Pretoki in pokritja

Definicija pretoka

Utež je funkcija $f : E(G) \to \Gamma$, kjer je Γ Abelova grupa.

Usmeritev grafa je predpis, ki vsaki povezavi določi eno od dveh možnih smeri. S usmeritvijo D grafa G dobimo usmerjeni graf, ki ga bomo označili z $D(G)$.

Usmeritev D bomo obravnavali kot funkcijo, za katero velja:

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{usmeritev povezave } uv \text{ je iz } u \text{ proti } v \\ -1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tako za vsako povezavo uv velja $D(u,v) = -D(v,u)$.

Z $N(v)$ in $E(v)$ bomo ustrezno označevali množico točk, sosednih z v in množico povezav, incidenčnih z v v grafu G.

Γ-pretok oz. **pretok** grafa G je urejeni par (D, f), kjer je D usmeritev in f utež grafa G, ki izpolnjuje Kirchoffov pogoj:

$$\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v, u) f(vu) = 0. \tag{1}$$

Včasih nam bo prišlo prav, če razširimo domeno uteži f tudi na točke grafa G z nastavitvijo

$$f(v) := \sum_{u \in N(v)} D(v, u) f(vu)$$

za vsako točko $v \in V(G)$. Takrat je pogoj (1) enakovreden pogoju, da je $f_{|V} \equiv 0$.

Za utež f grafa G je **nosilec** množica povezav $e \in E(G)$, za katere je $f(e) \neq 0$. Nosilec bomo označili s $\mathrm{supp}(f)$.

Pretok (D, f) grafa G je **nikjer-ničelni pretok**, če je $\mathrm{supp}(f) = E(G)$.

Kadar f slika v grupo $(\mathbb{Z}, +)$, par (D, f) imenujemo **celoštevilski pretok**.

k-pretok grafa G je celoštevilski pretok (D, f), pri katerem je $|f(e)| < k$ za vsako povezavo $e \in E(G)$.

k-pretok, pri katerem ima vsaka povezava nenegativno utež, imenujemo **nenegativni k-pretok**.

Če pa ima vsaka povezava pozitivno utež, ga imenujemo **pozitivni k-pretok**.

Pretočno število $\kappa(G)$ grafa G, pomeni najmanjše število k, za katero G dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Če tak k ne obstaja, potem definiramo $\kappa(G) = \infty$.

Velja:

1. Graf z mostovi ne dopušča nikjer-ničelnega pretoka.

2. Če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi za vsak $h \geq k$ dopušča nikjer-ničelni h-pretok.

3. Naj bo (D, f) (nikjer-ničelni) pretok grafa G in naj bo F poljubna podmnožica množice $E(G)$. Naj bo D_F usmeritev, ki jo dobimo iz D s spremembo smeri vsaki povezavi iz F. Utež f_F definiramo s predpisom:

$$f_F(e) = \begin{cases} f(e), & e \notin F \\ -f(e), & e \in F. \end{cases}$$

Tedaj je par (D_F, f_F) tudi (nikjer-ničelni) pretok grafa G.

4. Če graf G dopušča nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za dano usmeritev, potem dopušča tudi nikjer-ničelni (k-pretok) pretok za poljubno usmeritev. Torej, če graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok, potem tudi dopušča pozitivni k-pretok.

5. Za dani celoštevilski pretok grafa G naj bo H podgraf grafa G, induciran z liho uteženimi povezavami. Tedaj je H sod graf. Od tod sledi, da graf dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod.

Izrek 1 (Tutte) *Graf dopušča nikjer-ničelni k-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni $\mathbb{Z}_k$-pretok.*

Dokaz. Obravnavamo samo lažjo smer.

$\square$

Problem 1 *Pošči nikjer-ničelni $\mathbb{Z}_3$-pretok ter nikjer-ničelni 3-pretok v Q_3.*

Problem 2 *Za kateri k, graf K_4 dopušča nikjer-ničelni k-pretok?*

Problem 3 *Dokaži, da graf G dopušča nikjer-ničelni $k_1 \cdot k_2$-pretok, če in samo če dopušča k_1-pretok f_1 in k_2-pretok f_2 s* $\operatorname{supp}(f_1) \cup \operatorname{supp}(f_2) = E(G)$.

Pretočni polinomi

Dobro je znano, da je število različnih k-barvanj grafa G, ki je označeno s $P(G,k)$, polinom z nedoločenko k. Zato se lahko vprašamo, ali je funkcija $F(G,k)$, t.j. število različnih nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G za vnaprej podano usmeritev D in Abelovo grupo Γ, polinom nedoločenke k.

Ni se težko prepričati v veljavnost naslednje trditve.

Trditev 2 *Funkcija $F(G,k)$ ima naslednje lastnosti:*

(1) $F(G,k) = 0$, če je G povezava;

(2) $F(G,k) = k-1$, če je G zanka;

(3) $F(G,k) = (k-1)F(G \setminus e, k)$, če je $e \in E(G)$ zanka;

(4) $F(G,k) = F(G/e,k) - F(G \setminus e, k)$, če $e \in E(G)$ ni zanka.

Iz zgornje lastnosti je razvidno, da je $F(G,k)$ polinom z nedoločenko k.

Problem 4 *Naj bo v preprezna točka grafa G ter naj velja $G_1 \cup G_2 = G$ ter $G_1 \cap G_2 = \{v\}$. Pokaži, da velja*

$$F(G,k) = F(G_1,k) \cdot F(G_2,k).$$

Naloga 1 *Izračunaj $F(K_4, 3)$ ter $F(K_4, 4)$!*

Označimo s K_2^h graf, sestavljen iz dveh točk in h povezav med njimi.

