Parametri ravninskosti in ploskve višjih redov

Tinkara Delibegović

8. maj 2008

1 Parametri ravninskosti

Problem, ki je zgodovinsko pomembnejši v teoriji grafov, je maksimalno kromatično število ravninskega grafa in s tem povezan problem barvanja zemljevidov: ali lahko države sveta pobarvamo z različnimi barvami tako, da bodo države z netrivialno mejo imele različne barve? Kasnejša motivacija za študij ravninskih grafov je povezana z razvojem računalniške in komunikacijske tehnologije, predvsem VLSI vezja. To so vezja zelo visoke stopnje integracije oz. vezja, ki vsebujejo več kot deset tisoč vrat oziroma več kot sto tisoč tranzistorjev.

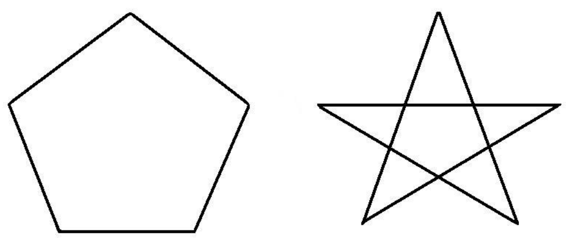
V tem poglavju bomo tako obravnavali parametre, ki merijo koliko odstopa splošni graf od ravninske oblike.

1.1 Debelina grafa

Ravninski graf je graf, ki se ga da narisati v ravnini brez sekanja povezav, razen v skupnih krajiščih. Splošni graf ni nujno ravninski, lahko pa ga sestavimo iz večih ravninskih grafov. Eden izmed naravnih parametrov ravninskosti je število ravninskih grafov, ki jih potrebujemo, da tvorimo dani graf.

Definicija 1.1. *Debelina grafa G* je minimalno število ravninskih grafov, ki jih dobimo pri dekompoziciji grafa G na ravninske grafe. Debelino grafa G označimo s $t(G)$.

Zgled 1.1. Debelina vsakega ravninskega grafa je enaka 1, debelina grafa K_5 pa je enaka 2, saj lahko K_5 dobimo iz dveh ciklov dolžine 5.



Slika 1: Ravninska grafa, ki sestavljata K_5

Enostavno je dobiti spodnjo mejo za $t(G)$, ki zelo pogosto da pravilno vrednost. Uporabili bomo zvezo: $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$.

Trditev 1.1. *Naj bo G enostavno povezani graf z n točkami in m povezavami. Potem je:*

1. $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3\,n-6} \right\rceil$;

2. *če v G ni trikotnikov, potem je* $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2\,n-4} \right\rceil$.

Dokaz.

1. Če je G povezan enostaven ravninski graf z $n\,(\geq 3)$ točkami in m povezavami, potem je $m \leq 3\,n\, -\, 6$. Za ravninsko risbo grafa G z f lici je, po lemi o rokovanju za ravninske grafe, $2m \geq 3f$ saj je stopnja vsakega lica enostavnega grafa vsaj 3, zato je $f \leq \frac{2}{3}m$. Če to uporabimo v Eulerjevi formuli $f = m - n + 2$, dobimo $3m - 3n + 6 \leq 2m$, torej je $m \leq 3n - 6$.
   Ker je vseh povezav skupaj m, mora biti ravninskih grafov vsaj $\frac{m}{3\,n-6}$. Število grafov je celo naravno število, zato velja $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3\,n-6} \right\rceil$.

2. Za dokaz druge točke uporabimo: Naj bo G povezan ravninski enostaven graf z $n\,(\leq 3)$ točkami in m povezavami in naj bo brez trikotnikov. Potem je $m \leq 2n - 4$.
   Za ravninski graf G z f lici je po lemi o rokovanju $2m \geq 4f$ (saj je stopnja vsakega lica enostavnega grafa brez trikotnikov vsaj 4), zato je $f \leq \frac{1}{2}m$. Če to uporabimo v Eulerjevi formuli, dobimo $m - n + 2 \leq \frac{1}{2}m$, torej $m \leq 2n - 4$.

