# Latinski kvadrat

22. maj 2007

## 1 Definicija latinskega kvadrata $n \times n$

**Latinski kvadrat reda** $n$ je

- $n \times n$ tabela (kvadratna shema oziroma matrika), napolnjena z $n$ različnimi znaki, tako da se vsak znak pojavi le enkrat v vsaki vrstici oziroma enkrat v vsakem stolpcu.

- četverec $(R, C, S; L)$, kjer so $R, C$ in $S$ množice števil in je $L$ preslikava $L : R \times C \to S$, tako da ima za vsak $i \in R$ in $x \in S$ enačba $L(i, j) = x$ za edino rešitev $j \in C$. Prav tako pa velja, da ima ta enačba ob vsakih $j \in C, x \in S$ enolično rešitev $i \in R$. Katerakoli od teh spremenljivk je torej enolično določena z ostalima dvema, tako da skupaj tvorijo $L(i, j) = x$. Elementi iz $R$ se imenujejo *vrstice*, elemente iz $C$ *stolpci*, elementi iz $S$ pa *simboli* oziroma *vnosi.* Latinski kvadrat je običajno opisan kot $n \times n$ razporeditev pri kateri celica v vrstici $i$ in stolpcu $j$ vsebuje simbol $L(i, j)$.

Primera latinskih kvadratov reda 4 in 5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e |
| b | a | e | c | d |
| c | d | b | e | a |
| d | e | a | b | c |
| e | c | d | a | b |

Slika 1: Zgleda latinskega kvadrata

**Zapis:** Če, tako kot v definiciji, vsak element latinskega kvadrata zapišemo kot trojico $(r, c, s)$, kjer je $r$ vrstica, $c$ stolpec in $s$ znak, dobimo množico $n^2$ trojk, ki se imenuje *zapis kvadrata v obliki pravokotne vrste.* Tak zapis zgornjega prvega latinskega kvadrata je: $\{(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 4, 4)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 4, 1)$, $(4, 1, 4)$, $(4, 2, 1)$, $(4, 3, 3)$, $(4, 4, 2)\}$, kjer, na primer, trojka (3,4,1) pomeni, da se v 3. vrstici in 4. stolpcu nahaja element 1. Latinski kvadrat lahko tedaj ponovno definiramo kot množico $n^2$ trojk oblike $(r, c, s)$, za katere velja $1 \le r, c, s \le n$, in so med seboj različni vsi pari $(r, c)$, $(c, s)$ ter $(r, s)$.

Lahko pa ga zapišemo tudi kot *vrstično polje.*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| C | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| E | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |

Slika 2: $3 \times 3$ vrstično polje

**Uporaba:** V začetku so ga uporabljali pri poskusih v agronomiji, sedaj pa je latinski kvadrat pogosto uporabljen v eksperimentiranju, saj lahko z njegovo pomočjo določimo zaporedje poskusov, organiziramo srečanja,itd

## 2 Konstrukcija latinskih kvadratov

Latinski kvadrat je *skrčen*, če sta tako prva vrstica kot prvi stolpec naravno urejena. Oba latinska kvadrata na sliki 1 sta skrčena, saj sta v vsakem od njiju prva vrstica ter stolpec urejena (pri prvem 1, 2, 3, pri drugem pa a, b, c, d). Vsak latinski kvadrat lahko s permutacijami prevedemo na skrčeno obliko.

**Delni latinski kvadrat reda $n$:** dobimo tako, da zapolnimo nekatere celice $n \times n$ polja s števili $1, \ldots, n$ tako, da se vsako pojavi kvečjemu enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.

**Vprašanje:** Kdaj lahko delni latinski kvadrat dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda? Primer (za $n = 5$):

- Zapolnjene imamo štiri vrstice. Delni latinski kvadrat lahko dopolnimo do latinskega kvadrata na en sam način.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 5 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |
| 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| | | | | |

- Zapolnjeno imamo le eno vrstico. Delni latinski kvadrat najlažje dopolnimo do latinskega kvadrata tako, da vrstico ciklično premikamo v levo. Takšen latinski kvadrat imenujemo **ciklični latinski kvadrat.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |

Slika 3: Ciklični latinski kvadrat

- Delni latinski kvadrat ima zapolnjenih le $n = 5$ celic, a ga ne moremo dopolniti do latinskega kvadrata.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | | | | 5 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | | | | 2 |

Slika 4: Nobenega od latinskih kvadratov ne moremo dopolniti do polnega latinskega kvadrata

**Vprašanje:** Ali lahko delni latinski kvadrat, ki ima napolnjenih manj kot $n$ celic, vedno dopolnimo do latinskega kvadrata?

