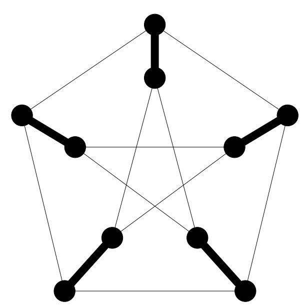
Prirejanja

Rok Okorn

22. maj 2007

1 Uvod

Naj predstavimo nekaj osnovnih pojmov, ki jih bomo potrebovali za nadaljno razlago snovi. Naj bo M množica povezav grafa G. M je *prirejanje*, če nobeni dve povezavi iz M nimata skupnega krajišča. Množica točk U grafa G je *pokrita* z M, če je vsaka točka iz U krajišče kakšni povezavi iz M. Rečemo, da M *pokriva* U. Točka je *nepokrita*, če ni krajišče nobeni povezavi iz M. Nadalje je k*-faktor* vpet k-regularen podgraf grafa G. Torej je podgraf H v grafu G 1-faktor oziroma *popolno prirejanje* natanko tedaj, ko $E(H)$ pokriva $V(G)$.
Sedaj, ko smo predstavili osnovne pojme, bi radi karakterizirali grafe, ki imajo 1-faktor. To bo tudi naš glavni cilj.



Slika 1: 1-faktor v Petersenovem grafu

2 Prirejanja v dvodelnih grafih

Naj bo G dvodelen graf s particijo $V(G) = A \cup B$. V tem razdelku bomo pokazali kako poiskati prirejanje v G s čimvečjim številom povezav.

Naj bo M poljubno prirejanje v grafu G. Pot, ki se začne v nepokriti točki iz A in vsebuje izmenično povezave iz $E \setminus M$ in M, se imenuje *alternirajoča pot*. Alternirajoči poti, ki se konča v nepokriti točki iz B, pravimo *povečujoča pot.*

Opomba: Naj bo P povečujoča pot. Potem je simetrična razlika $P \oplus M$ prirejanja M in povečujoče poti P večje prirejanje.

Alternirajoče poti imajo pomembno vlogo v iskanju večjih prirejanj. Še več, če začnemo s poljubnim prirejanjem in uporabljamo povečujoče poti za povečevanje prirejanja dokler ni več nobene poti, dobimo optimalno prirejanje, to je prirejanje z največjim možnim številom povezav. Naj bo $U \subseteq V(G)$ množica točk. U je *pokritje* množice povezav $E(G)$, če ima vsaka povezava iz $E(G)$ krajišče v U.

Naš prvi izrek povezuje moč prirejanja v grafu G z močjo pokritja.

Izrek 2.1 (König 1931)**.** *Moč največjega prirejanja v dvodelnem grafu je enako moči najmanjšega pokritja.*

Dokaz: Očitno je, da je moč pokritja vedno večja od moči prirejanja. Torej moramo pokazati samo še, da velja tudi obratno. Naj bo M maksimalno prirejanje. Iz vsake povezave izberemo krajišče ter tako ustvarimo množico $U \subseteq V(G)$ z naslednjo lastnostjo: Naj bo $ab \in M$, $a \in A$, $b \in B$. Če obstaja alternirajoča pot, ki se konča v b, potem naj bo $b \in U$. Sicer naj bo $a \in U$. Radi bi videli, da je U pokritje. Naj bo $ab \in E(G)$ poljubna povezava v G. Pokažimo, da ali a ali b leži v U. Če je $ab \in M$, je to res po definiciji množice U. Torej predpostavimo, da povezava $ab \notin M$. Ker je M maksimalno prirejanje, obstaja povezava $a'b' \in M$ taka, da je ali $a' = a$ ali $b' = b$. Če je $b' = b$ in a ni pokrita, potem je povezava ab alternirajoča pot in je zato $b \in U$. Torej lahko predpostavimo, da je $a' = a$. Če $a' \notin U$, potem je $b' \in U$. Zato obstaja alternirajoča pot P, ki se konča v b'. Obstaja pa tudi alternirajoča pot Q, ki se konča v b: Q je pot P do točke b, če je $b \in P$ ali pa je $Q = Pab$, ki pa sta obe povečujoči poti. To pa nasprotuje predpostavki, da je M maksimalno prirejanje. Torej mora biti točka b pokrita in v U kot krajišče povezave v prirejanju M. $\square$