□

Zgled 1.2. V $G = K_n$ je $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Iz točke 1. Trditve 1.1 sledi $t(K_n) \geq \frac{n(n-1)}{2(3n-6)}$. Izraz lahko poenostavimo:

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n\,(n-1)}{6\,(n-2)} \right\rceil &= \left\lfloor \frac{n\,(n-1) + 2\,(3n-6) - 1}{2\,(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{2\,(3n-6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+7)\,(n-2)}{6\,(n-2)} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor . \end{aligned}$$

Torej $t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{1}{6}\,(n+7) \right\rfloor$.

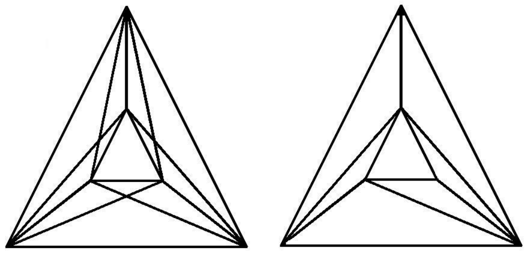
1.2 Križno število

Včasih moramo narisati graf v ravnino, čeprav sam graf ni ravninski. Kot primer si oglejmo vezje čipa, ki predstavlja sliko grafa. Križanje žic vpliva na samo ceno čipov, zato poskušamo število presečišč minimizirati.

Definicija 1.2. *Križno število* $\nu(G)$ grafa G je najmanjše število sekajočih se povezav pri risanju grafa G v ravnino.

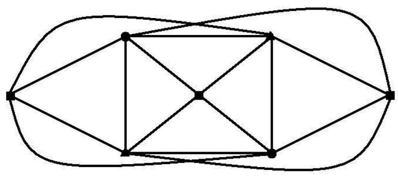
Zgled 1.3. Dokažimo, da je $\nu(K_6) = 3$ in $\nu(K_{3,2,2}) = 2$. Presečno število majhnega grafa lahko dobimo s pomočjo maksimalnega ravninskega podgrafa. Recimo, da imamo graf G narisan v ravnini (le narisan je v ravnini, ni nujno ravninski graf). Če je H maksimalen ravninski podgraf te slike, potem vsaka povezava grafa G, ki ni v podgrafu H, seka nekaj povezav grafa H. Od to sledi, da ima slika grafa G najmanj $e(G) - e(H)$ presečišč, kjer je $e(G)$ velikost množice $E(G)$ in $e(H)$ velikost množice $E(H)$. Če ima G n vozlišč, potem je $e(H) \leq 3n - 6$. Če G nima trikotnikov, potem velja $e(H) \leq 2n - 4$.

Narišimo oba grafa in poglejmo kakšna je spodnja meja.



Slika 2: Levi graf je K_6, desni graf pa je njegov maksimalen ravninski podgraf

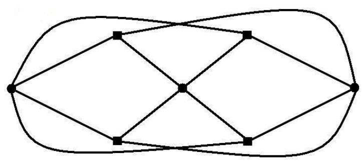
Ker ima K_6 15 povezav in ima ravninski graf na 6 vozliščih največ 12 povezav, od tod sledi, da je $\nu(K_6) \geq 3$.



Slika 3: Graf $K_{3,2,2}$

Graf $K_{3,2,2}$ ima 16 povezav in 7 vozlišč. Ravninski graf s 7 vozlišči ima največ 15 povezav. Od tod sledi $\nu(K_{3,2,2}) \geq 1$. Najbolj ravninska slika grafa $K_{3,2,2}$ ima dve presečišči. Ali je to res najboljša možna vložitev grafa v ravnino?

Opazimo, da $K_{3,2,2}$ vsebuje $K_{3,4}$.