To je problem, ki ga je leta 1960 zastavil Trevor Evans. Da je to vedno res, je leta 1961 dokazal Bohdan Smetniuk.

**Dokaz:** Če permutiramo vrstice, dobimo vrstično polje nekega drugega latinskega kvadrata.
$R \to E \to C \to R$
$3 \times 3$ vrstično polje:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| C | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| E | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |

Ta kvadrat sedaj izgleda takole:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |

Slika 5: S postopkom $R \to E \to C \to R$ pridobljen nov latinski kvadrat

■

Delni latinski kvadrat, ki ima popolnoma zapolnjenih prvih $r$ vrstic, ostale celice pa so prazne, imenujemo $(r \times n)$ *latinski pravokotnik.*

**Lema 2.1** *Vsak $(r \times n)$ latinski pravokotnik, $r < n$, lahko razširimo na $((r+1) \times n)$ latinski pravokotnik in postopoma do latinskega kvadrata.*

V dokazu nam bo v pomoč:

**Izrek 2.2 (Hall)** *V dvodelnem grafu obstaja popolno prirejanje natanko tedaj, ko za vsak $C \subseteq X$ velja $\|C\| \leq \|G(C)\|$, kjer $\|C\|$ pomeni moč množice $C$, oziroma koliko elementov ta množica vsebuje.*

**Dokaz:** Uporabimo Hallov izrek. Naj bo $A$ množica števil, ki se ne pojavijo v $j$-tem stolpcu. $(r+1)$. vrstici odgovarja sistem različnih predstavnikov iz množic $A_1, \ldots, A_n$. Da dokažemo lemo, moramo dokazati Hallov pogoj. Vsaka množica $A_j$ ima $n-r$ elementov in vsak element se nahaja v natanko $n-r$ množicah $A_j$, saj se $r$ krat pojavi v prvih $r$ vrsticah. Poljubnih $m$ množic vsebuje $m(n-r)$ elementov in zato vsaj $m$ različnih, kar pa zadošča Hallovemu pogoju. ∎

**Lema 2.3** *Naj bo $P$ delni latinski kvadrat reda $n$, ki ima napolnjenih kvečjemu $n-1$ celic s kvečjemu $\frac{n}{2}$ različnimi elementi. Potem lahko $P$ dopolnimo do latinskega kvadrata reda $n$.*

**Dokaz:** Problem prevedemo na enostavnejšo obliko. S konjugiranjem lahko pogoj "največ $\frac{n}{2}$ različnih elementov" spremenimo v pogoj "največ $\frac{n}{2}$ različnih vrstic". Predpostavimo lahko, da so zapolnjene zgornje vrstice. Naj bodo te vrstice $1, 2, \ldots, r$ s $f_i$ zapolnjenimi celicami v vrstici $i$, kjer je $r < \frac{n}{2}$ in

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n-1.$$

S permutacijo vrstic lahko predpostavimo, da je $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_r$. Postopoma zapolnimo vrstice $1, 2, \ldots, r$, da dobimo $(r \times n)$ latinski pravokotnik, ki ga lahko po prejšnji lemi dopolnimo do latinskega kvadrata. ∎

**Izrek 2.4** *Delni latinski kvadrat, ki ima napolnjenih največ $n-1$ celic, lahko dopolnimo do latinskega kvadrata istega reda.*

**Dokaz:** Dokazujemo z indukcijo po $n$. Ugotovimo, da je za $n \leq 2$ to trivialno. Sedaj recimo, da je P delni latinski kvadrat reda $n+1$, ki ima zapolnjenih največ $n$ celic. Po zadnji lemi predpostavimo, da imamo $\frac{n+1}{2}$ različnih elementov ter da obstaja element, recimo mu $n+1$, ki se pojavi le enkrat.
Kot prej predspostavimo, da je število delno zapolnjenih vrstic $r$: $s_1, \ldots, s_r$ s $f_1, \ldots f_r$ zapolnjenimi celicami.$\sum_{i=1}^{r} f_i \leq n$. Recimo, da se element $n+1$ nahaja v vrstici $s_1$. Premaknili bomo vse napolnjene celice nad diagonalo, razen celico z elementom $n+1$, ki bo premaknjena na diagonalo. Na prvem koraku bomo premaknili $s_1$ na $n+2-f_1$. S permutiranjem stolpcev premaknemo nasprotne celice na levo, tako da je element $n+1$ zadnji v svoji vrstici. Na drugem koraku prestavimo $s_2$ na $n+1-f_1-f_2$ in napolnjene celice čim bolj levo. Na i-tem koraku prestavimo$s_i$ na $n+1-f_1-f_2-\ldots-f_i$ in napolnjene celice čim bolj levo.

