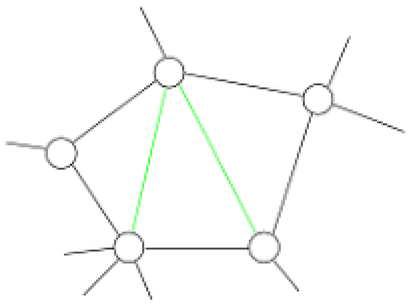
Diagonalni grafi

Zvone Klun

Maj 2007

1 Predstavitev diagonalnih grafov

Graf je *diagonalen* (ang. *chordal*), če ima vsak cikel dolžine 4 ali več diagonalo. Kjer je *diagonala* (ang. *chord*) povezava med dvema vozliščema na ciklu, diagonala sama pa ni del cikla. Primer diagonale je prikazan na sliki 1. Z drugimi besedami, v diagonalnem grafu je največji cikel brez diagonal trikotnik C_3 oz. K_3.



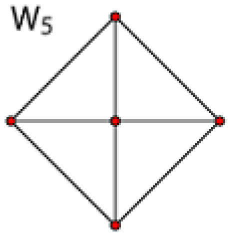
Slika 1: Diagonali v ciklu C_5

Oglejmo si, katere že poznane družine grafov spadajo med diagonalne grafe:

- **poti, drevesa** (ker nimajo ciklov);
- **polni grafi** (ker imajo vse diagonale).

Res je, da so diagonalni grafi na prvi pogled sestavljeni iz trikotnikov. Toda bodimo pozorni, grafi z obliko koles so sicer sestavljeni iz trikotnikov, vendar pa ti grafi ne spadajo med diagonalne grafe. Kot primer si oglejmo kolo W_5 na sliki 2, katerega zunanji cikel C_4 nima diagonale.

Opazili smo, da so diagonalni grafi sestavljeni iz polnih grafov zlepljenih v drevesno strukturo. Diagonalne grafe res gradimo z nekakšnim lepljenjem, in sicer po naslednjem postopku. Naj ima graf G inducirane podgrafe G_1, G_2 in S, tako da velja: $G = G_1 \cup G_2$ in $S = G_1 \cap G_2$ in S je poln graf. Potem rečemo, da smo G *sestavili z lepljenjem* G_1 in G_2 vzdolž S.

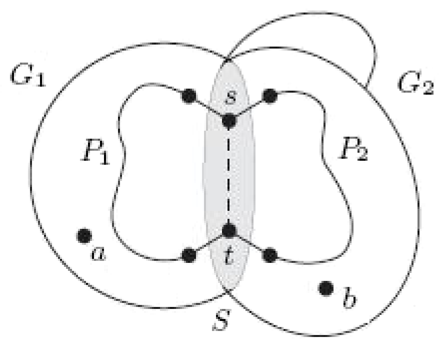


Slika 2: Kolo W_5 ne spada med diagonalne grafe

Lema 1.1 *Graf G je diagonalen natanko tedaj, ko ga lahko rekurzivno sestavimo z lepljenjem vzdolž polnih grafov, začnemo z polnim grafom.*

Dokaz. Če je graf G sestavljen z lepljenjem dveh diagonalnih grafov G_1 in G_2 vzdolž polnega induciranega podgrafa, potem je G ravno tako diagonalen. Pokažimo, da ima v G vsak induciran cikel z štirimi vozlišči ali več diagonalo. Imamo namreč dve možnosti. Ena izmed situacij je, da cikel leži bodisi samo v G_1 bodisi samo v G_2. Tu nimamo težav, saj sta G_1 in G_2 diagonalna. Druga možna situacija je, da cikel leži v G_1 in G_2. V tem primeru ima cikel vsaj dva vozlišča v preseku G_1 in G_2. Toda, ker je presek poln induciran podgraf in tako obstaja povezava med poljubnima vozliščema, lahko cikel razdelimo na dva manjša cikla. Posamezen manjši cikel pa je induciran podgraf v diagonalnem grafu G_1 ali v diagonalnem grafu G_2. S tem smo dokazali, da je vsak graf skonstruiran po zgoraj opisanem postopku diagonalen.

