$L(p, q)$-barvanje

Rok Erman

2. 11. 2006

Povzetek

Pri navadnem barvanju točk grafa je pomembno, da sta sosednji točki različno pobarvani. Torej smo upoštevali le točke na razdalji ena. Mi pa bomo obravnavali barvanja pri katerih se bodo barve točk morale razlikovati, ne le na razdalji ena, ampak tudi na večjih razdaljah. Obstaja več različnih konceptov za taka barvanja. Mi si bomo ogledali $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanja. Podrobneje bomo obravnavali taka barvanja za cikle, poti in drevesa. Poiskali bomo zgornjo mejo za razpon nekega grafa G in pokazali tesno povezavo med našim barvanjem in NP-polnim problemom Hamiltonske poti.

1 Definicije.

Imejmo končen graf G in nenegativna cela števila $p_1, \ldots, p_k$. $L(p_1, \ldots, p_k)$*-barvanje* ($L(p_1, \ldots, p_k)$*-labeling*) grafa G je barvanje njegovih točk pri čemer morata točki na razdalji $i \leq k$ imeti barvi različni vsaj za p_i. S simboli zapisano to pomeni

$$L(p_1, \ldots, p_k) : V(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

in če sta točki u in v na razdalji $d(u, v) = i$, mora veljati

$$|L(p_1, \ldots, p_k)(u) - L(p_1, \ldots, p_k)(v)| \geq p_i.$$

Razpon (*span*) $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanja je razlika med največjo in najmanjšo barvo.

Tukaj velja omeniti, da lahko lahko brez izgube za splošnost najmanjšo barvo vedno postavimo na nič, kar se večinoma kar privzame. To je očitno, saj lahko od poljubnega $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanja odštejemo najnižjo barvo in tako dobimo barvanje z najnižjo barvo nič. Tako razpon postane največja barva v našem grafu. Naš cilj je seveda najti $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje z najmanjšim možnim razponom.

Najmanjši možen razpon označimo z $\lambda_{p_1,\ldots,p_k}(G)$ ali $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$. Tako $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje imenujemo *razdaljno barvanje.*

Uporaba v telefoniji. Ta in podobna barvanja so se pojavila kot model za dodeljevanje frekvenc radio oddajnikom ali antenam za mobilna omrežja. Oddajnike predstavimo kot točke v grafu in tiste, ki so zelo blizu povežemo s povezavami. Največ interference seveda povzročijo oddajniki, ki so zelo blizu manj pa tisti, ki so daleč narazen. Zakup frekvenčnega pasu je seveda drag in tako iščemo čim manjši frekvenčni pas, tako da se frekvence bližnjih oddajnikov zelo razlikujejo, frekvence tistih ki so blizu a ne zelo blizu pa se razlikujejo le nekoliko. Tako razmišljanje nas vodi prav do definicije razdaljnega barvanja, kot smo ga opisali zgoraj.

Povezava z navadnim barvanjem. Razdaljna barvanja so povezana z navadnim baravnjem. Če je $k = 1$ in $p_1 = 1$ je to navadno barvanje in velja $\lambda(G;1) = \chi(G) - 1$. Če je recimo $p_1 = \ldots = p_k = 1$ se naš problem prevede na navadno barvanje k-te potence našega grafa G. Spomnimo se, da je *k-ta potenca* grafa G graf G^k za katerega velja:

$$V(G^k) = V(G) \quad \text{in} \quad uv \in E(G^k) \Leftrightarrow d_G(u,v) \leq k.$$

Torej povezava uv je v grafu G^k če velja da sta točki u in v v grafu G na razdalji manjši ali enaki k. Tako velja $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k) = \chi(G^k) - 1$.

2 Hipoteza Δ^2

Večina raziskovanja se dela na osnovnem primeru, ko je $p_1 = 2$ in $p_2 = 1$, torej $L(2,1)$-barvanje. Ena najpomembnejših hipotez na tem področju, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [1]:

Hipoteza 1 *Vsak graf G z maksimalno stopnjo $\Delta \geq 2$ ima $L(2,1)$-barvanje z obsegom največ Δ^2.*

Hipoteza še vedno ni ne potrjena ne ovržena skoraj petnajst let po njeni objavi. Uspešno so jo dokazali za nekatere posebne razrede grafov kot so ravninski grafi z najvišjo stopnjo $\Delta \neq 3$, Hamiltonski grafi, grafi z najvišjo stopnjo dva in drugi. Gonçalves [2] pa je postavil trenutno najboljšo zgornjo mejo $\Delta^2 + \Delta - 2$.

