Ramseyevo število in naključni grafi

Anja Fettich

15.09.2008

Dobro znani Erdös-ev izrek pravi, da za vsako celo število k obstaja graf G, za katerega je $g(G) > k$ in $\chi(G) > k$. Če povemo to z besedami: obstajajo grafi, ki imajo poljubno veliko ožino in poljubno veliko kromatično število. Kako bi dokazali ta izrek? Standardni pristop bi bil konstruirati graf s tema dvema lastnostima, in sicer z indukcijo po k. Erdös pa je ubral drugačen pristop. Za vsak n je definiral verjetnostni prostor na množicah grafov z n vozlišči in pokazal, da je za nekatere skrbno izbrane verjetnostne mere verjetnost, da graf z n vozlišči ima obe zgoraj našteti lastnosti, pozitivna za vse dovolj velike n. Temu pristopu danes pravimo *verjetnostna metoda* in le-ta je postala vsestranska tehnika dokazovanja v teoriji grafov in v ostalih vejah diskretne matematike.
V tem poglavju se bomo ukvarjali z vprašanjem, katere podstrukture so nujno prisotne v vsakem dovolj velikem grafu. Možen odgovor na to vprašanje je lema o regularnosti, ki pravi, da vsak dovolj velik graf G vsebuje velike naključne dvodelne podgrafe, mi pa iščemo bolj natančno definirane podstrukture (npr. če so podstrukture izomorfne kakšnim danim grafom).
Na primer:

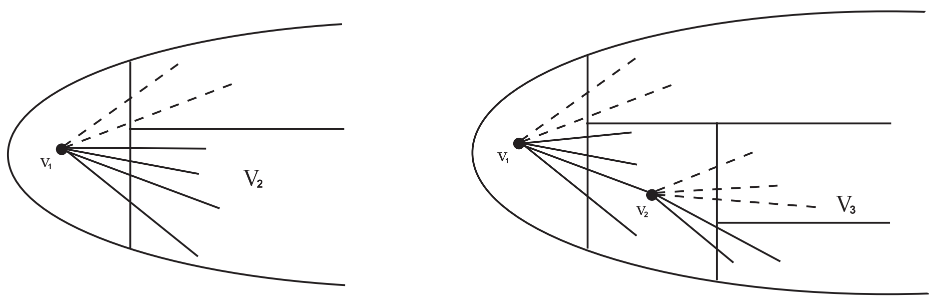
- če imamo celo število r, ali vsak dovolj velik graf vsebuje K_r ali induciran $\overline{K_r}$;
- ali vsak dovolj velik povezan graf vsebuje K_r ali veliko inducirano pot ali zvezdo $K_{1,n}$.

Čeprav se mogoče zdijo ti problemi podobni ekstremalnim problemom, v bistvu iščemo lokalne posledice globalnih predpostavk. Izreki in dokazi v tem poglavju imajo več skupnega s podobnimi rezultati v algebri in geometriji kot pa z ostalimi področji iz teorije grafov. Osredotočili se bomo na rezultate, ki so navadno izraženi v terminologiji grafov.

Izrek 1 (Ramsey 1930) *Za vsak $r \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da vsak graf reda najmanj n vsebuje K_r ali $\overline{K_r}$ kot induciran podgraf.*

Ideja dokaza. Ta izrek se na prvi pogled zdi presenetljiv, saj rabimo približno $\frac{r-2}{r-1}$ vseh možnih povezav, da vrinemo K_r kot podgraf v G, toda za G in $\overline{G}$ se ne more pričakovati, da bi imela več kot polovico vseh povezav.

Poizkusili bomo konstruirati K_r ali $\overline{K_r}$ v G induktivno. Začeli bomo s poljubnim vozliščem $v_1 \in V_1 := V(G)$. Če je $|V(G)|$ velika, potem obstaja velika množica $V_2 \subseteq V_1 \backslash \{v_1\}$, $V_2 = \{$ vozlišča, ki so vsa sosednja z v_1 ali nobeno ni sosednje z $v_1\}$. Torej v_1 bo prvo vozlišče K_r ali $\overline{K_r}$, ostala pa bodo ležala v V_2. Potem izberemo drugo vozlišče $v_2 \in V_2$. Ker je V_2 velika, bo imela podmnožico V_3 še vedno dovolj veliko. $V_3 = \{$ vozlišča, ki so vsa sosednja z v_2 ali nobeno ni sosednje z $v_2\}$. Nadaljujemo z iskanjem vozlišč znotraj V_3 in tako naprej.



