Povezanost grafov

Jana Rihtaršič

15. maj 2007

1 Uvod

Graf $G = (V, E)$ je *povezan*, če za vsak par točk $u, v \in V$ obstaja pot v G med njima. *Komponenta* je največji povezani del grafa. (A, B)-*pot* v G je pot, ki ima eno krajišče v A, drugo pa v B, kjer sta $A, B \subseteq V$. Če vsaka (A, B)-pot v G vsebuje točko ali povezavo v $X \subseteq V \cap E$, potem rečemo, da X *loči* množici A in B. Velja $A \cap B \subseteq X$. Množici X rečemo *prerez*. X *loči* G, če loči dve točki iz $G - X$ v G.

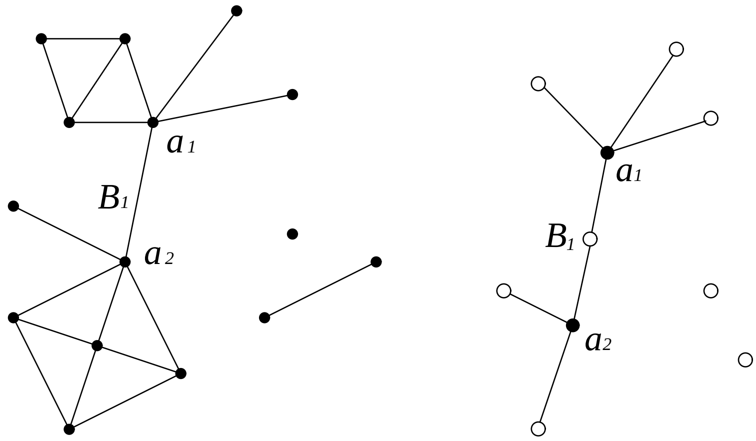
Točka v je *prerezna točka*, če ima $G - \{v\}$ več komponent kot G. Povezava e je *most* oz. *prerezna povezava*, če ima $G - e$ več komponent kot G. Graf G je k-*povezan* ($k \in \mathbb{N}$, $|V(G)| > k$), če je $G - X$ povezan za vsako $X \subseteq V$, kjer je $|X| < k$. S $\kappa(G)$ označimo največji k, za katerega je G še k-povezan. Graf G je *po povezavah* l-*povezan*, če je za vsako $F \subseteq E$, $|F| < l$, $G - F$ povezan. Z $\lambda(G)$ označimo največji l, za katerega je G še po povezavah l-povezan. Velja $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, kjer je $\delta(G)$ najmanjša stopnja točk v G.

2 2-povezanost

Naj bo $G = (V, E)$ graf. *Blok* je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk. Torej je blok bodisi izolirana točka bodisi most (s krajišči) bodisi maksimalen 2-povezan podgraf. Zato imata dva različna bloka največ eno skupno točko, ki je vedno prerezna točka. Torej vsaka povezava leži v enem bloku in je graf unija blokov. Blok je analog komponenti pri povezanosti. Vendar je s komponentami graf natanko opisan, z bloki pa podamo le grobo sliko grafa, saj bloki med seboj niso disjunktni.

Naj bo A množica prereznih točk in $\mathcal{B}$ množica blokov. Na $A \cup \mathcal{B}$ definiramo dvodelen graf takole: aB je povezava v $A \cup \mathcal{B}$, kjer je $a \in A$, $B \in \mathcal{B}$ taka, da je $a \in B$. Tak graf imenujemo *graf blokov*.

Zgled: Na sliki 2.1 levo imamo graf, ki ima dve prerezni točki a_1 in a_2 ter osem blokov. Na levi imamo njegov graf blokov, na katerem sta prerezni točki označeni s točko, bloki pa s krogci.

