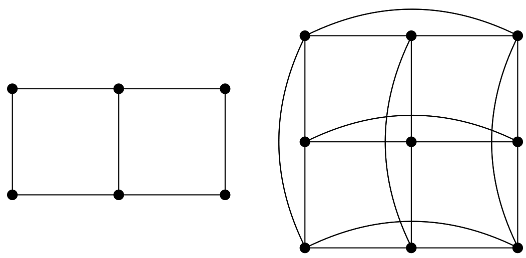
Produkti grafov

Žiga Povalej
17.5.2007

Produkt dveh grafov je graf, katerega množica točk je kartezični produkt množice točk faktorjev. Pravilo, ki določa povezave v produktnem grafu, pa je mogoče izbrati na več načinov. Obstaja dvajset različnih asociativnih produktov. Če pa upoštevamo nekatere enostavne zveze med njimi, se izkaže, da jih je smiselno študirati le pet: kartezični produkt, tenzorski produkt, krepki produkt, leksikografski produkt in ekvivalenčni produkt. Mi bomo obravnavali predvsem kartezični produkt, ogledali pa si bomo tudi tenzorski, krepki in leksikografski produkt.

1 Kartezični produkt grafov

Verjetno najenostavnejši produkt grafov G in H je *kartezični produkt* $G\Box H$. Množica točk $V(G\Box H)$ je definirana kot kartezični produkt točk grafov $V(G)\times V(H)$, množica povezav $E(G\Box H)$ pa je množica vseh parov točk $(u,v)(x,y)$, za katere velja bodisi $u=x$ in $(v,y)\in E(H)$ bodisi $(u,x)\in E(G)$ in $v=y$.



Slika 1: Kartezična produkta $P_2\Box P_3$ in $C_3\Box C_3$.

Preslikavi

$$p_1 : V(G\Box H) \to V(G)$$
$$p_1 : (u,v) \mapsto u$$

in

$$p_2 : V(G\Box H) \to V(H)$$
$$p_2 : (u,v) \mapsto v$$

imenujemo *projekciji.* Za podmnožico $S\subset V(G\Box H)$ definiramo $p_i(S) := \{p_i(v); v\in S\}$ za $i\in\{1,2\}$. Projekcije nam bodo prišle prav v dokazu naslednje trditve.

Pred tem pa se spomnimo še, da je graf G *povezan*, kadar med poljubnim parom točk iz $V(G)$ obstaja sprehod.

Trditev 1.1. *Kartezični produkt dveh grafov je povezan natanko tedaj, ko sta povezana oba faktorja.*

Dokaz: Naj bo $G\Box H$ kartezični produkt dveh povezanih grafov, (u,v) in (x,y) pa dve poljubni točki iz $G\Box H$. Ker sta G in H povezana grafa, obstajata poti $uu_2\dots u_{k-1}x$ od u do x v grafu G in $vv_2\dots v_{l-1}y$ od v do y v grafu H. Potem je

$$(u,v)(u_2,v)\dots(u_{k-1},v)(x,v)(x,v_2)\dots(x,v_{l-1})(x,y)$$

pot od (u,v) do (x,y) v $G\Box H$.

Sedaj pa predpostavimo, da je povezan graf $G\Box H$. Izberimo poljubne točke $u,x\in G$ in $v,y\in H$. Potem obstaja pot Q od (u,v) do (x,y) v grafu $G\Box H$. Projekcija $p_1(Q)$ je torej sprehod od u do x v G, ki pa seveda vsebuje tudi pot od u do x v grafu G. Podobno $p_2(Q)$ vsebuje pot od v do y v grafu H. ∎

Definirajmo $d_G(a,b)$ kot dolžino najkrajše poti med točkama a in b v grafu G.

Posledica 1.2. *Naj bosta (u,v) in (x,y) poljubni točki kartezičnega produkta $G\Box H$. Potem velja*

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) = d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Naj bo Q najkrajša pot od (u,v) do (x,y) v $G\Box H$. Potem je $p_1(Q)$ najkrajša pot od u do x v G in je $p_2(Q)$ najkrajša pot od v do y v H.

Dokaz: Po trditvi 1.1 obstaja pot od (u,v) do (x,y) natanko takrat, ko obstajata pot $P_{u,x}$ od u do x v grafu G in pot $P_{v,y}$ od v do y v grafu H. Zaradi konstrukcije teh dveh poti lahko sklepamo, da velja

$$d_{G\Box H}((u,v),(x,y)) \leq d_G(u,x) + d_H(v,y).$$

Naj bo sedaj Q najkrajša pot od (u,v) do (x,y) v grafu $G\Box H$. Vsaka povezava poti Q se z eno od projekcij p_1 in p_2 preslika v točko in z drugo projecijo v povezavo. Sledi

$$d_G(u,x) + d_H(v,y) \leq |E(p_1(Q))| + |E(p_2(Q))| = |E(Q)| = d_{G\Box H}((u,v),(x,y)).$$

∎

Oglejmo si nekatere lastnosti kartezičnega produkta. Očitno je, da je graf K_1 enota v tej operaciji, saj za vsak graf G velja $K_1\Box G = G = G\Box K_1$. Nadalje je preslikava $\varphi : V(G\Box H) \to V(H\Box G)$ definirana s predpisom $\varphi(u,v) = (v,u)$ izomorfizem med $G\Box H$ in $H\Box G$. Torej je kartezični produkt komutativen.