Problem 5 *Naj bo G povezan graf s prerezom T moči $h \leq 3$ in $M_1 = G/E(H_2)$ in $M_2 = G/E(H_1)$, kjer sta H_1 in H_2 komponenti grafa $G \setminus T$. Pokaži, da velja:*

$$F(G, k) \cdot F(K_2^h, k) = F(M_1, k) \cdot F(M_2, k)$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali z indukcijo po številu povezav grafa G. V primeru, ko je $|E(G)| = h$, velja $G \cong M_1 \cong M_2 \cong K_2^H$. Zato tedaj ni težko preveriti, da enakost velja. Predpostavimo, da obstaja povezava $e \in E(G) \setminus T$ in recimo, da je $e \in E(H_2)$. Od tod je $e \in E(M_1)$. Kadar je e zanka, velja:

$$\begin{aligned} F(G, k) \cdot F(K_2^h, k) &= (k-1)F(G \setminus e, k) \cdot F(K_2^h, k) \\ &= (k-1)F(M_1 \setminus e, k) \cdot F(M_2, k) \\ &= F(M_1, k) \cdot F(M_2, k). \end{aligned}$$

In v primeru, ko e ni zanka:

$$\begin{aligned} F(G, k) \cdot F(K_2^h, k) &= [F(G \setminus e, k) - F(G/e, k)] \cdot F(K_2^h, k) \\ &= F(G \setminus e, k) \cdot F(K_2^h, k) - F(G/e, k) \cdot F(K_2^h, k) \\ &= F(M_1 \setminus e, k) \cdot F(M_2, k) - F(M_1/e, k) \cdot F(M_2, k) \\ &= [F(M_1 \setminus e, k) - F(M_1/e, k)] \cdot F(M_2, k) \\ &= F(M_1, k) \cdot F(M_2, k). \end{aligned}$$

To pa je konec dokaza. □

Naslednji izrek nam poda $F(G,k)$ v polinomski obliki. Označimo z $r(F)$ število komponent podgrafa v G, ki je induciran z množico povezav $F \subseteq E(G)$.

Izrek 3 (Tutte) *Naj bo Γ končna Abelova grupa reda k in naj bo D poljubna usmeritev grafa G. Za usmeritev D je število nikjer-ničelnih Γ-pretokov grafa G*

$$F(G,k) = \sum_{F \subseteq E(G)} (-1)^{|E(G) \setminus F|} \, k^{|F| - r(F)}. \tag{2}$$

Zgornji izrek se lahko dokaže z indukcijo po številu povezav grafa G. Če je G povezava ali zanka, potem je to enostavno preveriti. Sicer pa enakost (2) izpeljemo s pomočjo trditve 2(3) in (4).

Zgornji izrek neposredno implicira naslednjo posledico. (Ko smo že pri posledici 4, omenimo samo, da zaenkrat še ni znan konstruktiven dokaz za (b).)

Posledica 4 *Naj bosta Γ_1 in Γ_2 Abelovi grupi reda k in naj bo G poljuben graf.*

(a) Za poljubno usmeritev D grafa G je število nikjer-ničelnih Γ_1-pretokov grafa G enako številu nikjer-ničelnih Γ_2-pretokov grafa G.

(b) Graf G dopušča nikjer-ničelni Γ_1-pretok natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni Γ_2-pretok.

Problem 6 *Izračunaj $\kappa(K_n)$, $n \neq 3$?*

Rešitev: Če je n liho potem, $\kappa(K_n) = 2$. Velja, $\kappa(K_4) = 4$.

Trdimo $\kappa(K_n) = 3$ za n sodo. Naj bo $n \geq 6$ sodo število. Graf K_n ni sod, zato je $\kappa(K_n) \geq 3$. Torej bo trditev dokazana, če za vsakega od teh grafov pokažemo z indukcijo, da dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

Naj bo $n = 6$. K_6 lahko razbijemo na po povezavah disjunktne grafe G_1, G_2 in G_3 tako, da je $G_1 \simeq G_2 \simeq K_3$ in $G_3 \simeq K_{3,3}$. Jasno vsak od grafov G_1 in G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Da tudi G_3 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok glej nalogo 8. Vsota pretokov teh treh grafov inducira nikjer-ničelni 3-pretok v K_6.

Naj bo zdaj $n > 6$. Naj so $\{v_1, \ldots, v_n\}$ točke grafa K_n. Naj bo G_1 podgraf v K_n, induciran s točkami $\{v_1, \ldots, v_{n-2}\}$ in naj bo G_2 induciran s povezavami iz $E(K_n) \setminus E(G_1)$. Tako sta G_1 in G_2 po povezavah disjunktna. Po indukcijski predpostavki G_1 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Torej bo trditev dokazana, če pokažemo, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok; potem nikjer-ničelni 3-pretoki grafov G_1 in G_2 inducirajo nikjer-ničelni 3-pretok v K_n. Ni se težko prepričati, da K_2^{n-2} (graf na 2 točkah z $n-2$ povezav med njima) dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. Ker je G_2 subdivizija grafa K_2^{n-2} sledi, da tudi G_2 dopušča nikjer-ničelni 3-pretok. To pa je konec rešitve.

Problem 7 *Izračunaj $\kappa(P_{10})$?*

Rešitev: 5.