Slika 1: Izbira vozlišč $v_1, v_2, \ldots$

Kdaj se konstrukcija konča? To je odvisno od velikosti prvotne množice V_1. Velja $|V_i| \geq \frac{|V_{i-1}|}{2}$. Torej lahko naredimo s korakov konstrukcije, če je $|G| \geq 2^s$. V samem dokazu bomo videli, da je ustrezna izbira za $s = 2r - 3$.

Dokaz. Izrek bomo dokazali z indukcijo po r. Za $r = 1$ je očitno, da izrek velja, saj imamo samo eno točko, zato privzemimo, da je $r \geq 2$. Naj bo $n := 2^{2r-3}$ in G graf moči vsaj n. Definirajmo zaporedje množic $V_1, \ldots, V_{2r-2}$ in izberimo vozlišča $v_i \in V_i$, ki zadoščajo naslednjim lastnostim:

(*i*) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ $(i = 1, \ldots, 2r-2)$;

(*ii*) $V_i \subseteq V_{i-1} \backslash \{v_{i-1}\}$ $(i = 2, \ldots, 2r-2)$;

(*iii*) v_{i-1} je sosednje z vsemi vozlišči v V_i ali z nobenim vozliščem v V_i $(i = 2, \ldots, 2r-2)$.

Naj bo $V_1 \subseteq V(G)$ poljubna množica 2^{2r-3} vozlišč. Izberimo poljubno vozlišče $v_1 \in V_1$. Potem velja (i) za $i = 1$, (ii) in (iii) pa sta očitni. Privzemimo sedaj, da smo izbrali V_{i-1} in $v_{i-1} \in V_{i-1}$ takšna, da zanju veljajo točke $(i) - (iii)$ za $i-1$, kjer je $1 < i \leq 2r-2$. Ker je $|V_{i-1} \backslash \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$ liha, ima V_{i-1} podmnožico V_i, ki zadošča točkam $(i) - (iii)$; $v_i \in V_i$ izberemo poljubno. Med $2r-3$ vozlišči $v_1, \ldots, v_{2r-3}$ je $r-1$ vozlišč, ki so vsa sosednja vozliščem v V_i ali niso sosednja z nobenim vozliščem iz V_i. Torej teh $r-1$ vozlišč in v_{2r-2} inducirajo K_r ali $\overline{K_r}$ v G, ker $v_i, \ldots, v_{2r-2} \in V_i$ za vse i. ∎

Najmanjši n iz Ramseyevega izreka, ki je odvisen od r, se imenuje *Ramseyevo število* $R(r)$ za r. V dokazu smo videli, da je $R(r)$ navzgor omejeno z 2^{2r-3}, navzdol pa z $2^{\frac{r}{2}}$. Ramseyev izrek lahko prepišemo tudi drugače: Obstaja najmanjše število $R(p,q)$, tako da vsak graf z $R(p,q)$ vozlišči vsebuje ali kliko velikosti p ali neodvisno množico velikosti q. V spodnji tabeli so napisane nekatere vrednosti $R(p,q)$, kjer oznaka $x|y$ predstavlja znano spodnjo mejo x in zgornjo mejo y.

q \ p	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35 | 41	49 | 61	55 | 84	63 | 115
5			43 | 49	58 | 87	80 | 143	95 | 216	121 | 316
6				102 | 165	109 | 298	122 | 495	153 | 780

Slika 2: Vrednosti $R(p,q)$.

Izrek 2 (Graham-Rothschild-Spencer 1980,1990) *Za celi števili p in q velja:*

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1).$$

Če sta oba sumanda soda, potem velja stroga neenakost.