Trditev 1.3. *Kartezični produkt je asociativen.*

Dokaz: Pokazati moramo, da je preslikava

$$\psi : V((G_1\Box G_2)\Box G_3) \to V(G_1\Box(G_2\Box G_3))$$
$$\psi : ((u_1,u_2),u_3) \mapsto (u_1,(u_2,u_3))$$

izomorfizem grafa $(G_1\Box G_2)\Box G_3$ na $G_1\Box(G_2\Box G_3)$. Takoj vidimo, da je ψ bijektivna preslikava. Dokazati je potrebno še, da sta točki u in v povezani v $(G_1\Box G_2)\Box G_3$ natanko tedaj, ko sta točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$ povezani v $G_1\Box(G_2\Box G_3)$.

Če sta točki u in v povezani, morata biti različni. Zato morata vsaj en par (u_i,v_i), kjer je $i\in\{1,2,3\}$, sestavljati dva različna elementa ($u_i\neq v_i$). Če je to res za natanko en par (u_k,v_k), potem je uv povezava natanko takrat, ko je u_kv_k povezava v G_k. To pa pomeni, da sta takrat povezani tudi točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$.

Če pa sta dva ali so trije pari (u_i,v_i), kjer je $i\in\{1,2,3\}$, sestavljeni iz različnih elementov, potem sta nepovezani točki u in v pa tudi točki $\psi(u)$ in $\psi(v)$. ∎

Privzemimo sedaj, da so povezane komponente grafa G maksimalni povezani podgrafi, ki so tudi enolično določeni. Potem rečemo, da je G *disjunktna unija* svojih komponent. Bolj natančno, disjunktna unija $G_1\cup G_2$ dveh po točkah disjunktnih grafov G_1 in G_2 je definirana z

$$V(G_1\cup G_2) = V(G_1)\cup V(G_2) \text{ in } E(G_1\cup G_2) = E(G_1)\cup E(G_2).$$

Sedaj lahko hitro vidimo, da je kartezični produkt levo in desno distributiven z disjunktno unijo:

$$G_1 \square (G_2 \cup G_3) = G_1 \square G_2 \cup G_1 \square G_3 \text{ in } (G_1 \cup G_2) \square G_3 = G_1 \square G_3 \cup G_2 \square G_3.$$

1.1 Kartezični produkt več faktorjev

Ker je kartezični produkt grafov po trditvi 1.3 asociativen, lahko pišemo $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_k$. Graf G je *kartezični produkt* grafov $G_1, G_2, \ldots, G_k$, zanj pa velja:

(i) $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) \times \cdots \times V(G_k)$.

(ii) $E(G)$ je množica parov (x, y) različnih točk grafa G, za katere obstaja tak indeks $j \in I = \{1, 2, \ldots, k\}$, da je $(x_j, y_j) \in G_j$ in velja $x_i = y_i$ za vse $i \in I \setminus \{j\}$.

Za $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ definiramo $p_i(v) = v_i$. Preslikava p_i je *projekcija* na i-ti faktor grafa G, v_i pa je i-ta *koordinata* točke v.

Očitno je, da je kartezični produkt $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_k$ povezan natanko tedaj, ko je povezan vsak izmed njegovih faktorjev. Tako lahko posledico 1.2 razširimo na več faktorjev.

Lema 1.4. *Naj bo $G = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_k$ in $u, v \in V(G)$. Potem velja*

$$d_G(u, v) = \sum_{i=1}^{k} d_{G_i}(p_i(u), p_i(v)).$$

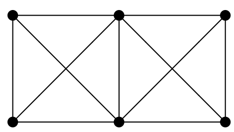
Opomba: Lema je razširitev posledice 1.2 za kartezični produkt več faktorjev zato dokaza ne bomo posebej navajali.

2 Krepki produkt grafov

Krepki produkt $G \boxtimes H$ grafov G in H je definiran kot kartezični produkt množic točk obeh faktorjev, dve različni točki (u, v) in (x, y) iz $G \boxtimes H$ pa sta povezani, če velja

- $u = x$ in $vy \in E(H)$; ali
- $ux \in E(G)$ in $v = y$; ali
- $ux \in E(G)$ in $vy \in E(H)$.