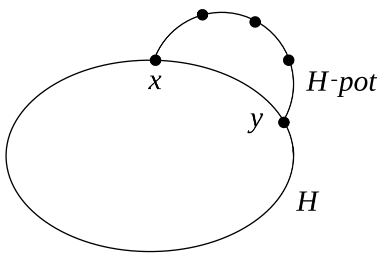


Slika 2.1: Graf G ter njegov graf blokov

Graf blokov je vedno gozd. Velja naslednja trditev:

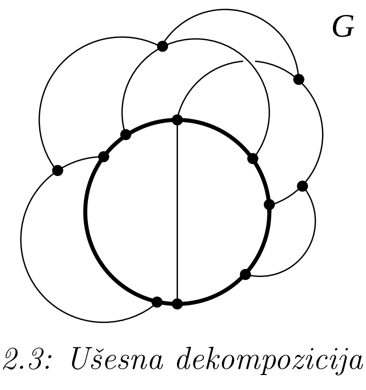
Trditev 2.1 *Graf blokov povezanega grafa je drevo.*

Preprosta metoda za konstrukcijo 2-povezanih grafov se imenuje *ušesna dekompozicija.* V naslednjih vrsticah jo bomo opisali. H*-pot* je pot v G, ki ima krajišči v H podgrafu G, sicer pa s H nima skupnih točk in povezav. Na sliki je prikazana H-pot med točkama x in y.



Slika 2.2: H-pot med točkama x in y

Zgled: Na sliki 2.3 je prikazan graf G, ki je v celoti konstruiran z ušesno dekompozicijo. Na začetku imamo cikel (povdarjen), ki mu dodajamo H-poti.

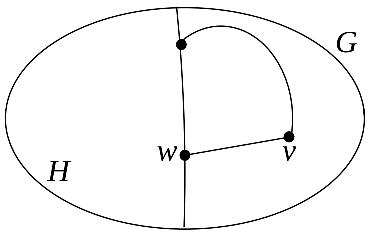


Slika 2.3: Ušesna dekompozicija grafa G

Naslednja trditev natančno opiše ušesno dekompozicijo:

Trditev 2.2 *Graf G je 2-povezan natanko takrat, ko ga lahko konstruiramo iz cikla z zaporednim dodajanjem H-poti v že konstruirani podgraf H.*

Dokaz: ($\Leftarrow$) Vsak tako konstruiran graf je očitno 2-povezan.
($\Rightarrow$) Naj bo G 2-povezan graf. Potem G vsebuje cikel in ima podgraf H, ki ga dobimo z opisano konstrukcijo. Pa recimo, da smo vzeli maksimalen H. Ker je vsaka povezava xy iz $E(G) \setminus E(H)$ H-pot, kjer je $x, y \in H$, je H induciran podgraf v G. Če je $H \neq G$, potem zaradi povezanosti G obstaja povezava vw, da je $v \in G_H$ in $w \in H$. Ker je G 2-povezan, $G - \{w\}$ vsebuje $(\{v\}, H)$-pot P. Potem je wvP H-pot v G in je $H \cup wvP$ z ušesno dekompozicijo konstruiran podgraf v G, ki je večji od H. To pa je protislovje s privzetkom.



Slika 2.4: Povečujoča H-pot za H v G

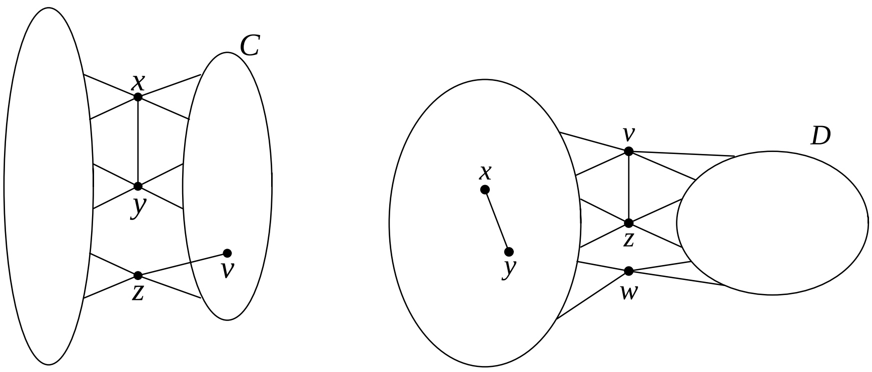
∎

3 3-povezanost

Lema 3.1 Če je G 3-povezan graf in $|V(G)| > 4$, potem G vsebuje povezavo e tako, da je G/e spet 3-povezan.