Glavna ideja dokaza: zbrišemo element $n+1$ in zadnjo vrstico ter zadnji stolpec. Ostal nam je delni latinski kvadrat reda $n$, ki ga lahko po indukcijski predpostavki dopolnimo do latinskega kvadrata reda $n$. Ta kvadrat odrežemo, tako da ohranimo celice nad in na diagonali

$(L)$, izpraznimo pa spodnji del in dodamo vrstico $(L')$. Dobimo na pol napolnjen $((n+1) \times n$ pravokotnik. Če lahko spodnji del pravokotnika napolnimo z elemeti $1, 2, \ldots, n$, tako da obdržimo delni latinski kvadrat reda $n+1$, potem lahko diagonalo napolnimo z elementom $n+1$. Nato dodamo zadnji stolpec (sledi iz prve leme) in dokaz bo končan.
Pri napolnjevanju vrstic si pomagamo z napolnjenim latinskim kvadratom reda $n$.
Naj bo $k \geq 3$ in predpostavimo, da smo vrstice $3, \ldots, k-1$ napolnili z upoštevanjem naslednjih pogojev:

- $k-2$ elementov stolpca $j$ v $L'$ (različnih od $n+1$ spadajo med prve $k-1$ elemente stolpca $j$ v $L$, za $n-k+3 \leq j \leq n$. Ostane nam natanko en manjkajoč element za vsak stolpec.
- Ti elementi $x_j$ so različni.

Nadaljujemo z vrstico $k$. Naj bodo $y_{n-k+2}, \ldots, y_n$ elementi vrstice $k$. Element $y_{n-k+2}$ je manjkajoči element stolpca $n-k+2$. V prvem poskusu napolnimo vrstico $k$ z elementi $y_{n-k+3}, \ldots, y_n$. $x_j \neq y_j$ za vsak $y_j$ iz $L$. To bo delovalo razen v primeru $x_j = y_{n-k+2}$ za nekatere $j \geq n-k+3$, ker ne zadoščajo pogojem manjkajočih elementov. V tem primeru zamenjamo $x_j = y_s$. Končali smo, razen če $x_l = y_j$ za nek $l \neq j$. Potem zamenjamo $x_l$ in $y_j$ in to ponavljamo, dokler ne zadoščajo vsem pogojem. Tako zapolnimo vse vrstice do $n$. Zadnjo vrstico $n+1$ zapolnimo z manjkajočimi elementi in dokaz bo končan. ∎

**Izrek 2.5** *Naj bo $A$ latinski kvadrat reda $n$ ter naj bo $B$ mreža dimenzije $n+1 \times n+1$, katere element na $(i,j)$-tem mestu je enak $(i,j)$-tem mestu v $A$ za $i, j \geq 1, i+j \leq n$, ki ima simbol $\alpha$ na glavni kodiagonali, mesta pod to diagonalo pa so prazna. $B$ tedaj lahko dopolnimo do latinskega kvadrata reda $n+1$.*

**Dokaz:** Naj bo C mreža dimenzije $n \times n$, narejena z odstranitvijo zadnje vrstice ter stolpca $B$-ja. V našem primeru torej izgleda tako:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 5 | 1 | 2 |
| 2 | 5 | 1 | 3 | 4 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\alpha$ |
| 4 | 3 | 5 | 1 | $\alpha$ | |
| 2 | 5 | 1 | $\alpha$ | | |
| 5 | 1 | $\alpha$ | | | |
| 3 | $\alpha$ | | | | |
| $\alpha$ | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 5 | 1 | $\alpha$ |
| 2 | 5 | 1 | $\alpha$ | |
| 5 | 1 | $\alpha$ | | |
| 3 | $\alpha$ | | | |