Slika 4: Graf $K_{3,4}$

Graf $K_{3,4}$ nima trikotnikov, zato ima ravninski podgraf grafa $K_{3,4}$ največ $2 \times 7 - 4 = 10$ povezav. Od tod sledi (ker ima $K_{3,4}$ 12 povezav), da je $\nu(K_{3,4}) \geq 2$. Kakorkoli narišemo graf $K_{3,2,2}$, le - ta vedno vsebuje $K_{3,4}$. Od tod sledi, da je $\nu(K_{3,2,2}) \geq \nu(K_{3,4}) \geq 2$.

Trditev 1.2. *Naj ima graf G n vozlišč in m povezav. Če je k maksimalno število povezav v ravninskem podgrafu grafa G, potem je $\nu(G) \geq m - k$. Oziroma velja celo $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$.*

Dokaz. Imejmo podano sliko grafa G v ravnini in naj bo H maksimalni podgraf grafa G, katerega povezave se ne sekajo na tej sliki.

Vsaka povezava, ki ni v H se seka z najmaj eno povezavo v H, saj jo drugače lahko dodamo v graf H. Ker ima H največ k povezav, imamo $m-k$ presečišč med povezavami H in povezavami $G-E(H)$.

Ko odstranimo $E(H)$ iz grafa G, nam ostane najmaj $m-k$ povezav. Enak sklep nam pove, da ostane najmanj $(m-k)-k$ presečišč na sliki, za vsak $t=\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$.

Iterativno tako dobimo, da ostane najmanj $\sum_{i=1}^{t}(m-ik)$ presečišč za $t=\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$. Vemo, da je vsota enaka

$$\sum_{i=1}^{t}(m-ik)=mt-\frac{1}{2}kt\,(t+1)\,.$$

Zapišimo sedaj $m=tk+r$, kjer je $0\le r\le k-1$. Zamenjamo $t=\frac{1}{k}(m-r)$ v vrednosti vsote, poenostavimo in dobimo:

$$\begin{aligned}
\nu(G) &\ge m\,t - k\,t\,(t+1)\,\frac{1}{2}\\
&= m\,(m-r)\,\frac{1}{k}-k\,(m-r)\,\frac{1}{k}\left((m-r)\frac{1}{k}+1\right)\frac{1}{2}\\
&= m^2\,\frac{1}{k}-m\,r\,\frac{1}{k}-(m-r)^2\,\frac{1}{2k}-(m-r)\,\frac{1}{2}\\
&= m^2\,\frac{1}{k}-m\,r\,\frac{1}{k}-m^2\,\frac{1}{2k}+2\,m\,r\,\frac{1}{2k}-r^2\,\frac{1}{2k}-\frac{m}{2}+\frac{r}{2}\\
&= m^2\,\frac{1}{2k}-\frac{m}{2}+r\,\frac{r-1}{2k}.
\end{aligned}$$

□

Opomba: Prva meja $m-k$ iz prejšnje trditve je uporabna, ko ima G malo povezav. Križno število enostavnega grafa je vsaj $e(G)-3n+6$ in če je graf G dvodelen, vsaj $e(G)-2n+4$. Iteracija argumenta izboljša mejo za večje $e(G)$, vendar je spodnja meja za goste grafe šibka.

Oglejmo si kot primer graf K_n. Točnega odgovora nimamo, zato upamo vsaj na stopnjo vodilnega člena v polinomskem izrazu za $\nu(K_n)$. Tega zapišemo kot $an^k+O\left(n^{k-1}\right)$, s čimer označimo polinom stopnje k za n, pri čemer je an^k vodilni člen.

Vsak ravninski graf ima največ $3n-6$ povezav, polni grafi pa imajo $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ povezav. Tako dobimo:

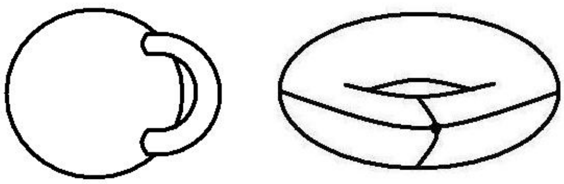
$$\begin{aligned}
\nu(K_n) &\ge \frac{m^2}{2k}-\frac{m}{2}=\frac{m\,(m-k)}{2k}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-3n+6\right)}{2\,(3n-6)}\\
&= \frac{n\,(n-1)\,(n\,(n-1)-6n+12)}{8\,(3n-6)}=\frac{n^4-8n^3+19n^2-12n}{24n-48}\\
&\ge \frac{1}{24}n^3+O(n^2).
\end{aligned}$$