Izrek 2.2 (Hall 1935)**.** *Dvodelen graf* $G = (A \cup B, E)$ *ima prirejanje, ki pokriva* A*, natanko tedaj, ko velja* $|N(S)| \geq |S|$ *za vsak* $S \subseteq A$*.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Za vsak $S \subseteq A$ imamo $|N(S)| \geq |S|$ sosedov, saj gre iz vsake točke vsaj ena povezava, ki je v prirejanju.
($\Leftarrow$) Recimo, da G nima prirejanja, ki pokrije A. Torej ima po izreku 2.1 minimalno pokritje manj kot $|A|$ točk. Naj bo pokritje $C = U \cup V$, kjer je $U \subset A$, $V \subseteq B$. Torej je $|U| + |V| = |C| < |A|$. Ker je U pokritje grafa G, med $A \setminus U$ in $B \setminus V$ ni povezav v grafu G. Od tod je $|N(A \setminus U)| \leq |V| < |A \setminus U|$, saj je $|V| < |A| - |U| = |A \setminus U|$. Torej Hallov pogoj ne velja za $S = A \setminus U$, kar pa je protislovje s predpostavko. $\square$

Posledica 2.3. *Naj bo $|N(S)| \geq |S| - d$ za vsak $S \subseteq A$ in d izbrano fiksno število. Potem G vsebuje prirejanje moči $|A| - d$.*

Dokaz: Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G tako, da dodamo d novih točk množico B in jih povežemo z vsemi točkami iz A. Tako za vsak $S \subseteq A$ velja: $|N'(S)| \geq |S| - d + d = |S|$. Torej ima G' prirejanje moči $|A|$. Od tod sledi, da ima G prirejanje moči $|A| - d$. $\square$

Posledica 2.4. *Naj bo G dvodelen k-regularen graf. Potem ima G popolno prirejanje.*

Dokaz: Ker je G k-regularen, je $|N(S)| \geq |S|$ za vsak $S \subseteq A$. Velja tudi $k \cdot |A| = |E| = k \cdot |B|$. Od tod pa sledi, da ima G popolno prirejanje. $\square$

Posledica 2.5. *Naj bo G dvodelen k-regularen graf. Potem ima G k disjunktnih popolnih prirejanj.*

Dokaz: Ker je G k-regularen ima po prejšnji posledici popolno prirejanje M_1. Nato poglejmo graf $G - M_1$. Ta graf je očitno $(k-1)$-regularen in tako ima graf G po indukciji k disjunktnih popolnih prirejanj, saj se nobena povezava ne more ponoviti. $\square$

Posledica 2.6. *Vsak $2k$-regularen graf G ima 2-faktor.*

Dokaz: Naj bo G $2k$-regularen graf. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je G povezan. Ker je vsaka točka sode stopnje, ima G Eulerjev obhod $v_0 e_0 \dots e_n v_{n+1}$, pri čemer je $v_0 = v_{n+1}$. Tvorimo graf G' tako, da vsako točko $v \in V(G)$ zamenjamo s parom (v^-, v^+) in vsako povezavo $e_i = v_i v_{i+1}$ zamenjamo z usmerjeno povezavo $v_i^+ v_{i+1}^-$. Tako dobimo k-regularen dvodelen graf G'. Graf G' vsebuje 1-faktor, ki nam v G inducira 2-faktor. $\square$

Opomba: Iz dokaza je razvidno, da ni potrebe, da bi moral biti graf G dvodelen.

3 Prirejanja v splošnih grafih

Naj bo dan graf G. S C_G označimo množico vseh njegovih komponent, $q(G)$ pa naj bo število lihih komponent, torej komponent, ki imajo liho število točk. Če ima graf G popolno prirejanje, potem hitro vidimo, da velja *Tutteov pogoj*:

$$q(G - S) \leq |S| \text{ za vsako } S \subseteq V(G), \tag{1}$$

saj bo iz vsake lihe komponente grafa $G - S$ vsaj ena povezava iz popolnega prirejanja imela eno krajišče v S.

