Realna barvanja grafov s pogoji na razdaljah

Motivacija - Problem dodeljevanja frekvenc:
Postaviti želimo mrežo radijskih oddajnikov. Pri tem poznamo lokacijo vsakega oddajnika. Oddajnikom moramo dodeliti frekvence, v katerih bodo oddajali. Vemo, da se morajo frekvence bližnjih oddajnikov razlikovati za neko fiksno število, sicer bi se med sabo motili. Bližje kot sta si dva oddajnika, večja mora biti razlika med njunima frekvencama. Poleg tega želimo doseči, da je razlika med največjo in najmanjšo frekvenco čim manjša.

Navadna in realna barvanja:
Pri navadnih barvanjih moramo graf obarvati tako, da so sosednja vozlišča različne barve. Zanima pa nas predvsem kromatično število grafa, torej najmanjše število barv, ki jih za tako barvanje potrebujemo.
Pri realnih barvanjih imamo dana nenegativna števila $k_1, k_2, \ldots, k_p$. Vozlišča grafa označujemo (barvamo) z realnimi števili. Graf moramo obarvati tako, da se oznake vozlišč, ki so v grafu G na razdalji i, med seboj razlikujejo za vsaj k_i. Zanima pa nas predvsem razlika med največjo in najmanjšo oznako v grafu. Naš cilj je to razliko minimalizirati.

Definicija in oznake:
Naj bo G končen graf in k_i; $i = 1, \ldots, p$ nenegativna realna števila. $L(k_1, \ldots, k_p)$-barvanje grafa G je taka funkcija $f : V(G) \to [0, \infty)$, da za vsaki dve vozlišči u in v, ki sta v grafu G na razdalji i; $i = 1, \ldots, p$, velja $|f(u) - f(v)| \geq k_i$.

Množico vseh $L(k_1, \ldots, k_p)$-barvanj grafa G označimo z $L(k_1, \ldots, k_p)(G)$.
Število $max\{|f(u)-f(v)|;\ u, v \in V(G)\}$ imenujemo razpon barvanja f. Infimum razponov po vseh barvanjih iz $L(k_1, \ldots, k_p)(G)$ označimo z $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$.
Množico vseh linearnih kombinacij $\Sigma_{i=1}^{p} a_i k_i$ z nenegativnimi celimi koeficienti a_i označimo z $D(k_1, \ldots, k_p)$.

$L(k_1, \ldots, k_p)$-barvanje je optimalno, če je njegov razpon enak $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$.

D-Set Theorem:
Naj bo G končen graf in k_i; $i = 1, \ldots, p$ nenegativna realna števila. Tedaj obstaja optimalno $L(k_1, \ldots, k_p)$-barvanje f pri katerem je najmanjša oznaka enaka 0 in vse oznake pripadajo množici $D(k_1, \ldots, k_p)$. Torej tudi $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$ pripada množici $D(k_1, \ldots, k_p)$. Za vsako oznako in razpon f velja $\Sigma_{i=1}^{p} a_i \leq |V(G)|$.

Ta izrek nam zagotavlja obstoj optimalnega barvanja, ki ima poleg tega še oznake lepe oblike. Zaradi tega izreka so celoštevilska barvanja kompatibilna z realnimi barvanji.

Scaling Property:
Za končen graf G in realna števila $d, k_i \geq 0$; $i = 1, \ldots, p$ velja
$\lambda(G; d \cdot k_1, \ldots, d \cdot k_p) = d \cdot \lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$.

Ostale lastnosti $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$:

- $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$ je zvezna kosoma linearna funkcija spremanljivk k_i; $i = 1, \ldots, p$ iz končnega števila kosov z nenegativnimi celimi koeficienti.

- Zaradi zveznosti je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$ za racionalne k_i, zaradi Scaling Property pa je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, \ldots, k_p)$ za celoštevilske k_i.

- Primer $p = 2$:
  Vemo že, da je dovolj določiti $\lambda(G; k_1, k_2)$ za celoštevilske k_1 in k_2. Zaradi Scaling Property pa lahko funkcijo $\lambda(G; k_1, k_2)$ obravnavamo kot funkcijo $\lambda(G; k, 1)$ ene same spremenljivke $k = \frac{k_1}{k_2}$. Torej je dovolj, da poznamo $\lambda(G; k, 1)$ za racionalne k. D-Set Theorem nam zagotavlja, da je to zvezna kosoma linearna nepadajoča funkcija iz končnega števila kosov oblike $mk + n$; $0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$.

- $\lambda(G; 1, 0) = \chi(G) - 1, \qquad \lambda(G; 1, 1) = \chi(G^2) - 1$

Domneva (Griggs, Yeh):
Za vsak graf maksimalne stopnje $\Delta \geq 2$ obstaja $L(2,1)$-barvanje z razponom največ Δ^2. Trenutno najboljša zgornja meja je $\Delta^2 + \Delta - 2$. Znani so grafi, ki zahtevajo razpon $\Delta^2 - \Delta$, ne pa tudi grafi, ki zahtevajo večji razpon.