Dokaz. Vzemimo poljuben graf z $R(p,q)$ vozlišči. Izberimo poljubno vozlišče v. Če ima $R(p-1,q)$ sosedov ali $R(p,q-1)$ nesosedov, potem ima graf p-kliko ali neodvisno množico velikost q. Recimo, da velja: $R(p,q) = R(p-1,q) + R(p,q-1)$. Potem sledi: število sosedov $\geq R(p-1,q)$ ali št. nesosedov $\geq R(p,q-1)$. Pa recimo, da to ne velja. Torej je število sosedov $\leq R(p-1,q) - 1$ in število nesosedov $\leq R(p,q-1) - 1$. Iz tega sledi, da je število sosedov + število nesosedov $\leq R(p-1,q) + R(p,q-1) - 2$ in dobimo, da je $n \leq n-1$, kar je protislovje. Poglejmo sedaj še primer, kadar sta oba sumanda soda. Naj bo $n = R(p,q) - 1$. Za n obstaja graf G na n točkah brez K_p in $\overline{K_q}$. Ker sta $R(p-1,q)$ in $R(p,q-1)$ soda sledi, da je n liho število. Graf $G - v$ ima $n-1$ točk in $n-1$ je sodo število.Število $n - 1 = R(p-1,q) - 1 + R(p,q-1) - 1$. Ker pa je G regularen, imajo vsa vozlišča liho stopnjo $R(p-1,q) - 1$. Pridemo do protislovja, saj za vsak k-regularen graf G velja $k|V(G)| = 2|E(G)|$, kar v našem primeru pomeni $(R(p-1,q) - 1)n$, ki je produkt dveh lihih števil, je enak $2|E(G)|$, kar je sodo število. ∎

Izrek 3 (Erdös 1947) *Za vse p velja:*

$$R(p,p) > (e\sqrt{2})^{-1} p\ 2^{\frac{p}{2}}(1 + \mathcal{O}(1)).$$

Izrek 4 (Erdös 1947) *Za vsak $p \geq 3$*

$$R(p,p) = R(p) > 2^{\frac{p}{2}}.$$

Dokaz. Za $p = 3$ izrek velja. Poglejmo sedaj za vsak $n \geq 2^{\frac{p}{2}}$. Če je G graf na n vozliščih je verjetnost, da imamo ali nimamo povezave enaka $\frac{1}{2}$. Označimo s $P[\alpha(G) \geq p]$ verjetnost, da G vsebuje množico p neodvisnih vozlišč, s $P[\omega(G) \geq p]$ pa verjetnost, da G vsebuje kliko velikosti p. Radi bi dokazali: $P[\alpha(G) \geq p], P[\omega(G) \geq p] < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
P[\alpha(G) \geq p], P[\omega(G) \geq p] &\leq \binom{n}{p}(\frac{1}{2})^{\binom{p}{2}} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!p!} 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \\
&< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^n}{2^{n-1}2^p} \\
&< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^p}{2^n} \\
&< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \frac{n^p}{2^p} \\
&< 2^{-\frac{1}{2}p(p-1)} 2^{-p} (2^{\frac{p}{2}})^p \\
&< 2^{-\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - p + \frac{1}{2}p^2} \\
&= 2^{-\frac{1}{2}p} = (\frac{1}{2})^{\frac{p}{2}} \\
&< \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

∎

V Ramseyevi teoriji gledamo na particije kot na barvanje.

Definicija 1 k-barvanje *množice X je razdelitev množice X na k razredov induciranih z barvami.*

Definicija 2 $[X]^k = \{vse\ k\text{-}podmnožice\ v\ X\}$.

Definicija 3 *c-barvanje za $[X]^k$ množice $Y \subseteq X$ imenujemo* monokromatična množica, *če imajo vsi elementi množice $[Y]^k$ isto barvo, to je, pripadajo isti c-particiji razredov $[X]^k$. Če je $G = (V, E)$ graf in imajo vse povezave $H \subseteq G$ enako barvo pri nekem barvanju E, rečemo H* monokromatični podgraf *G.*

S to terminologijo lahko povemo Ramseyev izrek še drugače: za vsak r obstaja n, tako da nam za poljubno množico X, $|X| = n$, da vsako 2-barvanje $[X]^2$ monokromatično množico $Y \subseteq X$, $|Y| = r$.

Izrek 5 *Naj bosta k, c pozitivni celi števili in X neskončna množica. Če je $[X]^k$ pobarvana s c barvami, potem ima X neskončno monokromatično podmnožico.*

Dokaz. Naredimo indukcijo po k, c fiksiramo. Za $k = 1$ izrek drži. Naj bo sedaj $k > 1$ in privzemimo, da izrek velja za manjše vrednosti k. Naj bo $[X]^k$ pobarvana s c barvami. Konstruirali bomo neskončno zaporedje $X_0, X_1, \ldots$ neskončnih podmnožic množice X in izbrali elemente $x_i \in X_i$, za katere veljata naslednji lastnosti (za vsak i):

(*i*) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;