Za dokazovanje v nasprotno smer predpostavimo, da je graf G diagonalen. Sedaj moramo z indukcijo na $|V(G)|$ pokazati, da lahko G skonstruiramo po zgoraj opisanem postopku. Trivialno je preveriti, če je G poln graf. Zato sedaj predpostavimo, da G ni poln graf in $|V(G)| > 1$. Očitno je, da so vsi manjši grafi sestavljeni po opisanem postopku, saj je ena sama točka poln graf K_1. Naj bosta sedaj a in b dve nesosedni vozlišči in naj bo $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ najmanjša množica vozlišč, ki loči a in b. Označimo z C komponento $G - x$, ki vsebuje a. Definirajmo $G_1 := G[V(C) \cup X]$ in $G_2 := G - C$. Torej je G sestavljen z lepljenjem G_1 in G_2 vzdolž $S := G[X]$. Toda G_1 in G_2 sta oba diagonalna, saj sta po indukciji skonstruirana na enak način. Dovolj je pokazati, da je S poln induciran podgraf grafa G. Predpostavimo, da s in t nista sosedni vozlišči v S. Ker je $X = V(S)$ minimalna množica vozlišč, ki loči a in b, imata torej oba s in t sosede v C. Torej v $G_1 - X$ obstaja najkrajša pot P_1 od s do t. Po enakem razmisleku obstaja najkrajša pot P_2 od s do t v $G_2 - X$. Tako smo skonstruirali cikel $P_1 \cup P_2$ dolžine najmanj 4, ki je brez diagonale. Prišli smo v protislovje s predpostavko, da je G diagonalen. Torej sta s in t povezana. Ker sta bila s in t poljubna, sledi, da je S poln induciran podgraf grafa G. ∎



Slika 3: Skica dokaza Leme 1.1

2 Umestitev diagonalnih grafov med popolne grafe

Graf G je *popoln* (ang. *perfect*), če za vsak induciran podgraf H grafa G velja:

$$\chi(H) = \omega(H).$$

Kjer je $\chi(H)$ dobro poznano kromatično število, z $\omega(H)$ pa smo označili moč največje klike v H. Posebej uporabna lastnost popolnih grafov je, da je komplement popolnega grafa tudi popoln graf, ki jo je dokazal *L. Lovász* leta 1972. Zaradi te lastnosti je teorija popolnih grafov prisotna tudi v Linearnem programiranju. Preplet teorije grafov in linearnega programiranja si lahko podrobneje ogledate v monografiji [1].

Med popolne grafe spadajo tudi nekatere že poznane družine grafov:

- **poti:** Največji induciran poln podgraf je K_2 in lahko jih pobarvamo z dvema barvama.
- **drevesa:** Enako kot poti imajo dravesa največji induciran poln podgraf K_2 in kromatično število je 2.
- **polni graf:** Očitno je vsak induciran graf poln podgraf.
- **dvodelni grafi:** Tudi tu je največji induciran poln graf K_2 in po definiciji se jih da obarvati z dvema barvama.
- **grafi povezav dvodelnih grafov:** Posplošitev Kön.igovega izreka [3] nam pove, da je kromatičen indeks dvodelnega grafa $K_{m,n}$ enak maksimalni stopnji oziroma $\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n})$. Kliko v grafu povezav tvori ravno množica tistih povezav v grafu, ki imajo skupno vozlišče. Torej velja: $\omega(L(K_{m,n})) = \Delta(K_{m,n}) = \chi'(K_{m,n}) = \chi(L(K_{m,n}))$.
- **diagonalni grafi:** Dokaz sledi v nadaljevanju.

- **kolesa z lihim številom vozlišč:** Ker imamo liho vozlišč, je zunanji ciklel sode dolžine in ga lahko obarvamo z dvema barvama. Os pa moramo obarvati z novo tretjo barvo. Očitno je največji induciran poln podgraf K_3.

Pokažimo sedaj, da vsak diagonalen graf spada med popolne grafe.