Osnovni primer krepkega produkta je $K_4 = K_2 \boxtimes K_2$. Tako vidimo, da ga res najbolje opiše ravno znak $\boxtimes$. Bolj splošno pa velja tudi $K_{mn} = K_m \boxtimes K_n$.



Slika 2: Krepki produkt $P_2 \boxtimes P_3$.

Krepki produkt ima enoto K_1 in je komutativen, asociativen ter distributiven z operacijo disjunktne unije. Vse to bi lahko dokazali analogno kot pri kartezičnem produktu.

Podobno kot pri karteziČnem produktu bi lahko definirali krepki produkt več faktorjev $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$. Seveda velja tudi, da je graf G povezan natanko tedaj, ko je povezan vsak njegov faktor.

Lema 2.1. *Naj bo $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$ krepki produkt povezanih grafov. Potem velja*

$$d_G(u,v) = \max_{1 \le i \le k} d_{G_i}(u_i, v_i).$$

Dokaz: Zaradi asociativnosti krepkega produkta je dovolj dokazati za $k = 2$.

Naj bosta $u = (u_1, u_2)$ in $v = (v_1, v_2)$ poljubni točki grafa $G_1 \boxtimes G_2$. Definirajmo še $a_1 a_2 \ldots a_k$ kot najkrajšo pot od u_1 do v_1 v grafu G_1 in $b_1 b_2 \ldots b_l$ kot najkrajšo pot od u_2 do v_2 v grafu G_2. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da velja $l \le k$, kjer je $k = \max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\}$. Potem je

$$(a_1, b_1) \ldots (a_l, b_l)(a_{l+1}, b_l) \ldots (a_{k-1}, b_l)(a_k, b_l)$$

pot od (u_1, u_2) do (v_1, v_2) v $G_1 \boxtimes G_2$. Sledi

$$d_{G_1 \boxtimes G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2) \le \max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\}.$$

Vzemimo sedaj P za najkrajšo pot od (u_1, u_2) do (v_1, v_2) v grafu $G_1 \boxtimes G_2$. Potem se vsaka povezava iz poti P preslika v povezavo iz G_1 ali v povezavo iz G_2 z eno od projekcij p_1 ali p_2. Zato $p_1(P)$ vsebuje pot od u_1 do v_1 v grafu G_1 in velja $d_{G_1}(u_1, v_1) \le |E(p_1(P))| \le |P|$. Na enak način dobimo $d_{G_2}(u_2, v_2) \le |P|$. Sledi

$$\max\{d_{G_1}(u_1, v_1), d_{G_2}(u_2, v_2)\} \le |P| = d_{G_1 \boxtimes G_2}((u_1, u_2), (v_1, v_2)).$$

■

Povezave grafa $G = G_1 \boxtimes G_2 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$, ki se razlikujejo v natančno eni koordinati, se imenujejo *kartezične povezave*, ostale pa *nekartezične*. Kartezične povezave se ujemajo s povezavami iz $G_1 \square \cdots \square G_k \subseteq G_1 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$.

3 Leksikografski produkt grafov

Leksikografski produkt $G[H]$ grafov G in H je definiran na množici točk $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$, dve različni točki (u,v) in (x,y) pa sta povezani, kadar velja

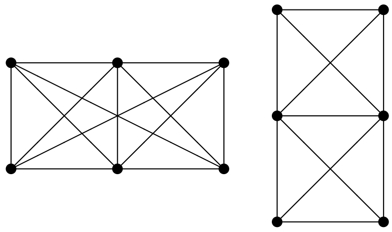
- $ux \in E(G)$; ali
- $u = x$ in $vy \in E(H)$.

Leksikografski produkt bi lahko definirali tudi drugače. Vzamemo graf G in vsako njegovo točko razširimo v graf H. Sedaj dve povezani kopiji grafa H povežemo še z vsemi možnimi vmesnimi povezavami.

Opazimo, da velja $G[K_n] = G \boxtimes K_n$ in da je produkt $G[H]$ netrivialnih grafov povezan natanko tedaj, ko je povezan G. Zato velja $G[H] \ncong H[G]$, kadar eden od faktorjev ni povezan, drugi pa je povezan in netrivialen. Leksikografski produkt ni nujno komutiven, tudi če sta oba faktorja povezana. Za primer si oglejmo $P_2[P_3]$ in $P_3[P_2]$ na sliki 3.

Leksikografski produkt je asociativen in ima enoto K_1. V splošnem velja le desno-distributivnostni zakon z disjunktno unijo

$$(A \cup B)[C] = A[C] \cup B[C].$$



Slika 3: Leksikografska produkta $P_2[P_3]$ in $P_3[P_2]$.