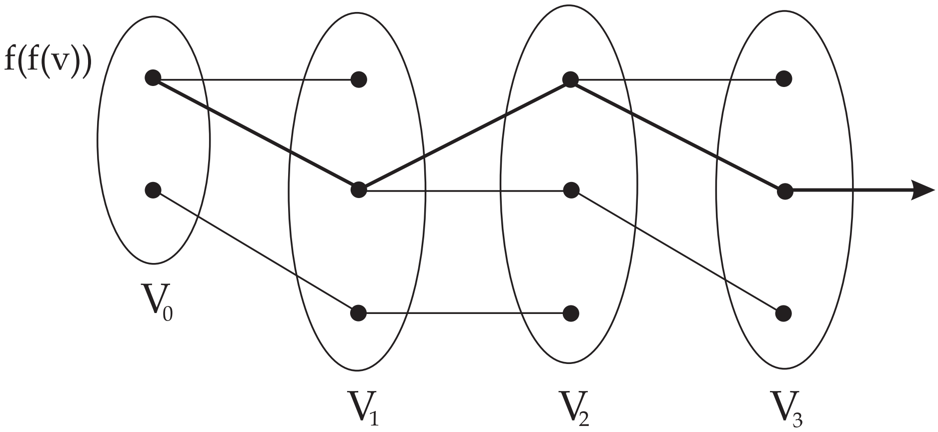
(*ii*) vse k-množice $\{x_i\} \cup Z$, $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ imajo isto barvo x_i.

Začnemo z $X_0 := X$ in izberemo poljuben $x_0 \in X_0$. Po predpostavki je X_0 neskončen. Izberemo neskončno množico X_i in $x_i \in X_i$. Za nek i, c k-pobarvamo $[X_i \setminus \{x_i\}]^{k-1}$ tako, da pobarvamo vsako množico Z z barvo $\{x_i\} \cup Z$ iz c-barvanja $[X]^k$. Po indukcijski predpostavki ima $X_i \setminus \{x_i\}$ neskončno monokromatično podmnožico, ki jo izberemo za X_{i+1}. Očitno tako izbrana množica zadošča lastnostima (*i*) in (*ii*). Izberemo poljuben $x_{i+1} \in X_{i+1}$. Ker je c končen, je ena izmed c barv predpisana neskončno mnogo x_i. Ti x_i tvorijo neskončno monokromatično podmnožico množice X.

■

Da bi lažje razumeli končno verzijo zgornjega izreka, si pomagamo s standardnim orodjem v kombinatoriki:

Lema 1 (König's infinity lema) *Naj bo $V_0, V_1, \ldots$ neskončno zaporedje disjunktnih nepraznih končnih množic, G je graf njihove unije. Privzemimo, da ima vsako vozlišče $v \in V_n$, $n \geq 1$, soseda $f(v) \in V_{n-1}$. Potem G vsebuje neskončno pot $v_0 v_1 \cdots$, kjer $v_n \in V_n$ za vsak n.*



Slika 3: König's infinity lema

Dokaz. Naj bo $\mathcal{P}$ množica vseh poti oblike $vf(v)f(f(v))\ldots$, ki se končajo v V_0. V_0 je končna, $\mathcal{P}$ je neskončna, zato se neskončno poti iz $\mathcal{P}$ konča v istem vozlišču $v_0 \in V_0$. Med temi potmi jih gre neskončno skozi vozlišče $v_1 \in V_1$, ker je tudi V_1 končna. Med temi potmi jih gre neskončno skozi $v_2 \in V_2$, ker je V_2 končna, itd. Čeprav se število poti na vsakem koraku zmanjša, imamo po končno korakih še vedno neskončno poti, tako da so v_n definirani za vsak n. Po definiciji je vsako vozlišče v_n sosednje v_{n-1} na eni izmed teh poti, torej je $v_0v_1\cdots$ neskončna pot. ■

Izrek 6 *Za vse $k, c, r \geq 1$ obstaja $n \geq k$ tako, da ima vsaka n-množica X monokromatično r-podmnožico za vnaprej dano c-barvanje za $[X]^k$.*

Definicija 4 *Celo število n, povezano s k, c in r v zgornjem izreku imenujemo* Ramseyevo število za k, c, r : $R(k, c, r)$.

Torej lahko zapišemo Ramseyev izrek še drugače: Če je $H = K_r$ in G graf z zadosti veliko vozlišči, potem G ali $\overline{G}$ vsebuje kopijo H kot podgraf.

Literatura

[1] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition, Springer-Verlag, Heidelberg (2000) 189–193.

[2] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. (2001) 383–386.