda(u) = c$, potem morata biti levo zgornje in desno spodnje oglišče zgornjega kvadrata obarvani enako, in sicer z barvo c, kar je protislovje. Če pa je $\lambda(u) = d$, morata biti z barvo d obarvani tudi desno zgornje in levo spodnje oglišče srednjega kvadrata, kar je spet protislovje.

Da ovržemo začetno predpostavko o obstoju L-barvanja λ, torej zadošča pregledati le dve možnosti: $\lambda(u) = b$ in $\lambda(v) = a$. Če je $\lambda(u) = b$, potem sta levo zgornje in desno spodnje oglišče levega kvadrata obarvani z a, levo spodnje in desno zgornje oglišče spodnjega kvadrata s c, levo zgornje in desno spodnje oglišče desnega kvadrata pa dobita barvo d. Torej $\lambda(v) = d$, kar je protislovje. Na enak način pridemo do protislovja, kadar je $\lambda(v) = a$.
■

Graf H bomo uporabili kot osnovni gradnik pri konstrukciji ravninskega grafa, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Trditev 6. *Obstaja ravninski graf na* 63 *točkah, ki ni seznamsko* 4-*obarvljiv.*

Dokaz. Ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv, je skupaj z ustrezno izbiro barv prikazan na sliki 3. Sestavljen je iz štirih kopij grafa H, zloženih v pot, pri čemer imata zaporedni kopiji skupno povezavo, in dodatne točke, ki je sosednja z vsemi oglišči v vseh kopijah grafa H. Kot barve a, b, c, d s slike 2 so v prvi kopiji izbrane barve 1, 2, 3, 4, v drugi kopiji 2, 1, 5, 3, v tretji 1, 2, 4, 5, v četrti pa 3, 1, 5, 4. Ogliščem prve kopije je kot dopustna barva dodana še barva 5, ogliščem druge kopije barva 4, ogliščem tretje barva 3 in ogliščem četrte barva 2. Lema 5 zagotavlja, da bo pri vsakem dopustnem barvanju vsaj eno oglišče prve kopije obarvano z barvo 5, vsaj eno oglišče druge kopije z barvo 4, vsaj eno oglišče tretje kopije z barvo 3 in vsaj eno oglišče četrte kopije z barvo 2. Ker pa ima dodatna točka za dopustne barve ravno barve 2, 3, 4 in 5, dopustno barvanje celotnega grafa ne obstaja. ■



Slika 3. Ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Omenimo, da je običajno kromatično število grafa s slike 3 enako 3. Ni znano, ali je ta graf tudi najmanjši ravninski graf, ki ni seznamsko 4-obarvljiv.

Graf, vložen v ravnino, je *šibka triangulacija*, če je vsako njegovo lice, razen morda neomejenega, trikotnik. Thomassen [9] je dokazal, da seznamsko kromatično število ravninskega grafa ne more biti večje od 5. Natančneje, dokazal je naslednji izrek:

Izrek 7. *Naj bo graf G 2-povezana šibka triangulacija ravnine. Označimo s $C = v_1v_2\cdots v_sv_1$ cikel v G, ki omejuje neomejeno lice. Naj bo L taka izbira barv za G, da velja*

$$|L(v)| \geq \begin{cases} 1; & v = v_1 \text{ ali } v = v_2, \\ 3; & u \in V(C)\backslash\{v_1, v_2\}, \\ 5; & u \notin V(C)\,. \end{cases}$$

Če velja tudi $|L(v_1) \cup L(v_2)| > 1$, potem obstaja L-barvanje grafa G.

Dokaz. Izrek dokažemo z indukcijo po $|E(G)\backslash E(C)|$. Če je $G = C$, trditev očitno drži. V indukcijskem koraku ločimo dve možnosti. Če ima cikel C diagonalo v_iv_j, kjer je $2 \leq i \leq j-2 \leq s-1$ (pri čemer je $v_{s+1} = v_1$), potem najprej uporabimo indukcijsko predpostavko na grafu, sestavljenem iz cikla $v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j+1}\cdots v_1$ in njegove notranjosti, nato pa še na grafu, sestavljenem iz cikla $v_jv_iv_{i+1}\cdots v_{j-1}v_j$ in njegove notranjosti. Sicer pa lahko predpostavimo, da cikel C nima diagonal. Naj bodo v_1, u_1, …, u_t, v_{s-1} sosedi točke v_s, našteti po vrsti, kot si sledijo okoli točke v_s. Ker je graf G šibka triangulacija, cikel C pa nima diagonal, je tudi graf $G' = G - v_s$ 2-povezana šibka triangulacija ravnine. Pri tem cikel $v_1v_2\cdots v_{s-1}u_t\cdots u_1v_1$ omejuje neomejeno lice. Izberimo barvo $a \in L(v_1)$ in različni barvi $b_1, b_2 \in L(v_s)\backslash\{a\}$. Naj bo L' izbira barv za graf G', ki se na $V(G')\backslash\{v_1, u_1, \ldots, u_t\}$ ujema z L, na u_i, $1 \leq i \leq t$, je enaka $L'(u_i) = L(u_i)\backslash\{b_1, b_2\}$, za v_1 pa ima vrednost $L'(v_1) = \{a\}$. Po indukcijski predpostavki obstaja L'-barvanje grafa G'. Ker je med sosedi točke v_s kvečjemu točka v_{s-1} obarvana z b_1 ali b_2, pa lahko to barvanje razširimo do L-barvanja celotnega grafa G. ■