Naslednji korak v raziskovanju je bil prehod na realna števila. V praksi seveda ni nobenega razloga, da bi razlika frekvenc bila celoštevilska. Tako definiramo

$$L(p_1, \ldots, p_k) : V(G) \to [0, \infty) \quad \text{za} \quad p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}.$$

Ostale definicije pa ostanejo enake.

Tukaj opazimo *lastnost razmerja* (*scaling property*):

Trditev 1 *Za vsako realno število $\alpha > 0$ velja:*

$$\alpha\lambda(G; p_1, \ldots, p_k) = \lambda(G; \alpha p_1, \ldots, \alpha p_k).$$

Dokaz. Naj bo f $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje grafa G z razponom $\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$. Če ga pomnožimo z α očitno dobimo $L(\alpha p_1, \ldots, \alpha p_k)$-barvanje f' z najmanjšim možnim razponom $\alpha\lambda(G; p_1, \ldots, p_k)$, saj smo največjo barvo pomnožili z α. Če razpon ne bi bil najmanjši možen bi imeli barvanje z manjšim razponom, ki bi ga delili z α in dobili $L(p_1, \ldots, p_k)$-barvanje z manjšim razponom, kar pa je protislovje. Dokaz v drugo smer je identičen, le da sedaj delimo z α. ∎

V posebnem če je $k = 2$ lahko vrednost $\lambda(G; p_1, p_2)$ povsem določimo že s funkcijo za $p_2 = 1$. Torej lahko za študij $L(p,q)$-barvanj študiramo kar $L(x,1)$-barvanja.

Griggs in Jin [3] sta dokazala, da je $\lambda(G; x, 1)$ zvezna odeskoma linearna funkcija. Dokažimo sedaj prvo zgornjo mejo za razpon, ki sta jo postavila Griggs in Yeh [1]:

Trditev 2 *Naj bo G graf z najvišjo stopnjo Δ. Potem velja $\lambda(G; 2, 1) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.*

Dokaz. Poljubno uredimo točke grafa in jih po vrsti barvamo z najnižjo dovoljeno barvo. Točka $v \in V(G)$ ima največ Δ sosedov in tako največ $\Delta(\Delta - 1)$ točk na razdalji dva. Ko želimo pobarvati v je tako prepovedanih največ $3\Delta + \Delta^2 - \Delta$ barv. Torej je razpon kvečjemu $\Delta^2 + 2\Delta$, saj začnemo z barvo 0 in imamo tako na voljo $\Delta^2 + 2\Delta + 1$ barv. ■

Očitna spodnja meja pa je $\Delta + 1$, ki jo dosežemo z grafom $K_{\Delta,1}$ za $\Delta \geq 2$.

Končna projektivna ravnina reda n je množica $n^2 + n + 1$ točk s sledečimi lastnostmi:

1. Poljubni dve točki tvorita premico,
2. Poljubni dve premici se sekata v eni točki,
3. V vsaki točki se seka $n + 1$ premic in
4. Vsaka premica vsebuje $n + 1$ točk.

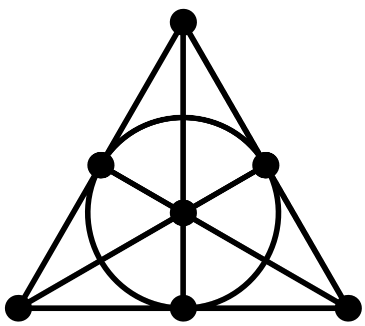
Taka projektivna ravnina obstaja če je n potenca praštevila. Znana hipoteza pravi, da so to edine končne projektivne ravnine, ki obstajajo. Dokaz te hipoteze pa je eden izmed pomembnejših nerešenih problemov v diskretni matematiki.

