Po povezavah disjunktna vpeta drevesa – Tutte-ov izrek

Katja Korenjak

8. oktober 2007

Globalna verzija Mengerjevega izreka nam zagotavlja obstoj k po povezavah disjunktnih neodvisnih poti v po povezavah k-povezanih grafih. Izkaže pa se, da je včasih bolj učinkovito zahtevati več kot samo k-povezanost. Vzemimo recimo primer, ko graf G vsebuje *k po povezavah disjunktnih vpetih dreves.* Tak graf potem očitno vsebuje k kanoničnih poti med dvema poljubnima točkama, v vsakem izmed dreves eno.

Vprašajmo se sedaj, kdaj torej takšna drevesa obstajajo? Če imamo v grafu k po povezavah disjunktnih dreves, potem je tak graf očitno po povezavah k-povezan. V obratnem primeru, ko privzamemo k-povezanost po povezavah, pa nam ta obstoj k po povezavah disjunktnih vpetih dreves ne more zagotavljati. Pogoje, na podlagi katerih lahko z gotovostjo trdimo, da graf vsebuje k po povezavah disjunktnih vpetih dreves nam podaja Tutte-ov izrek, ki je tudi glavna tema tega seminarja.

Poglejmo najprej nekaj očitno potrebnih pogojev za obstoj k po povezavah disjunktnih vpetih dreves. Vzemimo poljubno particijo $V(G)$ v r množic. Vsako vpeto drevo grafa G potem vsebuje vsaj $r-1$ *navzkriznih povezav* (glej definicijo 4), iz česar sledi, da za graf s k po povezavah disjunktnimi drevesi očitno velja, da vsebuje vsaj $k(r-1)$ navzkrižnih povezav.

Kot bomo videli kasneje in to pravi tudi Tutte-ov izrek je ta očitno potreben pogoj tudi zadosten. Ker je dokaz Tutte-ovega izreka nekoliko bolj tehnične narave najprej sledi krajši uvod, v katerem bomo vpeljali nekaj novih definicij in oznak.

1 Uvod

Naj bo $G=(V,E)$ multigraf in $k \in \mathbb{N}$. Vpeljimo oznako $||G||$ za število povezav grafa G in definirajmo operaciji $G+e$, $G-e$. Z $G+e$ označimo graf G, ki smo mu dodali povezavo e, z $G-e$ pa graf G, kateremu povezavo e odstranimo. Ker obravnavamo multigrafe dovolimo podvajanje povezav in zanke.

Naj bo sedaj F k-terica

$$F=(F_1,F_2,\dots,F_k),$$

kjer so F_i za vsak $i=1,2,\dots,k$ po povezavah disjunktna vpeta drevesa in sestavljajo t.i.

po povezavah disjunkten vpet gozd. Naj velja še

$$E[F] := E(F_1) \cup E(F_2) \cup \cdots \cup E(F_k) \quad \text{in} \quad \|F\| := |E[F]|.$$

Množico vseh zgoraj opisanih gozdov, za katere velja še, da je $\|F\|$ maksimalen, bomo označili z $\mathcal{F}$.

Vzemimo sedaj poljuben $F = (F_1, F_2, \ldots, F_k) \in \mathcal{F}$ in povezavo $e \in E \setminus E[F]$, torej poljubno povezavo ki ni vsebovana v nobenem izmed F_i za $i = 1, 2, \ldots, k$. Če sedaj vsakemu vpetemu drevesu F_i dodamo povezavo e velja, $F_i + e$ vsebuje cikel C_i za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. V nasprotnem primeru bi lahko v F zamenjali F_i z $F_i + e$, to pa bi bilo v protislovju s predpostavko, da je $||F||$ maksimalen.

Fiksirajmo sedaj i in vzemimo eno od e različno povezavo $e \neq e' \in E[C_i]$ iz tega cikla. Definirajmo novo k-terico vpetih dreves F' z

$$F' := (F_1', F_2', \ldots, F_k'),$$

kjer so $F_i' := F_i + e - e'$ in $F_j' := F_j$, za vse $j \neq i$. Potem velja, da $F' \in \mathcal{F}$. Rečemo, da smo F' dobili iz F s *postopkom zamenjave* povezave e' s povezavo e.