Ker lahko vsak ravninski graf dopolnimo do 2-povezane šibke triangulacije ravnine, ima izrek 7 naslednjo posledico:

Posledica 8. *Za vsak ravninski graf G velja*

$$\chi_\ell(G) \leq 5\,.$$

4. Barvanja povezav

Podobno kot seznamska barvanja točk vpeljemo tudi seznamska barvanja povezav. Tako vsako preslikavo $L': E(G) \rightarrow P(\mathbb{N})$ imenujemo *izbira barv za povezave* grafa G. Preslikava $\lambda': E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ je *L'-barvanje povezav* grafa G, če $\lambda'(e) \in L'(e)$ za vsako povezavo $e \in E(G)$ in je vsak par različnih povezav, ki ima kako skupno krajišče, obarvan z različnima barvama. Graf G je *po povezavah seznamsko k-obarvljiv*, če je L'-obarvljiv za vsako izbiro barv L' za povezave grafa G, za katero za vsako povezavo $e \in E(G)$ velja $|L'(e)| \geq k$. Najmanjše število k, za katero je graf G po povezavah seznamsko k-obarvljiv, imenujemo *seznamski kromatični indeks* grafa G in ga označimo s $\chi'_\ell(G)$. Običajni kromatični indeks grafa G bomo označili s $\chi'(G)$. Očitno za vsak graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_\ell(G)$.

Na zanimanje za seznamska barvanja je močno vplivala naslednja domneva, ki jo je konec sedemdesetih let postavil Dinitz. Naj bo dana matrika velikosti $n \times n$, katere elementi so množice moči n. Potem je iz vsake od n^2 množic mogoče izbrati po en element tako, da v nobeni vrstici in v nobenem stolpcu nista izbrana dva enaka elementa. Če domnevo prevedemo v jezik seznamskih barvanj, tedaj pravi, da je seznamski kromatični indeks polnega dvodelnega grafa $K_{n,n}$ enak n.

Domnevo je pred nekaj leti dokazal Galvin [5]. Natančneje, Galvin je dokazal, da za vsak dvodelni multigraf G velja $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$. Pri tem multigraf pomeni graf brez zank z morebitnimi vzporednimi povezavami. Ponovimo, da pri barvanju točk vzporedne povezave niso pomembne, pri barvanju povezav pa nanje ne smemo pozabiti (ali pa se moramo omejiti le na enostavne grafe).

Galvinov rezultat je posplošitev (ene od različic) Königovega izreka [7] na seznamska barvanja.

Izrek 9 (König). *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'(G) = \Delta(G)\,.$$

Tudi dokaz tega izreka si bralec lahko ogleda v [10, str. 331, 335]. V nadaljevanju bomo pokazali, kako iz Königovega izreka izpeljemo Galvinov rezultat.

Izrek 10. *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'_\ell(G) = \Delta(G).$$

Dokaz. Naj bo $V(G) = V \cup U$ dvodelno razbitje grafa G in $c \colon E(G) \to \mathbb{N}$ običajno barvanje povezav grafa G z $\Delta(G)$ barvami. Königov izrek nam zagotavlja, da barvanje c obstaja. Pravimo, da povezava $e_1 = u_1v_1$ *pokriva* povezavo $e_2 = u_2v_2$, kjer $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$, če je $u_1 = u_2$ in $c(e_2) < c(e_1)$ ali $v_1 = v_2$ in $c(e_2) > c(e_1)$. Množica povezav F_1 *pokriva* množico F_2, če je vsaka povezava iz $F_2 \backslash F_1$ pokrita s kako povezavo iz F_1.

Pokažimo najprej pomožno trditev, da za vsako množico povezav $F \subseteq E(G)$ obstaja prirejanje $M \subseteq F$, ki pokriva F. (Množica povezav M je *prirejanje*, če noben par povezav iz M nima skupnega krajišča.) Trditev pokažemo z indukcijo po $|F|$. Če je $|F| = 1$, vzamemo kar $M = F$. Sicer pa naj bo $U_F \subseteq U$ množica tistih točk, ki so krajišče kakšne povezave iz F. Za vsako točko $u \in U_F$ označimo z $e_u \in F$ tisto povezavo s krajiščem u, ki je s c obarvana z največjo barvo. Naj bo $M' = \{e_u \mid u \in U_F\}$. Če je M' prirejanje, je trditev dokazana, saj vzamemo $M = M'$. Sicer pa naj bosta $e_{u_1}, e_{u_2} \in M'$ povezavi s skupnim krajiščem $v \in V$ in $e_v \in F$ tista povezava s krajiščem v, za katero je barva $c(e_v)$ največja. Predpostavimo lahko, da je $e_v \neq e_{u_1}$. Povezava e_{u_1} torej pokriva e_v. Po indukcijski predpostavki obstaja prirejanje $M \subseteq F \backslash \{e_v\}$, ki pokriva $F \backslash \{e_v\}$. Toda M pokriva tudi povezavo e_v, saj bodisi $e_{u_1} \in M$ ali pa M vsebuje povezavo, ki v točki v pokriva e_{u_1}, in torej tudi e_v.