Izrek 2.1 *Vsak diagonalen graf je popoln graf.*

Dokaz. Uporabimo izrek 2.1 skupaj z lemo 1.1. Dobimo torej, da rekurzivni postopek za gradnjo diagonalnih grafov velja tudi za popolne grafe. Torej je vsak graf G sestavljen z lepljenjem popolnih grafov G_1 in G_2 vzdolž polnega grafa S tudi popoln graf. Za dokaz izreka 2.1 moramo pokazati, da za vsak induciran podgraf H, velja $\chi(H) \leq \omega(H)$.

Označimo z $H_1 := H \cap G_1$, $H_2 := H \cap G_2$ in z $T := H \cap S$. Očitno je T poln graf in H sestavljen z lepljenjem H_1 in H_2 vzdolž T. Toda ker je H_1 induciran podgraf popolnega grafa G_1, lahko tudi H_1 pobarvamo z $\omega(H_1)$ barvami. Za H_2 analogno velja $\chi(H_2) = \omega(H_2)$. Ker je H sestavljen iz H_1 in H_2, lahko obarvamo H z $\max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leq \omega(H)$ barvami. Morda je potrebno v enem od H_1 ali H_2 permutirati barve, ker je T barvan dvakrat kot podgraf H_1 in kot podgraf H_2. Pokazali smo, da za vsak induciran podgraf H, velja $\chi(H) \leq \omega(H)$. ■

3 Barvanje diagonalnih grafov

V prejšnjem poglavju smo pokazali, da je vsak diagonalen graf tudi popoln. Torej je kromatično število grafa enako velikosti največje klike. Oglejmo si, kako določimo kromatičen polinom diagonalnega grafa. V ta namen bomo uporabili posebno lastnost diagonalnih grafov.

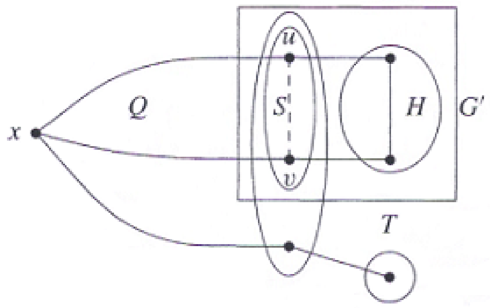
Vozlišče je *enostavno* (ang. *simplical*), če njemu sosednja vozlišča tvorijo kliko. *Zaporedje enostavnega odstranjevanja* (ang. *simplical elimination ordering*) je zaporedje vozlišč $v_1, \ldots, v_n$, ki predstavlja vrstni red odstranjevanja vozlišč iz grafa. Vsako vozlišče v_i v zaporedju enostavnega odstranjevanja mora biti enostavno v podgrafu induciranem z vozlišči $\{v_i, \ldots, v_n\}$.

Lema 3.1 (Voloshin (1982), Farber-Jamison (1986)) *Za vsako vozlišče x v diagonalnem grafu G obstaja enostavno vozlišče iz množice najbolj oddaljenih vozlišč od x v G.*

Dokaz. Uporabimo indukcijo po številu enostavnih vozlišč $n(G)$ v grafu G. V osnovnem primeru pri $n(G) = 1$ imamo graf K_1, ki ima eno samo vozlišče in to je enostavno. Za indukcijski korak pri $n(G) \geq 2$ pa ločimo dva primera.

V prvem primeru je x sosed vsem ostalim vozliščem v G, nadaljujemo z indukcijsko predpostavko na grafu $G - x$. Vsako enostavno vozlišče y v $G - x$ je enostavno tudi v G, saj je x sosed vseh vozlišč $N(y) \cup \{y\}$.

Poglejmo primer, ko x ni sosed vsem ostalim vozliščem v G. Označimo z T množico najbolj oddaljenih vozlišč od x v G in naj bo H komponenta $G[T]$. Naj bo S množica sosednjih vozlišč množice $V(H)$, S leži v $G - T$. Z Q pa označimo komponento $G - S$, ki vsebuje x.



Slika 4: Skica k dokazu Leme 3.1

Pokažimo najprej, da je S klika. Vsako vozlišče v S ima soseda v $V(H)$ in v Q. Torej za poljubna različna vozlišča u in v iz S velja, da je unija poti P_1 in P_2 cikel dolžine najmanj 4. Kjer z P_1 označimo najkrajšo pot od H čez u do Q in analogno P_2 označuje najkrajšo pot od H čez v do Q. Ker je G diagonalen in ker med $V(H)$ in $V(Q)$ ni nobene povezave, je torej diagonala našega cikla povezava uv. Ker smo vozlišči u in v izbrali poljubno, je S klika.

