Problem umetnostne galerije

Marko Kandič

17. september 2006

Za začetek si oglejmo naslednji primer. Recimo, da imamo v galeriji polno vrednih slik in nočemo, da bi jih kdo ukradel. Seveda si želimo, da bi lahko to preprečili. V ta namen postavimo stražarje v galerijo in sicer tako, da so v vsakem trenutku vse slike pod nadzorom. Predstavili bomo nekaj primerov stražarjev in umetnostnih galerij ter podali temeljne rezultate in hipoteze iz tega področja.

1 Osnovne definicije in lastnosti

Definicija 1.1 *V $\mathbb{R}^2$ imamo za $n \geq 3$ zaporedje točk $v_1, \ldots, v_n$, ki jih povežemo z odsekoma linearno krivuljo sestavljeno iz daljic $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, \ldots, e_n = v_nv_1$. Ta krivulja omejuje poligon, če velja:*

(a) Zaporedni daljici se sekata v natanko eni točki.

(b) Poljubni nezaporedni daljici se ne sekata.

Pobližje si oglejmo zgornjo definicijo. Za $i = 1, \ldots, n-1$ velja

$$e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1} \qquad \text{ter} \qquad e_1 \cap e_n = v_1.$$

Povedali smo le kaj omejuje poligon, nismo pa še povedali kaj poligon točno je.

Definicija 1.2 *Poligon je zaprtje omejene komponente množice $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n e_i$ in ga označimo z P. Rob poligona pa označimo ∂P kar je v našem primeru unija daljic e_i.*

Definicija 1.3 *Če ima poligon P stranice vzporedne osem x ter y, potem mu pravimo ortogonalni poligon.*

Definicija 1.4 *Če pa ima poligon P v svoji notranjosti m disjunktnih poligonov $P_1, \ldots, P_m$, potem poligonu P pravimo poligon z luknjami. Luknje predstavljajo poligoni $P_1, \ldots, P_m$. K ogliščem poligona z luknjami štejemo še oglišča lukenj.*

Opomba: Naj bo P poligon z luknjami $P_1, \ldots, P_m$. Potem naš poligon z luknjami označimo kot $P \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i$.

Naj bo P poligon in $p \in P$ neka točka. Potem rečemo, da je točka p vidna točki q, če cela daljica pq leži v P. Množica točk, ki so vidne točki p je kompaktna, saj je unija končno mnogo zaprtih trikotnikov. Trikotnike dobimo tako, da iz p potegnemo premice skozi oglišča poligona P. Tako smo dobili trikotnike, ki so vidni iz p. Ker je množica vidnih točk kompaktna, potem je tudi zaprta, saj je $\mathbb{R}^2$ Hausdorffov prostor. Torej je množica točk, ki niso vidne iz točke p ravno odprta množica kot komplement zaprte. Naj bo p' poljubna točka iz množice nevidnih točk. Zaradi odprtosti obstaja neka okolica točke p' za katero velja, da nobena točka v njej ni vidna iz točke p.

Definicija 1.5 *Naj bo P poligon ter $S \subseteq P$ neka njegova podmnožica. Pravimo, da je P zastražen z množico S, če je vsaka točka $p \in P$ vidna neki točki iz S. Točke iz S imenujemo stražarji.*

Seveda poznamo več vrst stražarjev. Najpreprostejši so $t-$stražarji. Ti so poljubne točke v poligonu. Če pa poligon zastražimo s stražarji v ogliščih poligona, potem jih imenjuemo o-stražarji.

2 Chvátalov izrek

Chvátal je prvi dokazal, da je $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarjev vedno dovolj, da zastražimo poljuben poligon z n oglišči. Ker je njegov dokaz precej obsežen, bomo predstavili Friskov dokaz.

Definicija 2.1 *Diagonala poligona P je vsaka daljica $ab \subseteq P$, ki povezuje oglišča $a, b \in P$ ter zanjo velja $ab \cap \partial P = \{a, b\}$.*

S pomočjo definicije diagonale lahko definiramo triangulacijo poligona. Triagnulacija poligona P je razdelitev poligona na trikotnike z dodajanjem diagonal, ki se sekajo samo v ogliščih poligona. Naslednjo lemo, ki je intuitivno jasna, bomo navedli brez dokaza.