Vzemimo komplement grafov in dobimo
$$\overline{(G[H])} = \overline{G}[\overline{H}].$$
Ker velja $\overline{\overline{G}} = G$, sledi
$$G[H] = \overline{(\overline{G}[\overline{H}])}.$$
Spoj $G + H$ grafov G in H je definiran kot
$$G + H = \overline{(\overline{G} \cup \overline{H})}.$$
Tako iz desno-distributivnostnega zakona za disjunktno unijo dobimo desno-distributivnostni zakon za spoj
$$(A + B)[C] = A[C] + B[C].$$
V posebnem obstaja tudi levo-distributivnostni zakon
$$K_n[A + B] = K_n[A] + K_n[B].$$
Za popolnoma nepovezane grafe $D_n = \mathcal{C}K_n$ dobimo še en levo-distributivnostni zakon
$$D_n[A \cup B] = D_n[A] \cup D_n[B].$$

Čeprav v splošnem leksikografski produkt ni komutativen, pa velja $G[H] \cong H[G]$, če sta G in H oba polna grafa ali pa oba popolnoma nepovezana.

Trditev 3.1. *Naj bo G graf in $n \geq 2$. Potem velja*

(i) $G[K_n] \cong K_n[G]$ natanko tedaj, ko je G poln graf in

(ii) $G[D_n] \cong D_n[G]$ natanko tedaj, ko je G popolnoma nepovezan.

Dokaz: Najprej dokažimo točko (ii). Vemo že, da velja $G[D_n] \cong D_n[G]$, če graf G nima povezav. Predpostavimo $G[D_n] \cong D_n[G]$. Očitno velja
$$|E(G)| \cdot n^2 = |E(G[D_n])| = |E(D_n[G])| = n \cdot |E(G)|.$$
Sledi torej $|E(G)| \cdot (n^2 - n) = 0$. Za $n \geq 2$ je to možno le, kadar je $|E(G)| = 0$.

Za dokaz (i) se spomnimo na enakost $\overline{G[H]} = \overline{G}[\overline{H}]$. Ker grafa G in K_n komutirata natanko takrat, ko komutirata grafa $\overline{G}$ in $D_n = \overline{K_n}$. Za $n \geq 2$ to velja natanko tedaj, kadar $\overline{G}$ nima povezav, oziroma natanko tedaj, kadar je G poln graf. ∎

Zaradi asociativnosti dva grafa komutirata, če sta oba (leksikografski) potenci istega grafa. Zato ta dva grafa G in H komutirata v naslednjih primerih, ki pa so tudi edini:

1. Grafa G in H sta polna grafa.

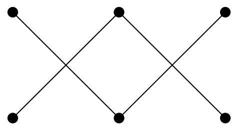
2. Grafa G in H sta popolnoma nepovezana grafa.

3. Obstaja graf K in taki naravni števili n in m, da velja $G = K^n$ in $H = K^m$.

4 Tenzorski produkt

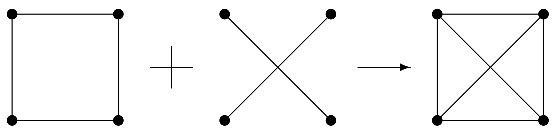
Tenzorski produkt $G \times H$ grafov G in H definira množica točk $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, dve različni točki (u, v) in (x, y) iz $G \times H$ pa sta povezani, če velja $ux \in E(G)$ in $vy \in E(H)$.

Imenujemo ga tudi kategorični, direktni, kardinalni ali Kroneckerjev produkt.



Slika 4: Tenzorski produkt $P_2 \times P_3$.

Opazimo, da je unija povezav kartezičnega in tenzorskega produkta ravno množica povezav krepkega produkta. Poglejmo si primer na sliki 5.



Slika 5: Krepki produkt je sestavljen iz kartezičnega in tenzorskega produkta.

Hitro se da ugotoviti, da ima tenzorski produkt K_1 kot enoto, je komutativen, asociativen ter distributiven z disjunktno unijo.

Navedli bi še dve lastnosti tenzorske produkta, vendar ju ne bomo dokazovali.

Trditev 4.1. *Naj bosta G in H dvodelna grafa. Potem je tudi njun tenzorski produkt $G \times H$ dvodelen graf.*

Trditev 4.2. *Tenzorski produkt $G \times H$ grafov G in H je povezan natanko tedaj, ko sta povezana grafa G in H in vsaj eden od njiju ni dvodelen.*

Protiprimer trditvi 4.2 bi bil graf $P_2 \times P_3$, saj sta grafa P_2 in P_3 dvodelna in povezana, graf $P_2 \times P_3$ pa ni povezan.

Literatura

[1] W. Imrich, S. Klavžar: (2000) *Product Graphs, structure and recognition*, Wiley, New York.

[2] J. Žerovnik: (1995) *O kartezičnem produktu grafov*, Obzornik mat. fiz. **42**, 8-16.

[3] Wikipedia: `http://sl.wikipedia.org`