Problem 8 *Kateri kubični grafi dopuščajo 3-pretok?*

Odgovor: Dvodelni. ($\Rightarrow$) Naj bo G kubičen graf, ki dopušča nikjer-ničelni 3-pretok (D, f). Opazimo, da je vsaka točka grafa incidenčna z natanko eno povezavo, ki ima utež 2. Naj bo V_1 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava s utežjo 2 usmerjena iz te točke. In naj bo V_2 množica točk grafa G, za katere je incidenčna povezava z utežjo 2 usmerjena k tej točki. Par $\{V_1, V_2\}$ je razbitje množice $V(G)$. Ni težko videti, da med poljubnima dvema točkama iz V_1 oz. V_2 ni povezave. Torej je G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$.

($\Rightarrow$) Naj bo G dvodelen graf z bi-particijo $\{V_1, V_2\}$. Naj bo D usmeritev grafa G tako, da je vsaka povezava $e = v_1v_2$ ($v_1 \in V_1$ in $v_2 \in V_2$) usmerjena iz v_1 proti v_2 in naj bo f utež, ki vsaki povezavi priredi vrednost 1. Tedaj je par (D, f) $(\mathbb{Z}_3, +_3)$-pretok. Po izreku 1 G dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.

Problem 9 *Kateri kubični grafi dopuščajo 4-pretok?*

Odgovor: Po povezavah 3-obarvljivih.

Pretoki in barvanja grafov

Obstaja zelo zanimiva zveza med celoštevilskimi pretoki in barvanji grafov. Namreč, vsak nikjer-ničelni k-pretok ravninskega grafa inducira k-barvanje dualnega grafa in obratno. Torej se izkaže, da je teorija k-pretokov na nek način naravna posplošitev teorije barvanj ravninskih zemljevidov.

Izrek 5 (Tutte) *Ravninski graf G je po licih k-obarljiv natanko takrat, ko dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Dokaz. ($\Leftarrow$). Naj bo λ k-barvanje lic grafa G, kjer so barve elementi množice $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Usmeritev D in utež f grafa G definiramo takole. Naj bo $e = uv \in E(G)$ poljubna povezava iz G in naj bosta F_1 in F_2 lici, incidenčni z e. Povezavo e usmerimo tako, da je lice z večjo barvo na njeni desni strani. Za utež pa naj velja $f(e) = |\lambda(F_1) - \lambda(F_2)|$.

Trdimo, da je (D, f) nikjer-ničelni k-pretok grafa G. Naj bo v poljubna točka grafa G. Označimo z $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vse sosede točke v, naštete v vrstnem redu, ki ga dobimo, kadar se sprehajamo okrog točke v v smeri urinega kazalca in označimo z e_i povezavo vv_i. Naj bo F_i lice, čigar rob vsebuje eno za drugo povezave e_i in e_{i+1}, $i = 1, \ldots, k \pmod k$. Z indukcijo ni težko pokazati, da velja naslednja zveza

$$\lambda(F_i) = \lambda(F_k) + \sum_{j=1}^{i} D(v, v_j) f(vv_j)$$

za vsak $i = 1, \ldots, k$. In v primeru, kadar je $i = k$, dobimo

$$\sum_{j=1}^{k} D(v, v_j) f(vv_j) = 0.$$

To pa je pogoj (1) in ker je $0 < f(e) < k$, za vsako povezavo $e \in E(G)$ sledi, da je par (D, f) nikjer-ničelni k-pretok.

($\Rightarrow$). Po izreku 5 bo dovolj, če pokažemo, da je G po licih k-obarvljiv, če obstaja nikjer-ničelni pretok (D, f) grafa G. Barvanje $\lambda : F(G) \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ konstruiramo na naslednji način. Najprej izberemo eno lice in ga poljubno obarvamo. Potem ponovimo naslednji postopek, dokler niso vsa lica obarvana: izberi eno neobarvano lice F_u, ki ima za soseda že obarvano lice, recimo F_c; naj bo e povezava, incidenčna z obema licema F_u in F_c; licu F_u priredimo barvo $\lambda(F_u)$ tako, da velja:

$$\lambda(F_u) \equiv \lambda(F_c) \pm f(e) \pmod{k} \tag{3}$$

z operacijo $'+'$, kadar je F_c na desni strani povezave e in z operacijo $'-'$ sicer.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je λ dobro definirana. In ker je f nikjer-ničelni k-pretok, bomo dobili, da je λ pravilno po licih k-barvanje grafa G.

Naj bo neobarvano lice F_0, incidenčno z obarvanima licema F_a in F_b in naj bo e_i povezava med licema F_0 in F_i, $i = a, b$. Lahko privzamemo, da je F_0 na desni strani povezave e_a in na levi strani povezave e_b. Dovolj bo, če pokažemo, da je

$$\lambda(F_a) - f(e_a) \equiv \lambda(F_b) + f(e_b) \pmod{k}. \tag{4}$$

Ni težko videti, da obstaja prerezna množica $X = \{e_0 = e_a, e_1, \ldots, e_{n-1} = e_b\}$, kjer e_i in e_{i-1} ležita na istem licu F_i, $i = 0, \ldots, n-1$ (indeksiramo po modulu n). Tedaj je $F_1 = F_a$ ter $F_{n-1} = F_b$. Lahko predpostavimo, da je F_i zmeraj na desni strani povezave e_i. Potem imamo:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(e_i) = 0 \tag{5}$$

in za $i = 1, \ldots, n-2$

$$\lambda(F_{i+1}) \equiv \lambda(F_i) + f(e_i) \pmod{k}. \tag{6}$$

Iz (5) in (6) ni težko izpeljati (4). To pa je konec dokaza. $\square$

Grafi na ploskvah višjega roda

Prejšni Tuttov izrek 5 velja samo v eno smer kadar gremo iz sfere na orientabilnih ploskvah višjega roda.

