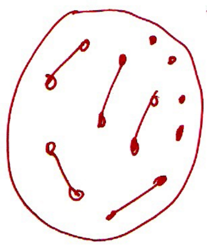
A proof of the Book

Thomassen Thm: Vsak ravninski graf je 5-izbirljiv.

Galvin: Vsak dvodelni graf je po povezavah seznamsko Δ-obarvljiv.

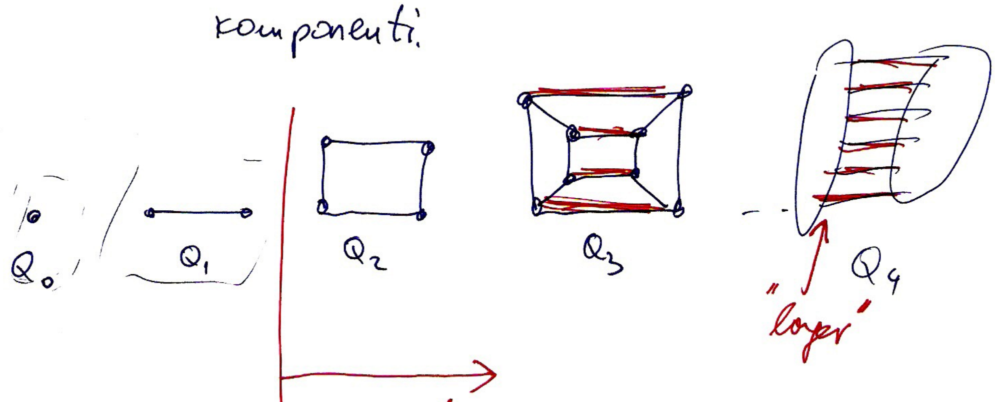
- G perfect matching



- Ali ima vsak G p.m.? NE  , lihi cikli

Q_d točke v Q_d so $\underbrace{(0,1,\ldots)}_{d}$ # točk v $Q_d = 2^d$

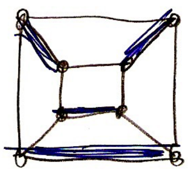
x in y iz Q_d povežemo če se razl. v natanko eni komponenti.

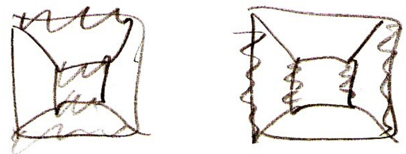


V Q_2 vsak p.m. je "layer"

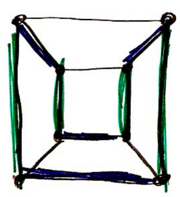
• Ali v Q_3 je vsak p. m. layer?

NE:





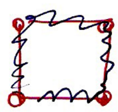
• Ali je Q_3 hamiltonski? Poišči vse H.c. do izomorfizma!



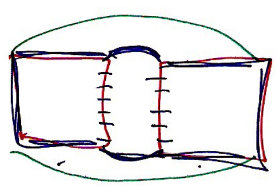
• Vsaka kocka Q_d, $d \geq 2$, je hamiltonska.

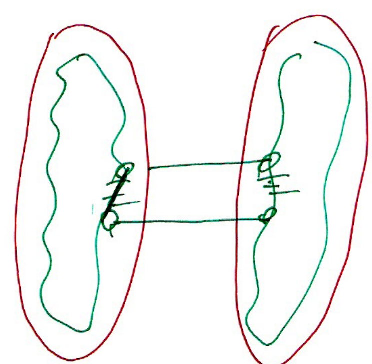
D: Indukcija po d

$d=2$



$d=3$





Q_{d-1} Q_{d-1}

<u>Kreweras' Conj</u>: Vsak p.m se da razširiti na H.c. v Q_d, $d \geq 2$.

<u>TRDITEV</u> Če je $|V(G)|$ sodo, in je M h.c. v G

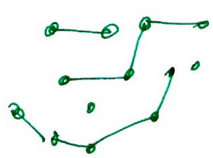
$\Rightarrow$ če izberemo vsakodrugo povez. iz M dobimo p.m.

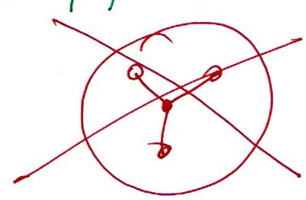
<u>POSLEDICA</u> $|V(G)|$ sodo, $\forall$ H.c nam da dva p.m.

<u>Ref. Krew. Conj.</u> Za vsak p.m. P hiperkocke Q_d, $d \geq 2$ obstaja p.m R tako da je $P \cup R$ H.c. v Q_d.

Za Q_d, definiramo <u>K_{Q_d}</u> je polni graf na točkah kocke Q_d.