Pokažimo sedaj, da to ni le potreben pogoj za obstoj popolnega prirejanja, pač pa tudi zadosten.

Izrek 3.1 (Tutte 1947)**.** *Graf G ima 1-faktor natanko tedaj, ko velja Tutteov pogoj.*

Dokaz: Vemo že, da če ima graf popolno prirejanje, velja tudi Tutteov pogoj. Implikacijo v drugo smer bomo pokazali s protislovjem. Naj bo G graf brez popolnega prirejanja. Torej moramo poiskati tako množico $S \subseteq V(G)$, ki ne ustreza Tutteovemu pogoju.

Lahko predpostavimo, da je graf G po povezavah največji graf, ki nima popolnega prirejanja. Naj bo graf G' dobljen iz grafa G z dodajanjem povezav, hkrati pa naj bo $S \subseteq V(G)$ množica, ki ne zadostuje Tutteovemu pogoju za graf G'. Potem S ne zadostuje niti Tutteovemu pogoju za graf G, saj je vsaka liha komponenta grafa $G' - S$ unija komponent grafa $G - S$, ena od teh pa je gotovo spet liha.

Sedaj pa nas zanima, kako graf G sploh izgleda. Vemo, da vsebuje množico S, ki ne zadošča Tutteovemu pogoju, hkrati pa je po povezavah največji graf, ki nima popolnega prirejanja. Zato velja,

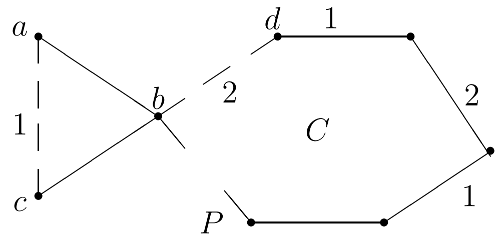
($*$) *da so vse komponente grafa $G - S$ polni grafi in vsaka točka $s \in S$ je povezana z vsako točko grafa $G - \{s\}$.*

Poglejmo še drugače. Če množica $S \subseteq V(G)$ zadošča ($*$), potem bodisi S bodisi $\emptyset$ ne zadošča Tutteovemu pogoju. Recimo, da S zadošča Tutteovemu pogoju. Potem lahko združimo lihe komponente grafa $G - S$ disjunktno z S in v parih povežemo preostale točke. Če pa je $|V(G)|$ liha, potem $\emptyset$ ne zadošča Tutteovemu pogoju.

Torej je dovolj pokazati, da ima graf G množico točk S, ki zadošča ($*$). Naj bo S množica točk, ki so povezane z vsako drugo točko. Če tak S ne zadošča ($*$), potem v neki komponenti grafa $G - S$ obstajata nepovezani točki a in a'. Naj bodo a, b in c prve tri točke na najkrajši poti $a - a'$ v tej komponenti. Potem velja $ab, bc \in E(G)$ in $ac \notin E(G)$, saj bi drugače vzeli to pot za najkrajšo. Ker $b \notin S$, obstaja taka točka $d \in V(G)$, da velja $bd \notin E(G)$. Zaradi maksimalnosti grafa G obstajata popolni prirejanji M_1 množice $V(G)$ grafa $G + ac$ in M_2 množice $V(G)$ grafa $G + bd$.

Naj bo $P = d \dots v$ najdaljša pot v grafu G, ki se začne v točki d s povezavo iz M_1, nato pa si povezave sledijo izmenično, ena iz M_1, druga iz M_2. Če je zadnja povezava poti P iz M_1, potem velja $v = b$. V nasprotnem primeru bi lahko s P nadaljevali. Označimo $C := P + bd$. Če pa je zadnja povezava poti P iz M_2, potem zaradi maksimalnosti P velja, da povezava iz M_1, ki ima krajišče v točki v, mora biti povezava ac. Torej velja $v \in \{a, c\}$. V tem primeru definiramo cikel $C := dPvbd$.