Izrek 6 (Tutte) *Naj bo vložitev grafa G na neki orientabilni ploskvi po licih k-obarljiva. Tedaj G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Dokaz. Dokaz je podoben kot pri prejšnem izreku.

$\square$

Naloga 2 *Poišči naslednje vložitev. Kaj nam te povejo glede zgornjega izreka?*

1. *Vloži K_4 v projektivno ravnino tako, da je po licih 3-obarvljiv.*
2. *Vloži graf $C_2 \square C_3$ na torusu tako, da je po licih 3-obarvljiv.*
3. *Vloži K_7 na torusu.*

Tuttove domneve

Prvi dve domnevi, ki ju je postavil Tutte, govorita o zgornji meji pretočnega števila.

Domneva o zgornji meji. *Obstaja tako naravno število k, da vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni k-pretok.*

Domneva o 5-pretoku. *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 5-pretok.*

Domnevo o zgornji meji sta neodvisno dokazala Kilpatrick in Jaeger. Oba sta pokazala, da je zgornja meja 8. Kasneje je Seymour pokazal, da je tudi število 6 zgornja meja. To je hkrati tudi najboljši približek Domnevi o 5-pretoku. Torej za vsak graf G brez mostov je $\kappa(G) \leq 6$.

Domneva o 5-pretoku je posplošitev trditve, da je vsak ravninski graf 5-obarvljiv. Vemo, da Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka. Torej v tej domnevi ne moremo zamenjati 5 s 4.

Naslednja Tuttova domneva govori o posplošitvi Izreka štirih barv. Iz izreka 5 in iz Izreka štirih barv dobimo naslednji rezultat.

Posledica 7 *Vsak ravninski graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Petersenov graf ne dopušča nikjer-ničelnega 4-pretoka in se ne da vložiti v ravnino. Tutte je nekdanjo Domnevo o štirih barvah posplošil takole.

Domneva o 4-pretoku. *Vsak graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, dopušča nikjer-ničelni 4-pretok.*

Domneva o 4-pretoku je tesno povezana z naslednjo Tuttovo domnevo.

Domneva o 3-barvanju povezav. *Vsak kubičen graf brez mostov, ki ne vsebuje subdivizije Petersenovega grafa, je po povezavah 3-obarvljiv.*

Znani Grötzschev izrek pravi, da je vsak ravninski graf brez zank in trikotnikov 3-obarvljiv. Iz dualnosti sledi, da je vsak ravninski graf brez 1- in 3-prerezov po licih 3-obarvljiv.

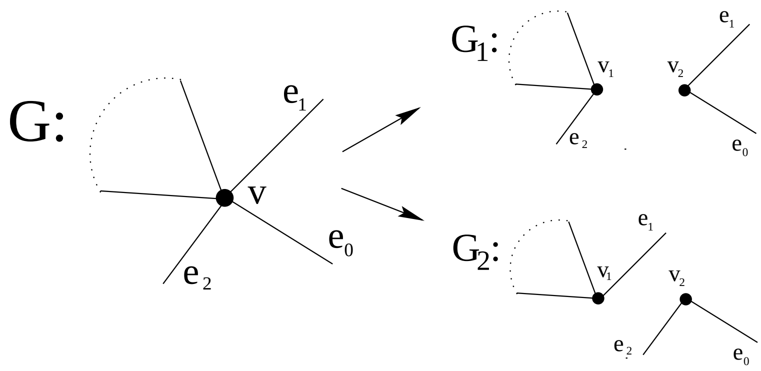
Posledica 8 *Vsak ravninski graf brez mostov in 3-prerezov dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Tuttova zadnja domneva o pretokih govori o posplošitvi zgornje posledice.

Domneva o 3-pretoku. *Vsak graf brez mostov in brez 3-prereza dopušča nikjer-ničelni 3-pretok.*

Lemma o cepitvi točke

Lema 9 (Fleishner) *Naj bo graf G 2-povezan po povezavah in naj bo $v \in V(G)$ točka stopnje vsaj 4. Naj bodo e_0, e_1 in e_2 povezave grafa G, incidenčne s točko v tako, da $\{e_0, e_1, e_2\}$ ni prerez. Definirajmo graf G_i $(i = 1, 2)$ takole: razcepimo točko v na točki v_1 in v_2 tako, da bo točka v_2 incidenčna s povezavami e_0 in e_i, točka v_1 pa incidenčna s ostalimi povezavami, ki so bile incidenčne v G s točko v (glej sliko 1). Potem je vsaj eden od grafov G_1 in G_2 po povezavah 2-povezan.*



Slika 1: Cepitev točke iz leme 9

Pri reševanju spodnje naloge, si pomagaj z zgornjo lemo:

Problem 10 *Naj bo G po povezavah 2-povezan graf, ki za dano naravno število $k > 2$ ne dopušča nikjer-ničelnega k-pretoka in s čim manjšim $|V(G)| + |E(G)|$. Dokaži, da velja*

1. *G enostaven, 3-povezan kubičen graf;*
2. *G je brez netrivialnega 3-prereza po povezavah; in*
3. *velikost najkrajšega cikla v G je vsaj $2k - 3$.*