Dokaz: S protislovjem: recimo, da taka povezava e v G ne obstaja. Potem za vsako povezavo xy iz $E(G)$ graf G/xy vsebuje prerez S na največ dveh točkah. Z v_{xy} označimo točko, ki jo dobimo iz x in y v G/xy. v_{xy} leži v S, ker $\kappa(G) \geq 3$ in $|S| = 2$. Potem sta vsaki dve točki, v G/xy ločeni s $S = \{v_{xy}, z\}$, v G ločeni s prerezom $T = \{x, y, z\}$. Ker nobena prava podmnožica v T ni prerez za G (zaradi 3-povezanosti), ima vsaka točka iz T sosednje točke v vsaki komponenti $G - T$.

Izberimo povezavo xy, točko z in komponento C v $G - T$ tako, da bo $|C|$ najmanjša možna. Točka v naj bo sosednja točka od z v C.



(a) (b)

Slika 3.1: (a) Prerez T, komponenta C in točka v (b) Prerez $\{z, v, w\}$ in komponenta D

Po privzetku G/xy ni 3-povezan graf, zato obstaja w taka, da je $\{z, v, w\}$ prerez za G in podobno kot prej ima vsaka od točk z, v in w sosede v vsaki komponenti grafa $G - \{z, v, w\}$. Ker sta x in y sosednji, ima $G - \{z, v, w\}$ tako komponento D, da je $D \cap \{x, y\} = \emptyset$. Potem vsaka točka iz D, ki je sosednja točki v, leži v C (ker je $v \in C$), torej $D \cap C \neq \emptyset$, D smo izbrali tako, da $D \subset C$ in $D \neq C$. To pa je protislovje z izbiro xy, z in C. ■

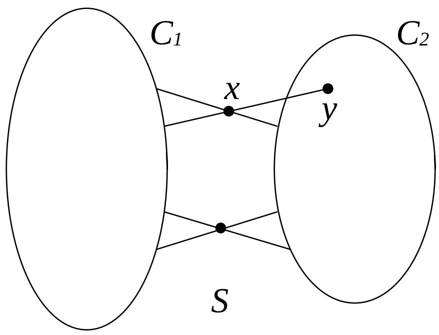
Podobno kot smo v trditvi 2.2 opisali konstrukcijo 2-povezanih grafov, bomo tudi za 3-povezane grafe dobili preprosto konstrukcijo z naslednjim izrekom:

Izrek 3.1 (Tutte) *Graf G je 3-povezan, če in samo če obstaja zaporedje grafov $G_0, G_1, \ldots, G_n$ z naslednjima lastnostima:*

(i) $G_0 = K_4$ in $G_n = G$;

(ii) G_{i+1} vsebuje tako povezavo xy, $d(x), d(y) \geq 3$, da je $G_i = G_{i+1}/xy$ za vsak $i < n$.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Če je G 3-povezan, po prejšnji lemi obstaja tako zaporedje G_i, ki zadošča točkama (i) in (ii) ter so vsi G_i v njem 3-povezani.
($\Leftarrow$) Naj bo $G_0, G_1, \ldots, G_n$ opisano zaporedje. Pokazali bomo, da če je $G_i = G_{i+1}/xy$ 3-povezan graf, je tudi G_{i+1} 3-povezan za $\forall i < n$. Recimo, da ni res. S naj bo prerez v G_{i+1}, $|S| \leq 2$. C_1 in C_2 komponenti v $G_{i+1} - S$. Ker sta x in y sosednji, lahko vzamemo, da je $\{x, y\} \cap V(C_1) = \emptyset$. $v \notin \{x, y\}$.