Lema 2.1 *Vsak poligon z vsaj 4-imi oglišči ima diagonalo.*

Lema 2.2 *Vsak poligon z $n \geq 3$ oglišči lahko trianguliramo z dodajanjem 0 ali več diagonal. Triangulacija poligona z n oglišči vsebuje $n - 3$ diagonal.*

Dokaz: Za $n = 3$ trditev drži, saj imamo trikotnik in dodamo 0 diagonal. Naj za $n \geq 3$ trditev drži. Poligonu z $n + 1$ oglišči dodamo diagonalo. Diagonala obstaja po prejšnji lemi. Poligon tako razpade na dva dela. Oba dela sta spet poligona z n_1 in n_2 oglišči, dodana diagonala pa predstavlja stranico, ki je skupna obema poligonoma. Vsak poligon ima n ali manj oglišč saj nismo dodali nobenega oglišča in v vsakem delu je poleg krajišč diagonale vsaj še eno oglišče. Torej lahko na obeh delih uporabimo indukcijsko predpostavko. Po predpostavki oba poligona vsebujeta $n_1 - 3$ in $n_2 - 3$ diagonal zapored. Vemo, da velja

$$n_1 + n_2 = (n + 1) + 2 = n + 3,$$

saj smo dva oglišča dvakrat šteli. Torej je vseh diagonal v prvotnem poligonu ravno

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = (n + 1) - 3.$$

■

Lema 2.3 *Triangulacija poligona z n oglišči vsebuje vsaj dve oglišči stopnje* 2.

Dokaz: Če je $n = 3$, potem imamo trikotnik in trditev drži. Predpostavimo, da trditev drži za $n \geq 3$. Z indukcijo bomo pokazali, da trditev drži tudi za $n + 1$. V triangulaciji poligona z $n + 1$ oglišči imamo $n - 2$ diagonale. Naj bo D ena od njih. Diagonala D triangulacijo deli na dve novi triangulaciji in vsaka od njiju ima n al manj oglišč, saj je v vsaki poleg krajišč diagonale D vsaj še eno oglišče. Uporabimo indukcijsko predpostavko na obeh triangulacijah. V vsaki dobimo vsaj dve oglišči stopnje 2 od katerih vsaj eno ni krajišče diagonale D, sicer že na začetku ne bi imeli triangulacije. Torej smo v vsakem delu dobili vsaj eno oglišče stopnje 2, ki ni krajišče diagonale D. Triangulaciji spet združimo in dobimo vsaj dve oglišči stopnje 2, saj se stopnja spremeni le ogliščema, ki sta bila krajišči diagonale D. ∎

Lema 2.4 *Graf, ki ga določa triangulacija poligona z n oglišči, ima $3-$barvanje točk.*

Dokaz: Lemo bomo dokazali s pomočjo matematične indukcije. Za $n = 3$ imamo trikotnik in trditev drži. Predpostavimo, da trditev drži za $n \geq 3$. Pokažimo, da trditev drži za $n + 1$. V triangulaciji poligona z $n + 1$ točkami izberemo točko stopnje dve, ki obstaja po prejšnji lemi. Točko označimo z v, njeni sosedi pa z a in b. Odstranimo točko v, tako da povezavi av in bv nadomestimo s povezavo ab. Ker trikotnik avb vsebuje samo oglišča a, v in b ter stranice, ki povezujejo ta tri oglišča, dobimo triangulacijo poligona z n točkami. Triangulacija ima $3-$barvanje po indukcijski predpostavki. Sedaj točko v dodamo poligonu in jo pobarvamo z barvo, s katero nismo pobarvali točk a in b. ∎

Izrek 2.5 (Chvátal) *Poljuben poligon z n oglišči lahko vedno zastražimo z $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ stražarji.*

Dokaz: Poligon trianguliramo z dodajanjem diagonal. Po lemi ima triangulacija $3-$barvanje. Označimo barve z a, b, c. Naj b T_x, $x \in \{a, b, c\}$ množica točk, ki smo jih pobarvali z barvo x. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo $|T_a| \leq |T_b| \leq |T_c|$. Potem je $|T_a| \leq \frac{n}{3}$. Stražarje postavimo v oglišča, ki smo jih pobarvali z barvo a. Poljubna točka p poligona P leži v enem izmed trikotnikov, ta pa vsebuje tudi oglišče $q \in T_a$. Ker je trikotnik konveksen lik, q vidi p.
∎

Hipoteza 1 (Shermer) *Vsak poligon z n točkami in h luknjami se lahko zastraži z $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ $o-$stražarji.*

Izrek 2.6 (Bjorling-Suchs) *Če ima poligon h lukenj in n točk skupaj, potem je $\lfloor \frac{n+h}{3} \rfloor$ stražarjev vedno dovolj in včasih tudi potrebno, da zastražimo poligon.*

3 Tradicionalna umetnostna galerija

Pod pojmom tradicionalne umetnostne galerije si predstavljamo pravokotno stavbo s pravokotnimi stenami ter s sobami, ki so povezani z vratmi, če imata sobi skupno stranico. Spet nas zanima koliko stražarjev moramo postaviti na vrata med sobami, da bodo vse sobe zastražene.