Če je v $V(H)$ eno samo vozlišče z, je z tudi enostaven, saj sosedna vozlišča z tvorijo kliko S. Sicer označimo z $G' = G[S \cup V(H)]$. Graf G' ne vsebuje x, zato je G' manjši kot G. Sedaj uporabimo indukcijsko predpostavko na G' in vozliščem u iz S. Postopek ponavljamo, dokler nam v H ne ostane eno samo vozlišče z, ki je enostavno v G'. Ker velja $N_G(z) \subseteq V(G')$, je z enostaven tudi v G. Poiskali smo torej enostavno vozlišče z iz množice najbolj oddaljenih vozlišč od x v G. ∎

Lema 3.1 nam zagotovi, da ima vsak diagonalen graf vsaj eno enostavno vozlišče. Pokažimo sedaj, da ima vsak diagonalen graf zaporedje enostavnega odstranjevanja.

Izrek 3.2 (Dirac) *Enostaven graf ima zaporedje enostavnega odstranjevanja natanko tedaj, ko je graf diagonalen.*

Dokaz. Graf G naj ima zaporedje enostavnega odstranjevanja in cikel C dolžine najmanj 4. Z v označimo vozlišče, kjer se začne zaporedje enostavnega odstranjevanja na C. Sosedje v tvorijo kliko. Klika vsebuje tudi najmanj dva vozlišča iz C, ki sta tako povezana z diagonalo. Graf G torej ne vsebuje ciklov dolžine 4 ali več, ki nimajo diagonale.

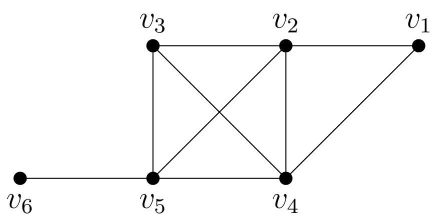
Pokažimo, da velja implikacija tudi v nasprotno smer. Uporabimo Lemo 3.1, torej ima vsak diagonalen graf enostavno vozlišče. Ker je vsak induciran podgraf diagonalnega grafa diagonalen, lahko uporabimo indukcijo po $n(G)$ in tako dobimo zaporedje enostavnega odstranjevanja. ∎

Primer 3.3 *Kako iz zaporedja enostavnega odstranjevanja konstruirati kromatičen polinom.*

Naj ima graf G zaporedje enostavnega odstranjevanja $v_1, \ldots, v_n$. Predpostavimo, da je množica vozlišč $P_i := \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ že obarvana. Torej lahko vozlišče v_i pobarvamo na $k - d(v_i)$ načinov, kjer je $d(v_i) := |N(v_i) \cap P_i|$. Faktor $k - d(v_i)$ torej ni odvisen od tega, kako smo obarvali P_i, saj sosedje vozlišča v_i v induciranem podgrafu $G[P_i]$ tvorijo kliko velikosti $d(v_i)$. Ker premislek velja za vsak v_i iz zaporedja enostavnega odstranjevanja grafa G, je kromatičen polinom grafa G enak produktu linearnih faktorjev oblike $k - d(v_i)$. Po izreku 3.2 je graf diagonalen natanko tedaj, ko ima zaporedje enostavnega odstranjevanja. Torej je kromatičen polinom diagonalnega grafa G oblike:

$$\chi(G, k) = \prod_{k=1}^{n} [k - d(v_i)] .$$

Za graf G iz slike 5 je $v_1, \ldots, v_6$ zaporedje enostavnega odstranjevanja. Torej velja: $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 1$, $d(v_5) = 1$, $d(v_6) = 0$. Kromatičen polinom grafa G je tako $\chi(G, k) = (k-2)(k-3)(k-2)(k-1)(k-1)k$.



Slika 5: Zaporedje enostavnega odstranjevanja na grafu

Literatura

[1] D. B. West: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[2] R. Diestel: Graph Theory, Springer-Verlang, New York, 2000.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_graph