Križno število ne more biti večje kot $\binom{n}{4}$, saj lahko narišemo točke grafa na krožnico in jih povežemo med seboj. Za K_n vsaka množica štirih vozlišč prispeva natanko eno presečišče. Ta predstavitev je v resnici najslabša možna ravnočrna slika grafa K_n, saj pri vsaki ravnočrtni sliki vsaka množica štirih vozlišč prispeva največ eno presečišče. Število presečišč znotraj teh štirih točk je odvisno od tega ali ena točka leži znotraj trikotnika, ki ga tvorijo ostale tri točke ali zunaj.

2 Ploskve višjih redov

Namesto, da bi minimalizirali število presečišč v ravnini, lahko zamenjamo ploskev na katero bi radi vožili graf in se jih s tem izognemo. To je kot, da bi gradili podhode in nadhode namesto semaforjev.

Definicija 2.1. *Ročaj* je valj, ki povezuje luknji izrezani iz ploskve. Torus je ploskev, ki jo dobimo, če dodamo en ročaj sferi.



Slika 5: Sfera z ročajem in torus

Torus je topološko gledano enak sferi z ročajem v smislu, da lahko eno ploskev zvezno transformiramo v drugo.

Velik graf ima lahko veliko presečišč in zato bomo potrebovali več ročajev. Tako lahko za vsak graf, če le dodamo dovolj ročajev na sfero, odpravimo vsa presečišča in dobimo vložitev tega grafa na to ploskev.

Način na katerega dodajamo ročaje ni pomemben, saj so vse ploskve, ki jih dobimo, ko dodamo enako število ročajev sferi, topološko gledano enaki.

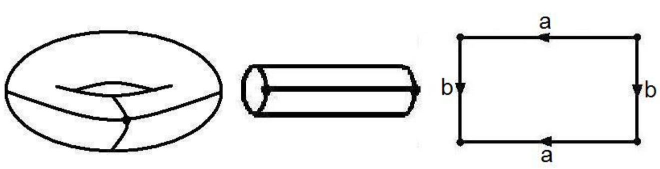
Definicija 2.2. *Rod površine*, ki jo dobino z dodajanjem ročajev sferi, je število teh dodanih ročajev. Ploskev z rodom γ označimo s S_γ.

Definicija 2.3. *Rod grafa G* je najmanjši rod ploskve, na katero lahko vložimo graf G.

Risanje velikih grafov na ploskve velikih redov je teško sledljivo. Lokalno gledano ploskev izgleda kot list papirja. Da lažje narišemo graf, bi radi celotno ploskev sploščili. To pa lahko dosežemo le z razrezom ploskve.

Če označimo kako se morajo posamezni robovi združiti nazaj, da dobimo prvotno površino, potem lahko opišemo ploskev na listu papirja.

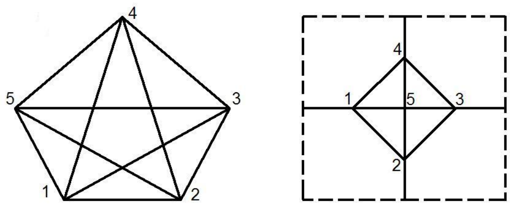
Zgled 2.1. Kombinatorični opis torusa. Če prerežemo torus prečno, dobimo cev / valj. Če prerežemo valj vzdolžno, dobimo pravokotnik. Stranice pravokotnika, ki so enako označene, so si identične. Vedeti moramo kako so si stranice identične, ker povezave vložitve na ta naš torus, lahko sekajo tak prerez.