Slika 6: Primer razširitve latinskega kvadrata reda $n$ na red $n+1$

Algoritem, ki napolni prazna polja $C$-ja, napišemo kot polnjenje polj po vrsticah z omejitvijo, da bomo po prvih $r$ vrsticah imeli latinski pravokotnik dimenzije $r \times n$ z $n+1$ simboli $1, 2, \ldots, n, \alpha$, tako da $j$-ti stolpec vsebuje enake elemente v podobnem vrstnem redu, kot so bili v prvih $r$ vrsticah $A$-ja, razen "manjkajočega" v vsakem stolpcu, ki vsebuje $x$, tako da je med sabo različnih vseh $r-1$ simbolov.
Za $r = 1$ ter $r = 2$ je to trivialno. Predpostavimo zdaj, da to velja za nek $r, 2 \leq r < n$ ter da so "manjkajoči" simboli sedaj

$$x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \ldots, x_n.$$

Za dopolnitev $(r+1)$-te vrstice naredimo takole:
Naj bodo zadnji $r$ simbolov v $(r+1)$-ti vrstici $A$-ja (odstranjeni med konstrukcijo $C$-ja)

$$y_{n-r+1}, y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \ldots, y_n.$$

Tu je $y_{n-r+1}$ simbol, nadomeščen z $\alpha$ ter bo torej novi manjkajoči element v tem stolpcu. Preverimo vstavljanje $y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \ldots, y_n$ v $r+1$-to vrstico. Ugotovimo, da morajo biti $y_{n-r+1}, x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \ldots, x_n$ (naši novi manjkajoči simboli) različni. Če niso, uporabimo zaporedje

$$y_{n-r+1} = x_{k_1}$$

$$y_{k_1}$$

$$\vdots$$

$$y_{k_{m-1}} = x_{k_m},$$

ki ga razširimo, kolikor se da, s tem da $y_{k_m}$ ne sme biti enak nobenemu od $x_j$-em.Vrstico $r+1$ sedaj napolnimo z $y_{n-r+2}, y_{n-r+3}, \ldots, y_n$, kjer elemente $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_n}$ izpustimo in vsakega od njih zamenjamo z $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$. Preveriti moramo še, da $r+1$-ta vrstica res vsebuje različna števila. Novi manjkajoči simbol bo sedaj $y_{n-r+1}$ ter $x_{n-r+2}, x_{n-r+3}, \ldots, x_n$, pri čemer $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$ izpustimo in zamenjamo z $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_n}$. Preverimo še, da so med seboj različni.
Ko napolnimo prazne celice $C$-ja (ter s tem tudi $B$-ja), dopolnimo $B$-ju še zadnjo vrstico z manjkajočim simbolom vsakega stolpca do $r$-tega elementa. Po prejnji lemi pa smo s tem enolično določili latinski kvadrat reda $n+1$. ∎

**Ekvivalenčni razredi latinskih kvadratov:** Veliko operacij na latinskem kvadratu nam da nov latinski kvadrat. Najpreprostejši primer tega je, da ga obrnemo.
Ostali načini pridobivanja novih latinskih kvadratov pa so, da permutiramo stolpce, vrstice in/ali znake.
Operacija $R_{i,j}(A)$ zamenja $i$-to in $j$-to vrstico, $C_{k,,l}(A)$ zamenja $k$-ti in $l$-ti stolpec, pri $R_{a,b}(A)$ pa zamenjamo znaka $a$ in $b$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |

Slika 7: Zgleda permutacij vrstic in stolpcev

Ti latinski kvadrati so si v nekem smislu enaki. Latinski kvadrat je lahko informacijska tabela, ki jo lahko pokažemo na več načinov.

**Število latinskih kvadratov:** (Vsaj trenutno) še ne poznamo nobene lahko izračunljive formule za izračun števila latinskih kvadratov velikosti $n \times n$. Vemo pa, da je to enako
$n!(n-1)!$ krat število skrčenih latinskih kvadratov.
Število latinskih kvadratov reda $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ je $1, 2, 12, 576, 161280$, 812851200, 61479419904000, 108776032459082956800, ...

# 3 Ostale variante ali verzije latinskih kvadratov

## 3.1 Sudoku

Ena od različic latinskega kvadrata, ki je sedaj zelo popularna, se imenuje *sudoku.* Pri tej verziji imamo latinski kvadrat reda $9 \times 9$, za katerega poleg ostalih pravil za latinske kvadrate velja še, da se morajo vsa števila pojaviti v vsakem od 9 kvadratov velikosti $3 \times 3$, ki sestavljajo sudoku. Število postavitev je 6670903752021072936960, od tega jih je 5472730538 bistveno različnih.