V obeh primerih je C cikel sode dolžine z vsako drugo povezavo v M_2, edina njegova povezava, ki ni v $E(G)$, pa je povezava bd. Če sedaj v M_2 zamenjamo vse povezave,



Slika 2: Sestavljanje protislovja, če S ne zadošča $(*)$.

ki so na ciklu C s povezavami iz $C - M_2$, dobimo popolno prirejanje množice $V(G)$, vsebovano v $E(G)$, kar pa je protislovje. $\square$

Posledica 3.2. *Vsak kubičen graf brez mostov ima popolno prirejanje.*

Dokaz: Pokazali bomo, da vsak kubičen graf brez mostov zadošča Tutteovemu pogoju.

Naj bo $S \subseteq V(G)$ dana množica. Oglejmo si liho komponento C grafa $G - S$. Ker je G kubičen graf, se stopnje točk v komponenti C seštejejo v liho število. Vendar pa le sod del te vsote izhaja iz povezav komponente C. Torej ima graf G liho mnogo povezav od S do C in zato vsaj 3 take povezave, saj G nima mostov. Število povezav med S in $G - S$ je tako vsaj $3q(G - S)$. Hkrati pa je število teh povezav največ $3|S|$, ker je G kubičen graf. Tako velja $q(G - S) \leq |S|$, kot smo želeli. $\square$

Posledica 3.3. *Naj bo G $(r-1)$-povezan po povezavah, r-regularen graf in $r \geq 3$ liho naravno število. Potem ima G 1-faktor.*

Dokaz: Po Tutteovem izreku ima G 1-faktor natanko takrat, ko za $\forall S$ velja $q(G-S) \leq |S|$. Izberimo poljubno množico $S \subseteq E(G)$. Naj bodo $C_1, C_2, \ldots, C_k$ lihe komponente $G - S$. Manj kot $r - 1$ povezav ne more iti iz vsakega C_i, ker bi tako dobili prerez, ki ne ustreza $(r-1)$-povezanosti po povezavah. Ker je r lih je zato $r - 1$ sod in tako mora iti iz vsakega C_i vsaj r povezav ven. Če to ne bi bilo res, bi dobili popolno prirejanje na lihem grafu, kar ni možno. Torej imamo $q(G - S) \cdot r \leq r \cdot |S|$ oziroma $q(G - S) \leq |S|$. To pa je ravno Tutteov pogoj in tako imamo 1-faktor. $\square$

Naslednji izrek nam da nekoliko močnejši rezultat, iz njega pa hitro sledi Tutteov izrek (izrek 3.1).

Izrek 3.4. *Vsak graf G vsebuje množico točk S, ki ima naslednji lastnosti.*

(*i*) *Za množico $S \subseteq V(G)$ velja, da graf H_S, ki ga dobimo iz G s skrčitvijo vsake komponente $C \in C_{G-S}$ v točko in odstranitvijo vseh povezav znotraj S, vsebuje popolno prirejanje množice S, to pomeni, da je S matchable.*

(*ii*) *Za vsako komponento C grafa $G - S$ velja, da $C \neq \emptyset$ in $C - \{v\}$ ima popolno prirejanje za vsako točko $v \in C$, temu rečemo, vsaka komponenta C je faktor-kritična.*

Graf G s tako množico S ima popolno prirejanje natanko tedaj, ko velja $|S| = |C_{G-S}|$.

Poglejmo sedaj, kako iz tega izreka sledi Tutteov izrek.

Iz *(i)* in *(ii)* sledi $|S| \leq |C_{G-C}| = q(G - S)$. Vse komponente grafa $G - S$ so lihe moči (drugače ne bi veljala predpostavka *(ii)*), neenakost $|S| \leq |C_{G-C}|$ pa velja po *(i)*. Zaradi Tutteovega pogoja velja tudi $q(G-S) \leq |S|$. Zato velja enakost $|S| = |C_{G-S}|$ in po zadnji trditvi izreka 3.4 sledi, da graf G vsebuje popolno prirejanje.

Literatura

[1] R. Diestel: Graph Theory, Springer-Verlang, New York, 2000