Dokaz. Očitno je, da je G 2-povezan, brez zank in brez točk stopnje dve. Po trditvi 5 G nima netrivialnega prereza reda 2 in 3. Ker G nima točke stopnje 2 sledi, da nima prereza moči 2, t.j. G je po povezavah 3-povezan. Zdaj predpostavimo, da je v točka stopnje vsaj 4 grafa G. Po lemi 9 obstajata povezavi $e_1 = vu_1$ in $e_2 = vu_2$ tako, da je graf $G' = G \setminus \{e_1, e_2\} \cup \{vu_2\}$ po povezavah 2-povezan. Ker je $V(G') + E(G') < V(G) + E(G)$, iz minimalnosti grafa G sledi, da G' dopušča nikjer-ničelni k-pretok. Omenimo samo, da bi e_1 in e_2 lahko izbrali tudi tako, da sta zaporedni na robu nekega lica v primeru, da je G vložen na neko vnaprej podano ploskev. To nam inducira vložitev grafa G' na isti ploskvi. Kadar ima G' nikjer-ničelni k-pretok, ni težko pokazati, da ga ima tudi G. To pa nas pripelje v protislovje. Tako je vsaka točka grafa G stopnje največ 3 in ker je po povezavah 3-povezan ter $k > 2$ dobimo, da je G kubičen graf z $|V(G)| \geq 3$. Od tod pa sledi, da je G 3-povezan enostaven kubičen graf.

Zdajle pa bomo dokazali, da je najkrajši cikel grafa G, velikosti vsaj $2k-3$. Predpostavimo, da je to narobe, naj bo $C = v_0 \cdots v_{r-1}v_0$ cikel grafa G z $r \leq 2k - 4$. Naj bo $e_i = v_iv_{i+1}$, $i = 0, \ldots, r-1$, indeksiramo po modulu r. Ker je G kubičen graf, označimo z x_i tretjo sosedo točke v_i. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G tako, da so po povezavah e_i usmerjene iz v_i v v_{i+1}. Naj bo $\bar{E} = \{e_{2i} : i = 0, \ldots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1\}$ in $H = G/\bar{E}$. Označimo z z_i točko, v kateri smo združili v_{2i} in v_{2i+1}. Tako je $V_4 = \{z_i : i = 0, \ldots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1\}$ množica točk, stopnje 4, grafa H. S uporabe leme 9 vsako točko $z_i \in V_4$ razcepimo na točki z_i in z_i' tako, da je novodobljeni graf H' brez točke stopnje 4 in je hkrati po povezavah 2-povezan. Kot smo že omenili, lahko razcepimo točke tako, da je v primeru, ko je prvotni graf vložen na neko ploskev, dobljeni graf H' tudi vložen na to poloskev. Torej imamo dve možnosti pri cepitvi točke z_i:

(1) točka z_i bo incidenčna s e_{2i-1} in e_{2i+1} in z_i' sosednja z x_{2i-1} in x_{2i}.

(2) točka z_i je sosednja z x_{2i-1} ter incidenčna s e_{2i-1} in točka z_i' je sosednja s x_{2i+1} ter incidenčna s e_{2i+1}.

Iz minimalnosti grafa G sledi, da H' dopušča nikjer-ničelni k-pretok (D, f_0). Ta pa inducira k-pretok (D, f) grafa G z $E(G) \setminus E_0 \subseteq \mathrm{supp}(f)$. Naj bo $L = \{l \in \mathbb{Z}_k : l = f(e_i)$ za neki $0 \leq i \leq r-1\}$.

Opazi, da je $|E(C) \cap E(H)| = \lceil \frac{r}{2} \rceil$ in vsaka povezava iz $E(C) \cap E(H)$ ima neničelno utež. Če ima kaka povezava $e_{2i} \in E(C) \setminus E(H)$ neničelno vrednost, potem je razcep v točki z_i bil narejen kot je opisano v (1). No, v tem primeru je $f(e_{2i-1}) = f(e_{2i+1})$. Od tukaj lahko sklepamo, da je $|L \setminus \{0\}| \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil$.

Iz $r \leq 2k - 4$ sledi, da je $|L \setminus \{0\}| \leq \lceil \frac{r}{2} \rceil \leq k - 2$. Torej lahko izberemo neničelno število $w \in \mathbb{Z}_k \setminus L$. Naj bo par (D, f_1) 2-pretok cikla C s $\mathrm{supp}(f_1) = C$. Tedaj dobimo, da je $(D, f - w \cdot f_1)$ nikjer-ničelni k-pretok grafa G. To pa je protislovje. □

Pokritja grafov

Razred podgrafov $\mathcal{F}$ grafa G je **pokritje** grafa G, če je vsaka povezava iz G vsebovana v vsaj enem grafu iz $\mathcal{F}$. (O5pozorimo, da grafi iz pokritja niso nujno paroma različni.)

Pokritje, ki ne vsebuje več kot k grafov, imenujemo **k-pokritje**.

Pokritje $\mathcal{F}$ je **sodo**, če je vsak graf iz $\mathcal{F}$ sod.

Sodo pokritje $\mathcal{F}$ grafa G imenujemo **sodo dvojno pokritje** ali krajše **dvojno pokritje**, če je vsaka povezava iz G vsebovana v natanko dveh grafih iz $\mathcal{F}$.

Pokritje je **trivialno**, kadar je $|\mathcal{F}| = 1$ oz. $\mathcal{F} = \{G\}$.

Pokritje $\mathcal{F}$ grafa G imenujemo $(1, 2)$ **pokritje**, kadar je vsaka povezava iz G vsebovana v največ dveh elementih iz $\mathcal{F}$.