Opomba: Če je stražar postavljen med vrati obeh sob, potem vidi obe sobi.

Liha komponenta grafa G je neka komponenta K za katero velja, da je moč množice K liho število. To pomeni, da je $|K|$ liho število. Definirajmo še pojem prirejanja in popolnega prirejanja. Prirejanje grafa G je neka množica povezav M za katero velja, da nobeni dve izmed povezav množice M nimata skupnega vozlišča. Če za vsako vozlišče v grafa G obstaja povezava $e \in M$, da je v njeno krajišče, potem je M popolno prirejanje.

Izrek 3.1 *Graf G ima popolno prirejanje natanko takrat, ko za vsako podmnožico $S \subseteq V(G)$ velja, da število lihih komponent grafa $G \backslash S$ ni večje od $|S|$.*

Tudi dokaz tega izreka bomo izpustili. Z njegovo pomočjo pa lahko dokažemo naslednji izrek:

Izrek 3.2 *Tradicionalno galerijo z n sobami lahko zastražimo z $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ $t-$stražarji.*

Dokaz: Naj bo T tradicionalna galerija z n sobami: $S_1, \ldots, S_n$. Z $G(T)$ označimo prirejeni graf galerije T: vsaka soba S_i prestavlja točko v_i grafa $G(T)$ in vsaka vrata, ki povezujejo dve sobi S_i in S_j predstavljajo povezavo e_{ij} v $G(T)$. Ker je celotna galerija povezana, je tudi njen prirejeni graf povezan.

Pokazali bomo: če ima graf $G(T)$ sodo mnogo točk, potem ima popolno prirejanje M. S tem pa bomo dokazali tudi našo trditev, saj lahko $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ stražarjev izberemo s pomočjo prirejanja M. Za vsako povezavo $e_{ij} \in M$ postavimo stražarja med vrata sob S_i in S_j in tako zastražimo celo galerijo T. Če imamo v galeriji T liho sob, potem pa poljubno sobo galerije razdelimo na dve sobi in uporabimo pravkar dokazano trditev za sodo število sob.

Predpostavimo sedaj, da ima $G(T)$ sodo mnogo mnogo točk. Da ima $G(T)$ popolno prirejanje bomo dokazali s pomočjo prejšnjega izreka. Naj bo S poljubna podmnožica množice $V(G(T))$ in k število povezanih komponent grafa $G(T) \backslash S$. Opazimo lahko, da vsaka povezana komponenta C_i grafa $G(T)$ predstavlja ortogonalen poligon $P_i \subseteq T$. Vsak poligon P_i ima najmanj štiri oglišča, zato je vsota oglišč po vseh komponentah $G(T) \backslash S$ najamanj $4k$. Označimo vsoto števil oglišč po vseh k komponentah z v_k. Torej velja $v_k \geq 4k$.

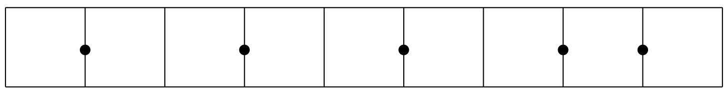
Če sedaj pravokotnik, ki ustreza točki iz S, damo nazaj v T, se vsota števila oglišč vseh novih komponent zmanjša za največ štiri oglišča. Torej je vsota oglišč po vseh komponentah vsaj $v_k - 4$. Če je kakšno oglišče v v_k dvakrat ali večkrat šteto, kar se lahko zgodi, ko se sobe stikajo, lahko z dodajanjem pravokotnika ne zmanjšamo vsote v_k, oziroma jo zmanjšamo za ena namesto za dve ali za dve namesto za tri ali za tri namesto za štiri.