<u>linearen gozd</u>: $\forall$ točka je stopnje ≤ 2

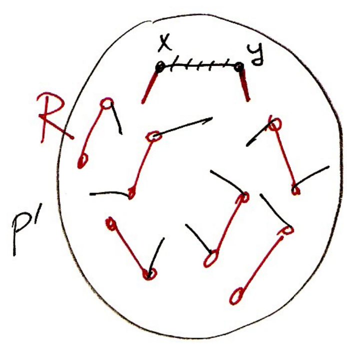




Lemma (Fink). Naj bo P prirejanje grafa KQ_d, ki ni popolno. Potem obstaja popolno prirejanje v Q_d tako, da je $P \cap R = \emptyset$ in $P \cup R$ linearen gozd.

Thm Naj bo P popolno prirejanje v KQ_d $d \geq 2$. Potem obstaja popolno prirejanje R v Q tako da je $P \cup R$ Hamiltonov cikel v KQ_d.

Dokaz Naj bo $e = xy$ poljubna povezava iz P.
Potem je $P' = P \setminus e$ "nepopolno" prirejanje.
Po lemi, obstaja pop. pri. R v Q_d tako, da je $P' \cap R = \emptyset$ in $P' \cup R$ je linear. gozd.



$\Delta(R \cup P') = 2$
(vsaka točka ima ≤ 1 črno in ≤ 1 rdečo povezavo.

Ali je xy rdeča povezava, oz. Ali lahko $xy \in R$?
NE: sicer dobimo cikel v $P' \cup R$

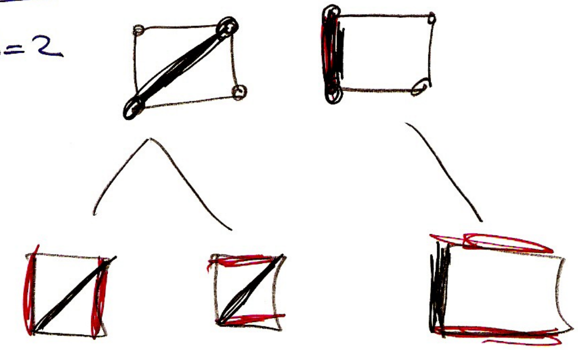
V $P' \cup R$ sta x in y stopnje 1 (rdečo) vse ostale točke so stopnje 2 (rdeča + črna) $\Rightarrow$ $P' \cup R$ je H. pot med x in y. $\Rightarrow$ $P' \cup R \cup xy = P \cup R$ je H. c. ∎

Dokaz hipoteze: Naj bo P p.m. v $Q_d \Rightarrow P$ je tudi p.m v KQ_d. Po Izreku, $\exists\, R$ p.m iz Q_d tako, da je $P \cup R$ H.c. v KQ_d. Ker je P v Q_d $\Rightarrow$ $P \cup R$ H.c in Q_d.

∎

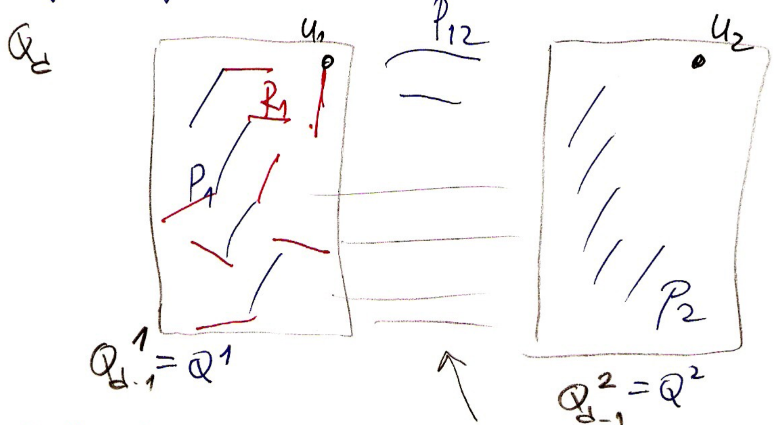
DOKAZ LEME:

$d=2$



u_1, u_2 nepokriti točki

NAJ VELJA za VSAK $k \le d-1$. Pokažimo za d.



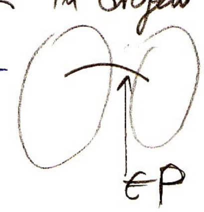
LAHKO IZBEREMO LAYER L tako, da sta u_1 in u_2 v različnih komponentah.