Slika 3.2

Če C_2 ne vsebuje hkrati obeh x in y niti v, je v grafu G_i ali v_{xy} ali v od C_1 ločena s prerezom na največ dveh točkah. Protislovje, saj je G_i 3-povezan. Torej C_2 vsebuje samo eno od točk x in y, kar pa je protislovje s predpostavko, da je $d(x), d(y) \geq 3$. ■

Induktivno 3-povezane grafe konstruiramo takole: začnemo s K_4; v že konstruiranem grafu izberemo poljubno točko v in jo zamenjamo z dvema sosednjima točkama v' in v'' ter ju povežemo s točkami, ki so bile prej sosednje z v. Vsaka od točk v' in v'' je incidenčna z vsaj tremi točkami in vsaka prejšnja soseda od v postane sosednja z vsaj eno od v' in v''.

Izrek 3.2 (Tutte) *Prostor ciklov 3-povezanega grafa je generiran iz neseparajočih induciranih ciklov.*

4 Mengerjev izrek

Izrek 4.1 (Menger) *Naj bo $G = (V, E)$ graf in $A, B \subseteq V$. Potem je najmanjše število točk, ki ločijo množici A in B, enako največjemu številu (A, B)-poti v G.*

Dokaz: Imenujmo množico vseh točk, ki v G ločijo množici $A, B \subseteq V$, (A, B)-*prerez* in naj bo s moč najmanjšega (A, B)-prereza. Nadalje naj bo (A, B)-*konektor* C podgraf v G, katerega vska komponenta je taka (A, B)-pot, ki nima nobene notranje točke skupne z A in B. Upoštevamo, da je vsaka točka iz $A \cap B$ že (A, B)-pot.

Če je G graf brez povezav, je (A, B)-konektor kar $C = A \cap B$. Torej lahko predpostavimo: G vsebuje tako povezavo $e = xy$, da izrek velja za $G' = G - e$ in G' ima (A, B)-prerez S, $|S| < s$. Potem naj bo $P := S \cup \{x\}$ in $Q := S \cup \{y\}$. P in Q sta (A, B)-prereza za G'. Velja $|P| = |Q| = |S| + 1$. (A, P)-prerez za G' je (A, B)-prerez za G, prav tako tudi (Q, B)-prerez. Od tod sledi, da ima G' (A, B)-konektor X, ki vsebuje P, in (Q, B)-konektor Y, ki vsebuje Q. Ker je $X \cap Y = S$, potem je $C = (X \cup Y) + e$ lahko (A, B)-konektor za G. ■

Posledica 4.1 *Naj bosta a in b dve različni točki v $G = (V, E)$.*

(i) Če ab ni povezava iz $E(G)$, potem je najmanjše število od a in b različnih točk, ki ločijo a in b v G, enako največjemu številu neodvisnih (a, b)-poti v G.

(ii) Najmanjše število povezav, ki ločijo a in b v G, je enako največjemu številu po poteh disjunktnih (a, b)-poti v G.

Dokaz: (i) Uporabimo izrek 4.1, kjer vzamemo $A := N(a)$ in $B := N(b)$.
(ii) V grafu povezav za G uporabimo izrek 4.1, vzamemo $A := E(a)$ in $B := E(b)$. ■

S pomočjo te posledice lahko dokažemo naslednji izrek:

Izrek 4.2 (Globalna verzija Mengerjevega izreka) *Velja:*

(i) Graf je k-povezan natanko takrat, ko vsebuje k neodvisnih poti med poljubnima dvema točkama.

(ii) Graf je po povezavah l-povezan natanko takrat, ko vsebuje l po povezavah disjunktnih poti med poljubnima dvema točkama.