Opomba 1. *Pri zgoraj opisani zamenjavi se množica točk komponente F_i, ki vsebuje povezavo e', pri prehodu v F_i' ne spremeni. Zato velja, za vsako pot $x \cdots y \subseteq F_i'$ obstaja enolično določena pot $xF_iy \subseteq F_i$. To lastnost dreves bomo rabili kasneje.*

Vzemimo sedaj k-terico $F^o = (F_1^o, F_2^o, \ldots, F_k^o) \in \mathcal{F}$ in označimo z $\mathcal{F}^o$ množico vseh k-teric v $\mathcal{F}$, ki jih lahko z nizom zamenjav dobimo iz F^o. Vpeljimo najprej oznaki

$$E^o := \bigcup_{T \in \mathcal{F}^o} (E \setminus E[T]) \quad \text{in} \quad G^o := (V, E^o),$$

pri prvi ne smemo pozabiti, da $F^o \in \mathcal{F}^o$. Za povezavo $e^o \in E \setminus E[F^o]$, pa še oznako

$$C^o := \text{komponenta(maksimalen povezan podgraf) grafa } G\text{, ki vsebuje } e^o.$$

Lema 2. *Naj bo $T = (T_1, T_2, \ldots, T_k) \in \mathcal{F}^o$ in naj bo $T' = (T_1', T_2', \ldots, T_k')$ pridobljen iz T z zamenjavo povezave iz T_i. Če sta x in y krajišči poti v $T_i' \cap C^o$, potem velja $x\,T_i\,y \subseteq C^o$.*

Dokaz. Naj bo $e = vw$, za $v, w \in V(G)$, nova povezava v $E[T_i'] \setminus E[T]$. Torej je e edina povezava, ki ne leži v T_i. Predpostavimo

$$e \in x\,T_i'\,y.$$

V nasprotnem primeru je $x\,T_i'\,y = x\,T_i\,y$. Če sedaj pokažemo, da

$$v\,T_i\,w \subseteq C^o \tag{1}$$

bo veljalo, da je $(x\,T_i'\,y - e) \cup v\,T_i\,w$ povezan podgraf v $T_i \cap C^o$, ki vsebuje x in y, torej vsebuje tudi $x\,T_i\,y$. Dokažimo da (1) res velja.

Naj bo e' poljubna povezava iz $v\,T_i\,w$. Ker z zamenjavo povezave e' z povezavo e v T dobimo element $\mathcal{F}^o$, ki ne vsebuje e', sledi $e' \in E^o$. Ker je bila e' poljubna, velja

$$v\,T_i\,w \subseteq G^o.$$

Če sedaj upoštevamo še dejstvo $v, w \in x\,T'_i\,y$ in predpostavko $x\,T'_i\,y \subseteq T_i \cap C^o$, dobimo $v\,T_i\,w \subseteq C^o$ in smo končali. □

Lema 3. *Za vsako povezavo $e^o \in E \setminus E[F^o]$ obstaja množica $U \subseteq V$, ki je povezana v F_i^o za vsak $i = 1, \ldots, k$ in vsebuje krajišči povezave e^o.*

Dokaz. Vzemimo povezavo $e^o \in E \setminus E[F^o]$. Vemo da velja $F^o \in \mathcal{F}^o$, torej velja tudi $e^o \in E^o$. Definirajmo sedaj

$$U := V(C^o)$$

in pokažimo, da je podgraf induciran z U povezan v F_i^o za poljuben $i = 1, 2 \ldots, k$. Tega se bomo lotili na naslednji način. Pokazali bomo, da za vsako povezavo $xy \in C^o$ obstaja pot $x\,F^o\,y$, ki v celoti leži v C^o. Ker je C^o povezana komponenta, bo unija vseh takih poti povezan vpet podgraf grafa $F_i^o[U]$. Iz tega pa bo sledilo, da je U povezana v F_i^o za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$.

Naj bo $e = xy \in C^o$. Ker je $e \in E^o$, obstaja $s \in \mathbb{N}$ in obstajajo take k-terice

$$F^r = (F_1^r, F_2^r, \ldots, F_k^r) \qquad r = 1, 2, \ldots, s,$$

da lahko F^r dobimo iz F^{r-1} z zamenjavo povezave in velja $e \in E \setminus E[F^s]$. Torej povezava e ni v nobenem izmed F_i^s za $i = 1, 2 \ldots, k$.