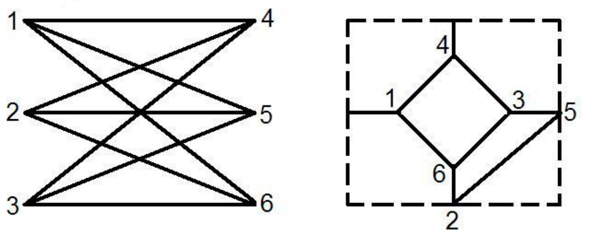
Slika 6: Torus

Ko povezava doseže en rob pravokotnika, doseže eno stran imaginarnega prereza. Ko seka prerez, se pojavi v identični točki na drugi strani kopije te meje. Štirje "vogali" pravokotnika ustrezajo eni sami točki na ploskvi skozi katero potekata oba reza.

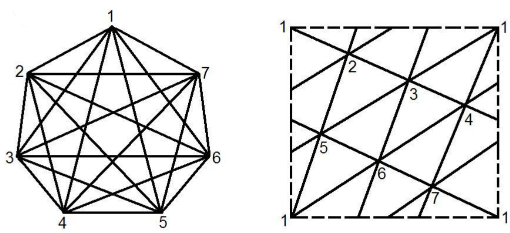
Zgled 2.2. Zgornja predstavitev vodi do lepih vložitev grafov na torus. Oglejmo si vložitve grafov K_5, $K_{3,3}$ in K_7.



Slika 7: Graf K_5 in njegova vložitev na torus



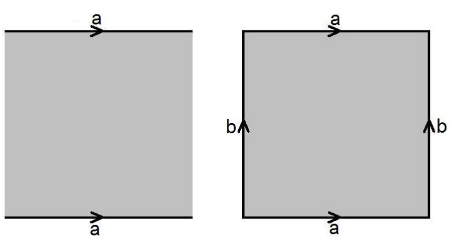
Slika 8: Graf $K_{3,3}$ in njegova vložitev na torus



Slika 9: Graf K_7 in njegova vložitev na torus

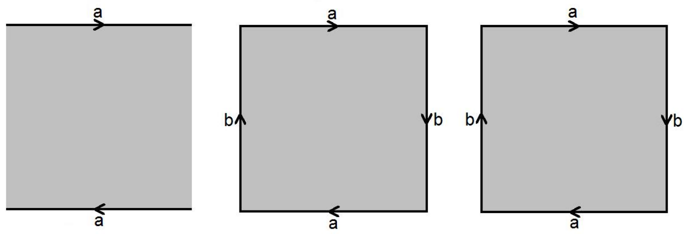
Definicija 2.4. Z N_q označimo graf, ki ga dobimo, če v sferi naredimo q lukenj in na le-te dodamo Möbiusove trakove.

V splošnem delimo ploskve na orientabilne in neorientabilne. Vsaka sklenjena orientabilna ploskev je homeomorfna eni od ploskev S_γ, za $\gamma \geq 0$.



Slika 10: Orientabilni ploskvi: valj in torus

Podobno velja, da je vsaka sklenjena neorientabilna ploskev homeomorfna eni od ploskev N_q, za $q \geq 0$.



Slika 11: Neorientabilne ploskve: Möbiusov trak, Kleinova steklenica, $\mathbb{R}$ projektivna ravnina

Opomba: Če je Σ sklenjena ploskev, potem velja:

$$\chi(\Sigma) = \begin{cases} 2 - 2\gamma & ;\text{ za orientiabilne ploskve} \\ 2 - q & ;\text{ za neorientabilne ploskve.} \end{cases}$$

Opomba: *Posplošena Eulerjeva formula* Naj bo G povezan graf z rodom γ in $V(G) = n$, $E(G) = m$ in f število lic vložitve grafa G na ploskev z rodom γ. Potem velja $n - m + f = 2 - 2\gamma$.

Zgled 2.3. Vložitev grafa K_7 na torus ima 7 vozlišč, 21 povezav in 14 lic. Preverimo, če podatki ustrezajo posplošeni Eulerjevi formuli $7 - 21 + 14 = 0 = 2 - 2$.