Ko dodamo vse pravokotnike, ki ustrezajo množici S, nam ostanejo samo štiri oglišča, ki pripadajo galeriji T. V vsakem od $|S|$ korakov se je vsota V_k zmanjšala za največ štiri. Torej velja

$$4k \leq v_k \qquad \text{in} \qquad v_k - 4|S| \leq 4.$$

Odkoder sledi $k \leq |S| + 1$. Če je komponent natanko $|S| + 1$ in so vse lihe, dobimo protislovje s predpostavko, da ima $G(T)$ sodo mnogo točk. Torej je vsaj ena komponenta soda in je zato število lihih komponent v $G(T) \backslash S$ manjše ali enako $|S|$. ■

Primer 3.1 *Podajmo primer tradicionalne galerije z n sobami za katero potrebujemo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ $t-$stražarjev. Če je n sodo, potem postavimo stražarja med vrata prve in druge sobe, med vrata tretje in četrte sobe in tako naprej. Tako postavimo $\frac{n}{2}$ stražarjev. V primeru, ko je n liho pa postavljamo stražarje na podoben način kot v primeru, ko je bil n sod. Sedaj bo ostala ena soba nezastražena. Primer, ko je $n = 9$, je predstavljen spodaj. Seveda bi lahko za poljubno naravno število n skonstruirali podoben zgled.*



4 Ostali primeri umetnostnih galerij

4.1 Umetnostna galerija z notranjimi stenami

Umetnostna galerija, ki jo predstavimo kot poligon z n oglišči in m diagonalami, ki se ne sekajo, imenujemo umetnostna galerija z notranjimi stenami. Diagonale predstavljajo notranje stene in imajo nameščena majhna vrata.

Izrek 4.1 (Kündgen) $\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor$ *stražarjev je vedno dovolj, da zastražijo umetnostno galerijo z notranjimi stenami in n oglišči. Če je $m = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 2$, potem velja celo enakost.*

4.2 Poligoni z mobilnimi stražarji

Stražarjem, ki jim dovolimo premikanje po daljici, ki je vsebovana v celoti v poligonu pravimo mobilni stražarji oziroma $m-$stražarji. $m-$stražar vidi vse točke, ki so vidne katerikoli točki na daljici, po kateri se lahko premika. Zato je cela daljica $m-$stražar.

Izrek 4.2 (O'Rourke) *Če želimo zastražiti poligon z $m-$stražarji, ki se premikajo po diagonalah poligona z n oglišči, potem jih potrebujemo $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$*

Izrek 4.3 (Aggarwal) *Da zastražimo ortogonalen poligon potrebujemo $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$ m-stražarjev.*

Izrek 4.4 (Györy-Hoffman-Kriegel-Shermer) *Imejmo ortogonalen poligon na n ogliščih in h luknjami. Potem potrebujemo $\lfloor \frac{3n+4h+4}{16} \rfloor$ mobilnih stražarjev, da ga zastražimo.*

4.3 r-zastraženi poligoni

Definicija 4.1 *Stražarji, ki se lahko premikajo po stranici poligona, se imenujejo $r-$ stražarji. Torej so $r-$stražarji ravno stranice.*

Hipoteza 2 (Touissant) *Za poligone z $n \geq 14$ oglišči je $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ $r-$stražarjev vedno dovolj, da zastražijo poligon z n oglišči.*

Izrek 4.5 (Shermer) $\lfloor \frac{3n}{10} \rfloor$ *$r-$stražarjev vedno lahko zastraži poligon z n oglišči za vsak $n \in \mathbb{N} \backslash \{3, 6, 13\}$.*

4.4 Problem zapora in trdnjave

Zanima nas koliko r-stražarjev potrebujemo, da zastražimo zunanjost poljubnega poligona z n oglišči. To je problem trdnjave. Podobno nas zanima koliko $o-$stražarjev potrebujemo, da zastražimo zunanjost in notranjost poligona z n oglišči. To pa je problem zapora.

Predstavimo važnejše rezultate iz tega področja.

Izrek 4.6 (O'Rourke-Wood) *V poljubnem poligonu z n oglišči $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ $o-$stražarjev reši problem trdnjave. Če je poligon tudi konveksen, potem jih toliko tudi potrebeujmo.*

Izrek 4.7 (Aggarwal) $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ *o-stražarjev reši problem trdnjave za ortogonalne poligone na n ogliščih.*

Za konec podajmo še O'Rourkovo hipotezo.

Hipoteza 3 (O'Rourke) $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ *$o-$stražarjev je dovolj, da zastražijo zunanjost in notranjost poligona z n oglišči.*

Literatura

[1] Aggarwal A.:*The art gallery theorem: its variations, applications and algorithmic aspects.*

[2] Cikač V.: *Problem umetnostne galerije za ortogonalne poligone.*

[3] O'Rourke J.: *Galleries need fewer mobile guards: a variation to Chvatál's theorem.*

[4] Zylinski P.: *Placing guards in art galleries by graph colouring.*