Dokaz: (i) Če graf G vsebuje k neodvisnih poti med dvema poljubnima točkama, potem ima več kot k točk in v njem obstaja prerez, ki nima manj kot k točk. Torej je G k-povezan.

V obratni smeri predpostavimo, da je G k-povezan in ima več kot k točk, ampak vsebuje točki a in b, med katerima ni k neodvisnih poti. Po posledici 4.1(i) sta ti dve točki sosednji. Naj bo $G' = G - ab$. Potem G' vsebuje največ $k-2$ neodvisnih (a, b)-poti. Po posledici 4.1(i) točki a in b v grafu G loči množica X, ki ima največ $k-2$ točk. Potem obstaja vsaj še ena točka v v G, ki ni iz $X \cup \{a, b\}$, saj $|V(G)| > k$. Sedaj vemo, da X loči točko v v G' od ene izmed a in b, vzemimo a. Vendar $X \cup \{b\}$ loči v in a v G ter ima največ $k - 1$ elementov. To pa je protislovje s k-povezanostjo G.

(ii) sledi direktno iz posledice 4.1(ii). ■

5 Maderjev izrek in izrek o vpetih drevesih

Naj bo $G = (V, E)$ graf in H induciran podgraf v njem. Zanima nas, koliko ima G lahko največ med seboj neodvisnih H-poti. Definirajmo zgornjo mejo

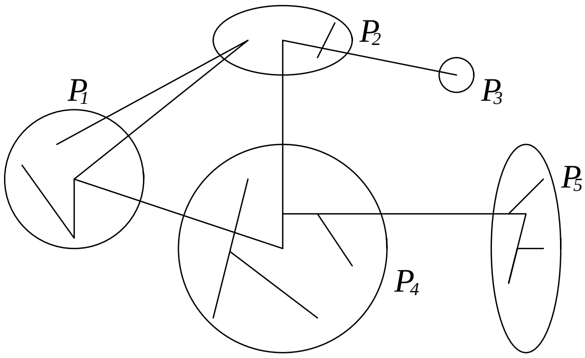
$$M_G(H) := \min(|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \lfloor \frac{1}{2} |\partial C| \rfloor),$$

kjer je minimum po vseh X in F, za katere velja $X \subseteq V(G - H)$, $F \subseteq E(G - H - X)$, $\mathcal{C}_F$ množica komponent grafa $(V(G - H), F)$, tako, da vsaka H-pot v G vsebuje točko ali povezavo iz $X \cup F$.

Izrek 5.1 (Mader) *V danem grafu G z induciranim podgrafom H je vedno vsaj $M_G(H)$ neodvisnih H-poti.*

Naj bo $G = (V, E)$ graf in P poljubna particija množice $V(G)$ na r množic. Potem ima vsako vpeto drevo v G najmanj $r - 1$ povezav, katerih krajišča ležijo v različnih množicah particije P.

Zgled: Spodnji graf ima particijo iz petih množic $P_1, \ldots, P_5$. Na sliki je označeno vpeto drevo s šestimi povezavami med množicami $P_1, \ldots, P_5$.



Slika 5.1: Particija grafa na r množic

Izrek 5.2 (Tutte; Nash-Williams) *Multigraf G vsebuje k po povezavah disjunktnih vpetih dreves natanko takrat, ko ima G za vsako particijo P množice $V(G)$ najmanj $k(|P| - 1)$ povezav med množicami v particiji P.*

Opomba: Če v G obstaja k po povezavah disjunktnih vpetih dreves, je G očitno po povezavah k-povezan. Obrat ne velja brez dodatnih pogojev.

Posledica 5.1 *Vsak po povezavah $2k$-povezan multigraf G ima k po povezavah disjunktnih vpetih dreves.*

Literatura

[1] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2000, str. 43–58.

[2] F. Göring, *Short proof of Menger's Theorem*, 2000.