Lema 2.1. *Vsak enostaven graf z n vozlišči, ki je vložen na S_γ, ima največ $3(n - 2 + 2\gamma)$ povezav.*

Dokaz. Iz posplošene Eulerjeve formule izrazimo število vozlišč: $m = n + f - 2 - 2\gamma$. Lema o rokovanju nam pove, da velja $3f \leq 2m$, s čimer dobimo zgornjo neenakost $m \leq 3(n - 2 + 2\gamma)$. □

Če obrnemo zgornjo enačbo, dobimo spodnjo mejo za število ročajev, ki jih moramo dodati, da bomo lahko vložili G.

Posledica 2.1. *Za enostaven graf G z n točkami in m povezavami velja*

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{1}{16}(m - 3n) + 1 \right\rceil.$$

Zgled 2.4. Za polne grafe K_n velja $m = \frac{1}{2}n(n-1)$. Od tod naračunamo:

$$\begin{aligned} \gamma(K_n) &\geq \left\lceil \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}n(n-1) - 3n\right) + 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12}(n(n-1) - 6n) + \frac{12}{12} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{12}n^2 - \frac{1}{12}n - \frac{6}{12}n + \frac{12}{12} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{12}n + \frac{12}{12} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{1}{12}\left(n^2 - 7n + 12\right) \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\rceil. \end{aligned}$$

V dobljeno enačbo vstavimo $n = 7$ in dobimo:

$$\gamma(K_7) \geq \left\lceil \frac{1}{12}(7-3)(7-4) \right\rceil = 1.$$

Definicija 2.5. *Kromatično število ploskve S* definiramo kot maksimum kromatičnih števil grafov, ki jih lahko vložimo na ploskev S in ga označimo s $\chi(S)$ oziroma

$$\chi(S) = \max\left\{\chi(G);\ \text{graf } G \text{ lahko vložimo na ploskev } S\ \right\}.$$

Zgled 2.5. $\chi(ravnine) = \chi(sfere) = 4$ in $\chi(torusa) = 7$.

Izrek 2.1 (Heawood [4]). *Če se da graf G vložiti na S_γ, za $\gamma > 0$, potem*

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{\left(7+\sqrt{1+48\gamma}\right)}{2} \right\rfloor.$$

Dokaz. Naj bo $c = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+48\gamma}\right)$. Dovolj je pokazati, da ima vsak enostaven graf, ki se ga da vložiti na S_γ vozlišče, ki ima stopnjo največ $c-1$. Mejo $\chi(G)$ dosežemo z indukcijo po $n(G)$. Vsak graf z največ c vozlišči ima $\chi(G) \leq c$, zato si moramo ogledati le grafe, ki imajo $n(G) > c$.

Uporabimo lemo 2.1, da dokažemo, da je povprečna (in zato minimalna) stopnja največ $c-1$. Iz enačbe $c = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{1+48\gamma}\right)$, za $\gamma > 0$, izrazimo $12\gamma - 12 = c\,(c-7)$. Upoštevamo še, da je $n > c$ ter $m \leq 3\,(n-2+2\gamma)$. Tako dobimo, da povprečna stopnja ustreza zahtevani meji.

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{6\,(n-2+2\gamma)}{n} = 6 + \frac{12\gamma-12}{n} \leq 6 + \frac{12\gamma-12}{c} = 6 + \frac{c\,(c-7)}{c} = c-1.$$

□

Literatura

[1] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. (2001) 233–251.

[2] M. Ajtal, V. Chvátal, M. M. Newborn, E. Szemerédi, *Crossing - free subgraphs*, Ann. Discr. Math. **12** (1982) 9–12.

[3] P. Erdös, R. K. Guy, *Crossing number problems*, Amer. Math. Monthly **80** (1973) 52–58.

[4] P. J. Heawood, *Map - colour theorem*, Q. J. Math. **24** 332–339 (1930) 271–283.

[5] J Pach, G. Tóth, *Graphs drawn with few crossings per edge*, Combinatorica **17** (1997) 427–439.