Torej vsako dvojno pokritje je tudi $(1, 2)$ pokritje.

Naloga 3 *Poišči sodo dvojno pokritje grafa* P_{10}. *Za kateri* k *je to sodo dvojno* k*-pokritje grafa* P_{10}.

Naloga 4 *Poišči sodo* $(1, 2)$ k*-pokritje grafa* P_{10} *tako, da je* k *čim manjši, kar se da!*

Mogoče takoj ni videti zveze med teorijo pokritij grafov in teorijo pretokov. Omenimo samo, da G dopušča nikjer-ničelni 2-pretok natanko takrat, ko je sod oz. kadar je $\{G\}$ sodo pokritje grafa G. Naslednja trditev nam posploši to zvezo.

Trditev 10 *Naj bo r naravno število. Graf G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok natanko tedaj, ko ima sodo r-pokritje.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Lahko predpostavimo, da obstaja nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok (D, f) grafa G. Torej f slika v množici $\mathbb{Z}_2^r$. Za $i = 1, \ldots, r$ in $x \in \mathbb{Z}_2^r$ označimo z $x(i)$ i-to kordinato r-terke x. Naj bo

$$C_i = \{e \in E(G) : f(e)(i) = 1\}.$$

Ker je (D, f) pretok, sledi, da je graf H_i, induciran s povezavami iz C_i, sod. Torej je množica $\{H_1, \ldots, H_r\}$ sodo r-pokritje grafa G.

$(\Leftarrow)$ Naj bo $\{H_1, \ldots, H_r\}$ sodo r-pokritje grafa G. Definirajmo utež $f : E(G) \to \mathbb{Z}_2^r$ takole:

$$f(e)(i) = \begin{cases} 0, & e \notin E(C_i) \\ 1, & e \in E(C_i), \end{cases}$$

za $i = 1, \ldots, r$. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G. Ni težko videti, da je par (D, f) $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok grafa G. Ker je vsaka povezava $e \in V(G)$ vsebovana v vsaj enem od grafov H_i, $i = 1, \ldots, r$, sledi, da je (D, f) tudi nikjer-ničelni $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok. Torej, G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.

Če se omejimo samo na soda dvojna pokritja, potem velja naslednja zveza.

Trditev 11 *Naj ima graf G dvojno 2^r-pokritje. Tedaj G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{F}$ dvojno 2^r-pokritje grafa G. Naj bo D poljubna usmeritev grafa G in $\omega : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_2^r$ poljubna injektivna preslikava. Definirajmo utež f grafa G:

$$\forall e \in E(G) : f(e) = \omega(C_e^1) + \omega(C_e^2),$$

kjer $e \in E(C_e^i)$ in $C_e^i \in \mathcal{F}$, za $i = 1, 2$. Ni težko pokazati, da je (D, f) $(\mathbb{Z}_2, +_2)^r$-pretok. Iz injektivnosti preslikave ω sledi, da je ta pretok tudi nikjer-ničelni. Iz izreka 1 in posledici 4 pa sledi, da G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.

Glede obstoja dvojnega pokritja sta Szekeres in Seymour neodvisno podala naslednjo domnevo.

Domneva o dvojnem pokritju. *Vsak graf brez mostov ima sodo dvojno pokritje.*

Kasneje sta Celmins in Preissmann neodvisno postavila močnejšo domnevo. V delu bomo pokazali, da Petersenov graf nima dvojnega 4-pokritja. Torej se v spodnji domnevi ne da zamenjati 5 s 4.

Domneva o dvojnem 5-pokritju. *Vsak graf brez mostov ima sodo dvojno 5-pokritje.*

Celična vložitev grafa v neko ploskev je **krepka**, kadar je rob vsakega lica cikel grafa.

Topološko posplošitev Domneve o dvojnem pokritju je podal Haggard:

Domneva o krepki vložitvi. *Vsak 2-povezan graf ima krepko celično vložitev v neko ploskev.*

Obstaja celo močnejša domneva od zgornje, ki trdi, da se lahko v zgornji domnevi omejimo na orientabilne ploskve.

Naloga 5 *Pokaži, da so hipoteze o pokritju grafov resnične za ravninske grafe.*

Naloga 6 *Preveri vse hipoteze o pokritju grafov na* P_{10}.

Usmerjena dvojna pokritja

Usmeritev D sodega grafa G je **pravilna**, če je $\forall v \in V(G)$: $d_D^+(v) = d_D^-(v)$. Tedaj G dopušča nikjer-ničelni 2-pretok (D, f) z $f \equiv 1$.

Množica sodih podgrafov $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ grafa G je **usmerjeno dvojno pokritje** grafa G, če velja:

(1) za vsak H_i obstaja pravilna usmeritev D_i;

(2) vsaka povezava $e \in E(G)$ je vsebovana v natanko dveh grafih H_{e1} in H_{e2} z $e1, e2 \in \{1, \ldots, k\}$;

(3) vsako povezavo $e \in E(G)$ usmeritivi D_{e1} in D_{e2} usmerjata v različno smer.

Usmerjeno dvojno k-pokritje je usmerjeno dvojno pokritje z močjo ne večjo od k.

Domneva o usmerjenem dvojnem 5-pokritju (Archdeacon). *Vsak graf brez mostov ima usmerjeno dvojno 5-pokritje.*

Vsako usmerjeno dvojno k-pokritje inducira dvojno k-pokritje grafa. Zato resničnost zgornje domneve implicira resničnost Domneve o dvojnem 5-pokritj u. Celo več, implicira tudi Domnevo o 5-pretoku.