Q^1 $\quad K^1 = K_{Q^1} \quad P^1 = P \cap K_{Q^1}$

Q_2 $\quad K^2 = K_{Q^2} \quad P^2 = P \cap K_{Q^2}$

LAHKO OBSTAJAJO povezave iz P z enim krajiščem v K^1 in drugim v K^2

P^1, P^2 sta nepopolna prirejanja v K^1 in K^2



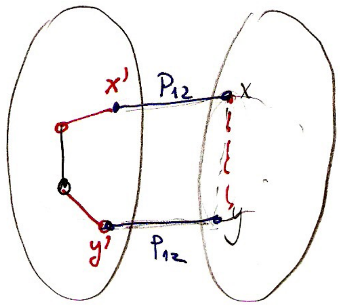
u_1 in u_2 nista pokrita

Po indukcijski predpostavki, $\exists$ popolno prirejanje R^1 v Q^1.

TAKO, DA JE: $P^1 \cap R^1 = \emptyset$ in $P^1 \cup R^1$ je linearen gozd.

POZOR PAZIMO NA:

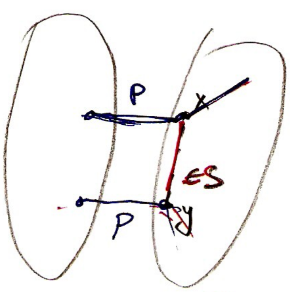
Kadar iščemo R^2: Pazimo, da xy ni v R^2



DEFINIRAMO:

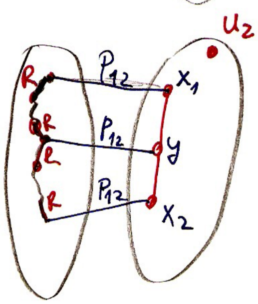
$S = \{ xy \in E(K^2) : \exists x', y' \in Q^1$ tako, da $xx', yy' \in P$ in obstaja pot od x' v y' v $P^1 \cup R^1 \}$

TRDIMO: $S \cup R^2$ je nepopolno prirejanje v K^2.



~~$S \cup P^2$~~ $e_1 \in S$ in $e \in P^2$

$\Rightarrow e_1$ in e_2 nista sosednja.



$\Rightarrow$ S prirejanje v K^2

$\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow S \cup P^2$ prirejanje v K^2

u_2 ni pokrita $\Rightarrow S \cup P^2$ nepopolno prirejanje.

Potem uporabimo lemmo nad $S \cup P^2$ in dobimo R^2 (8)

tako, da je $R^2 \cap (S \cup P^2) = \emptyset$ in $R^2 \cup S \cup P^2$ je linearen pozd.

<u>TRDIMO</u> $R := R^1 \cup R^2$ je ta prava množica za P

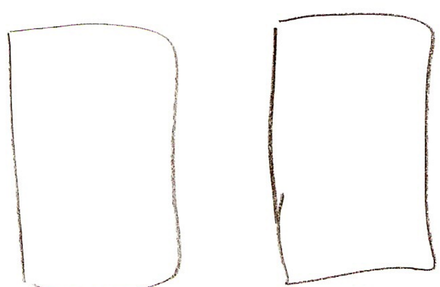
$$\left.\begin{array}{l} R^1 \text{ je p.p. v } Q^1 \\ R^2 \text{ je p.p v } Q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow R^1 \cup R^2 \text{ je p.p v } Q.$$

$R \cup P$ je max. stopnje ≤ 2: } linearnost

vsaka točka ima ≤ 1 povezavo v R in ≤ 1 povezavo v P.

SAMO ŠE POKAŽIMO, DA je $R \cup P$ pozd. Pa konec LEME

s protislovjem: Recimo C je cikel v $R \cup P$



Q^1 Q^2

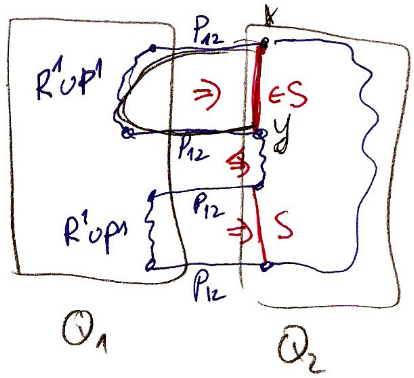
- Ali je C vsebovan v K^1?

  $\Rightarrow C \in R^1 \cup P^1$ $\rightarrow\leftarrow$

- C ni v K^2, sicer

  C v $R^2 \cup P^2 \subseteq R^2 \cup S \cup P^2$ $\rightarrow\leftarrow$

$\Rightarrow C$ ima točke in v K^1 in v K^2 $\rightarrow\leftarrow$



Vsako pot med x in y ki pre v K^1 nadomestimo z povezavo xy iz K^2, ki pa je v množici S

Če to operacijo naredimo porsod, iz C dobimo cikel oz. unijo ciklov C^* v K^2.

C^* ima povezave v S ali R^2 ali P^2

t.j. $C^* \subseteq S \cup R^2 \cup P^2$ protislovje s predpostavko, da je $S \cup R^2 \cup P^2$ lin. pord.

∎