Pravimo, da je graf G *incidenčni graf* projektivne ravnine $\Pi(n)$ reda n, če je $G = (A, B, E)$ dvodelen graf, da velja

(1) $|A| = |B| = n^2 + n + 1$,

(2) vsak $a \in A$ predstavlja točko p_a v $\Pi(n)$ in vsak $b \in B$ predstavlja premico l_b v $\Pi(n)$,

(3) $E = \{\{a, b\} : a \in A, b \in B$ tako da velja $t_a \in p_b v \Pi(n)\}$.



Slika 1: Končna projektivna ravnina reda 2 (Fanova ravnina)

Iz definicije $\Pi(n)$ vemo, da je tak G $(n + 1)$-regularen. Za vsak $x, y \in A$ je $d_G(x, y) = 2$ in za vsak $u, v \in B$ je $d_G(u, v) = 2$. Prav tako, če $a \in A$ in $b \in B$ nista sosednja, sta na razdalji $d_G(a, b) = 3$. V [4] imamo sledeči izrek.

Trditev 3 *Če je $G = (A, B, E)$ incidenčni graf projektivne ravnine reda n je $\lambda(G; 2, 1) = n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$, kjer je $\Delta = n + 1$ maksimalna stopnja grafa G.*

Dokaz. Pokažimo najprej spodnjo mejo. V A imamo $n^2 + n + 1$ točk in poljubni dve sta na razdalji dve. Torej morata poljubni dve točki biti pobarvani različno. Torej potrebujemo razpon enak vsaj $n^2 + n = \Delta^2 - \Delta$.

Pomožna definicija: *Prirejanje (matching)* grafa G je množica disjunktnih povezav, torej množica povezav, za katero velja, da poljubni dve povezavi nimata skupne točke. *Popolno prirejanje (perfect matching)* je prirejanje z $\frac{n}{2}$ povezavami torej največje možno. To seveda pomeni, da imajo lahko le grafi s sodo mnogo točkami popolna prirejanja.

Lema 4 *(Hallov kriterij): Naj bo A neka množica točk, potem je množica $N(A)$ množica sosedov točk iz A. Dvodelen graf G s particijama X in Y ima popolno prirejanje natanko tedaj ko velja $|N(A)| \geq |A|$ za vse podmnožice $A \subset X$. Brez dokaza.*

Za zgornjo mejo si oglejmo komplementarni dvodelen graf $G' = K_{n,n} - E(G)$. Ta graf je dvodelen in n^2 regularen, saj je G $n+1$-regularen. Pogoj Hallovega kriterija je torej izpolnjen, torej ima G' popolno prirejanje. To pomeni, da imamo n^2+n+1 povezanih parov točk. Graf je dvodelen torej ima vsak tak par eno točko v A in drugo v B. Vsakega od teh parov točk lahko v originalnem grafu G pobarvamo z isto barvo, saj tam te točke niso povezane in hkrati niso na razdalji dve. Iz dokaza spodnje meje vidimo, da bo barvanje pravo, če bodo te barve paroma različne in tako smo dokazali še zgornjo mejo. ∎

3 Barvanja poti, ciklov in dreves

Poglejmo si sedaj $L(2,1)$-barvanja za poti, cikle in drevesa.

Trditev 5 *Naj bo P_n pot na n točkah. Potem velja:*

(*i*) $\lambda(P_2; 2, 1) = 2$;

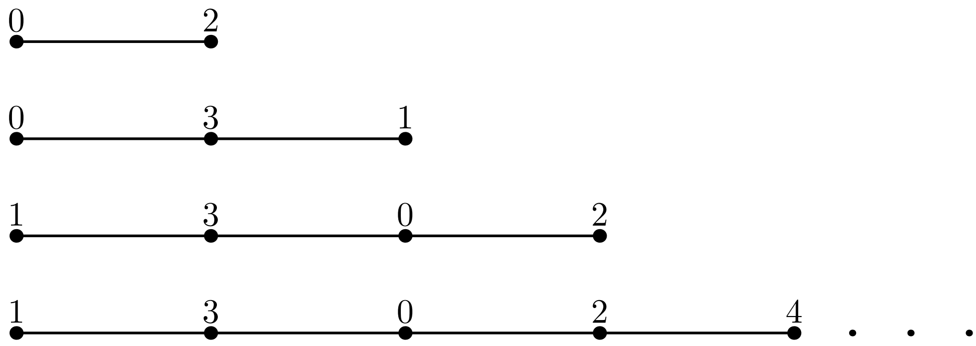
(*ii*) $\lambda(P_3; 2, 1) = \lambda(P_4; 2, 1) = 3$;

(*iii*) $\lambda(P_n; 2, 1) = 4$ *za* $n \geq 5$.