Naj bo $F := F^s$ in F' tak gozd, da ga dobimo iz F z zamenjavo povezave e. Velja $e \in F'$ in $e \in C^o$. Z uporabimo leme 1, kjer povezavo e obravnavamo kot pot dolžine 1, dobimo

$$x\,F_i^s\,y \in C^o.$$

Podobno kot prej naj bo sedaj $F := F^{s-1}$. Z zamenjavo povezave v F dobimo $F' := F^s$. Ker velja $x\,F_i^s\,z \in C^o$, lahko na podoben način kot prej spet uporabimo lemo 1 in dobimo

$$xF_i^{s-1}y \in C^o.$$

Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do $F := F^o$, kjer bo $F' := F^1$ in bo po lemi 1 sledilo

$$x\,F_i^o\,y \in C^o.$$

□

Definicija 4. *Naj bo $G = (V, E)$ multigraf. Navzkrižna povezava je povezava z krajišči v dveh različnih množicah particije množice $V(G)$.*

V dokazu izreka se bomo sklicevali na naslednjo posledico, njen dokaz je preprost in ga zato prepuščamo bralcu.

Posledica 5. *Povezan graf na n točkah je drevo natanko tedaj, ko ima $n-1$ povezav.*

2 Tutte-ov izrek

Izrek 6 (Tutte, 1961 [2]; Nash-Williams, 1964 [3])**.** *Multigraf $G = (V, E)$ vsebuje k po povezavah disjunktnih vpetih dreves, če in samo če ima vsaka particija P mnnožice V, vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Očitno.
($\Longleftarrow$) Dokazujemo s pomočjo indukcije na $|V(G)|$. Za $|V(G)| = 2$ obstajata particiji moči $|P| = 1, 2$. V netrivialnem primeru, ko je $|P| = 2$, imamo vsaj k navzkrižnih povezav, torej k disjunktnih vpetih dreves, za vsako povezavo eno. Za prvi korak indukcije izrek velja.
Indukcijski korak: Predpostavimo, da imamo za vsako particijo P množice $V(G)$ vsaj $(|P| - 1) \cdot k$ navzkrižnih povezav in skonstruirajmo k po povezavah disjunktnih vpetih dreves v G. Izberimo k-terico $F^o = (F_1^o, F_2^o, \ldots, F_k^o) \in \mathcal{F}$. Če je F_i^o drevo za vsak $i = 1, 2 \ldots, k$ potem smo našli k po povezavah disjunktnih vpetih dreves in smo končali. Če ne, pa zaradi posledice 5 velja

$$||F^o|| = \sum_{i=1}^{k} ||F_i^o|| < k \cdot (|V(G)| - 1).$$

Po drugi strani pa po predpostavki, da ima vsaka particija množice $V(G)$ vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav, s particijo grafa G v posamezne točke dobimo

$$||G|| \geq k \cdot (|V(G)| - 1).$$

Torej obstaja povezava $e^o \in E \setminus E[F^o]$. Po lemi 2 potem obstaja množica $U \subseteq V$, ki je povezana v F_i^o za vsak $i = 1, 2 \ldots, k$ in vsebuje krajišči povezave $e^o = x^o y^o$. Torej $x^o, y^o \in U$, kar nam da $|U| \geq 2$.

Ker vsaka particija skrčitve multigrafa G/U inducira particijo G-ja z enakimi navzkrižnimi povezavami, ima G/U vsaj $k \cdot (|P| - 1)$ navzkrižnih povezav za vsako particijo (predpostavka). Ker velja $|V(G/U)| < |V(G)|$, saj je $|U| \geq 2$, ima po indukcijski predpostavki G/U k po povezavah disjunktnih vpetih dreves. Označimo ta drevesa z $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Če sedaj v vsakem izmed T_i točko v_U (skrčitev U-ja) zamenjamo z vpetim drevesom $F_i^o \cap G[U]$ grafa $G[U]$, dobimo tudi v grafu G k po povezavah disjunktnih vpetih dreves. To lahko naredimo, ker je U povezana v vsaki F_i^o. □

Literatura

[1] R. Diestel, **Graph Theory**, Springer-Verlag, New York (2000).

[2] W. T. Tutte, *On the problem of decomposing a graph into n-connected factors*, J. London Math. Soc. **36** (1961) 221−230.

[3] C. St. J. A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc. **36** (1964) 445−450.