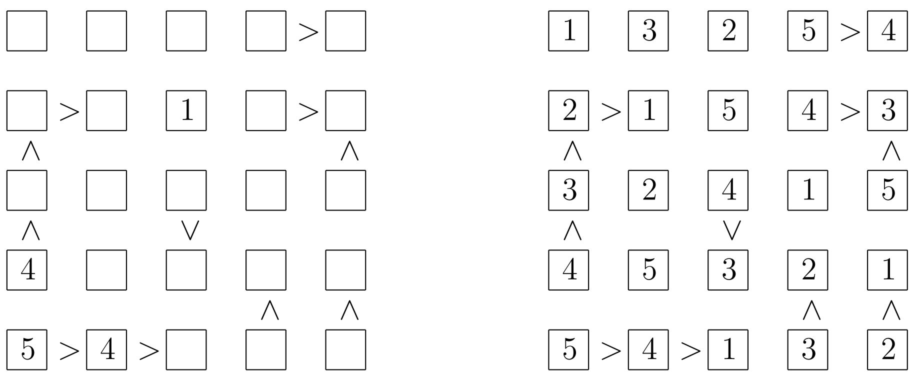
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 7 | | 3 | | 9 | 1 |
| | 8 | 7 | 2 | | 1 | | 4 | 5 |
| 1 | 9 | | 6 | | | | | 7 |
| | 3 | | | | | 4 | 2 | 9 |
| 7 | | 1 | | 2 | | | | 8 |
| 4 | | | | 8 | | 7 | | |
| 5 | | | 4 | 1 | | | | |
| | | 8 | | 6 | | 5 | 7 | 3 |
| | | | | 3 | 7 | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | | | | 7 | 1 | | 5 | |
| | 3 | | | | 8 | 9 | | 4 |
| | | | | | 4 | | | |
| 6 | | 3 | | | 9 | | | 2 |
| | | 4 | | | | | | 5 |
| | 2 | 5 | 7 | 9 | | 6 | | |
| 7 | 8 | | 2 | | | | | |
| | | | | 4 | | | | 9 |

Slika 8: Dva primera sudokuja

## 3.2 Futoshiki

Futoshiki je igra, pri kateri rešujemo delno izpolnjen latinski kvadrat reda 5. Že rešenim poljem so dodane tudi oznake $<$ in $>$. Za raziko od sudokuja futoshikiji niso enolično rešljivi. Vsak petek izhaja v britanskem časniku Guardia, vendar zaradi majhnega števila rešitev (56) nikdar ni dosegla priljubljenosti Sudokuja.



Slika 9: Primer Futoshikija ter ena od njegovih rešitev

## 3.3 Magični kvadrat

Magični kvadrat reda $n$ je razporeditev $n^2$ običajno različnih stevil v kvadratno mrežo, tako da je vsota katerekoli vrstice, stolpca ali diagonale venomer enaka nekemu $k$-ju.
**Normalni magični kvadrat** vsebuje številke od 1 do $n^2$. Normalni magični kvadrati so razen reda $n = 2$ trivialne oblike.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 5 | 9 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Slika 10: Magični kvadrat reda 3

## 3.4 Grško-latinski kvadrat

**Grško-latinski** oziroma **Eulerjev kvadrat** reda $n$ z množicama $S$ in $T$, od katerih ima vsaka po $n$ simbolov, je $n \times n$ porazdelitev celic, od katerih vsaka vsebuje urejen par $(s, t)$, $s \in S, t \in T$, tako da

- vsak stolpec in vsaka vrstica vsebuje natanko eno pojavitev $s \in S$ in natanko eno pojavitev $t \in T$
- ne obstajata dve celici z enakim urejenim parom simbolov.

Množici simbolov $S$ in $T$ sta pogosto $S = \{A, B, C, \ldots\}$− velike latinske črke ter $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ - male grške črke oziroma prvih $n$ simbolov vsake od njiju.
Ta predpis nam tako za grške kot tudi za latinske znake ustvari latinski kvadrat.

| | | |
|---|---|---|
| A$\gamma$ | B $\beta$ | C $\alpha$ |
| B$\alpha$ | C$\beta$ | A$\gamma$ |
| C$\beta$ | A$\alpha$ | B$\gamma$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A$\alpha$ | B$\gamma$ | C$\delta$ | D$\beta$ |
| B$\beta$ | A$\delta$ | D$\gamma$ | C$\alpha$ |
| C$\alpha$ | D$\gamma$ | A$\beta$ | B$\delta$ |
| D$\delta$ | C$\beta$ | B$\alpha$ | A$\gamma$ |

Slika 11: Grško-latinska kvadrata redov 3 in 4

# Literatura


[1] $http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html$

[2] $http://en.wikipedia.org/wiki/Latin\_square$

[3] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press (1998).

[4] M. Hall: *Combinatorial theory*, Wiley Interscience (1986).