V nadaljevanju bomo z indukcijo po $|E(G)|$ dokazali, da je vsak dvodelen multigraf z izbranim običajnim barvanjem c po povezavah L'-obarvljiv za vsako izbiro barv L', za katero je $|L'(e)| \geq 1 + |e|$ za vsako povezavo $e \in E(G)$. Pri tem $|e|$ označuje število povezav, ki pokrivajo povezavo e glede na barvanje c. Ker je vsaka povezava pokrita s kvečjemu $\Delta(G) - 1$ povezavami, bo od tod sledilo, da je $\chi'_\ell(G) = \Delta(G)$. Baza indukcije je graf z eno povezavo, za katerega trditev gotovo drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzemimo poljubno izbiro barv L', ki vsaki povezavi e določi vsaj $1 + |e|$ barv. Izberimo še dopustno barvo a in označimo $F_a = \{e \in E(G) \mid a \in L'(e)\}$. Po pomožni trditvi obstaja prirejanje $M_a \subseteq F_a$, ki pokriva F_a. Obarvajmo povezave iz M_a z barvo a in odstranimo a iz seznamov dopustnih barv za povezave iz $F_a \backslash M_a$. Ker M_a pokriva F_a, je v grafu $G - M_a$ za vsako povezavo, ki je izgubila dopustno barvo, manjše tudi število povezav, ki jo pokrivajo. Torej po indukcijski predpostavki obstaja barvanje grafa $G - M_a$, s čimer je dokaz končan. ∎

Borodin, Kostochka in Woodall [2] so Galvinov rezultat še izboljšali. Pokazali so, da v splošnem ni treba, da imajo vse povezave $\Delta(G)$ dopustnih barv.

Izrek 11. *Naj bo G dvodelen multigraf in L' taka izbira barv za povezave grafa G, da za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja*

$$|L'(e)| \geq \max\{\deg_G(u), \deg_G(v)\} .$$

Potem obstaja L'-barvanje povezav multigrafa G.

Za kromatični indeks vsakega multigrafa G velja $\chi'(G) \leq \lfloor\frac{3\Delta(G)}{2}\rfloor$. Enako oceno lahko s pomočjo izreka 11 izpeljemo tudi za seznamski kromatični indeks. Če se omejimo na enostavne grafe, lahko zgornjo mejo za kromatični indeks še močno izboljšamo. To nam zagotavlja Vizingov izrek [11], ki je eden osnovnih izrekov o barvanju povezav. Njegov dokaz si bralec lahko ogleda na primer v [10, str. 306–307].

Izrek 12 (Vizing). *Naj bo G enostaven graf. Potem je*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 . \qquad \blacksquare$$

Vprašanje, ali Vizingov izrek velja tudi za seznamska barvanja, je gotovo najbolj znan nerešen problem, povezan s seznamskimi barvanji. Natančneje, domneva pravi, da drugače kot pri barvanju točk za vsak (multi)graf G velja

$$\chi'(G) = \chi'_\ell(G) .$$

Izrek 10 zagotavlja, da domneva drži za dvodelne multigrafe.

LITERATURA

[1] N. Alon, M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs, *Combinatorica* **12** (1992) 125–134.

[2] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, D. R. Woodall, *List edge and list total colourings of multigraphs*, rokopis, 1996.

[3] R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. *37* (1941) 194–197.

[4] P. Erdős, A. Rubin, H. Taylor, *Choosability in graphs*, Congr. Numer. **26** (1980) 125–157.

[5] F. Galvin, *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combin. Theory Ser. B **63** (1995) 153–158.

[6] T. R. Jensen, B. Toft, *Graph Coloring Problems*, Wiley Interscience, New York, 1995.

[7] D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Math. Ann. **77** (1916) 453–465.

[8] M. Mirzakhani, *A small non-4-choosable planar graph*, Bull. Inst. Combin. Appl. **17** (1996) 15–18.

[9] C. Thomassen, *Every planar graph is 5-choosable*, J. Combin. Theory Ser. B **62** (1994) 180–181.

[10] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[11] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p-graph* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **3** (1964) 25–30.

[12] V. G. Vizing, *Coloring the vertices of a graph in prescribed colors* (v ruščini), Metody Diskret. Analiz. **29** (1976) 3–10.

[13] M. Voigt, *List colourings of planar graphs*, Discrete Math. **120** (1993) 215–219.