Dokaz. (*i*) Očitno. (*ii*) Barvanji: $0, 3, 1$ in 1, 3, 0, 2 Poti dolžine tri ne moremo $L(2,1)$-pobarvati s tremi barvami, saj moramo P_2 pobarvati z najmanj dvema. Preostala tretja barva pa ne more biti sosednja nobeni že pobarvani točki. (*iii*) Pot barvamo z barvami v tem vrstnem redu: $1, 3, 0, 2, 4, \ldots$ P_5 pa se ne da pobarvati s štirimi barvami saj imamo v množici $\{0, 1, 2, 3\}$ le tri možne pare za sosednje točke $(0, 2)$, $(0, 3)$ ter $(1, 3)$, kar pa ni dovolj, da bi sestavili pot dolžine pet. ∎

Trditev 6 *Naj bo C_n cikel na n točkah. Potem je $\lambda(C_n; 2, 1) = 4$ za katerikoli n.*

Dokaz. Za $n = 3, 4$ je zelo lahko pokazati trditev. Naj bo sedaj $n \geq 5$. Vsak cikel dolžine vsaj pet vsebuje kot podgraf pot dolžine pet. Za to pa že vemo, da ima razpon $\lambda(P_5; 2, 1) = 4$ iz prejšnje trditve. Torej imamo spodnjo mejo $\lambda(C_n; 2, 1) \geq 4$, sedaj pa želimo dokazati, da velja še $\lambda(P_5; 2, 1) \leq 4$. Dovolj je torej pokazati, da



Slika 2: $L(p,q)$-barvanje poti

obstaja $L(2,1)$-barvanje cikla s petimi barvami. Uredimo točke cikla $v_0, \ldots, v_{n-1}$ kot se nahajajo na ciklu, torej v_i je sosednja z v_{i+1}, $0 \leq i \leq n-2$ in v_0 je sosednja z v_{n-1}. Definirajmo barvanje:

(1) Če je $n \equiv 0 \pmod 3$ naj bo

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{če } i \equiv 0 \pmod 3; \\ 2, & \text{če } i \equiv 1 \pmod 3; \\ 4, & \text{če } i \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

(2) Če je $n \equiv 1 \pmod 3$ predefiniramo konec barvanja iz (1) tako:

$$f(v_i) = \begin{cases} 0, & i = n-4; \\ 3, & i = n-3; \\ 1, & i = n-2; \\ 4, & i = n-1. \end{cases}$$

(3) Če je $n \equiv 2 \pmod 3$ predefiniramo konec barvanja iz (1) tako:

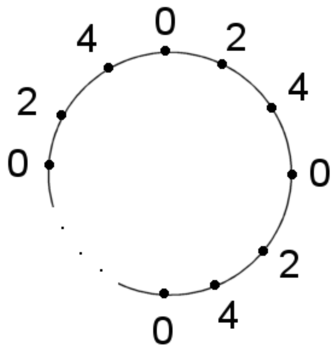
$$f(v_i) = \begin{cases} 1, & i = n-2, \\ 3, & i = n-1. \end{cases}$$

f je očitno $L(2,1)$-barvanje cikla C_n za vsak n. Torej $\lambda(C_n; 2, 1) \leq 4$ in s tem je naša trditev dokazana. ∎

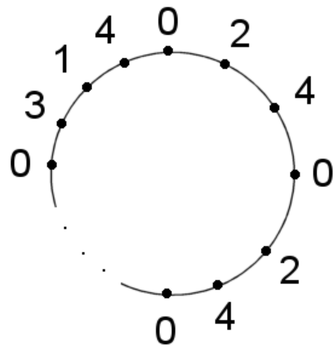
Trditev 7 *Naj bo T drevo z največjo stopnjo $\Delta \geq 1$. Velja*