Naloga 7 *Poišči usmerjeno dvojno 5-pokritje za grafov* K_4, K_5, Q_3, P_{10}.

Pretoki, pokritja, barvanja

V nadaljevanju bomo študirali zvezo med naslednjimi tremi lastnostmi grafov tako za vse grafe v splošnem (v vsakem primeru bomo privzeli, da so grafi brez mostov), kakor tudi za grafe iz posameznih razredov ali posameznih k-jev.

P1. Graf G dopušča nikjer-ničelni k-pretok.

P2. Graf G ima usmerjeno dvojno k-pokritje.

P3. Obstaja orientabilna sklenjena ploskev S, na kateri ima graf G po licih k-obarvljivo vložitev.

Trditev 12 *Naj bo G po povezavah 2-povezan graf, S orientabilna sklenjena ploskev in k naravno število. Tedaj*

(1) *v splošnem velja* **P3** $\Rightarrow$ **P2** $\Rightarrow$ **P1**;

(2) *če je G ravninski in S sfera, potem velja* **P3** $\Leftrightarrow$ **P2** $\Leftrightarrow$ **P1**;

(3) *če je G kubičen, potem velja* **P3** $\Leftrightarrow$ **P2** $\Rightarrow$ **P1**;

(4) *če je $k \in \{2, 3, 4\}$, potem velja* **P3** $\Rightarrow$ **P2** $\Leftrightarrow$ **P1**.

Dokaz. (1) (**P3** $\Rightarrow$ **P2**). Naj bo G vložen v orientabilni ploskvi S tako, da je po licih k-obarvan. Označimo s $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ barvne razrede tega k-barvanja. Usmerimo povezave roba vsakega lica tako, da je rob usmerjen v smeri urinega kazalca. Za $i = 1, \ldots, k$ naj bo B_i usmerjen graf, induciran s usmerjenimi robovi lic iz $\mathcal{F}_i$. Hitro se vidi, da je $\{B_1, \ldots, B_k\}$ usmerjeno k-pokritje grafa G.

(**P2** $\Rightarrow$ **P1**). Naj bo D poljubna usmeritev grafa G in naj bo $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ usmerjeno dvojno k-pokritje grafa G. Označimo z D_i usmeritev usmerjenega grafa H_i. Ker je D_i pravilna usmeritev, obstaja 2-pretok (D_i, f_i) grafa G s $\mathrm{supp}(f_i) = E(H_i)$ in $f_i(e) = 1$ za vsak $e \in E(H_i)$. Naj bo

$$f_i'(e) = \begin{cases} f_i(e), & D \text{ in } D_i \text{ enako usmerjata } e; \\ -f_i(e), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Par (D, f_i') je 2-pretok grafa G s $\mathrm{supp}(f_i') = E(H_i)$. Definirajmo utež f grafa G takole

$$\forall e \in E(G) : f(e) = \sum_{i=1}^{k} i f_i'(e).$$

Bralcu prepustimo, da se prepriča, da je par (D, f) nikjer-ničelni k-pretok.

(2) Z (1) smo pokazali, da v splošnem velja **P3** $\Rightarrow$ **P2** $\Rightarrow$ **P1**. Kadar je G ravninski in S sfera, pa iz izreka 5 sledi **P1** $\Rightarrow$ **P3**. Torej v tem primeru dobimo, da velja **P3** $\Leftrightarrow$ **P2** $\Leftrightarrow$ **P1**.

(3) Iz (1) bo dovolj, če pokažemo implikacijo **P2** $\Rightarrow$ **P3**. Naj bo $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ usmerjeno dvojno pokritje grafa G. Ker je vsak H_i sod usmerjen graf s pravilno usmeritvijo, se ga da razbiti kot unijo po povezavah paroma disjunktnih usmerjenih ciklov; označimo to unijo s $\mathcal{F}_i$. Naj bo $\bar{\mathcal{F}} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$. Vsakemu ciklu $C \in \bar{\mathcal{F}}$ priredimo disk K_C, čigar rob je C. Spomnimo se, da vsaka povezava $e \in E(G)$ pripada natanko dvema cikloma C_{e1} in C_{e2}, ki jo usmerjata v različno smer. Za vsako povezavo $e \in V(G)$ ustrezna dva diska $K_{C_{e1}}$ in $K_{C_{e2}}$ zlepimo vzdolž povezave e tako, da se smeri povezave, ki jo inducirata C_{e1} in C_{e2}, ne ujemata. Ker je graf kubičen končni rezultat lepljenja teh diskov, je orientabilna ploskev S. Na koncu vsak disk K_C obarvamo z barvo i, če je $C \in \mathcal{F}_i$. To pa je po licih k-barvanje vloženega grafa G na orientabilni ploskvi S.

(4) (**P1** $\Rightarrow$ **P2**). Naj bo $k = 2$. Potem je G sod graf. Naj bo D pravilna usmeritev grafa G. Označimo z D' usmeritev grafa G, ki v obratno smer kot D usmerja vsako povezavo grafa G. Tedaj je D' tudi pravilna usmeritev za G. Torej je $\{D(G), D'(G)\}$ usmerjeno dvojno pokritje grafa G. Kadar je $k = 3$ oz. 4, glej trditev **??** oz. trditev 11.

$\square$

Problem 11 *Pokaži, da za poljuben graf G so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) G dopušča nikjer-ničelni 4-pretok;

(ii) G ima sodo (1,2) 2-pokritje;

(iii) G ima sodo (1,2) 3-pokritje;

(iv) G ima dvojno 3-pokritje;

(v) G ima dvojno 4-pokritje; ter

(vi) G ima usmerjeno dvojno 4-pokritje.

Dokaz. Pokazati, da (ii) implicira (iii), (iv) implicira (v) in (vi) implicira (v) je trivialno. Ker je vsako sodo 2-pokritje tudi sodo (1,2) pokritje, sta po trditvi 10 (i) in (ii) enakovredna. Trditev 11 nam zagotovi, da (v) implicira (i). Množica $\{C_1, C_2\}$ je sodo (1,2) pokritje grafa G natanko tedaj, ko je $\{C_1, C_2, C_1 \oplus C_2\}$ dvojno pokritje grafa G. S tem smo pokazali $(ii) \Leftrightarrow (iv)$. Podobno je množica $\{C_1, C_2, C_3\}$ sodo (1,2) pokritje natanko takrat, ko je $\{C_1, C_2, C_3, C_1 \oplus C_2 \oplus C_3\}$ dvojno pokritje grafa G. Od tukaj pa sledi ekvivalenca $(iii) \Leftrightarrow (v)$. Trditev bo dokazana, če pokažemo $(iv) \Rightarrow (vi)$.

Naj bo $\{C_1, C_2, C_3\}$ dvojno 3-pokritje grafa G in naj bo D poljubna usmeritev za G. Označimo z (D, f_i) 2-pretok grafa G, za katerega je $supp(f_i) = E(C_i)$, $i = 1, 2, 3$. Definirajmo funkcije:

$$g_1 = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{2},\ g_2 = \frac{f_1 - f_2 - f_3}{2},\ g_3 = \frac{-f_1 + f_2 - f_3}{2},\ g_4 = \frac{-f_1 - f_2 + f_3}{2}.$$

Za $i = 1, \ldots, 4$ označimo z B_i nosilec uteži g_i in s H_i podgraf grafa G, induciran s povezavami iz B_i. Ni težko ugotoviti, da velja naslednje:

- vsaka povezava je vsebovana v natanko dveh oporah iz $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$;
- če je $e \in B_i \cap B_j$ $(i \neq j)$, potem je $g_i(e) = -g_j(e)$.

Za $i = 1, \ldots, 4$ naj bo D_i usmeritev grafa H_i, ki jo dobimo iz D tako, da vsaki povezavi e spremenimo smer v primeru, da je $g_i(e)$ negativno število. Na koncu dobimo, da je množica

$$\{D_1(H_1), D_2(H_2), D_3(H_3), D_4(H_4)\}$$

usmerjeno dvojno pokritje grafa G.

Izrek o 8-pretoku

V tem razdelku bomo dokazali Domnevo o zgornji meji.

Izrek 13 (Kilpatrick, Jaeger) *Vsak graf brez mostov dopušča nikjer-ničelni 8-pretok.*

Množico točk lihe stopnje grafa G bomo označevali z $O(G)$.

Podgraf H grafa G je **parnostno usklajen** z G, če velja $O(H) = O(G)$. (Drugače povedano; graf, induciran s povezavami $E(G) \setminus E(H)$, je sod.)

Lema 14 *Graf G dopušča nikjer-ničelni 2^r-pretok natanko takrat, ko G vsebuje r parnostno usklajenih podgrafov $P_1, \ldots, P_r$ tako, da je $E(P_1) \cap E(P_2) \cap \cdots \cap E(P_r) = \emptyset$.*

Dokaz. Podgrafi $P_1, \ldots, P_r$ so parnostno usklajeni in hkrati velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap \cdots \cap E(P_r) = \emptyset$ natanko takrat, ko je $\{G_1 \setminus E(P_1), \ldots, G \setminus E(P_r)\}$ sodo r-pokritje grafa G. Sedaj dokaz sledi iz trditve 10.

Izrek 15 (Nash-Williams in Tutte) *Vsak, po povezavah $2k$-povezan graf, ima k po povezavah disjunktnih, vpetih dreves.*

Lema 16 *Vsako vpeto drevo povezanega grafa G vsebuje podgraf, parnostno usklajen z G.*

Dokaz. Naj bo T vpeto drevo v G. Za vsako povezavo $e \in E(G) \setminus E(H)$ označimo s C_e edini cikel grafa $T \cup \{e\}$. Naj bo $H = \oplus_{e \in E(G) \setminus E(T)} C_e$. Jasno, H je sod graf in vsebuje množico povezav $E(G) \setminus E(T)$. Zaradi tega je graf $G \setminus E(H)$ parnostno usklajen z G in vsebovan v T.

Lema 17 *Naj bo G po povezavah 3-povezan graf. Potem G vsebuje tri podgrafe P_1, P_2 in P_3, parnostno usklajene z G, za katere velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap E(P_3) = \emptyset$.*

Dokaz. Konstruirajmo graf G' iz G tako, da podvojimo vsako povezavo v G. Graf G' je po povezavah 6-povezan in zaradi tega ima, po izreku 15, po povezavah tri disjunktna vpeta drevesa T_1, T_2 in T_3. Lema 16 nam zagotovi podgraf P_i grafa T_i, ki je parnostno usklajen z G. In na koncu ni težko videti, da v G velja $E(P_1) \cap E(P_2) \cap E(P_3) = \emptyset$.

Dokaz izreka 13 Po trditvi 10 bo dovolj, če pokažemo, da izrek velja za po povezavah 3-povezane grafe. Veljavnost za te grafe pa hitro sledi iz lem 14 in 17. □