$$\Delta + 1 \leq \lambda(T; 2, 1) \leq \Delta + 2.$$

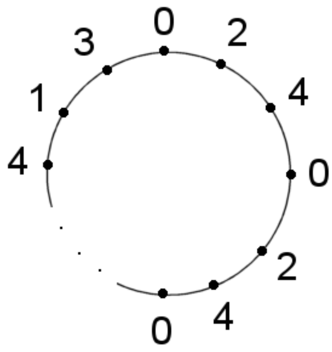
Dokaz. Ker T vsebuje $K_{\Delta,1}$, vemo da velja $\lambda(T; 2, 1) \geq \Delta + 1$. Zgornjo mejo pa dobimo s požrešnim algoritmom. Najprej uredimo točke $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tako, da za vsak $i > 1$ velja v_i je sosednja le z točko eno iz $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. To je možno, saj je T drevo. Pobarvajmo v_1 z barvo nič. Sedaj po vrsti barvamo točke z najmanjšo možno barvo. V i-tem koraku je točka v_i sosednja z eno v_j, $j < i$ in za dva oddaljena od največ $\Delta - 1$ točk. To da skupaj največ $\Delta + 2$ prepovedi, mi pa imamo $\Delta + 3$ barv.



Slika 3: $n \equiv 0 \pmod 3$



Slika 4: $n \equiv 1 \pmod 3$



Slika 5: $n \equiv 2 \pmod 3$

Oglejmo si še eno zanimivo povezavo med razdaljnim barvanjem in iskanjem Hamiltonske poti.

Trditev 8 *Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(1) *Obstaja injekcija $f : V(G) \to [0, |V| - 1]$, da velja $|f(u) - f(v)| \geq 2$ za vsako povezavo $u, v \in E(G)$;*

(2) *G^c ima Hamiltonsko pot.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Naj bo f injekcija kot v (1). Ker je f injektivna obstaja inverz f^{-1}. Uredimo točke $V(G)$: $v_i = f^{-1}(i)$, $0 \leq i \leq |V| - 1$. Potem je v_i sosednja v_{i+1} v G^c za $0 \leq i \leq |V| - 1$. Torej je pot $v_0 v_1 \ldots v_{|V|-1}$ Hamiltonska pot v G^c.

(2) $\Rightarrow$ (1): Naj bo $P = v_0, v_1 \ldots v_{|V|-1}$ Hamiltonska pot v G^c. Definiramo funkcijo $f : V(G) \to [0, |V| - 1]$ $f(v_i) = i$, $0 \leq i \leq |V| - 1$. f je očitno injektivna. Naj bo sedaj $\{t, u\} \subseteq V(G)$. Velja $f(t) = f(v_i) = i$ in $f(u) = f(v_j) = j$ za neka i, j hkrati pa velja še $|i - j| \geq 2$, saj t in u nista povezani v G^c. Torej je f injekcija, ki jo potrebujemo. ∎

Zaključek

Povedali smo kaj je razdaljno barvanje in zakaj je pomembno pri določanju frekvenc oddajnikov. Sedaj točno poznamo $L(2,1)$-barvanja poti, ciklov, dreves in incidenčnih grafov projektivnih ravnin. Nakazali smo pomembno hipotezo Δ^2 in pokazali, da mora biti dejanska meja blizu Δ^2. Ugotovili smo tudi, da je razdaljno barvanje težak problem, torej NP poln. Bralec, ki ga zanima več, si lahko ogleda članek [5]. Tam je natančno obdelano $L(x,1)$-barvanje posebne družine Kneserjevih grafov, ki jih dobimo kot komplement povezavnega grafa na polnem grafu K_n.

Literatura

[1] J. R. Griggs, R. K. Yeh: *Labelling graphs with a condition at distance 2*, SIAM J. Discrete Math. 5 (1992), 586–595.

[2] D. Gonçalves, *On the $L(p,1)$-labeling of graphs*, Discrete Math. and Theor. Comp. Science AE (2005), 81–86.

[3] J. R. Griggs, X. T. Jin: *Real number graph labellings with distance conditions*, izide v SIAM J. Discrete Math.

[4] R. K. Yeh: *Labelling graphs with a condition at distance two*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, SC, 1990.

[5] R.Erman, S. Jurečič, D. Kral, K. Stopar, N. Stopar, *Optimal real number graph labelings of a subfamily of Kneser graphs*, University of Ljubljana and IMFM Preprint Series, 2006